目　录

第一部分

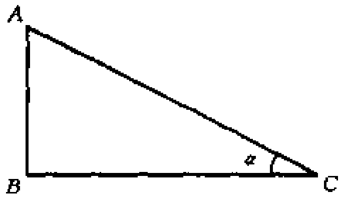
力　学

第一章 运 动 学

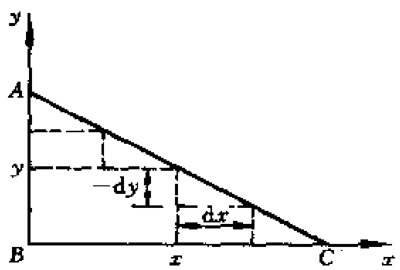
【题 1】 如力图 1-1-1，直角三角形 ABC 在铅垂平面内，斜边 AC 与水平边 BC 的夹角为 α，一质点从 A 点由静止出发，在重力作用下到达 C 点．当所循路径为从 A 经 AB 和 BC 时，从 A 到 B 需时 t_1，从 B 到 C 需时 t_2；当所循路径为 AC 时需时 t_3，假定质点拐折时不花费时间，且只改变速度方向而速度大小不变．

1．为使循上述两条路径由 A 到 C 所需时间相等，即使 $t_1+t_2=t_3$，试问角 α 应为多大？

2．设角 α 取上述值，设质点只能在三角形范围内沿竖直路径和水平路径从 A 点到达 C 点，显然有无穷多种选择．试问什么路径花费的时间最多？什么路径花费的时间最少？所需的最长时间与最短时间之比是多少？



力图 1-1-1



力图 1-1-2

【分析】 质点在 AB 段和 AC 段均作匀加速直线运动，前者的加速度为 g，后者的加速度为 $g\sin\alpha$，在 BC 段作匀速直线运动．运用运动学公式可找到各段所需时间之间的关系，再根据 $t_1+t_2=t_3$ 的要求即可确定相应的特定角度 α．

如力图 1-1-2，符合题意的路径除了 AC 路径外，还有由许多水平段以及把各水平段连结起来的各竖直段所构成的各种路径．符合题意的各种路径中，各竖直段长度之和等于直角边 AB，各水平段长度之和等于直角边 BC，由于质点拐折时不花费时间且速度大小也不改变，故走完各竖直段所需的总时间 $t_{竖}$ 就等于直接从 A 经 AB 到达 B 所需的时间 t_1．但走完各水平段所需的总时间则与质点在各水平段的速度大小有关，即与各水平段的高度有关．如果选择的路径，使各水平段均位于三角形的底部（即为 BC 边），则质点在该水平段具有的速度最大，所需时间应最短．反之，如果选择的路径，使各水平段位于尽可能高的位置（当然，以不超出边线 AC 为条件），则质点在各该水平段具有的速度最小，所需时间应最长．所以，需时最长的路径为力图 1-1-2 中虚线所示的锯齿状路径，各锯齿的水平段 dx 和竖直段 dy 均为无穷小量，各锯齿紧靠着 AC 而又都不超出 AC 边．确定了需时最短和最长的路径，求出相应的最短和最长时间，即可得出两者之比．

【解】 1．设 $AC=L$，由运动学公式，有

$$L\sin\alpha=\frac{1}{2}gt_1^2 \tag{1}$$

$$L\cos\alpha=gt_1t_2 \tag{2}$$

$$L=\frac{1}{2}(g\sin\alpha)t_3^2 \tag{3}$$

由(1)、(2)两式，得

$$t_1=\sqrt{\frac{2L\sin\alpha}{g}},\quad t_2=\cos\alpha\sqrt{\frac{L}{2g\sin\alpha}} \tag{4}$$

故

$$t_1+t_2=\sqrt{\frac{L}{g}}\left(\sqrt{2\sin\alpha}+\cos\alpha\sqrt{\frac{1}{2\sin\alpha}}\right)$$

把(3)式代入上式，得

$$t_1+t_2=t_3(\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha)$$

由题意，要求

$$t_1+t_2=t_3 \tag{5}$$

故应有

$$\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha=1$$

即

$$2\sin\alpha+\sqrt{1-\sin^2\alpha}=2$$

解出

$$\sin\alpha=\frac{3}{5},\quad 或\quad \cot\alpha=\frac{4}{3}$$

$$\alpha=48.6^\circ$$

2．根据上述分析，需时最短的路径为由 A 点经 AB 和 BC 到达 C 点，或由 A 点经 AC 到达 C 点．需时最长的路径为力图 1－1－2 中虚线所示的锯齿状路径，各锯齿的水平段 dx 和竖直段 dy 均为无穷小量，且紧靠着 AC 而又都不超过 AC 边．

对于需时最短的路径，所需时间为

$$t_{min}=t_1+t_2$$

由(4)式及题 1 的答案

$$\frac{t_2}{t_1}=\frac{1}{2}\cot\alpha=\frac{2}{3}$$

故

$$t_{min}=t_1+\frac{2}{3}t_1=\frac{5}{3}t_1$$

对于需时最长的路径，所有竖直段所需总时间 $t_{总}=t_1$，所有水平段所需总时间用 τ_2 表示，则需时为

$$t_{max}=t_1+\tau_2$$

为了计算 τ_2，考虑高度为 y 的任一水平段 dx，质点以速度 v 经过 dx 所需时间为

$$d\tau_2=\frac{dx}{v}=\frac{dx}{\sqrt{2g(L\sin\alpha-y)}}$$

因

$$\cot\alpha=-\frac{dx}{dy}$$

故

$$d\tau_2=-\frac{\cot\alpha}{\sqrt{2g}}\cdot\frac{dy}{\sqrt{L\sin\alpha-y}}$$

所有水平段所需总时间为

$$\tau_2=\int d\tau_2=-\frac{\cot\alpha}{\sqrt{2g}}\int_{L\sin\alpha}^{0}\frac{dy}{\sqrt{L\sin\alpha-y}}$$

$$=\cot\alpha\sqrt{\frac{2L\sin\alpha}{g}}=t_1\cot\alpha=\frac{4}{3}t_1$$

所以

$$t_{\max}=t_1+\tau_2=(1+\frac{4}{3})t_1=\frac{7}{3}t_1$$

$t_{\max}$与 $t_{\min}$之比为

$$\frac{t_{\max}}{t_{\min}}=\frac{7}{5}$$

【题 2】 一质点以初速度 v_0 作直线运动，所受阻力与其速度成正比．试求当质点速度减为$\frac{v_0}{n}$ $(n>1)$时，质点经过的距离与质点所能行经的总距离之比．

【分析】 由题设，质点的加速度 $a=\frac{dv}{dt}=-kv$，积分可得出 $v(t)$，再积分可得出 $x(t)$，积分常数由初条件 $t=0$ 时 $v=v_0$，$x=0$ 确定．上述 $v(t)$和 $x(t)$是 t 时刻质点的速度和位置，$x(t)$亦即经 t 时间后质点经过的距离．总距离 x_m 是 $t\to\infty$时的 x 值，速度减为 $v_1=\frac{v_0}{n}$时所经距离 $x(t_1)$则可由速度从 v_0 减为 v_1 所需的时间 t_1 求出．

【解】 质点沿直线运动，取该直线为 x 坐标，取原点 $x=0$ 为质点在 $t=0$ 时刻以初速度 v_0 开始运动的位置．

由题设，在任意时刻 t，质点的加速度为

$$a=\frac{dv}{dt}=-kv$$

式中 k 是常数．分离变量，得

$$\frac{dv}{v}=-k\,dt$$

积分，得

$$\ln v=-kt+C$$

式中 C 为积分常量．初条件为

$$t=0\text{ 时},\quad v=v_0$$

故

$$C=\ln v_0$$

代入上式，得

$$v=v_0e^{-kt} \tag{1}$$

可见质点的速度 v 随时间 t 按指数衰减，如图所示．

由

$$v=\frac{dx}{dt}=v_0e^{-kt}$$

积分，得

$$x=v_0\int e^{-kt}dt=-\frac{v_0}{k}e^{-kt}+C'$$

初条件为

$$t=0\text{ 时},\quad x=0$$

故积分常量为

$$C'=\frac{v_0}{k}$$

代入上式，得

$$x=\frac{v_0}{k}(1-e^{-kt})=x_m(1-e^{-kt}) \tag{2}$$

这是质点行经的距离 x 随时间 t 的变化关系，式中 $x_m=\frac{v_0}{k}$ 是 $t\to\infty$时的 x 值，即为质点所能行经的总距离，如图所示．

设经 t_1 时间后，质点的速度减为 $v_1=\frac{v_0}{n}$，由(1)式，得

$$\frac{v_1}{v_0}=\frac{1}{n}=e^{-kt_1}$$

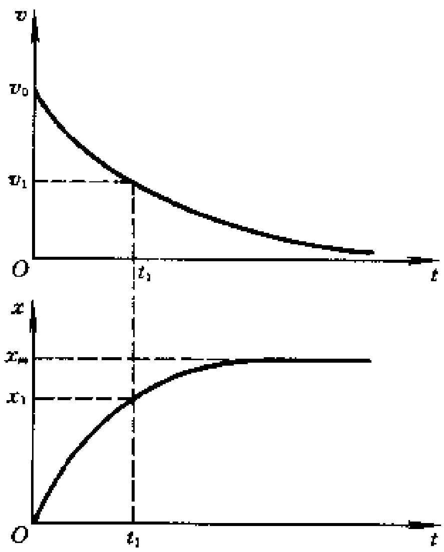
取对数，得

$$t_1=\frac{\ln n}{k} \tag{3}$$

由(2)、(3)式，当质点速度减为 $v_1=\frac{v_0}{n}$时所经距离 x_1 与质点所能行经的总距离 x_m 之比为

$$\frac{x_1}{x_m}=1-e^{-kt_1}=1-e^{-\ln n}=1-\frac{1}{n}$$

因此，在任一时刻 t，质点的位置 x 与速度 v 遵循以下规律



力图 1-2-1

$$\frac{v}{v_0}+\frac{x}{x_m}=1$$

【题3】 一质点以初速度 v_0 作直线运动，所受阻力与其速度的三次方成正比．试求质点速度和位置随时间的变化规律以及速度随位置的变化规律．

【分析】 与上题相仿，从 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv^3$ 出发，通过积分可得 $v(t)$ 和 $x(t)$，消去 t 即可得出 $v(x)$，$v(x)$ 也可直接通过积分求得．

【解】 取质点运动所循的直线为 x 轴，取坐标原点 $x=0$ 为质点在 $t=0$ 时刻以初速度 v_0 开始运动的位置．由题设，质点的加速度为

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv^3$$

或

$$\frac{\mathrm{d}v}{v^3}=-k\mathrm{d}t$$

积分，得

$$\frac{1}{2v^2}=kt+C,\quad 或\quad \frac{1}{v^2}=2kt+C'$$

初条件为

$$t=0\ 时,\quad v=v_0$$

故积分常量

$$C'=\frac{1}{v_0^2}$$

代入上式，得

$$v(t)=v_0\left(\frac{1}{1+2kv_0^2t}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

因 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，故

$$\mathrm{d}x=v_0\left(\frac{1}{1+2kv_0^2t}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$$

积分，得

$$x=\frac{1}{kv_0}\sqrt{1+2kv_0^2t}+C$$

初条件为

$$t=0\ 时,\quad x=0$$

故积分常量

$$C=-\frac{1}{kv_0}$$

代入上式，得

$$x(t)=\frac{1}{kv_0}\left(\sqrt{1+2kv_0^2t}-1\right) \tag{2}$$

由(1)、(2)式，消去 t，得

$$v(x)=\frac{v_0}{1+kv_0x} \tag{3}$$

又，因

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

及

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv^3$$

故

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-kv^3,\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}v}{v^2}=-k\mathrm{d}x$$

积分，得

$$-\frac{1}{v}=-kx+C$$

初条件为

$$t=0\text{时},\quad v=v_0,\quad x=0$$

故积分常量

$$C=-\frac{1}{v_0}$$

代入上式，得

$$\frac{1}{v}=kx+\frac{1}{v_0}=\frac{1+kv_0x}{v_0}$$

或

$$v(x)=\frac{v_0}{1+kv_0x}$$

此即上述(3)式．

【题 4】 如图，在倾角为 θ 的山坡平面上有一门大炮，大炮相对于山坡的仰角为 α，发射炮弹的初速为 v_0．试求炮弹着点的位置，并求能达到最大射程的仰角，忽略空气阻力．

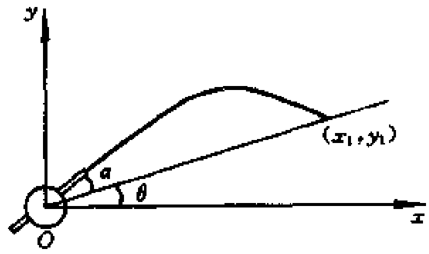
【分析】 炮弹射出后，只受重力作用，水平方向的运动是匀速直线运动，竖直方向的运动是匀加速直线运动，由此不难求出炮弹的轨迹方程 $y(x)$，它和山坡的轨迹方程 $y=x\tan\theta$（直线）联立求解得出的 (x_1, y_1) 就是炮弹着点的位置．显然，x_1（或 y_1）将随仰角 α 变化，最大射程相应的仰角可由极值条件 $\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\alpha}=0\left(或\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}\alpha}=0\right)$ 求出．也可由 x_1（或 y_1）的表达式给出射程的表达式，由后者得出最大射程相应的仰角．

【解】 如图，取直角坐标 Oxy，原点 O 在大炮处，$t=0$ 时刻发射炮弹，于是炮弹的初始位置、初速度和加速度分别为

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0\cos(\theta+\alpha) \\ v_{0y} = v_0\sin(\theta+\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$



力图 1-4-1

炮弹的运动方程为

$$\begin{cases} x = tv_0\cos(\theta+\alpha) \\ y = tv_0\sin(\theta+\alpha) - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

消去时间 t，得出炮弹的轨迹方程为

$$y = x\tan(\theta+\alpha) - \frac{g}{2v_0^2\cos^2(\theta+\alpha)}x^2 \tag{1}$$

山坡的轨迹方程为

$$y = x\tan\theta \tag{2}$$

(1)、(2)式联立求解，得出炮弹着点的位置为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{v_0^2}{g}[\sin 2(\theta+\alpha) - 2\tan\theta\cos^2(\theta+\alpha)] \\ y_1 = \frac{v_0^2}{g}[\sin 2(\theta+\alpha) - 2\tan\theta\cos^2(\theta+\alpha)]\tan\theta \end{cases} \tag{3}$$

最大射程相应的仰角应满足的条件是

$$\frac{dx_1}{d\alpha} = 0$$

即

$$\frac{dx_1}{d\alpha} = \frac{v_0^2}{g}[2\cos 2(\theta+\alpha) + 4\tan\theta\cos(\theta+\alpha)\sin(\theta+\alpha)]$$
$$= \frac{2v_0^2}{g}[\cos 2(\theta+\alpha) + \tan\theta\sin 2(\theta+\alpha)] = 0$$

即

$$\tan\theta = -\cot 2(\theta+\alpha)$$

即

$$\cot 2(\theta+\alpha) = -\tan\theta = \cot\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

即

$$2(\theta+\alpha) = \theta + \frac{\pi}{2}$$

故达到最大射程的仰角为

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$$

又，由(3)式得出射程 R 的公式为

$$R=\frac{x_1}{\cos\theta}=\frac{v_0^2}{g\cos\theta}[\sin 2(\theta+\alpha)-2\tan\theta\cos^2(\theta+\alpha)]$$

$$=\frac{2v_0^2}{g\cos\theta}[\tan(\theta+\alpha)-\tan\theta]\cos^2(\theta+\alpha)$$

$$=\frac{2v_0^2}{g\cos\theta}\frac{\cos(\theta+\alpha)\sin\alpha}{\cos\theta}=\frac{v_0^2}{g\cos^2\theta}[\sin(\theta+2\alpha)-\sin\theta]$$

当

$$\theta+2\alpha=\frac{\pi}{2},\text{即 }\alpha=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$$

时，达到最大射程，为

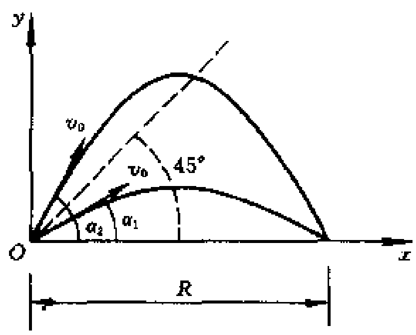
$$R_{\max}=\frac{v_0^2}{g\cos^2\theta}(1-\sin\theta)$$

【题5】 两质点在地面上同一地点以相同速率 v_0 从不同抛射角抛出．试证明，当两质点的射程 R 相同时，它们在空中飞行时间的乘积为$\frac{2R}{g}$，忽略空气阻力．

【分析】 由质点斜抛运动的轨迹方程 $y(x)$ 及落地点 P 的纵坐标 $y=0$，联立求解可得出射程公式，进而得出飞行时间公式．显然，射程 R 和飞行时间 t 都会随初速率 v_0 以及抛射角 α 变化．现在，两质点的抛射角 α_1、α_2 不同，而射程相同均为 R，这要求 α_1 和 α_2 满足一定的关系．把这一关系代入飞行时间公式，当可证明 $t_1t_2=\frac{2R}{g}$.

【解】 取坐标如图，当质点从 O 点以初速率 v_0 和抛射角 α 抛出时，有

$$\begin{cases}x=v_0\cos\alpha\cdot t\\ y=v_0\sin\alpha\cdot t-\frac{1}{2}gt^2\end{cases}$$



力图 1-5-1

消去时间 t，得出斜抛运动的轨迹方程为

$$y=x\tan\alpha-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2$$

落地点 P 的纵坐标为零，即

$$y=0$$

由上两式联立解出的 x 即为射程 R，

$$R=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$$

相应的飞行时间为

$$t=\frac{R}{v_0\cos\alpha}=\frac{2v_0\sin\alpha}{g}$$

现两质点从同一地点 O 以相同初速率 v_0 抛出，抛射角不同，分别为 α_1 和 α_2，但射程相同，故有

$$\sin 2\alpha_1=\sin 2\alpha_2$$

上式的一个解是 $\alpha_1=\alpha_2$，不合题意，弃去．另一解为

$$2\alpha_1=\pi-2\alpha_2$$

即

$$\alpha_1+\alpha_2=\frac{\pi}{2}$$

若 $\alpha_1<\frac{\pi}{4}$，则 $\alpha_2>\frac{\pi}{4}$，故

$$\alpha_2-\frac{\pi}{4}=-\alpha_1+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}-\alpha_1$$

因此，为使射程相同，两质点的抛射方向与45°方向所夹的角度应相等．

两质点飞行时间的乘积为

$$t_1t_2=\frac{2v_0\sin\alpha_1}{g}\cdot\frac{2v_0\sin\alpha_2}{g}=\frac{4v_0^2}{g^2}\sin\alpha_1\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha_1)$$

$$=\frac{2v_0^2}{g^2}\sin 2\alpha_1=\frac{2R}{g}$$

【题6】 如图，位于地面的水枪与一竖直墙的垂直距离为 $d=3.0$ m，墙高 $h=4.0$ m．从水枪喷出初速恒定的水流，为使水流刚好能越过墙顶，试问水流从枪口喷出的初速 v_0 的最小值以及水枪的仰角 α 各为多少？忽略空气阻力，重力加速度 g 取 $10\ \mathrm{m/s^2}$．

【分析】 喷出的水流的轨迹为抛物线，轨迹方程是已知的，其中包含初速 v_0 和仰角 α 两个参量．水流刚好能越过墙顶，是指该抛物线应通过墙的顶点（注意，并不意味着墙高等于射高），将墙顶点的坐标代入轨迹方程，可得出满足此要求的 v_0 的表达式．从此式可看出 v_0 达最小值时，仰角 α 必须满足的条件，从而求得 v_0 的最小值以及相应的仰角 α．

【解】 取平面直角坐标 Oxy 如图，取水枪枪口为原点 O，取水平方向为 x 轴，竖直方向为 y 轴，则水流的抛物线轨迹方程为

$$y=x\tan\alpha-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2$$

要求该抛物线通过墙顶，墙的顶点的坐标为

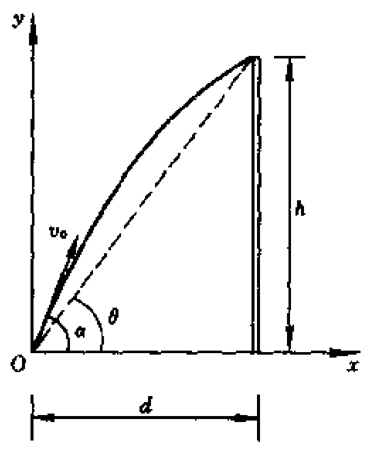
$$x=d,\quad y=h$$

由以上两式，得

$$h=d\tan\alpha-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}d^2$$

因

$$\tan\theta=\frac{h}{d}$$



力图 1-6-1

上式可改写为

$$\tan\alpha-\tan\theta=\frac{gd}{2v_0^2\cos^2\alpha}$$

利用三角公式

$$\tan\alpha-\tan\theta=\frac{\sin(\alpha-\theta)}{\cos\alpha\cos\theta}$$

得

$$v_0^2=\frac{gd}{2\cos^2\alpha(\tan\alpha-\tan\theta)}=\frac{gd\cos\theta}{2\cos\alpha\sin(\alpha-\theta)}$$

上式分母可简化为

$$2\cos\alpha\sin(\alpha-\theta)=2\cos\alpha\sin\alpha\cos\theta-2\cos^2\alpha\sin\theta$$
$$=\sin2\alpha\cos\theta-\cos2\alpha\sin\theta-\sin\theta=\sin(2\alpha-\theta)-\sin\theta$$

所以

$$v_0^2=\frac{gd\cos\theta}{\sin(2\alpha-\theta)-\sin\theta}=\frac{gd^2}{\sqrt{d^2+h^2}\sin(2\alpha-\theta)-h}$$

上式就是为使水流刚好越过墙顶，水流的初速 v_0 以及水枪的仰角 α 应满足的关系，可见 v_0 是随 α 变化的．当 α 满足

$$2\alpha-\theta=90^\circ$$

时，

$$\sin(2\alpha-\theta)=1$$

v_0 为最小值．故最小初速应满足

$$v_0^2=\frac{gd^2}{\sqrt{d^2+h^2}-h}=g\left(\sqrt{d^2+h^2}+h\right)$$

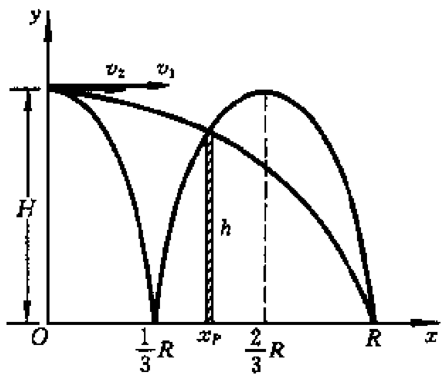
代入有关数据得

$$v_0=9.5\ \mathrm{m/s}$$

使 v_0 为最小值的仰角 α 为

$$\alpha=\frac{1}{2}(90^\circ+\theta)=45^\circ+\frac{1}{2}\arctan\frac{h}{d}$$
$$=45^\circ+\frac{1}{2}\arctan\frac{4}{3}=71.6^\circ$$

【题 7】 如图，球 1 和球 2 均从同一点水平抛出，起抛点离水平地面的高度为 H．两球的水平初速分别为 v_1 和 v_2（$v_1>v_2$）．球 1 抛出后刚好能越过位于 x_P 处的竖直杆的顶端，并落于地面上的 R 点，R 点与 O 点的距离为 R．球 2 抛出后落于地面，与地面作弹性碰撞，反弹后也刚好越过杆顶，并落在同一点 R．试求：1．比值 $\frac{v_1}{v_2}$．2．杆的位置 x_P．3．杆的高度 h．



力图 1－7－1

【分析】 小球作平抛运动的轨迹方程为

$$y=H-\frac{g}{2v_0^2}x^2$$

式中 v_0 为水平初速，H 为起抛点的高度．球 1 抛出后，刚好

越过杆顶,并直接落在 R 点,其抛物线轨迹应包括起抛点、杆顶和 R 点,如图所示．球 2 抛出后,第一次落地,经反弹后刚好越过杆顶,第二次落在地面 R 点．由于球 2 与地面作弹性碰撞,无机械能损失,反弹后速度的水平分量和射高不变,所以球 2 反弹前后的抛物线轨迹是类似的．由此可以断定,球 2 第一次落地点位于 $x=\frac{R}{3}$ 处,反弹后在 $x=\frac{2R}{3}$ 处达到与地面相距 H 的最高点,第二次落地点位于 $x=R$ 处,如图所示．球 2 的抛物线轨迹应包括起抛点、反弹点(第一次落地点)、杆顶和第二次落地点．写出两球的轨迹方程,将落地点坐标代入,即可求得初速之比 $\frac{v_1}{v_2}$．写出球 2 反弹后的轨迹方程,并与球 1 的轨迹方程联立,可以解得两轨迹交点(即杆顶)的坐标,于是杆的位置 x_P 和高度 h 可求．

【解】 1. 取平面直角坐标 Oxy 如图,由平抛运动的轨迹方程,球 1 的轨迹方程及球 2 的轨迹方程(抛出后,反弹前)分别为

球 1: $$y=H-\frac{g}{2v_1^2}x^2$$

球 2: $$y=H-\frac{g}{2v_2^2}x^2$$

球 1 落地点坐标为

$$x=R,\quad y=0$$

球 2 落地点(第一次落地点即反弹点)坐标为

$$x=\frac{R}{3},\quad y=0$$

代入各自的轨迹方程,得

$$0=H-\frac{g}{2v_1^2}R^2$$

$$0=H-\frac{g}{2v_2^2}\left(\frac{R}{3}\right)^2$$

由上两式,得

$$\frac{v_1}{v_2}=3$$

即球 1 的水平初速 v_1 应为球 2 水平初速 v_2 的 3 倍．

2. 球 2 反弹后的轨迹最高点移到了 $x=\frac{2R}{3}$ 处,故球 2 反弹后的轨迹方程可表为

$$y=H-\frac{g}{2v_2^2}x'^2$$

式中

$$x'=x-\frac{2}{3}R$$

代入,得

$$y=H-\frac{g}{2v_2^2}\left(x-\frac{2}{3}R\right)^2$$

把球2反弹后的轨迹方程与球1的轨迹方程联立，求两轨迹的交点．交点的 x 坐标满足

$$H-\frac{g}{2v_1^2}x^2=H-\frac{g}{2v_2^2}\left(x-\frac{2}{3}R\right)^2$$

把 $\frac{v_1}{v_2}=3$ 代入，得

$$x^2=\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2\left(x-\frac{2}{3}R\right)^2=9\left(x-\frac{2}{3}R\right)^2=(3x-2R)^2$$

即

$$3x-2R=\pm x$$

解出

$$x=R,\quad 或\quad x=\frac{R}{2}$$

其中 $x=R$ 是两球的公共落地点，与所求杆的位置无关，弃去．故杆的位置为

$$x_P=\frac{R}{2}$$

3. 把杆的位置 $x=\frac{R}{2}$ 代入球1的轨迹方程，可求出杆顶的 y 坐标，此即杆的高度 h，为

$$h=H-\frac{g}{2v_1^2}\left(\frac{R}{2}\right)^2$$

球1落地点的坐标为 $x=R,y=0$，把它代入球1的轨迹方程，得

$$0=H-\frac{g}{2v_1^2}R^2$$

由上式得出 v_1 与 H、R 的关系为

$$2v_1^2=\frac{gR^2}{H}$$

代入上述 h 的公式，得出杆的高度为

$$h=H-\frac{g}{\frac{gR^2}{H}}\cdot\frac{R^2}{4}=H-\frac{H}{4}=\frac{3}{4}H$$

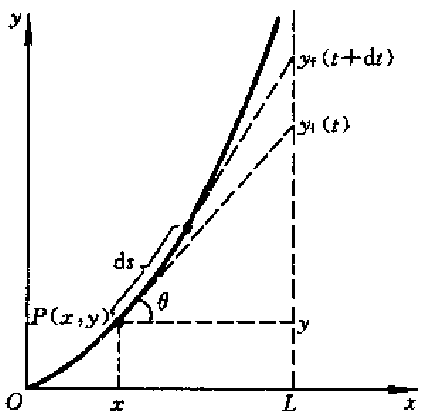
【题8】 飞行物自地面以匀速 v_f 向上空垂直飞行．在地面离飞行物起飞点相距 L 处发射一枚导弹，导弹与飞行物同时发射．导弹的速率 v 为常值，且 $v>v_f$，每一瞬时导弹均指向飞行物运动．

1. 试求导弹的飞行轨迹；

2. 试问导弹经多长时间击中飞行物．

【分析】 如图，飞行物从地面上 L 处垂直向上以 v_f 作匀速直线运动，其轨迹是直线．导弹从地面上 O 处同时发射，以 v 作匀速曲线运动．解本题的关键是利用题给条件：每一瞬时导弹均指向飞行物运动，它表明在每一时刻导弹的速度方向总是沿该时刻导弹与飞行物的连线并指向飞行物，由于导弹的速度方向总是与其轨迹相切，所以在任意时刻 t，导弹与飞行物的连线必定在

该时刻导弹所在位置与导弹轨迹相切．设置坐标系，利用上述题给条件及几何关系便可建立确定导弹轨迹的微分方程，通过积分可得出导弹曲线运动的轨迹方程．导弹轨迹与飞行物轨迹的交点就是导弹击中飞行物的地点，它当然位于飞行物的轨迹上，求出交点（击中点）的高度，利用飞行物的运动学公式即可得出飞行物到达该点所需时间，这也就是导弹的飞行时间．



力图 1-8-1

【解】 1．设置平面直角坐标 Oxy 如图，取导弹发射点为坐标原点 O，则飞行物就从与原点相距 L 处垂直上飞，O 点和 L 点均在地面上．

在任意时刻 t，导弹位于 P 点，其坐标为 $x(t)$ 和 $y(t)$，飞行物的位置用 $y_f(t)$ 表示．t 时刻导弹与飞行物的连线与导弹轨迹在 P 点相切，即

$$\tan\theta=\frac{dy}{dx}$$

式中 dx 和 dy 是 ds 在 x 轴和 y 轴的投影，ds 是导弹从 t 时刻到 $(t+dt)$ 时刻行经的距离．

如图，有几何关系

$$y_f=y+(L-x)\tan\theta=y+(L-x)\frac{dy}{dx}$$

上式对 x 求导，得

$$\frac{dy_f}{dx}=\frac{dy}{dx}-\frac{dy}{dx}+(L-x)\frac{d^2y}{dx^2}=(L-x)\frac{d^2y}{dx^2}\tag{1}$$

在 dt 时间内飞行物上升的高度为

$$dy_f=v_f\,dt$$

在 dt 时间内导弹飞行的距离为

$$dS=v\,dt$$

又

$$dS=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$

将以上三式结合，得

$$dy_f=v_f\,dt=\frac{v_f}{v}dS=\frac{v_f}{v}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\frac{v_f}{v}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

即

$$\frac{dy_f}{dx}=\frac{v_f}{v}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

代入(1)式，得

$$\frac{v_f}{v}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=(L-x)\frac{d^2y}{dx^2}\tag{2}$$

(2)式就是导弹轨迹所满足的微分方程，解此方程可以得出导弹的轨迹方程．为方便起见，令

$$\gamma=\frac{v_{\mathrm{f}}}{v},\quad u=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

(2)式简化为

$$\gamma\sqrt{1+u^2}=(L-x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{\gamma\mathrm{d}x}{L-x}$$

积分，得

$$\ln(u+\sqrt{1+u^2})=-\gamma\ln(L-x)+C$$

初条件为

$$t=0\text{ 时},\quad x=0,\quad u=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

代入上式，得出积分常量为

$$C=\gamma\ln L$$

故得

$$\ln(u+\sqrt{1+u^2})=\ln\left(\frac{L}{L-x}\right)^{\gamma}$$

或

$$u+\sqrt{1+u^2}=\left(\frac{L}{L-x}\right)^{\gamma}$$

$$1+u^2=\left[\left(\frac{L}{L-x}\right)^{\gamma}-u\right]^2=\left(\frac{L}{L-x}\right)^{2\gamma}+u^2-2u\left(\frac{L}{L-x}\right)^{\gamma}$$

即

$$\left(\frac{L}{L-x}\right)^{2\gamma}-1=2u\left(\frac{L}{L-x}\right)^{\gamma}$$

解出

$$u=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{L}{L-x}\right)^{\gamma}-\left(\frac{L-x}{L}\right)^{\gamma}\right]=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{L-x}{L}\right)^{-\gamma}-\left(\frac{L-x}{L}\right)^{\gamma}\right]$$

因

$$u=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

故得

$$\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{x}{L}\right)^{-\gamma}-\left(1-\frac{x}{L}\right)^{\gamma}\right]\mathrm{d}x$$

积分，得

$$y=\frac{L}{2}\left[\frac{1}{1+\gamma}\left(1-\frac{x}{L}\right)^{1+\gamma}-\frac{1}{1-\gamma}\left(1-\frac{x}{L}\right)^{1-\gamma}\right]+C'$$

初条件为

$$t=0\text{ 时},\quad x=0,\quad y=0$$

故积分常量为

$$C' = -\frac{L}{2}\left(\frac{1}{1+\gamma}-\frac{1}{1-\gamma}\right)=\frac{\gamma L}{1-\gamma^2}$$

代入,得出导弹的轨迹方程为

$$y=\frac{L}{2}\left[\frac{1}{1+\gamma}\left(1-\frac{x}{L}\right)^{1+\gamma}-\frac{1}{1-\gamma}\left(1-\frac{x}{L}\right)^{1-\gamma}\right]+\frac{\gamma L}{1-\gamma^2}$$

式中

$$\gamma=\frac{v_f}{v}$$

2. 导弹击中飞行物时,$x=L$,代入导弹的轨迹方程,得出击中时导弹(及飞行物)的高度为

$$y^*=\frac{\gamma}{1-\gamma^2}L$$

飞行物到达上述高度所需的时间为

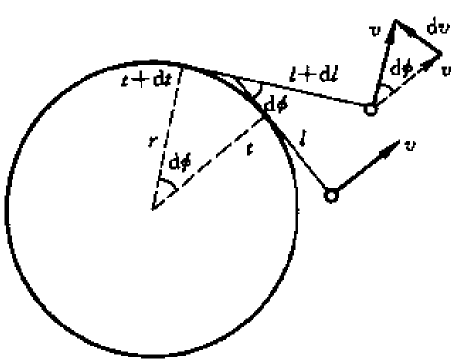
$$t^*=\frac{y^*}{v_f}=\frac{\gamma L}{(1-\gamma^2)v_f}=\frac{L}{(1-\gamma^2)v}$$

此即导弹击中飞行物所需的飞行时间．

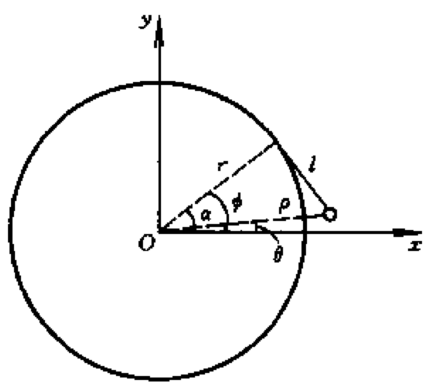
【题9】 圆柱体固定不动,其轴线与水平面垂直．很轻的不可伸长的柔软细线全部缠绕在圆柱体上且在同一水平面内,线末端系一小球,紧贴圆柱体表面．突然给小球一击,使之具有在水平方向并与圆柱体垂直的初速度 $\boldsymbol{v}$,于是缠绕的细线开始从圆柱体上解开．设解开过程中细线与圆柱体之间无相对滑动,且重力可略,即小球始终在水平面内运动．

试求:1. 小球的加速度．2. 小球的轨迹方程．

【分析】 如力图 1-9-1,在每一瞬时,小球均以细线与圆柱的切点为瞬时中心,以已解开的细线为半径作圆周运动,故小球的速度 $\boldsymbol{v}$ 总是垂直已解开的细线,因此线张力对小球不作功．线不可伸长表明无弹性势能变化,又不计重力,故小球在运动过程中其动能不变,即其速度 $\boldsymbol{v}$ 的大小不变而方向不断变化．设法找出细线已解开部分的长度 l 与 v 的关系,以及 $\mathrm{d}l$ 与 $|\mathrm{d}\boldsymbol{v}|$ 的关系,即可求出小球的加速度 $a=\frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{v}|}{\mathrm{d}t}$.



力图 1-9-1



力图 1-9-2

如力图 1－9－2，取直角坐标，寻找适当的几何量，它随时间的变化应容易求得，它与小球位置（x，y 坐标）的关系应较为简单，用它来描述小球的运动，即可求出小球的轨迹方程．

【解】 1．如力图 1－9－1，设在某时刻 t，细线已解开的长度为 l；在（$t+\mathrm{d}t$）时刻，细线已解开的长度为（$l+\mathrm{d}l$）．设圆柱半径为 r，由几何关系及 v 大小不变，有

$$\mathrm{d}\varphi=\frac{\mathrm{d}l}{r}=\frac{v\mathrm{d}t}{l} \tag{1}$$

即

$$l\mathrm{d}l=rv\mathrm{d}t$$

积分，因初条件为 $t=0$ 时 $l=0$，得

$$l=\sqrt{2rvt} \tag{2}$$

（2）式给出了细线解开的长度 l 随时间 t 的变化．

如力图 1－9－1，

$$\frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{v}|}{v}=\frac{\mathrm{d}l}{r}$$

故加速度大小为

$$a=\frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{v}|}{\mathrm{d}t}=\frac{v\mathrm{d}l}{r\mathrm{d}t}$$

由（2）式求出，

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{rv}{2t}}$$

代入上式，得出

$$a=\frac{v\sqrt{v}}{\sqrt{2rt}}$$

$\boldsymbol{a}$ 的方向指向细线与圆柱的切点．加速度 $\boldsymbol{a}$ 实际上是小球瞬时圆周运动的法向加速度．

2．如力图 1－9－2，取平面直角坐标 Oxy，$t=0$ 时，小球位于（r，O），相应的 $\varphi=0$．

在任意时刻 t，解开的线长为 l，小球与 O 点的距离为

$$\rho=\sqrt{r^2+l^2}$$

由（1）、（2）式，

$$\mathrm{d}\varphi=\frac{v\mathrm{d}t}{l}=\frac{v\mathrm{d}t}{\sqrt{2rvt}}=\sqrt{\frac{v}{2r}}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$$

积分，得

$$\varphi=\sqrt{\frac{2vt}{r}}+C$$

初条件为 $t=0$ 时，$\varphi=0$，故积分常量 $C=0$，代入，得

$$\varphi=\sqrt{\frac{2vt}{r}} \tag{3}$$

由（2）、（3）式，得

$$l=r\varphi \tag{4}$$

如力图 1-9-2，$\rho=\sqrt{l^2+r^2}$，把(4)式代入，得

$$\rho=r\sqrt{1+\varphi^2} \tag{5}$$

如力图 1-9-2，小球的 x，y 坐标为

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta=\rho\cos(\varphi-\alpha) \\ \quad=\rho(\cos\varphi\cos\alpha+\sin\varphi\sin\alpha) \\ y=\rho\sin\theta=\rho\sin(\varphi-\alpha) \\ \quad=\rho(\sin\varphi\cos\alpha-\cos\varphi\sin\alpha) \end{cases} \tag{6}$$

利用几何关系及(4)、(5)式，得

$$\begin{cases} \cos\alpha=\dfrac{r}{\rho}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}} \\ \sin\alpha=\dfrac{l}{\rho}=\dfrac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} \end{cases}$$

将上式及(5)式代入(6)式，得

$$\begin{cases} x=r(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi) \\ y=r(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi) \end{cases} \tag{7}$$

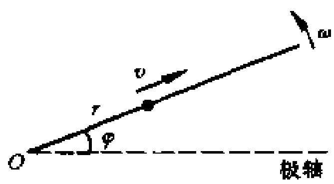
式中 $\varphi=\sqrt{\dfrac{2vt}{r}}$，即(3)式．(7)式就是小球的轨迹方程．

【题 10】 细杆绕端点 O 在平面内匀角速旋转，角速度为 ω，杆上一小环(可看作质点)相对杆作匀速运动，相对速度为 v．设 $t=0$ 时刻小环位于杆的端点 O．

1．试证明小环的运动轨迹为阿基米德螺线．

2．试求小环在任意时刻的速度和加速度．

3．试用作图法定性画出小环加速度在自然坐标系中的两个分量(切向加速度和法向加速度)．



力图 1-10-1

【分析】 本题采用平面极坐标较为方便．如力图 1-10-1，取 $t=0$ 时刻细杆的位置作为极轴，此时小环位于杆的端点 O．任意时刻 t 小环的位置可用变量 r 和 φ 表示，r 为小环离端点 O 的距离，φ 是细杆相对极轴转过的角度．写出小环的运动方程 $r=r(t)$，$\varphi=\varphi(t)$，消去 t，即可得出阿基米德螺线的极坐标方程．

在极坐标系中，速度的两个分量为，

$$\text{径向分量}\quad v_r=\dot{r}$$
$$\text{横向分量}\quad v_\varphi=r\dot{\varphi}$$

加速度的两个分量为

$$\text{径向分量}\quad a_r=\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2$$
$$\text{横向分量}\quad a_\varphi=r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi}$$

从运动方程出发，经求导，代入上述公式即可求得小环在任意时刻的速度和加速度．

【解】 1．因 v 和 ω 为常量，故小环的运动方程为

$$\begin{cases} r=vt \\ \varphi=\omega t \end{cases}$$

消去时间 t，得出小环的轨迹方程为

$$r=\frac{v}{\omega}\varphi$$

式中$\frac{v}{\omega}$为常量，r 与 φ 成正比，此即阿基米德螺线的极坐标方程，如力图 1－10－2 所示．

2. 任意时刻 t，在极坐标系中，小环速度的两个分量为

$$\text{径向分量}\quad v_r=\dot{r}=v$$

$$\text{横向分量}\quad v_\varphi=r\dot{\varphi}=\frac{v}{\omega}\varphi\omega=v\varphi=v\omega t$$

速度的大小为

$$\begin{aligned}V&=\sqrt{v_r^2+v_\varphi^2}\\&=v\sqrt{1+\omega^2t^2}\end{aligned}$$

速度的方向指向轨迹（阿基米德螺线）的切线方向．

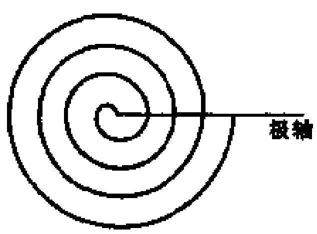
任意时刻 t，在极坐标系中，小环加速度的两个分量为

$$\begin{aligned}\text{径向分量}\quad a_r&=\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2=0-\frac{v}{\omega}\varphi\omega^2\\&=-v\omega^2t\end{aligned}$$

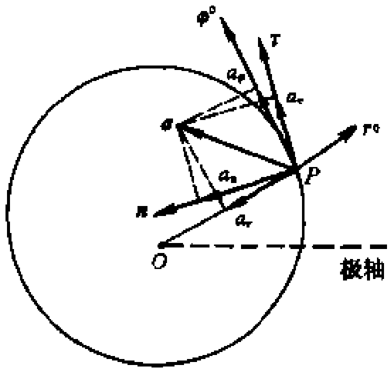
$$\text{横向分量}\quad a_\varphi=r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi}=2v\omega$$

加速度的大小为

$$a=\sqrt{a_r^2+a_\varphi^2}=v\omega\sqrt{4+\omega^2t^2}$$



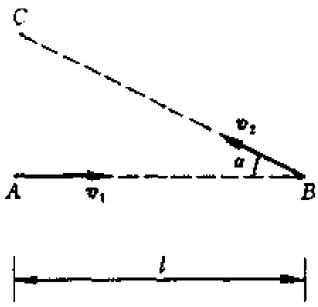
力图 1－10－2



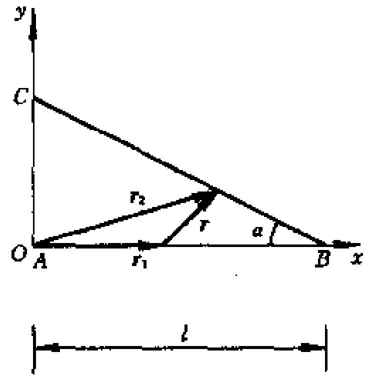
力图 1－10－3

3. 如力图 1－10－3，在任意时刻 t，杆位于 OP，小环位于 P 点，以 P 为起点沿 OP 方向的 $\boldsymbol{r}^0$ 是极坐标系中的径向单位矢量，与它垂直的 $\boldsymbol{\varphi}^0$ 是横向单位矢量．图中定性画出小环所在处（P 点）轨迹的曲率圆（虚线），它与小环的轨迹（阿基米德螺线）在 P 点相切．以 P 为起点，与曲率圆相切的 $\boldsymbol{\tau}$ 以及指向圆心的 $\boldsymbol{n}$ 分别是自然坐标系中的切向单位矢量和法向单位矢量．在任意时刻 t，小环在 P 点的加速度为图中的矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{r}^0$ 和 $\boldsymbol{\varphi}^0$ 方向的投影 a_r 和 a_φ 分别是加速度 $\boldsymbol{a}$ 在极坐标系中的径向分量和横向分量，$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{\tau}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 方向的投影 a_τ 和 a_n 分别是加速度 $\boldsymbol{a}$ 在自然坐标系的两个分量，a_τ 是切向加速度，a_n 是法向加速度．

【题11】 如力图1－11－1所示，质点A和质点B同时从A、B两点出发，分别以速度$\boldsymbol{v}_1$沿AB和以速度$\boldsymbol{v}_2$沿BC作匀速直线运动，BC和AB的夹角为α，开始时质点A和质点B相距为l，试求两质点之间的最短距离．



力图1－11－1



力图1－11－2

【分析】 如力图1－11－2，取平面直角坐标，取O点为坐标原点，取AB连线为x轴．在任意时刻t，两质点的位置矢量分别为$\boldsymbol{r}_1$和$\boldsymbol{r}_2$，两质点之间的距离为$r=|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|$．因$\boldsymbol{r}_1$和$\boldsymbol{r}_2$都随时间$t$变化，所以距离$r$是时间$t$的函数，求两质点之间的最短距离亦即求$r$的极小值问题．写出$r$随时间$t$变化的函数关系$r(t)$，对$t$求导，并令$\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}=0$，据此条件可求得两质点的最短距离$r_{\min}$，这是求极值问题的一般方法．如果$r(t)$函数比较复杂，则求极值的数学运算也会相当麻烦．

本题也可通过变更坐标系的办法，用较简单的方法求解．因A、B两质点均作匀速直线运动，故一质点相对于另一质点的相对运动必定也是匀速直线运动．例如，如力图1－11－3，以质点A为参考系，在此参考系中质点A始终是静止的，质点B则以相对速度$\boldsymbol{v}_2'$沿直线BC'作匀速直线运动，BC'与AB的夹角为α'，v_2'和α'均可用简单的几何方法求得．于是，在质点A静止的参考系中，从A点到直线BC'的垂直距离就是所求的A、B两质点之间的最短距离．

【解】 方法一．如力图1－11－2，在直角坐标Oxy中，两质点A、B在任意时刻t的位置矢量分别为

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}_1=(v_1t,0)\\ \boldsymbol{r}_2=(l-v_2t\cos\alpha,v_2t\sin\alpha)\end{cases}$$

括号中前后两部分分别是该矢量的x和y分量．两位置矢量之差为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}&=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1\\ &=(l-(v_2\cos\alpha+v_1)t,v_2t\sin\alpha)\end{aligned}$$

两质点A、B间的距离为

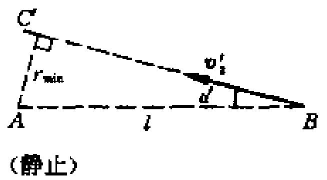
$$\begin{aligned}r&=r(t)\\ &=\sqrt{[l-(v_2\cos\alpha+v_1)t]^2+(v_2t\sin\alpha)^2}\end{aligned}\tag{1}$$

对时间t求导，并令$\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}=0$，可求得$r$达极小值的时间，为

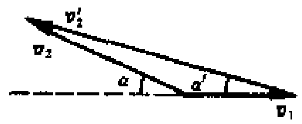
$$t=\frac{(v_2\cos\alpha+v_1)l}{(v_2\cos\alpha+v_1)^2+v_2^2\sin^2\alpha}$$

把上述时间代入(1)式,即得两质点 A、B 间的最短距离为

$$r_{\min}=\frac{v_2\sin\alpha}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos\alpha}}l$$



力图 1－11－3



力图 1－11－4

方法二．以质点 A 为参考系,如力图 1－11－3,在此参考系中质点 A 静止,质点 B 则以相对速度 $\boldsymbol{v}_2'$ 沿直线 BC' 作匀速直线运动,BC' 与 AB 的夹角为 α'．$\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$ 和 $\boldsymbol{v}_2'$ 三者均为常矢量,三者之间的关系以及 α 和 α' 之间的关系如力图 1－11－4 所示．

有

$$\boldsymbol{v}_2'=\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1$$

由余弦定理,有

$$v_2'^2=v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos\alpha \tag{1}$$

由正弦定理,有

$$\frac{v_2}{\sin\alpha'}=\frac{v_2'}{\sin\alpha}$$

即

$$\sin\alpha'=\frac{v_2}{v_2'}\sin\alpha \tag{2}$$

如力图 1－11－3,两质点 A、B 之间的最短距离为

$$r_{\min}=l\sin\alpha'$$

把(1)、(2)式代入,得

$$r_{\min}=\frac{v_2\sin\alpha}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos\alpha}}l$$

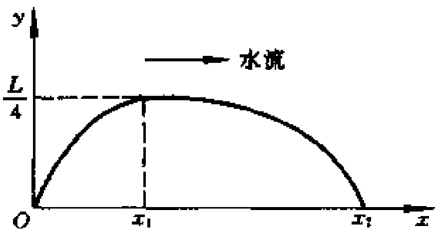
【题 12】 宽 L 的河流,流速与离岸的距离成正比,已知两岸处的流速为零,河中心的流速为 v_0．一小船以恒定的相对速度 v_r 垂直于水流从一岸驶向另一岸．在离岸 $\frac{L}{4}$ 处因故突然掉头,以相对速度 $\frac{v_r}{2}$ 垂直于水流驶回本岸．

试求:1．小船的运动轨迹．2．小船返回本岸时,所到处与原出发点的距离是多少．

【分析】 首先设置便于表述的直角坐标,根据题目给定的条件写出河流流速 $\boldsymbol{u}$ 的函数表达式,再写出已知的船相对水流的相对速度 $\boldsymbol{v}_r$ 的表达式,于是船的绝对速度 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_r+\boldsymbol{u}$ 的表达式可

得．由 $\boldsymbol{v}$ 的两个分量 $v_x=\frac{dx}{dt}$ 及 $v_y=\frac{dy}{dt}$ 的表达式，消去 t，即可得出确定小船轨迹的微分方程．积分，利用初条件定积分常数，可求出小船驶出后的轨迹．用类似的方法，可求出小船返航的轨迹．小船全航程的轨迹求出后，返回处与原出发点的距离便不难求出．

【解】 取平面直角坐标 Oxy 如图，x 轴是小船驶出的此岸，坐标原点 O 是小船的出发点，水流沿 x 方向，xy 平面就是河面．



力图 1－12－1

因河流宽 L，两岸边流速为零，流速与离岸距离成正比，河中心（$y=\frac{L}{2}$ 处）流速为 v_0，故水流速度可统一表为

$$\boldsymbol{u}=\frac{2v_0}{L}y\boldsymbol{i}$$

式中 $\boldsymbol{i}$ 是 x 方向的单位矢量．小船相对水流的相对速度可表为

$$\boldsymbol{v}_r=v_r\boldsymbol{j}$$

式中 $\boldsymbol{j}$ 是 y 方向的单位矢量．于是，小船的绝对速度为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}_r=\frac{2v_0}{L}y\boldsymbol{i}+v_r\boldsymbol{j}$$

绝对速度 $\boldsymbol{v}$ 的 x 和 y 分量为

$$\begin{cases}v_x=\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2v_0}{L}y\\[2mm] v_y=\dfrac{dy}{dt}=v_r\end{cases}$$

消去 dt，得

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2v_0}{Lv_r}y$$

即

$$dx=\frac{2v_0}{Lv_r}ydy$$

此即确定小船驶出后轨迹的微分方程．积分，得

$$x=\frac{v_0}{Lv_r}y^2+C$$

初条件为 $x=0$ 时，$y=0$，故积分常量 $C=0$，代入上式，得出小船驶出后的轨迹方程为

$$x=\frac{v_0}{Lv_r}y^2$$

这是一条抛物线．在离岸 $\frac{L}{4}$ 处 $\left(即\ y=\frac{L}{4}\right)$，小船的坐标为

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{v_0}{Lv_r}\left(\dfrac{L}{4}\right)^2=\dfrac{v_0L}{16v_r}\\[2mm] y_1=\dfrac{L}{4}\end{cases}$$

然后，小船突然掉头返航，相对水流的相对速度减为$\frac{v_r}{2}$，故返航时小船的绝对速度为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}_r=\frac{2v_0}{L}y\boldsymbol{i}-\frac{v_r}{2}\boldsymbol{j}$$

它的 x,y 分量为

$$\begin{cases}v_x=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2v_0}{L}y\\[2mm] v_y=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{v_r}{2}\end{cases}$$

消去 $\mathrm{d}t$，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{4v_0}{Lv_r}y$$

即

$$\mathrm{d}x=-\frac{4v_0}{Lv_r}y\mathrm{d}y$$

积分，得

$$x=-\frac{2v_0}{Lv_r}y^2+C'$$

将初值 x_1 和 y_1 代入上式，积分常量为

$$C'=\frac{3}{16}\frac{v_0L}{v_r}$$

故小船返航轨迹为

$$x=-\frac{2v_0}{Lv_r}y^2+\frac{3v_0L}{16v_r}$$

这也是一条抛物线．

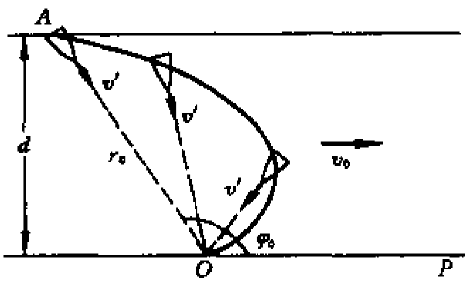
小船回到本岸时，$y=0$，由上式求出返回本岸时所到处与原出发点的距离为

$$x_2=\frac{3v_0}{16v_r}L$$

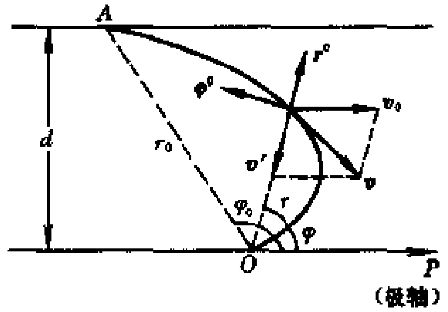
【题 13】 如力图 1－13－1，一条笔直的河流宽度为 d，河水以恒定的速度 v_0 流动．小船从河岸的 A 点出发，为了到达对岸的 O 点，相对于河水以恒定的速率 $v'(v'>v_0)$运动，不论小船驶到何处，它的运动方向总是指向 O 点．已知$\overline{AO}=r_0$，$\angle AOP=\varphi_0$，试求小船运动的轨迹．若 O 点刚好在 A 点的对面(即$\overline{AO}=d$)，结果又如何？

【分析】 在地面参考系中，小船的速度为($\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}'$)，其中 $\boldsymbol{v}_0$ 的大小和方向都保持不变，$\boldsymbol{v}'$的大小不变，$\boldsymbol{v}'$的方向则随着小船位置的变化而变化，但总是指向 O 点，即总是沿径向．因此，取直角坐标并不适宜．若取 O 点为原点，取 OP 为极轴，用极坐标(r,φ)描绘小船的位置，则小船速度沿径向和横向(垂直径向)的分量便可既方便又明确地表达出来．取极坐标，写出小船速度的分量表达式后，通过积分即可得出用极坐标表示的小船的轨迹方程．积分常量由初条件 $t=0$ 时的 $r=r_0,\varphi=\varphi_0$ 确定．根据题目的特点，选择适当的、方便的坐标系以利求解，这就是本题的启

示．



力图 1－13－1



力图 1－13－2

【解】 如力图 1－13－2，取极坐标，原点为 O 点，极轴 OP．在任一时刻 t，小船的位置为 (r,φ)，小船的速度为 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}'$，其中河水流速 $\boldsymbol{v}_0$ 的大小恒定、方向与极轴平行，小船相对河水的速度 $\boldsymbol{v}'$ 的大小恒定、指向 O 点（即沿径向），小船的绝对速度 $\boldsymbol{v}$ 沿小船轨迹的切线方向．力图 1－13－2 中的 $\boldsymbol{r}^0$ 和 $\boldsymbol{\varphi}^0$ 分别是径向和横向的单位矢量．于是，小船速度 $\boldsymbol{v}$ 的径向分量和横向分量为

$$\text{径向分量}\quad v_r=\dot{r}=-v'+v_0\cos\varphi$$

$$\text{横向分量}\quad v_\varphi=r\dot{\varphi}=-v_0\sin\varphi$$

两式相除，得

$$\frac{r\dot{\varphi}}{\dot{r}}=\frac{r\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}}=r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}=\frac{-v_0\sin\varphi}{-v'+v_0\cos\varphi}$$

分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{-v'+v_0\cos\varphi}{-v_0\sin\varphi}\mathrm{d}\varphi=\left(\frac{v'}{v_0\sin\varphi}-\cot\varphi\right)\mathrm{d}\varphi$$

积分，

$$\int\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{v'}{v_0}\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sin\varphi}-\int\cot\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

得

$$\ln r=\frac{v'}{v_0}\ln\tan\frac{\varphi}{2}-\ln\sin\varphi+C$$

初条件为，在 A 点时 $r=r_0$，$\varphi=\varphi_0$，代入上式，积分常量为

$$C=\ln r_0-\frac{v'}{v_0}\ln\tan\frac{\varphi_0}{2}+\ln\sin\varphi_0$$

由以上两式，得

$$\ln r-\ln r_0=\frac{v'}{v_0}\left(\ln\tan\frac{\varphi}{2}-\ln\tan\frac{\varphi_0}{2}\right)+(\ln\sin\varphi_0-\ln\sin\varphi)$$

即

$$\ln\frac{r}{r_0}=\ln\left[\left(\frac{\tan\frac{\varphi}{2}}{\tan\frac{\varphi_0}{2}}\right)^{\frac{v'}{v_0}}\cdot\frac{\sin\varphi_0}{\sin\varphi}\right]$$

故

$$\frac{r}{r_0}=\left(\frac{\tan\frac{\varphi}{2}}{\tan\frac{\varphi_0}{2}}\right)^{\frac{v'}{v_0}}\cdot\frac{\sin\varphi_0}{\sin\varphi}$$

这就是用极坐标表示的小船的轨迹方程．

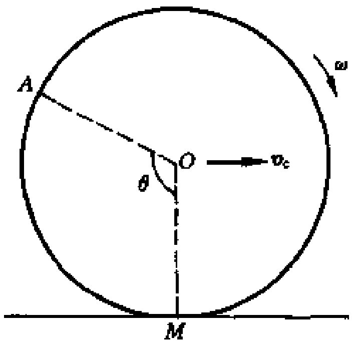
若 O 点刚好在 A 点的对面，则

$$\begin{cases}r_0=d\\ \varphi_0=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

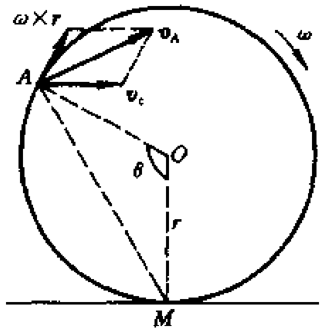
小船的轨迹方程为

$$r=\frac{d}{\sin\varphi}\left(\tan\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{v'}{v_0}}$$

【题 14】 如力图 1－14－1，轮子在水平面上以角速度 ω 作纯滚动，已知轮子的质心速度为 v_c，试求轮边缘上任一点 A 的绝对速度，A 点的位置用 θ 角表示．



力图 1－14－1



力图 1－14－2

【分析】 轮边缘上任一点 A 的绝对速度是质心速度与该点相对于质心的速度之和．纯滚动的含义是轮与地面接触点 M 的速度为零，即 M 是轮的瞬时转轴．

【解】 A 点的绝对速度为

$$\boldsymbol{v}_A=\boldsymbol{v}_c+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

式中$(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$的大小为 ωr，方向为 A 点轮的切线方向，即其方向与轮半径$\overline{AO}$垂直．因为是纯滚，接触点 M 的速度为零，M 为瞬时转轴，故 v_A 与$\overline{MA}$垂直．如力图 1－14－2，由几何关系可知$(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$与 v_c 的夹角为$(\pi-\theta)$，于是，由余弦定理，有

$$v_A^2 = v_c^2 + (\omega r)^2 - 2v_c\omega r\cos\theta$$

对于 M 点，因纯滚，有

$$\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{v}_c + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} = 0$$

故在 M 点

$$\boldsymbol{v}_c = -\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

即

$$v_c = \omega r$$

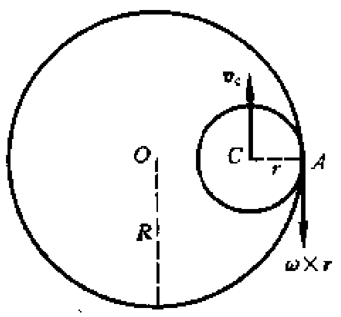
代人 v_A 表达式，得

$$v_A^2 = v_c^2 + v_c^2 - 2v_c^2\cos\theta$$
$$= 2v_c^2(1-\cos\theta) = 4v_c^2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

即

$$v_A = 2v_c\sin\frac{\theta}{2}$$

【题 15】 如力图 1-15-1，半径为 R 的圆环静止不动，半径为 r 的圆盘沿圆环内侧作无滑动的滚动，圆盘中心 C 点绕环中心 O 点的角速度恒为 Ω. 试求圆盘上与圆环相接触的 A 点相对圆环的加速度．



力图 1-15-1

【分析】 圆盘相对圆环的运动可分解为两种运动：盘心 C 点绕环心 O 点作匀速圆周运动，角速度大小为 Ω，以及圆盘绕盘心 C 点的转动，设转动角速度的大小为 ω. 因此，圆盘上的 A 点同时参与两种运动，根据速度叠加法则，A 点相对圆环的速度为

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_c + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

式中 $\boldsymbol{v}_c$ 是盘心 C 点绕环心 O 点作圆周运动的线速度，其大小为 $(R-r)\Omega$，其方向与 $\overline{OC}$ 垂直（若设盘心绕环心逆时针旋转，则 $\boldsymbol{v}_c$ 方向如图所示）；$\boldsymbol{\omega}$ 是圆盘绕盘心 C 点的转动角速度，其方向与图平面垂直（若设盘心绕环心逆时针旋转，则盘应顺时针转动，$\boldsymbol{\omega}$ 方向垂直图平面向里）；$\boldsymbol{r}$ 是从 C 点到 A 点所引的径矢；$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ 是 A 点相对 C 点的线速度，其大小为 ωr，其方向由 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 确定，如图所示．将上式写成标量式，有

$$v_A = v_c - \omega r = (R-r)\Omega - \omega r$$

因设圆盘与圆环间无相对滑动，故

$$v_A = 0$$

由以上两式可得出两种角速度 Ω 和 ω 之间的关系为

$$(R-r)\Omega = \omega r$$

同样，接触点 A 的加速度 $\boldsymbol{a}_A$ 是 A 点相对 C 点的相对加速度 $\boldsymbol{a}_r$ 与盘心 C 点相对 O 点的加速度 $\boldsymbol{a}_c$ 的合成，即

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_c$$

注意到 C 点绕 O 点以及 A 点绕 C 点均为匀速圆周运动（题设 Ω 恒定，故 ω 亦恒定），故加速度 $\boldsymbol{a}_c$ 和 $\boldsymbol{a}_r$ 均为指向环心 O 点的法向加速度，方向相同，于是可写成标量公式，

$$a_A = a_c + a_r$$

利用 Ω 与 ω 的关系即可求得 a_A.

【解】 如上分析，接触点 A 的运动是 A 点相对盘心 C 点的圆周运动以及盘心 C 点相对环心 O 点的圆周运动的合成 .A 点的加速度等于上述两圆周运动的法向加速度的合成，如上述，

$$a_A = a_c + a_r$$

因

$$a_c = (R - r)\Omega^2$$

$$a_r = r\omega^2$$

故 A 点的加速度为

$$a_A = (R - r)\Omega^2 + r\omega^2$$

利用上述 ω 与 Ω 的关系

$$\omega r = (R - r)\Omega$$

得

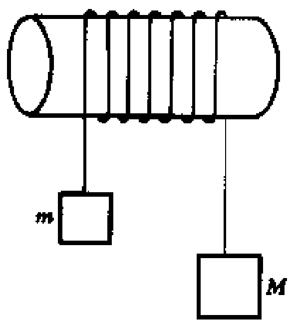
$$a_A = (R - r)\Omega^2 + r\left(\frac{R - r}{r}\right)^2\Omega^2 = \frac{R(R - r)}{r}\Omega^2$$

$\boldsymbol{a}_A$ 的方向由 A 点指向环心 O 点 .

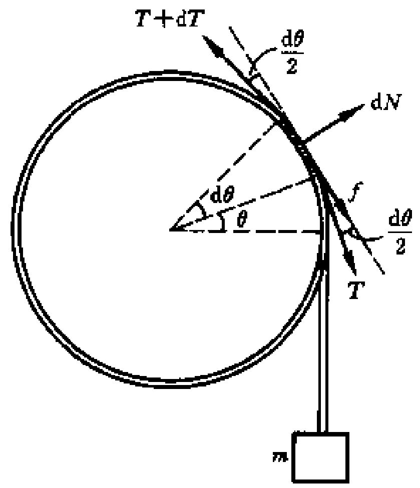
第二章　牛顿运动定律

【题1】 如力图 2-1-1,在固定不动的圆柱体上绕有绳索,绳两端挂大、小两桶,其质量分别为 $M=1\,000$ kg 和 $m=10$ kg. 绳与圆柱体之间的摩擦系数为 $\mu=0.050$,绳的质量可以忽略．试问为使两桶静止不动,绳至少需绕多少圈．

【分析】 在大、小桶重量不等的条件下,为使两桶静止,要求绳的张力从大桶上端的 Mg 沿着绳索逐渐减少为小桶上端的 mg. 这表明,任一小段绳索两侧所受的张力,在靠近大桶的一侧稍大,在靠近小桶的一侧稍小．平衡是由绳与圆柱体之间的摩擦力来维持的．在大、小桶重量给定的条件下,摩擦力愈小所需绳索愈长,当绳与圆柱体之间为最大静摩擦力时所需绳索最短,即圈数最少．



力图 2-1-1



力图 2-1-2

【解】 如力图 2-1-2,隔离任意一小段绳子,它的长度为 $R\mathrm{d}\theta$(R 是圆柱体的半径),它与小桶之间的绳索长度为 $R\theta$(竖直下垂的那段绳索不计在内). 它受到的作用力有,靠近小桶一侧的张力 T,靠近大桶一侧的张力($T+\mathrm{d}T$),张力的方向如力图 2-1-2,都在作用点与圆柱体相切,支持力 $\mathrm{d}N$ 其方向沿径向,最大静摩擦力 $f=\mu\mathrm{d}N$ 其方向与支持力垂直．因静止,合力为零,故有

$$\begin{cases}[(T+\mathrm{d}T)+T]\sin\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}=\mathrm{d}N\\(T+\mathrm{d}T)\cos\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}=T\cos\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}+\mu\mathrm{d}N\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}(2T+\mathrm{d}T)\sin\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}=\mathrm{d}N\\ \mathrm{d}T\cos\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}=\mu\mathrm{d}N\end{cases}$$

因 $\mathrm{d}\theta$ 很小，有

$$\sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\approx\frac{\mathrm{d}\theta}{2},\quad \cos\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\approx1$$

故为

$$\begin{cases}2T\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}+\mathrm{d}T\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}=\mathrm{d}N\\ \mathrm{d}T=\mu\mathrm{d}N\end{cases}$$

忽略高级小量，得

$$\begin{cases}T\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}N\\ \mathrm{d}T=\mu\mathrm{d}N\end{cases}$$

消去 $\mathrm{d}N$，得

$$\frac{\mathrm{d}T}{T}=\mu\mathrm{d}\theta$$

积分，得

$$\ln T=\mu\theta+C$$

因 $\theta=0$ 时，$T=mg$，故积分常量为

$$C=\ln mg$$

代入，得

$$T=mg\mathrm{e}^{\mu\theta}$$

这就是为使两桶静止，绳索中张力随 θ 的变化．与小桶连接处($\theta=0$)，绳的张力最小为 $T_{\min}=mg$；与大桶连接处，绳的张力最大应为 $T_{\max}=Mg$．设绳索共绕 n 圈，由上式，得

$$T_{\max}=T_{\min}\mathrm{e}^{\mu\cdot2\pi n}$$

即

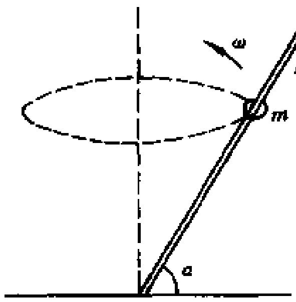
$$Mg=mg\mathrm{e}^{\mu\cdot2\pi n}$$

故

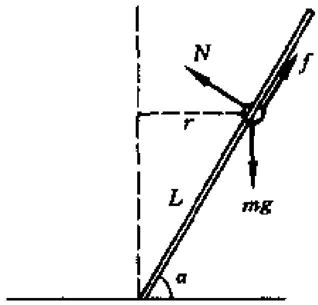
$$n=\frac{1}{2\pi\mu}\ln\frac{M}{m}=\frac{\ln100}{0.1\pi}=14.7\text{ 圈}\approx15\text{ 圈}$$

【题 2】 如力图 2-2-1，细杆一端支在地面上，以恒定的角速度 ω 绕通过支点的竖直轴旋转，杆与地面的夹角为 α，质量为 m 的小环套在杆上，可以沿杆滑动，环与杆之间的摩擦系数为 μ．试问小环处于什么位置上能维持稳定运动．

【分析】 如力图 2-2-2，小环受到的作用力有，重力 mg，杆的支持力 N，以及摩擦力 f．小环能在杆上稳定地以角速度 ω 作圆周运动，既不上滑也不下滑，要求上述三个力的合力的竖直分量为零，水平分量提供所需之向心力．



力图 2-2-1



力图 2-2-2

小环随杆稳定运动时，虽不沿杆滑动，但仍可有沿杆向上或向下滑动的趋势，故所受摩擦力 f 的大小可在 0 和 μN 之间，方向平行于杆向上或向下（力图 2-2-2 只画出了一种可能）. 不难设想，向上或向下的最大静摩擦力 μN，确定了阻止环沿杆下滑或上滑，使环能随杆稳定运动的两个极端位置，超出这个范围环的运动便不稳定.

【解】 如力图 2-2-2，设小环位于杆 L 处，作稳定的匀速圆周运动. 隔离小球，分析力，列方程如下：

$$\begin{cases} N\sin\alpha - f\cos\alpha = m\omega^2 L\cos\alpha & (1) \\ N\cos\alpha + f\sin\alpha = mg & (2) \end{cases}$$

由(1)、(2)式，消去 N，得

$$f = mg\sin\alpha - m\omega^2 L\cos^2\alpha = m\omega^2\cos^2\alpha\left(\frac{g\sin\alpha}{\omega^2\cos^2\alpha} - L\right)$$

令

$$L_0 = \frac{g\sin\alpha}{\omega^2\cos^2\alpha}$$

则

$$f = m\omega^2\cos^2\alpha(L_0 - L) \tag{3}$$

由(1)、(2)式消去 f，得

$$N = mg\cos\alpha + m\omega^2 L\sin\alpha\cos\alpha \tag{4}$$

由(3)式，当 $L = L_0$ 时，$f = 0$；当 $L < L_0$ 时，$f > 0$，方向沿杆向上；当 $L > L_0$ 时，$f < 0$，方向沿杆向下. 小环随杆稳定运动的条件是 $|f| \leqslant \mu N$，稳定运动的两个极端位置 L_1 和 L_2 由 $f = \mu N$ 以及 $f = -\mu N$ 确定.

当 $f = \mu N$ 时，$L = L_1$，由(3)、(4)式，并将 L_0 代入，得

$$f = m\omega^2\cos^2\alpha(L_0 - L) = m\omega^2\cos^2\alpha\left(\frac{g\sin\alpha}{\omega^2\cos^2\alpha} - L_1\right)$$

$$= mg\sin\alpha - m\omega^2 L_1\cos^2\alpha = \mu N = \mu mg\cos\alpha + \mu m\omega^2 L_1\sin\alpha\cos\alpha$$

故

$$L_1=\frac{g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}{\omega^2\cos\alpha(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)}$$

当 $f=-\mu N$ 时，$L=L_2$，由(3)、(4)式，并将 L_0 代入，得

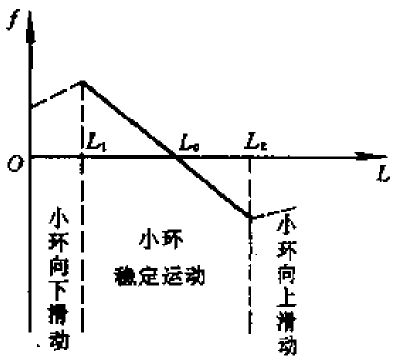
$$mg\sin\alpha-m\omega^2L_2\cos^2\alpha=-\mu mg\cos\alpha-\mu m\omega^2L_2\sin\alpha\cos\alpha$$

故

$$L_2=\frac{g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}{\omega^2\cos\alpha(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)}$$

小环随杆稳定运动的范围是

$$\Delta L=L_2-L_1=\frac{2\mu g}{\omega^2\cos^3\alpha(1-\mu^2\tan^2\alpha)}$$



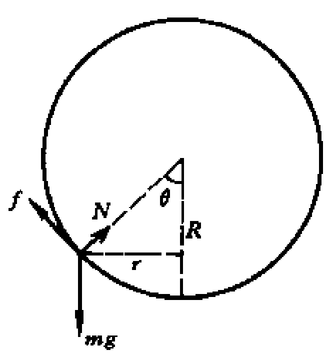
力图 2－2－3

以上结果可用如力图 2－2－3 所示的 $f(L)$ 曲线表示．在小环稳定运动的 $L_1<L<L_2$ 范围内，由(3)式可知，随着 L 的增大，f 线性地减小．在 L_0 处，N 的竖直分量刚好与 mg 抵消，N 的水平分量刚好提供小环匀速圆周运动所需的向心力，摩擦力 f 为零．在 $L_1<L<L_0$ 范围，随着 L 从 L_0 减小，N 减小(由(4)式)，其竖直分量不足以抵消 mg，小环有下滑趋势，导致方向沿杆向上不为零的摩擦力 f，N 与 f 的竖直分量之和与 mg 抵消，N 与 f 的水平分量之和提供环圆周运动的向心力，环稳定运动，在 $L=L_1$ 处，$f=\mu N$ 达到最大静摩擦力，所以，在 $L_1<L<L_0$ 范围内环稳定运动．当 $L<L_1$，随着 L 减小，N 减小，最大静摩擦力 $f=\mu N$(方向沿杆向上)减小，N 与 f 的竖直分量不足以抵消 mg，环向下滑动，无法稳定运动．

与此类似，在 $L_0<L<L_2$ 范围内，环稳定运动，在 L_2 处达到最大静摩擦力 $f=\mu N$(方向沿杆向下)．在 $L>L_2$ 范围内，环向上滑动，无法稳定运动．

【题3】 如图，在半径为 R 的空心球壳内壁，有一可当作质点的小球沿固定的水平圆周作匀速率运动，小球与空心球壳球心的连线与铅垂线的夹角为 θ，小球与空心球壳内壁之间的摩擦系数为 μ．试求小球能稳定运动的速度范围．

【分析】 与上题相仿，也是讨论能否维持稳定运动的问题．区别在于，上题小环随杆旋转，可以沿杆上、下滑动，求的是能够维持稳定运动的空间范围；本题小球运动的位置限定，求的是能够维持稳定运动的速度范围．



力图 2－3－1

如图，小球所受作用力仍为重力、支持力和摩擦力，它们是维持小球稳定运动的依据．关键仍在于，摩擦力 f 的大小可在零和最大静摩擦力 μN 之间，摩擦力的方向可沿球壳切线向上或向下．换言之，阻止小球下滑或上滑的、沿球壳内壁切线方向向上或向下的最大静摩擦力，确定了小球能在给定位置稳定运动的速度范围．

【解】 如图，小球受重力 mg，支持力 N，摩擦力(假设方向沿切线向上)，小球的运动方程及有关

几何关系为

$$\begin{cases} N\sin\theta - f\cos\theta = \dfrac{mv^2}{r} \\ N\cos\theta + f\sin\theta = mg \\ r = R\sin\theta \end{cases}$$

消去 N，得

$$f = m\left(g\sin\theta - \frac{v^2}{r}\cos\theta\right)$$

消去 f，得

$$N = m\left(g\cos\theta + \frac{v^2}{r}\sin\theta\right)$$

由 f 的表达式可知：

1. 当 $g\sin\theta = \dfrac{v^2}{r}\cos\theta$，即当 $v = \sin\theta\sqrt{\dfrac{gR}{\cos\theta}}$ 时，

$$f = 0$$

2. 当 $g\sin\theta > \dfrac{v^2}{r}\cos\theta$，即当 $v < \sin\theta\sqrt{\dfrac{gR}{\cos\theta}}$ 时，

$f > 0$，方向向上

3. 当 $g\sin\theta < \dfrac{v^2}{r}\cos\theta$，即当 $v > \sin\theta\sqrt{\dfrac{gR}{\cos\theta}}$ 时，

$f < 0$，方向向下

当 $f > 0$ 时，若 v 减小，则所需之摩擦力增大．设当 $v = v_{min}$ 时，$f = f_{max} = \mu N$，则由 f 和 N 的表达式，有

$$\mu m\left(g\cos\theta + \frac{v_{min}^2}{r}\sin\theta\right) = m\left(g\sin\theta - \frac{v_{min}^2}{r}\cos\theta\right)$$

解出 v_{min} 为

$$v_{min} = \sqrt{\frac{g(\sin\theta - \mu\cos\theta)r}{\cos\theta + \mu\sin\theta}} = \sqrt{\frac{g(\sin\theta - \mu\cos\theta)R\sin\theta}{\cos\theta + \mu\sin\theta}}$$

当 $f < 0$ 时，若 v 增大，则所需之摩擦力的绝对值增大．设当 $v = v_{max}$ 时，$|f| = |f|_{max} = \mu N$，则由 f 和 N 的表达式，有

$$-\mu m\left(g\cos\theta + \frac{v_{max}^2}{r}\sin\theta\right) = m\left(g\sin\theta - \frac{v_{max}^2}{r}\cos\theta\right)$$

解出 v_{max} 为

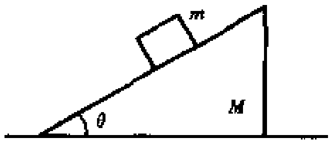
$$v_{max} = \sqrt{\frac{g(\sin\theta + \mu\cos\theta)R\sin\theta}{\cos\theta - \mu\sin\theta}}$$

小球能在空心球壳内壁 $r = R\sin\theta$ 处稳定运动的速度范围是

$$v_{min} \leqslant v \leqslant v_{max}$$

【题 4】 如力图 2-4-1，在地面上有一倾角为 θ，质量为 M 的斜面体，斜面体上有一质量为 m

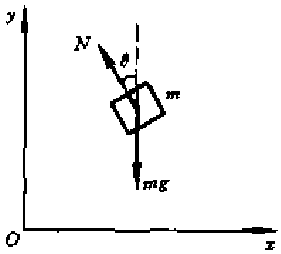
的木块．设地面与斜面体之间以及斜面体与木块之间均光滑无摩擦．试求 M 与 m 相对于地面的加速度 $\boldsymbol{a}_M$ 与 $\boldsymbol{a}_m$，以及木块 m 所受的支持力．



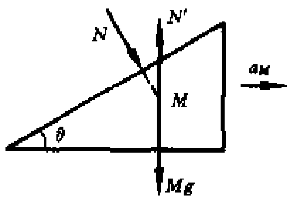
力图 2－4－1

【分析】 按常规，如力图 2－4－2 和力图 2－4－3，分别隔离木块和斜面体，分析力，列方程，将发现方程组不完备，即未知数比方程数多一个，无从求解．

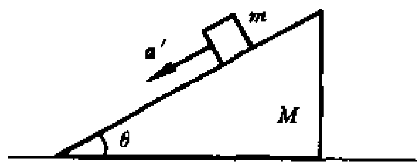
关键在于，M 和 m 的运动是有联系的，即 M 沿地面运动，m 沿斜面运动，两者是不能脱离的．这就是约束条件．为了予以恰当表述，可取 M 为参考系，在其中，m 的加速度 $\boldsymbol{a}'$ 的两个分量 a'_x 和 a'_y 应满足 $\tan\theta=\frac{a'_y}{a'_x}$，以确保两者不脱离．把这个约束条件改写成以地面为参考系的形式，与上述方程组联立，即可迎刃而解．



力图 2－4－2



力图 2－4－3



力图 2－4－4

【解】 如力图 2－4－2 和力图 2－4－3，取地面为参考系，取直角坐标，则 m 的运动方程为

$$\begin{cases} -N\sin\theta = ma_x & (1)\\ N\cos\theta - mg = ma_y & (2)\end{cases}$$

M 的运动方程为

$$N\sin\theta = Ma_M \qquad (3)$$

为了寻找 $\boldsymbol{a}_m$ 与 $\boldsymbol{a}_M$ 的关系，如力图 2－4－4，取 M 为参考系，设 m 在其中的相对加速度为 $\boldsymbol{a}'$，其 x，y 分量为 a'_x，a'_y，则应满足的约束条件为

$$\tan\theta=\frac{a'_y}{a'_x}$$

利用相对运动公式，

$$\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{a}_M+\boldsymbol{a}'$$

即

$$\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{a}_m-\boldsymbol{a}_M=(a_x-a_M)\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}=a'_x\boldsymbol{i}+a'_y\boldsymbol{j}$$

式中 $\boldsymbol{a}_m$ 和 $\boldsymbol{a}_M$ 分别是 m 和 M 在地面参考系中的加速度，$\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 分别是地面参考系中 x 和 y 方向的单位矢量．故有

$$\begin{cases} a'_x = a_x - a_M\\ a'_y = a_y\end{cases}$$

于是

$$\tan\theta=\frac{a_y'}{a_x'}=\frac{a_y}{a_x-a_M}$$

即

$$a_x\sin\theta-a_y\cos\theta=a_M\sin\theta. \tag{4}$$

(1)、(2)、(3)、(4)式联立求解，得

$$a_x=-\frac{M\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}g$$

$$a_y=-\frac{(m+M)\sin^2\theta}{M+m\sin^2\theta}g$$

$$a_M=\frac{m\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}g$$

$$N=\frac{mM\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}g$$

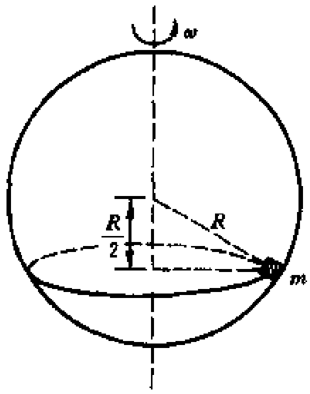
式中负号表明了木块加速度的实际方向．当 $m\ll M$ 时，$a_M\approx0$，M 几乎不动，上述结果简化为斜面体固定不动的结果．

【题5】 如力图 2－5－1，一个半径为 $R=0.5$ m 的空心球壳绕本身的竖直直径旋转，角速度为 $\omega=5\ \mathrm{s}^{-1}$，在空心球壳内高度为$\frac{R}{2}$处有一小木块(可当作质点)同球壳一起旋转．

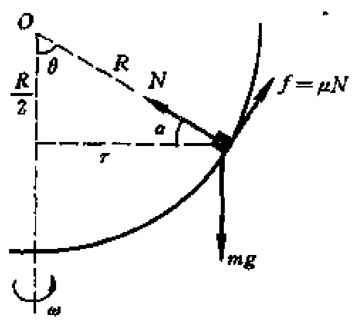
试求：1. 摩擦系数至少是多少才能实现这一情况．2. 当 $\omega=8\ \mathrm{s}^{-1}$时，实现这一情况的条件是什么．3. 研究以下两种情形运动的稳定性：(a)木块位置有微小变动；(b)空心球壳的角速度有微小变动．

【分析】 如力图 2－5－2，小木块受重力 mg、支持力 N、摩擦力 f，合力的水平分量提供木块作圆周运动的向心力，合力的竖直分量应为零．小木块与球无相对滑动，但有相对滑动趋势，故 f 为静摩擦力，取值为 $0\leqslant|f|\leqslant\mu N$．因题目求的是“最小”的摩擦系数 μ，故 f 应取最大静摩擦力，即 $f=\mu N$．

当 ω 不同时，所需的最小的 μ 不同．另外，当木块在不同 θ 处时，所需的最小的 μ 也不同．因此，木块在不同的θ处，以不同的ω随球旋转时，所需的最小的μ是θ和ω的函数，即 $\mu=$



力图 2－5－1



力图 2－5－2

$\mu(\theta,\omega)$.

当木块在 θ 处以 ω 随球旋转时，若因扰动使 θ 改变了 $d\theta$(ω 不变)，或因扰动使 ω 改变了 $d\omega$(θ 不变)，则所需的 μ 将相应变动 $d\mu$. 这时，如果木块能恢复原来的运动或维持稍有变动后的运动，扰动不发展，则运动是稳定的；如果扰动急剧增大，不能恢复或维持，则运动是不稳定的．因此，稳定性分析的根据是 $\mu(\theta,\omega)$ 曲线，由曲线的特征确定扰动是否增长，运动是否稳定．

【解】 1. 如力图 2－5－2，设摩擦力 $f=\mu N$ 指向斜上方，则有

$$\begin{cases} N\cos\alpha-\mu N\sin\alpha=mr\omega^2 \\ N\sin\alpha+\mu N\cos\alpha-mg=0 \end{cases}$$

式中

$$\alpha=\frac{\pi}{2}-\theta$$

$$r=R\sin\theta$$

由以上四式，解出

$$\mu=\frac{g\cos\alpha-r\omega^2\sin\alpha}{g\sin\alpha+r\omega^2\cos\alpha}=\frac{(g-R\omega^2\cos\theta)\sin\theta}{g\cos\theta+R\omega^2\sin^2\theta}=0.215 \tag{1}$$

其中 $\mu=0.215$ 是取 $\omega=\omega_1=5\ s^{-1}$ 得出的．若设摩擦力指向斜下方，则第一个方程中的 $(-\mu N\sin\alpha)$ 项应改为 $\mu N\sin\alpha$，求出 $\mu=-0.215$，结果与(1)式相同．

2. 取 $\omega=\omega_2=8\ s^{-1}$，将数据代入(1)式，得

$$\mu_{(\omega=\omega_2)}=-0.186$$

负号表明，当 $\omega=\omega_2$ 时，摩擦力指向斜下方，阻止木块上滑；与 $\omega=\omega_1=5\ s^{-1}$时，摩擦力指向斜上方，阻止木块下滑的情形有所不同．

3. $\mu(\theta,\omega)$函数如(1)式所示，取 $\omega_1=5\ s^{-1}$和 $\omega_2=8\ s^{-1}$，取不同的 θ 角，得出的 μ 数据如下表：

θ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$\mu(\theta,\omega_1)$	0	−0.06	−0.04	0.05	0.215	0.43	0.73
$\mu(\theta,\omega_2)$	0	−0.47	−0.54	−0.40	−0.186	0.05	0.31

利用上述数据，作 $\mu(\theta,\omega_1)$和 $\mu(\theta,\omega_2)$曲线如力图 2－5－3 和力图 2－5－4 所示．

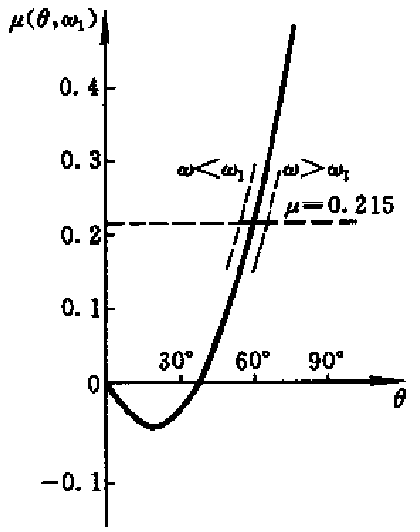
当 $\omega=\omega_1=5\ s^{-1}$，$\theta=60°$时，木块有下滑趋势，摩擦力指向斜上方，至少需要 $\mu=0.215$才能维持木块的运动．

若 $\omega=\omega_1$ 不变，木块从 $\theta=60°$处因扰动上移，θ 增大，$d\theta>0$，则由力图 2－5－3，μ 增大，$d\mu>0$，即需要比 $\mu=0.215$稍大的摩擦系数才能维持木块在增大的 θ 处稳定运动．现在 $\mu=0.215$已定，不够大，木块将返回原来的 $\theta=60°$处，继续稳定运动．

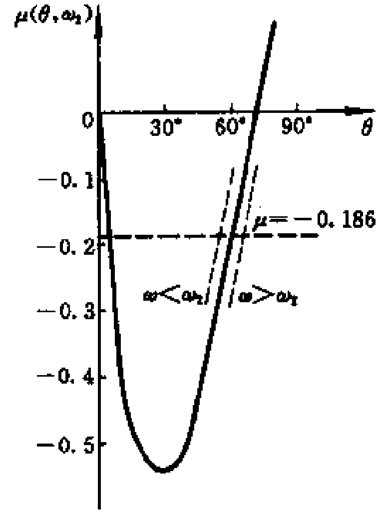
若 $\omega=\omega_1$ 不变，木块从 $\theta=60°$处因扰动下移，θ 减小，$d\theta<0$，则由力图 2－5－3，μ 减小，$d\mu<0$，即只需稍小的摩擦系数便可维持稳定运动．现在的 $\mu=0.215$足够，故木块将在稍小的 θ 处稳定运动，不返回．

若 $\theta=60°$不变，因扰动使 ω 增大，$d\omega>0$，则由力图 2－5－3，μ 减小，$d\mu<0$，现在的

$\mu=0.215$能维持木块以稍大的 ω 稳定运动．



力图 2－5－3



力图 2－5－4

若 $\theta=60°$不变，因扰动使 ω 减小，$d\omega<0$，则由力图 2－5－3，μ 增大，$d\mu>0$，现在的 $\mu=0.215$不足以维持，木块将从 $\theta=60°$下滑，以便因 θ 的减小使所需的 μ 减小，才能维持木块以较小的 ω 稳定运动．

当 $\omega=\omega_2$，$\theta=60°$时，木块有上滑趋势，摩擦力指向斜下方，至少需要 $|\mu|=0.186$ 才能维持木块的运动．

若 $\omega=\omega_2$ 不变，木块从 $\theta=60°$处因扰动上移，θ 增大，$d\theta>0$，则由力图 2－5－4，$d|\mu|<0$，$|\mu|=0.186$ 足以维持木块在较大的 θ 处稳定运动，不返回．

若 $\omega=\omega_2$ 不变，木块从 $\theta=60°$处因扰动下移，θ 减小，$d\theta<0$，则由力图 2－5－4，$d|\mu|>0$，$|\mu|=0.186$ 不足以维持，木块将上滑返回 $\theta=60°$处稳定运动．

若 $\theta=60°$不变，因扰动使 ω 增大，$d\omega>0$，则由力图 2－5－4，$d|\mu|>0$，$|\mu|=0.186$ 不足以维持，木块将上滑，以便因 θ 增大使所需的$|\mu|$减小，才能维持以较大的 ω 稳定运动．

若 $\theta=60°$不变，因扰动使 ω 减小，$d\omega<0$，则由力图 2－5－4，$d|\mu|<0$，$|\mu|=0.186$ 足以维持木块在 $\theta=60°$处以较小的 ω 稳定运动．

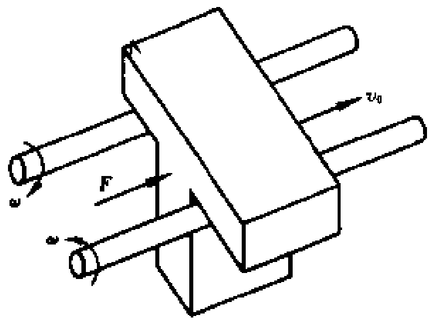
综上所述，在 $\theta=60°$以及 $\omega=\omega_1$ 或 $\omega=\omega_2$ 的条件下，当扰动引起了 $d\theta$ 的变动时，木块或返回原处或在稍大、稍小的 θ 处，均能维持稳定的运动；当扰动引起了 $d\omega$ 的变动时，木块在原处或在稍大、稍小的 θ 处，均能维持以较大或较小的 ω 稳定运动．总之，在上述各种情况下，扰动都不会急剧增长，因此木块的运动是稳定的．

【本题是 1976 年第 9 届国际中学生物理奥林匹克竞赛(IPhO)试题．】

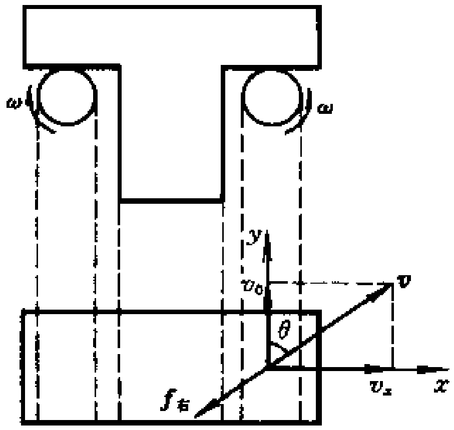
【题 6】 如力图 2－6－1，一质量为 $m=20$ kg 的对称钢件，架在两个完全相同的平行长直滚轴上．两滚轴在同一水平面内，滚轴半径为 $r=0.025$ m，绕各自的中心轴以相同的角速度 $\omega=40$ rad/s 作反向转动．钢件与滚轴间的摩擦系数为 $\mu=0.20$．为使钢件以 $v_0=0.050$ m/s 的速度沿滚轴作匀速直线运动，需沿滚轴的长度方向对钢件施以水平作用力 F，试求 F 的大小．

【分析】 钢件作匀速直线运动，故所受合力应为零．钢件受力为：重力 mg，竖直向下；滚轴支持力 N，竖直向上(因钢件和滚轴均对称，故左、右滚轴各提供$\frac{N}{2}$的支持力)；水平推力 F；滚轴的摩擦力 f.

本题的关键是滚轴与钢件之间的摩擦力 f. 因钢件相对滚轴滑动，故其间的摩擦力是滑动摩擦力．因两滚轴在同一水平面内，钢件架置其上，两者的接触面是水平面，故摩擦力的方向总是在水平面内，无竖直分量．因是滑动摩擦力，其大小由摩擦系数 μ 与正压力 N 决定．因有左、右两滚轴，摩擦力应由左、右两部分构成．无论左、右摩擦力，其方向均取决于滚轴与钢件相对运动的方向．本题中的相对运动是钢件在滚轴上以 v_0 为速度的平移运动以及滚轴转动这两种运动的叠加，求出相对速度的方向，便可确定左、右摩擦力的方向．左、右摩擦力的大小和方向都求出后，其矢量和应与水平推力 F 抵消，于是 F 可求．



力图 2-6-1



力图 2-6-2

【解】 力图 2-6-1 是立体图，力图 2-6-2 是它的两个剖面图．如力图 2-6-2 所示，取水平面为 xy 平面，取 y 轴为钢件水平速度 $\boldsymbol{v}_0$ 的方向，x 轴与之垂直．

首先确定钢件所受右滚轴的摩擦力 $f_右$ 的方向，为此，须确定钢件相对右滚轴的相对速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向．如力图 2-6-2，钢件在 y 方向的相对分速度为

$$v_y = v_0$$

钢件在 x 方向的相对分速度为

$$v_x = \omega r$$

故合成的相对速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向由下式决定，为

$$\tan\theta = \frac{v_x}{v_y} = \frac{\omega r}{v_0}$$

$f_右$的方向与相对速度 $\boldsymbol{v}$ 反向，如力图 2-6-2 所示．$f_右$在 y 方向的投影为

$$f_右 \cos\theta = f_右 \frac{v_0}{v} = f_右 \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + (\omega r)^2}}$$

$$=\frac{f_{右}}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega r}{v_0}\right)^2}}$$

对于左滚轴，因与右滚轴对称，$f_{左}$ 的方向和大小可同样确定．不难看出，$f_{右}$的 x 分量与$f_{左}$的 x 分量抵消，$f_{右}$ 的 y 分量与$f_{左}$的 y 分量相同，故总摩擦力 f 等于$f_{右}$的 y 分量的两倍，又因 f 与水平推力 F 相等反向，故有

$$F=f=2f_{右}\cos\theta=\frac{2f_{右}}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega r}{v_0}\right)^2}}$$

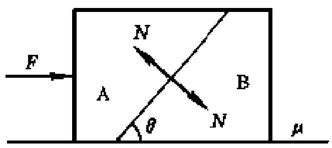
因钢件对称，其重心与两滚轴等距，故左、右滚轴受到的正压力各为$\frac{1}{2}mg$，于是，有

$$f_{右}=\mu\cdot\frac{1}{2}mg$$

由上两式，得

$$F=\frac{\mu mg}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega r}{v_0}\right)^2}}=2.0\ \mathrm{N}$$

【题 7】 如图所示，质量分别为 m_A 和 m_B 的两木块 A 和 B 静止放置在粗糙的水平地面上，两者与地面之间的摩擦系数均为 μ，两木块 A 和 B 的接触面是倾角为 θ 的斜面，接触面是光滑的．现施一水平推力 F 于 A，使 A 和 B 产生向右的加速度，且 A 和 B 之间不发生相对滑动．试问 μ 和 F 各应满足什么条件．



力图 2－7－1

【分析】 本题给出了两点要求：一是在力 F 的作用下，A 和 B 产生不为零的加速度；二是 A 和 B 之间无相对滑动，即 A 不能沿着 B 的斜面上滑．如图，A 和 B 之间通过接触面互施一对作用力和反作用力，其一是 A 给 B 的压力，另一是 B 给 A 的支持力，它们的大小均为 N，它们的方向如图均与斜面垂面．A 和 B 之间无摩擦力．上述两点要求意味着，N 不能太小，否则 N 推不动 B；N 也不能太大，否则 A 将离开地面沿着 B 向上滑动．分别隔离 A 和 B，根据上述要求，可找到 N 的取值范围．N 与μ 有关，于是 μ 的取值范围可求．

当 A 和 B 之间无相对运动时，它们具有共同的加速度．运用牛顿第二定律，根据对 N 的要求，即可求得对 F 的要求．

【解】 设在力 F 的作用下，A 和 B 产生加速度．

先隔离 B，B 受的作用力是：重力 m_Bg，竖直向下；A 的压力 N，方向如图，与 A，B 界面垂直，N 的竖直分量$N\cos\theta$ 向下，N 的水平分量$N\sin\theta$ 向右；地面的支持力，竖直向上，因 B 在竖直方向无运动，故地面向上的支持力为$(m_Bg+N\cos\theta)$；地面的摩擦力，水平向左，大小为 $\mu(m_Bg+N\cos\theta)$，在水平方向用牛顿第二定律，有

$$N\sin\theta-\mu(m_Bg+N\cos\theta)=m_Ba>0 \tag{1}$$

式中 a 是 B 的加速度，本题要求它大于零．

再隔离 A.A 受的作用力是：重力 m_Ag，竖直向下；B 的支持力 N，方向如图，与 A、B 界面垂直，N 的竖直分量 $N\cos\theta$ 向上；还有地面支持力（竖直向上）和推力 F（水平方向）. 为使 A 不离开地面（即使 A、B 之间不产生相对滑动），要求

$$N\cos\theta \leqslant m_Ag \tag{2}$$

由(1)式，有

$$N(\sin\theta - \mu\cos\theta) > \mu m_Bg \tag{3}$$

(2)式和(3)式给出了 N 的如下取值范围：

$$\frac{m_Ag}{\cos\theta} \geqslant N > \frac{\mu m_Bg}{\sin\theta - \mu\cos\theta}$$

即

$$\frac{m_Ag}{\cos\theta} > \frac{\mu m_Ag}{\sin\theta - \mu\cos\theta}$$

由此得出 μ 的取值范围为

$$\mu < \frac{m_A}{m_A + m_B}\tan\theta$$

当 μ 满足上式时，A 和 B 将以共同的加速度 a 运动 .A 对地面的正压力为$(m_Ag - N\cos\theta)$，A 受地面的水平向左的摩擦力为 $\mu(m_Ag - N\cos\theta)$. 在水平方向对 A 用牛顿第二定律，得

$$F - \mu(m_Ag - N\cos\theta) - N\sin\theta = m_Aa$$

由上式和(1)式，得

$$\frac{N\sin\theta - \mu(m_Bg + N\cos\theta)}{m_B} = \frac{F - \mu(m_Ag - N\cos\theta) - N\sin\theta}{m_A}$$

即

$$F = N(\sin\theta - \mu\cos\theta)\left(1 + \frac{m_A}{m_B}\right) \tag{4}$$

把(3)式代入(4)式，得出 F 应满足的条件是

$$F > \mu(m_A + m_B)g \tag{5}$$

(5)式的条件也可把 A 和 B 看作一个整体自然地得出 .

把(2)式代入(4)式，得出 F 应满足的另一条件是

$$F \leqslant \frac{m_Ag}{\cos\theta}(\sin\theta - \mu\cos\theta)\left(1 + \frac{m_A}{m_B}\right)$$

即

$$F \leqslant \frac{m_A}{m_B}(m_A + m_B)(\tan\theta - \mu)g \tag{6}$$

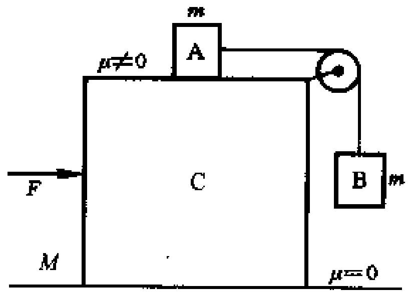
综合(5)式和(6)式，推力 F 的取值范围应为

$$\mu(m_A + m_B)g < F \leqslant \frac{m_A}{m_B}(m_A + m_B)(\tan\theta - \mu)g$$

【题 8】 如力图 2－8－1 所示，质量为 M 的滑块 C 放置在光滑桌面上 . 质量均为 m 的两个重

物A和B用细绳相连，A平放在滑块上，与滑块间的摩擦系数为μ，细绳跨过滑轮后将B竖直悬挂．设细绳和滑轮的质量均忽略不计，滑轮转轴不受摩擦力．今以水平推力F作用于滑块，为使重物A和B与滑块保持相对静止，试问F至少应多大？

【分析】 假定两重物A和B与滑块C相对静止，它们在水平推力F的作用具有共同的加速度a，分别隔离两重物A和B，运用牛顿第二定律求出重物A应受的静摩擦力f.A和B与滑块相对静止的条件为$f \leqslant f_{max}$，由此条件可确定对加速度a的要求，进而即可确定对F的要求．



力图 2-8-1

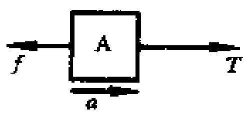
又，当B与A和滑块相对静止地以加速度a向右运动时，悬挂B的细绳必定向后（向左边）倾斜，以便使B所受绳的张力有向右的水平分量，提供B以a向右运动所需的作用力．

【解】 当两重物A和B相对质量为M的滑块C静止时，整个系统在水平推力F作用下，具有的共同加速度a为

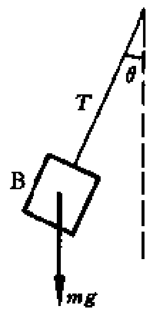
$$a=\frac{F}{M+2m}$$

如力图2-8-2，隔离A，A受细绳张力T，水平向右，受滑块的静摩擦力f，水平向左（此外，还有向下的重力和滑块施予的向上的支持力，两者抵消），对A在水平方向运用牛顿第二定律，有

$$T-f=ma$$



力图 2-8-2



力图 2-8-3

如力图2-8-3，隔离B，B受竖直向下的重力mg和细绳的张力T，因细绳、滑轮质量可略，滑轮转轴又无摩擦，故A和B所受绳的张力的大小应相同，均为T. 因B具有水平方向的向右加速度a，故B所受合力必定沿水平方向向右，于是悬挂B的细绳必定向左倾斜以便提供向右的水平分力．如力图2-8-3，设细绳与铅垂线的夹角为θ，对B分别在水平方向和竖直方向运用牛顿第二定律，得

$$\begin{cases} T\sin\theta=ma \\ T\cos\theta-mg=0 \end{cases}$$

由以上三式，解出

$$f=ma\left(\sqrt{1+\left(\frac{g}{a}\right)^2}-1\right)$$

这是维持A,B,C三者相对静止所需的静摩擦力．从上式可知，不论a的大小如何，总有$f>0$，

即滑块 M 施予重物 A 的静摩擦力 f 的方向总是沿水平指向左方(见力图 2－8－2).

如力图 2－8－2,静摩擦力的最大值为

$$f_{\max}=\mu N=\mu mg$$

因此维持 A,B,C 三者相对静止所需的静摩擦力 f 不可能比 $f_{\max}$大,即维持三者相对静止的条件为

$$f\leqslant f_{\max}=\mu mg$$

把 f 的结果代入,得

$$ma\left[\sqrt{1+\left(\frac{g}{a}\right)^2}-1\right]\leqslant\mu mg$$

即

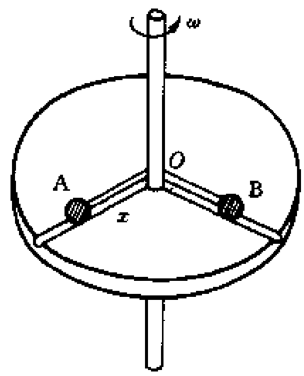
$$a\geqslant\frac{1-\mu^2}{2\mu}g$$

故水平推力 F 应满足的条件是

$$F\geqslant\frac{1-\mu^2}{2\mu}(M+2m)g$$

注意,当 $\mu<1$ 时,上式右边为正值,表明 F 存在一个最小值．当 $\mu>1$ 时,上式右边为负值,不合理,即上述条件失效．换言之,当 $\mu>1$ 时,F 的大小不受限制,总能维持 A 和 B 相对滑块相对静止．

【题 9】 如图所示,在水平面内有一平台可绕竖直的中心轴以角速度 ω 匀角速旋转．在平台内沿半径方向开有两个沟槽,质量为 m_A 的小球 A 放置在粗糙的沟槽内,球与槽的摩擦系数为 μ;质量为 m_B 的小球B 放置在另一光滑的沟槽内．长度为 l 的细线绕过平台的中心轴,其两端与两球相连．设平台中心轴是半径可略的细轴,且光滑．球 A 的位置可用它到中心点 O 的距离 x 表示．试求在稳定情形下 x 的取值范围．



力图 2－9－1

【分析】 由 A、B 两球构成的系统的稳定位置显然与转速有关,本题就是要寻找这一关系．沟槽的作用是限制两小球只能沿相应的半径方向运动．

先看 B 球,因所在沟槽光滑,B 球在径向只受细线拉力 T 的作用,以提供B 球作圆周运动所需的向心力．因此,不难设想,在任何角速度下,细线总是拉紧的．又若 AO 为 x,则 BO 必为$(l-x)$.

再看 A 球,在稳定情形,A 球在径向受细线拉力 T 和粗糙沟槽的静摩擦力 f 的作用．静摩擦力的方向由 A 球位置和两球质量比决定．f 的大小则受最大静摩擦力 $f_{\max}$的限制,因而稳定条件为 $|f|\leqslant f_{\max}$,由此条件可确定 x 的范围．

【解】 设 A 球所受静摩擦力 f 的方向为沿半径向外,设细绳对 A、B 球的拉力均为 T,对 A、B 球分别运用牛顿第二定律,有

$$T-f=m_A\omega^2 x$$
$$T=m_B\omega^2(l-x)$$

解出

$$f=[m_Bl-(m_A+m_B)x]\omega^2$$

f 的正负，标志了静摩擦力的实际方向，分为以下三种情形．

1．当 $x<\dfrac{m_Bl}{m_A+m_B}$ 时，$[m_Bl-(m_A+m_B)x]>0$，　　　$f>0$

即摩擦力方向为所设的沿半径向外．

2．当 $x=\dfrac{m_Bl}{m_A+m_B}$ 时，$[m_Bl-(m_A+m_B)x]=0$，　　　$f=0$

3．当 $x>\dfrac{m_Bl}{m_A+m_B}$ 时，$[m_Bl-(m_A+m_B)x]<0$，　　　$f<0$

即摩擦力方向与所设相反，为沿半径向内．

A 球对沟槽的正压力为

$$N=m_Ag$$

A 球保持稳定的条件为

$$|f|\leqslant f_{max}=\mu N=\mu m_Ag$$

即

$$-\mu m_Ag\leqslant f\leqslant\mu m_Ag$$

当 $f>0$ 时，应满足的条件是

$$f\leqslant\mu m_Ag$$

将 f 的结果代入，得

$$[m_Bl-(m_A+m_B)x]\omega^2\leqslant\mu m_Ag$$

解出

$$x\geqslant\frac{m_B}{m_A+m_B}l-\frac{\mu m_Ag}{(m_A+m_B)\omega^2}=x_{min}$$

x_{min} 是能维持稳定的 x 的最小值．

当 $f<0$ 时，应满足的条件是

$$f\geqslant\mu m_Ag$$

将 f 的结果代入，得

$$[m_Bl-(m_A+m_B)x]\omega^2\geqslant-\mu m_Ag$$

解出

$$x\leqslant\frac{m_B}{m_A+m_B}l+\frac{\mu m_Ag}{(m_A+m_B)\omega^2}=x_{max}$$

x_{max} 是能维持稳定的 x 的最大值．

总之，A 球的位置 x 需在下述范围内才能维持稳定

$$\frac{m_Bl}{m_A+m_B}-\frac{\mu m_Ag}{(m_A+m_B)\omega^2}\leqslant x\leqslant\frac{m_Bl}{m_A+m_B}+\frac{\mu m_Ag}{(m_A+m_B)\omega^2}$$

必须指出，从 x_{min} 和 x_{max} 的结果可知，在任何角速度 ω 下，总存在某个 x_{max}，但为使 x_{min} 有意义，即为使 $x_{min}\geqslant0$，角速度 ω 必须满足

$$\omega^2 \geqslant \frac{\mu m_A g}{m_B l}$$

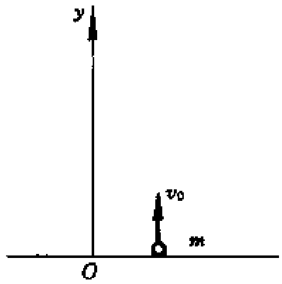
特别是当 $\omega^2 = \frac{\mu m_A g}{m_B l}$ 时，$x_{min}=0$，当 ω 小于此临界值时，仍有 $x_{min}=0$，因为当 A 球位于 $x=0$，即位于中心点 O 时，满足 $m_B\omega^2 l < \mu m_A g$，即细线拉力小于最大静摩擦力，能维持稳定．

【题 10】 质量为 m 的物体以初速 v_0 从地面竖直上抛，设空气阻力 $f=\mu v^2$，μ 为常数．试求物体达到的最大高度，并证明物体返回原处的速度为 $v_0\sqrt{\frac{mg}{mg+\mu v_0^2}}$．

【分析】 物体上升和下降时，阻力、速度、位移的方向均不同，在列方程和用初条件定积分常数时，为了避免混淆，可取统一的坐标，以确定各量的正、负．又，本题求最大高度和返回速度，给的条件是初速，故求出位移随速度变化的规律解题比较方便．

【解】 如图，取 y 坐标竖直向上，原点在地面上．则上升时，物体的运动方程为

$$m\ddot{y} = -mg - \mu v^2$$



力图 2-10-1

利用

$$\dot{y} = v$$

$$\ddot{y} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy}\dot{y} = v\frac{dv}{dy}$$

把运动方程改写为

$$mv\frac{dv}{dy} = -mg - \mu v^2$$

或

$$\frac{mv}{mg+\mu v^2}dv = -dy$$

积分，得

$$-y = \frac{m}{2\mu}\ln(mg+\mu v^2) + C$$

初条件为

$$t=0 \text{ 时}, \quad y=0, \quad v=v_0$$

故积分常量为

$$C = -\frac{m}{2\mu}\ln(mg+\mu v_0^2)$$

代入，得

$$y = \frac{m}{2\mu}\ln\frac{mg+\mu v_0^2}{mg+\mu v^2}$$

物体达到最高点时，

$$v=0$$

故物体达到的最大高度为

$$y_{max} = \frac{m}{2\mu}\ln\frac{mg+\mu v_0^2}{mg}$$

下降时物体的运动方程为

$$m\ddot{y}=-mg+\mu v^2$$

利用

$$\ddot{y}=\dot{y}\frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}y}$$

把运动方程改写成

$$\dot{y}\mathrm{d}\dot{y}=\left(-g+\frac{\mu}{m}\dot{y}^2\right)\mathrm{d}y$$

或

$$\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}(\dot{y}^2)}{2(-g+\frac{\mu}{m}\dot{y}^2)}$$

积分，得

$$y+C=\frac{m}{2\mu}\ln\left(-g+\frac{\mu}{m}\dot{y}^2\right)$$

初条件为

$$t=0\text{ 时},\quad y=y_{\max},\quad \dot{y}=0$$

故积分常量为

$$C=\frac{m}{2\mu}\ln(-g)-y_{\max}$$

代入，得

$$\frac{m}{2\mu}\ln(-g+\frac{\mu}{m}\dot{y}^2)=y+\frac{m}{2\mu}\ln(-g)-y_{\max}$$

即

$$\frac{m}{2\mu}\ln\frac{-g+\frac{\mu}{m}\dot{y}^2}{-g}=y-y_{\max}$$

落地时的位置和速度为

$$y=0,\qquad v=-\dot{y}$$

故

$$\frac{m}{2\mu}\ln\frac{-mg+\mu v^2}{-mg}=-y_{\max}=-\frac{m}{2\mu}\ln\frac{mg+\mu v_0^2}{mg}$$

即

$$\ln\left[\left(\frac{-mg+\mu v^2}{-mg}\right)\left(\frac{mg+mv_0^2}{mg}\right)\right]=0$$

即

$$\left(1-\frac{\mu v^2}{mg}\right)\left(1+\frac{\mu v_0^2}{mg}\right)=1$$

故物体返回原处的速度为

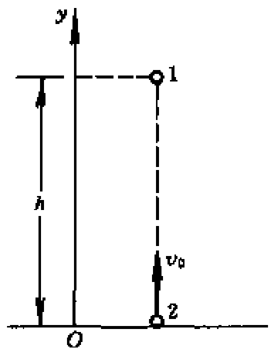
$$v=v_0\sqrt{\frac{mg}{mg+\mu v_0^2}}$$

【题 11】 两质点的质量均为 m,质点 1 从离地面高度为 h 处由静止下落,质点 2 从质点 1 正下方的地面上以初速 v_0 同时竖直上抛．设空气阻力与质点速率成正比,比例系数为 μ(常量)．试求两质点相遇的时间、地点以及相遇时两质点的速度．

【分析】 两质点均受重力和阻力作用,根据牛顿第二定律可列出两质点所遵从的动力方程．注意到两质点处于完全相同的力学环境中,且阻力与速率有线性关系．它们运动状态的差别纯粹由于初始条件不同而引起,因而它们遵从同一动力方程,完全不必对两个质点分别列方程．设置坐标系如图,取地面为坐标原点,y 轴竖直向上．列统一的动力方程时,关键是阻力的表示式．在如图的坐标系中,质点速度用 $\dot{y}$ 表示,因阻力总与速度反向,即与 $\dot{y}$ 反号,故阻力可普遍表示成 $-\mu\dot{y}$,重力方向与 y 轴正方向相反,故可表为 $-mg$．列出适用于两质点的同一动力方程,利用两质点各自的初始条件求解,就可得到两质点的运动情况．

【解】 取坐标如图,两质点的动力方程可统一表为

$$m\ddot{y}=-\mu\dot{y}-mg \tag{1}$$



力图 2－11－1

即

$$\frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu}{m}\dot{y}-g$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\frac{\mu}{m}\dot{y}+g}=-\mathrm{d}t$$

积分,得

$$\ln\left(\frac{\mu}{m}\dot{y}+g\right)=-\frac{\mu}{m}t+C'$$

式中 C'为积分常量,令 $C'=\ln C''$,C''为另一常量,上式可写成

$$\frac{\mu}{m}\dot{y}+g=C''\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{m}t}$$

即

$$\dot{y}=C_1\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{m}t}-\frac{m}{\mu}g \tag{2}$$

式中 $C_1=\frac{m}{\mu}C''$也是一常量．(2)式可改写为

$$\mathrm{d}y=\left(C_1\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{m}t}-\frac{mg}{\mu}\right)\mathrm{d}t$$

积分,得

$$y=-\frac{m}{\mu}C_1\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{m}t}-\frac{mg}{\mu}t+C_2 \tag{3}$$

式中 C_2 是积分常量。

(2)式和(3)式是质点的运动规律，具体的运动情况由两个积分常量 C_1 和 C_2 确定，对于质点 1 和质点 2 可由各自的初始条件分别确定相应的 C_1 和 C_2.

对于质点 1，初条件为

$$t=0\text{ 时},\quad \dot{y}_1=0,\quad y_1=h$$

故两积分常量为

$$C_1=\frac{mg}{\mu},\qquad C_2=h+\frac{m^2g}{\mu^2}$$

代入(2)式和(3)式，得出质点 1 的速度和位置随时间变化的规律为

$$\dot{y}_1=-\frac{mg}{\mu}\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}t}\right) \tag{4}$$

$$y_1=h+\frac{m^2g}{\mu^2}\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}t}\right)-\frac{mg}{\mu}t \tag{5}$$

对于质点 2，初条件为

$$t=0\text{ 时},\quad \dot{y}_2=v_0,\quad y_2=0$$

故两积分常量为

$$C_1=v_0+\frac{mg}{\mu},\qquad C_2=\frac{m}{\mu}\left(v_0+\frac{mg}{\mu}\right)$$

代入(2)式和(3)式，得出质点 2 的速度和位置随时间变化的规律为

$$\dot{y}_2=\left(v_0+\frac{mg}{\mu}\right)e^{-\frac{\mu}{m}t}-\frac{mg}{\mu} \tag{6}$$

$$y_2=\frac{m}{\mu}\left(v_0+\frac{mg}{\mu}\right)\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}t}\right)-\frac{mg}{\mu}t \tag{7}$$

两质点相遇时，

$$y_1=y_2$$

由(5)式和(7)式，两质点相遇时间 t^* 满足，

$$e^{-\frac{\mu}{m}t^*}=1-\frac{\mu h}{mv_0}$$

故

$$t^*=-\frac{m}{\mu}\ln\left(1-\frac{\mu h}{mv_0}\right) \tag{8}$$

把(8)式代入(5)式或(7)式，得出相遇地点为，

$$y^*=\left(1+\frac{mg}{\mu v_0}\right)h+\frac{m^2g}{\mu^2}\ln\left(1-\frac{\mu h}{mv_0}\right) \tag{9}$$

把(8)式分别代入(4)式和(6)式，得出两质点相遇时，各自的速度为

$$\dot{y}_1(t^*)=-\frac{mg}{\mu}\left[1-\left(1-\frac{\mu h}{mv_0}\right)\right]=-\frac{gh}{v_0}$$

$$\dot{y}_2(t^*)=\left(v_0\ \frac{mg}{\mu}\right)\left(1-\frac{\mu h}{mv_0}\right)-\frac{mg}{\mu}=\left(v_0-\frac{gh}{v_0}\right)-\frac{\mu h}{m}$$

【讨论】 1. 当阻力很小时，即当 $\mu\to0$ 时，利用展开式

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}$$

上述结果简化为

$$t^*=\frac{h}{v_0}$$

$$y^*=h-\frac{gh}{2v_0^2}$$

$$\dot{y}_1(t^*)=-\frac{gh}{v_0}$$

$$\dot{y}_2(t^*)=v_0-\frac{gh}{v_0}$$

这正是不考虑空气阻力时的结果．此结果表明，只要允许质点在 $y<0$ 范围内运动（即 $y=0$ 处不是地面而是几何水平面），相遇时间、地点和速度都是有意义的，即两质点总能相遇．

2. 当考虑如题设的空气阻力时，从(8)式和(9)式可知，t^* 和 y^* 只在下述条件下才是有意义的，

$$mv_0>\mu h$$

即只有当

$$v_0>\frac{\mu h}{m}$$

时，两质点才可能相遇．相遇地点总满足

$$y^*>0$$

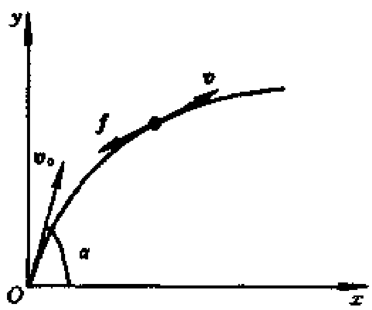
即总在地面之上．相遇时，质点 1 的速度

$$\dot{y}_1(t^*)<0$$

即质点 1 总是处在下降过程之中．而 $\dot{y}_2(t^*)$ 可正可负，这表明相遇时，质点 2 可能处在上升过程，也可能处在下降过程．

【题 12】 质量为 m 的抛射体初速为 v_0，抛射角为 α，在空气中运动时，所受阻力与速率成正比，比例系数为 k．试求轨迹方程，并验证当 $k\to0$ 时变为抛物方程．

【分析】 如图，取平面直角坐标系 Oxy，起抛点为坐标原点 O，x 轴沿水平方向，y 轴垂直地面向上．



力图 2-12-1

抛射体受重力 $-mg\boldsymbol{j}$ 和空气阻力 $\boldsymbol{f}=-k\boldsymbol{v}$，负号表示阻力方向与速度反向．将阻力 $\boldsymbol{f}$ 分解成两个分量 f_x 和 f_y，为

$$\boldsymbol{f}=f_x\boldsymbol{i}+f_y\boldsymbol{j}=-k(v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j})$$

抛射体所受合力 $\boldsymbol{F}$ 为

$$\boldsymbol{F}=-kv_x\boldsymbol{i}-(mg+kv_y)\boldsymbol{j}$$

式中 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 是 x 和 y 轴的单位矢量．

运用牛顿第二定律，在 x 和 y 两个方向上分别列出抛射体

的动力方程．积分，得出 v_x 和 v_y 随时间 t 变化的规律．再积分，得出 x 和 y 随时间 t 变化的规律．消去时间 t，可得轨迹方程．利用 $k \to 0$ 的近似后，轨迹方程应成为抛物方程．

【解】 根据上述力的分析，由牛顿第二定律列出抛射体的动力方程为

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -kv_x \\ m\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -(mg + kv_y) \end{cases}$$

分离变量，得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v_x}{v_x} = -\dfrac{k}{m}\mathrm{d}t \\ \dfrac{k\,\mathrm{d}v_y}{mg + kv_y} = -\dfrac{k}{m}\mathrm{d}t \end{cases}$$

积分，得

$$\begin{cases} \ln v_x = -\dfrac{k}{m}t + C_1 \\ \ln(mg + kv_y) = -\dfrac{k}{m}t + C_2 \end{cases}$$

初条件为 $t = 0$ 时，

$$\begin{cases} v_x = v_0\cos\alpha \\ v_y = v_0\sin\alpha \end{cases}$$

代入，得出积分常量为

$$C_1 = \ln(v_0\cos\alpha)$$

$$C_2 = \ln(mg + kv_0\sin\alpha)$$

于是，有

$$\begin{cases} \ln\dfrac{v_x}{v_0\cos\alpha} = -\dfrac{k}{m}t \\ \ln\left(\dfrac{mg + kv_y}{mg + kv_0\sin\alpha}\right) = -\dfrac{k}{m}t \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} v_x = (v_0\cos\alpha)\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \\ v_y = \left(v_0\sin\alpha + \dfrac{mg}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} - \dfrac{mg}{k} \end{cases}$$

因

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ v_y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

故有

$$\begin{cases}dx=(v_0\cos\alpha)e^{-\frac{k}{m}t}dt\\ dy=\left[\left(v_0\sin\alpha+\frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t}-\frac{mg}{k}\right]dt\end{cases}$$

再积分，得

$$\begin{cases}x=-\frac{m}{k}(v_0\cos\alpha)e^{-\frac{k}{m}t}+C_1'\\ y=-\frac{m}{k}\left(v_0\sin\alpha+\frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t}-\frac{mg}{k}t+C_2'\end{cases}$$

初条件为，$t=0$ 时，

$$\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$$

得出积分常量为

$$\begin{cases}C_1'=\frac{m}{k}v_0\cos\alpha\\ C_2'=\frac{m}{k}\left(v_0\sin\alpha+\frac{mg}{k}\right)\end{cases}$$

于是，得出抛射体运动轨迹的参变方程为

$$\begin{cases}x=\frac{m}{k}(v_0\cos\alpha)(1-e^{-\frac{k}{m}t})\\ y=\frac{m}{k}\left(v_0\sin\alpha+\frac{mg}{k}\right)(1-e^{-\frac{k}{m}t})-\frac{mg}{k}t\end{cases}$$

由以上两式消去时间 t，得出抛射体的轨迹方程为

$$y=\left(\tan\alpha+\frac{mg}{kv_0\cos\alpha}\right)x+\frac{m^2g}{k^2}\ln\left(1-\frac{k}{mv_0\cos\alpha}x\right)$$

当阻力很小，即当 $k\to0$ 时，上式中的

$$\frac{kx}{mv_0\cos\alpha}\ll1$$

利用展开式

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots$$

只取前两项，有

$$\ln\left(1-\frac{kx}{mv_0\cos\alpha}\right)=-\frac{k}{mv_0\cos\alpha}x-\frac{k^2}{2m^2v_0^2\cos^2\alpha}x^2$$

代入轨迹方程，得

$$y=x\tan\alpha-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2$$

这是抛物方程 .

【题 13】 飞机以 $v_0=90$ km/h 的水平速度触地滑行着陆．滑行期间受到的空气阻力为 c_xv^2，升

力为 $c_y v^2$，其中 v 是飞机的滑行速度，两常数之比为 $k=\frac{c_y}{c_x}=5$，称为升阻比．设飞机与跑道之间的摩擦系数为 $\mu=0.10$．试求飞机从触地到停止所滑行的距离．

【分析】 取飞机触地点为坐标原点，取飞机滑行方向为 x 轴．隔离飞机，它在水平方向所受作用力为：摩擦力 μN，空气阻力 $c_x v^2$；在竖直方向所受作用力为：重力 mg，支持力 N，升力 $c_y v^2$．除空气阻力和升力直接与速度 v 有关外，支持力 N 和摩擦力 μN 中的 N 间接与速度 v 有关．应用牛顿第二定律，可建立飞机水平滑行时所遵从的动力方程．本题给出了滑行的初速度 v_0 和末速度（等于零），为求滑行距离，解题目标应是找出飞机位置 x 与速度 v 的函数关系，故应将动力方程设法变换成 v 和 x 遵从的微分方程．

另外，在积分解出的结果中必定包含系数 c_x 和 c_y，题目只给出两者的比值 $k=c_y/c_x$，由此可将 c_x 用 c_y 表示．为了消去剩下的未知的 c_y，可利用飞机水平着陆这一条件．在着陆触地的瞬间，飞机以速度 v_0 水平飞行，支持力 $N=0$，重力应与升力平衡抵消，即有 $mg=c_y v_0^2$，于是 c_y 可知．

【解】 分别在水平方向和垂直方向运用牛顿第二定律，列出方程如下

$$\begin{cases} -\mu N - c_x v^2 = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ N + c_y v^2 - mg = 0 \end{cases}$$

由上两式消去 N，得

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\mu mg - (c_x - \mu c_y)v^2$$

利用

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

得

$$\frac{mv\mathrm{d}v}{\mu mg + (c_x - \mu c_y)v^2} = -\mathrm{d}x$$

积分，得

$$\frac{m}{2(c_x - \mu c_y)}\ln[\mu mg + (c_x - \mu c_y)v^2] = -x + C$$

初条件为

$$t=0\text{ 时}，\quad x=0，\quad v=v_0$$

故积分常量为

$$C = \frac{m}{2(c_x - \mu c_y)}\ln[\mu mg + (c_x - \mu c_y)v_0^2]$$

代入，得

$$x = -\frac{m}{2(c_x - \mu c_y)}\ln\left[\frac{\mu mg + (c_x - \mu c_y)v^2}{\mu mg + (c_x - \mu c_y)v_0^2}\right]$$

在飞机触地的瞬间，$v=v_0$，支持力 $N=0$，由运动方程，得

$$mg = c_y v_0^2$$

又已知

$$\frac{c_y}{c_x}=k=5$$

把以上两式代入 $x(v)$ 表达式，得

$$x=-\frac{c_y v_0^2}{2g(c_x-\mu c_y)}\ln\left[\frac{\mu c_y v_0^2+(c_x-\mu c_y)v^2}{c_x v_0^2}\right]$$

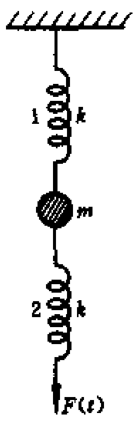
$$=-\frac{v_0^2}{2g(\frac{1}{k}-\mu)}\ln\left[\mu k+(1-\mu k)\frac{v^2}{v_0^2}\right]$$

设飞机从触地到停止所滑行的距离为 S，则当 $v=0$ 时，$x=S$，故有

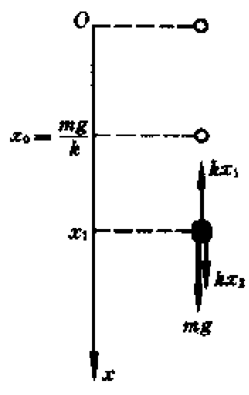
$$S=-\frac{v_0^2}{2g(\frac{1}{k}-\mu)}\ln\mu k=-\frac{v_0^2}{0.2g}\ln\frac{1}{2}=221\text{ m}$$

【题 14】 如力图 2－14－1，质量为 m 的小球用一质量可略的弹簧 1 竖直悬挂起来，弹簧的劲度系数为 k．当弹簧的伸长量超过临界长度 $l_C\left(l_C>\frac{mg}{k}\right)$时，弹簧将被拉断．在小球下方再挂完全相同的另一弹簧 2，并在其下端施一与时间 t 有关的拉力 $F(t)$．若以小球在平衡位置时作为计时起点，则拉力随时间变化的关系为 $F(t)=\alpha t$，其中 α 是一恒定参量．试求两弹簧同时被拉断时，参量 α 应满足的关系式．

【分析】 参量 α 的大小决定了拉力作用的快慢(确切地说，决定了拉力增大的快慢)．直观地看，快拉(拉力迅速增大)时弹簧 2 先被拉断，慢拉(拉力缓慢增大)时弹簧 1 先被拉断，不快不慢(拉力适当增大)时两弹簧可能同时被拉断．本题所求即为两弹簧同时被拉断时，α 应遵从的关系式．



力图 2－14－1



力图 2－14－2

如力图 2－14－2，取弹簧为原长时小球的位置为坐标原点 O，取 x 轴竖直向下，则小球的平衡位置为 $x_0=\frac{mg}{k}$．拉力 F 作用于弹簧 2 后，小球开始向下运动，设在任意时刻 t，小球位于 x_1 处，x_1 也就是弹簧 1 在 t 时刻的伸长量，设此时(时刻 t)弹簧 2 的伸长量为 x_2，因弹簧的质量可

略，故此时弹簧 2 作用到小球的向下的弹性力 kx_2（小球对弹簧 2 的作用力当然也是 kx_2，但反向）应等于拉力 $F(t)$，即有

$$kx_2 = F(t) = \alpha t \tag{1}$$

在时刻 t，小球还受到弹簧 1 向上的拉力 kx_1 以及向下的重力 mg 的作用．用牛顿第二定律列出小球运动所遵守的微分方程，可解出弹簧 1 的伸长量 x_1 随时间 t 变化的规律．(1)式实际上给出了弹簧 2 的伸长量 x_2 随时间 t 变化的规律．于是可得出两弹簧的伸长量同时达到临界长度 l_C，即同时被拉断的条件．

【解】 根据以上分析，由牛顿第二定律，小球的动力方程为

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + mg + F(t)$$

即

$$\ddot{x}_1 + \frac{k}{m}x_1 = g + \frac{F(t)}{m}$$

令 $\omega^2 = \frac{k}{m}$，将 $F(t) = \alpha t$ 代入，得

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = g + \frac{\alpha}{m}t \tag{2}$$

方程(2)对应的齐次方程的通解为$(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t)$，其中 C_1 和 C_2 为两个任意常数，非齐次方程的特解为$\left(\frac{g}{\omega^2} + \frac{\alpha}{k}t\right)$（代入微分方程(2)式容易验证这些结果）．故方程(2)的通解为

$$x_1 = \frac{g}{\omega^2} + \frac{\alpha}{k}t + C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$$

常量 C_1 和 C_2 可由初条件决定．$t=0$ 时，小球位于 $x_0 = \frac{mg}{k}$；初速为零，故有

$$x_1(0) = \frac{g}{\omega^2} + C_1 = \frac{mg}{k} = \frac{g}{\omega^2}$$

$$\dot{x}_1(0) = \frac{\alpha}{k} + C_2\omega = 0$$

由以上两式，得

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = -\frac{\alpha}{k\omega}$$

故弹簧 1 的伸长量 x_1 随时间 t 变化的规律为

$$x_1 = \frac{g}{\omega^2} + \frac{\alpha}{k}t - \frac{\alpha}{k\omega}\sin\omega t = \frac{mg}{k} + \frac{\alpha}{k}t - \frac{\alpha}{k\omega}\sin\omega t \tag{3}$$

由(1)式，弹簧 2 的伸长量 x_2 随时间 t 变化的规律为

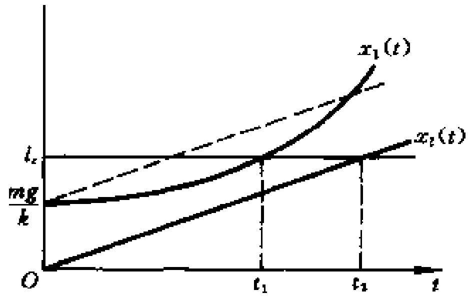
$$x_2 = \frac{\alpha}{k}t \tag{4}$$

方程(3)是由直线函数与正弦函数叠加而成，方程(4)是直线函数．不难看出，两条直线的斜率相同．$x_1(t)$和 $x_2(t)$两条曲线如力图 2－14－3 和力图 2－14－4 所示．力图 2－14－3 是 α 较小（即慢拉）的情形，直线的斜率较小，x_1 首先达到拉断的临界长度 l_C，弹簧 1 先断，弹簧 2 后断．

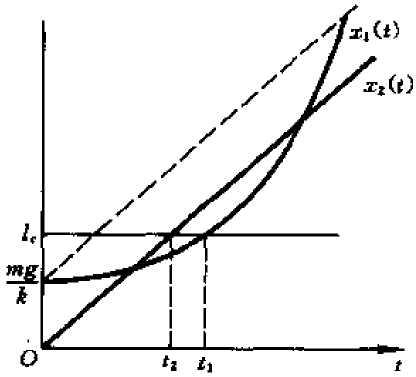
力图 2－14－4 是 α 较大(即快拉)的情形，直线的斜率较大，x_2 首先达到拉断的临界长度 l_C，弹簧 2 先断，弹簧 1 后断．

设在 t_0 时刻两弹簧同时被拉断，即在 t_0 时刻 x_1 和 x_2 同时达到 l_C，则由(3)式和(4)式，有

$$l_C=\frac{g}{\omega^2}+\frac{\alpha}{k}\cdot\frac{k}{\alpha}l_C-\frac{\alpha}{k\omega}\sin\left(\omega\frac{kl_C}{\alpha}\right)$$



力图 2－14－3



力图 2－14－4

即

$$\frac{g}{\omega}=\frac{\alpha}{k}\sin\left(\frac{\omega kl_C}{\alpha}\right)$$

将 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ 代入，得

$$\sin\left(\frac{kl_C}{\alpha}\sqrt{\frac{k}{m}}\right)=\frac{mg}{\alpha}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

这就是为了使弹簧 1 和弹簧 2 同时被拉断，参量 α 应满足的关系式．

【题 15】 如力图 2－15－1，质量为 M、倾角为 θ 的斜面体放在光滑的桌面上，斜面体上有质量为 m 的木块，木块与斜面体之间的摩擦系数 $\mu<\tan\theta$，以水平力 F 推斜面体，使之运动．试问为了使木块相对于斜面体保持静止，F 的大小应在什么范围．

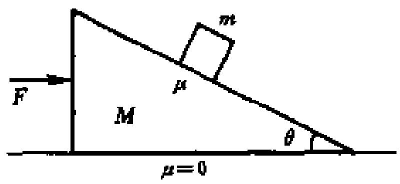
【分析】 m 和 M 相对静止时有共同的加速度 a，若推力 F 较小，a 较小，m 有下滑趋势；F 较大，a 较大，m 有上滑趋势．故 m 和 M 保持相对静止是靠其间的摩擦力 f 维持的，由 f 的可能取值范围 $-\mu N\leqslant f\leqslant\mu N$，可得出相应的 a 以及 F 的范围．

由于题目要求 m、M 相对静止，在讨论 m 的运动时，取 M 为参考系较为方便．当然，由于 M 系是非惯性系，需计及惯性力．

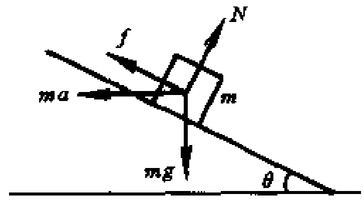
【解】 如力图 2－15－1，当 m 和 M 相对静止时，在力 F 的推动下，它们共同的加速度为

$$a=\frac{F}{m+M}$$

如力图 2－15－2，取 M 为参考系，则 m 受重力 mg，支持力 N，摩擦力 f(设方向沿斜面向上)，以及惯性力 ma．因在 M 系中 m 静止，故合力为零，按垂直和平行斜面方向分解，得



力图 2-15-1



力图 2-15-2

$$\begin{cases} mg\sin\theta - ma\cos\theta - f = 0 \\ N - mg\cos\theta - ma\sin\theta = 0 \end{cases}$$

解出

$$\begin{cases} f = m(g\sin\theta - a\cos\theta) \\ N = m(g\cos\theta + a\sin\theta) \end{cases}$$

m 与 M 保持相对静止的条件为 $|f| \leqslant \mu N$，即

$$-\mu N \leqslant f \leqslant \mu N$$

当 $f>0$ 时，$f \leqslant \mu N$，摩擦力方向与假设相同，即要求

$$m(g\sin\theta - a\cos\theta) \leqslant \mu m(g\cos\theta + a\sin\theta)$$

故

$$a \geqslant \frac{g\sin\theta - \mu g\cos\theta}{\mu\sin\theta + \cos\theta} = \frac{g(\tan\theta - \mu)}{\mu\tan\theta + 1}$$

即

$$F \geqslant (M+m)g\,\frac{\tan\theta - \mu}{1 + \mu\tan\theta}$$

当 $f<0$ 时，$f \geqslant -\mu N$，摩擦力方向与假设相反，即要求

$$m(g\sin\theta - a\cos\theta) \geqslant -\mu m(g\cos\theta + a\sin\theta)$$

故

$$a \leqslant \frac{g(\tan\theta + \mu)}{1 - \mu\tan\theta}$$

即

$$F \leqslant (M+m)g\,\frac{\tan\theta + \mu}{1 - \mu\tan\theta}$$

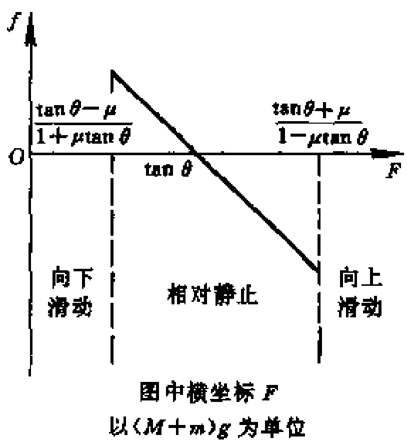
因此，为了保持 m 和 M 相对静止，推力 F 取值的范围应为

$$(M+m)g\,\frac{\tan\theta - \mu}{1 + \mu\tan\theta} \leqslant F \leqslant (M+m)g\,\frac{\tan\theta + \mu}{1 - \mu\tan\theta}$$

于是，为保持 m 和 M 相对静止所必须的静摩擦力为

$$f = m\left(g\sin\theta - \frac{F}{M+m}\cos\theta\right)$$

f 与 F 的关系如力图 2-15-3 中的直线所示．力图 2-15-3



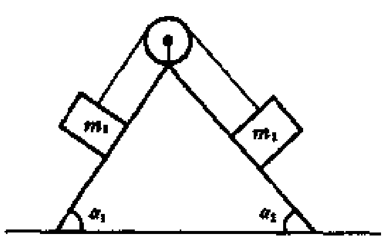
力图 2-15-3

中的横坐标 F 以 $(M+m)g$ 为单位．力图 2-15-3 中还标明了 m 和 M 的相对运动状况，当力 F 的大小超出上述范围时，m 将产生向下或向上的相对滑动．

【讨论】 题目给定的条件 $\mu<\tan\theta$ 是为了确保 F 有非零的下限，若 $\mu>\tan\theta$，容易证明 $F=0$（即斜面体静止）时就能保证木块 m 不下滑．

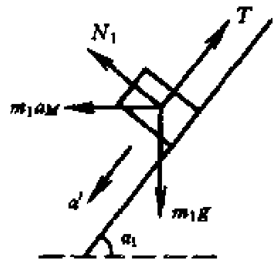
另外，当 θ 角足够大，以致 $\tan\theta>\frac{1}{\mu}$ 时，F 的上限条件就失去意义了．事实上，在此情形下，无论 F 多大，木块 m 的下滑趋势总是胜过上滑趋势．例如在 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，m 根本无上滑趋势，F 的上限条件失效．

【题 16】 如力图 2-16-1，地面上有一质量为 M，倾角为 α_1、α_2 的斜面体．质量为 m_1 和 m_2 的两木块分别置于斜面体两侧，用绳经滑轮相连．设地面、斜面、滑轮的摩擦以及绳子和滑轮的质量均可忽略，绳不可伸长．试求 m_1（或 m_2）相对 M 的加速度以及 M 的绝对加速度．

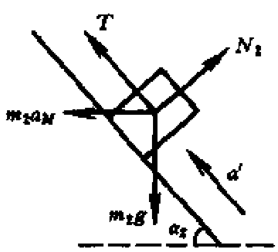


力图 2-16-1

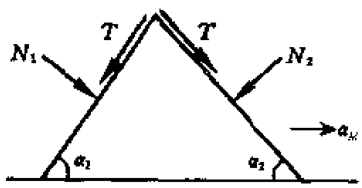
【分析】 取 M 作参考系为宜，因为求的是 m_1 或 m_2 相对 M 的加速度．另外，m_1 和 m_2 以及 M 三者的运动是关联的，在 M 参考系中这种关联的表达比较简单．由于 M 系是非惯性系，在分析 m_1 或 m_2 受力时应计及惯性力．当然，求 M 的绝对加速度时，则应取地面作参考系．



力图 2-16-2



力图 2-16-3



力图 2-16-4

【解】 取斜面体 M 为参考系，考察 m_1 和 m_2 的运动．设 M 相对地面的加速度为 a_M，方向向右；设 m_1 和 m_2 相对于 M 的加速度为 a'，方向如力图 2-16-2 和力图 2-16-3 所示．

如力图 2-16-2，m_1 受重力 m_1g，支持力 N，张力 T，惯性力 m_1a_M；如力图 2-16-3，m_2 受重力 m_2g，支持力 N，张力 T，惯性力 m_2a_M．按平行和垂直斜面方向，列出 m_1 和 m_2 的运动方程为，

$$\begin{cases}m_1g\sin\alpha_1+m_1a_M\cos\alpha_1-T=m_1a' & (1)\\ N_1+m_1a_M\sin\alpha_1-m_1g\cos\alpha_1=0 & (2)\end{cases}$$

以及

$$\begin{cases}T+m_2a_M\cos\alpha_2-m_2g\sin\alpha_2=m_2a' & (3)\\ N_2-m_2a_M\sin\alpha_2-m_2g\cos\alpha_2=0 & (4)\end{cases}$$

取地面为参考系，M 受力如力图 2-16-4 所示（重力 Mg 与地面支持力 N 不影响其水平运动，且抵消，故不计），设 M 的加速度为 a_M，方向向右，则 M 的运动方程为

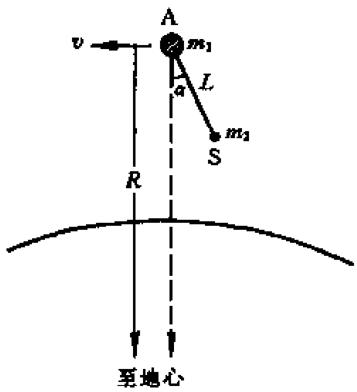
$$N_1\sin\alpha_1 - N_2\sin\alpha_2 + T\cos\alpha_2 - T\cos\alpha_1 = Ma_M \tag{5}$$

(1)、(2)、(3)、(4)、(5)式联立求解，得

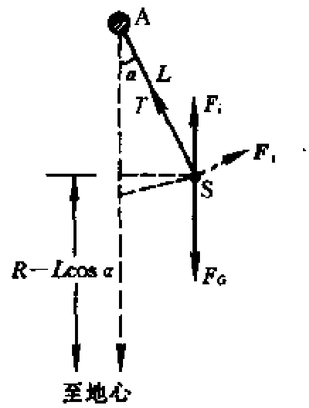
$$a_M = \frac{(m_1\cos\alpha_1 + m_2\cos\alpha_2)(m_1\sin\alpha_1 - m_2\sin\alpha_2)}{(m_1+m_2)(M+m_1+m_2)-(m_1\cos\alpha_1+m_2\cos\alpha_2)}g$$

$$a' = \frac{(M+m_1+m_2)(m_1\sin\alpha_1 - m_2\sin\alpha_2)}{(m_1+m_2)(M+m_1+m_2)-(m_1\cos\alpha_1+m_2\cos\alpha_2)}g$$

【题 17】 如力图 2-17-1，质量为 m_1 的航天飞机 A 绕地球作匀速圆周运动，轨道半径为 R，从航天飞机伸出一长度为 $L(L\ll R)$ 的刚性杆，杆端固定一质量为 $m_2(m_2\ll m_1)$ 的卫星 S. 设 A 和 S 均可看作质点，A-S 系统的位置用 α 角表示，α 角是杆与 A 和地心连线之间的夹角．试求 A-S 系统的平衡位置，并讨论平衡的稳定性．



力图 2-17-1



力图 2-17-2

【分析】 如力图 2-17-2，取 A 为参考系来考虑卫星 S 的运动．S 受杆的拉力 T 和地球引力 F_G 的作用．因 A 本身是转动系统，以 A 为参考系时，S 还应受惯性离心力 F_i 的作用．严格说来，$\boldsymbol{F}_G$ 和 $\boldsymbol{F}_i$ 的方向均应沿 S 和地心的连线，由于 $L\ll R$，$\boldsymbol{F}_G$ 和 $\boldsymbol{F}_i$ 的方向均可看作平行于 A 与地心的连线．在参考系 A 中，S 将绕 A 作圆周运动，计算 S 所受合力的切向分量 F_t，$F_t=0$ 的位置就是 A-S 系统的平衡位置．然后分别讨论各平衡位置的稳定性．

【解】 在参考系 A 中，卫星 S 受三个作用力，为

$$\begin{cases}\text{杆的拉力} & T\\ \text{地球引力} & F_G = G\dfrac{m_2M_{地}}{(R-L\cos\alpha)^2}\\ \text{惯性离心力} & F_i = m_2\omega^2(R-L\cos\alpha)\end{cases}$$

其中 ω 是航天飞机 A 绕地球运动的角速度，由下式决定，

$$G\frac{m_1M_{地}}{R^2}=m_1\omega^2R$$

即

$$\omega^2=\frac{GM_{地}}{R^3}$$

根据条件 $L\ll R$，可将上述 F_G 的表达式简化如下：

$$\begin{aligned}F_G&=m_2\frac{GM_{地}}{R^2}\left(1-\frac{L\cos\alpha}{R}\right)^{-2}\\&\approx m_2\frac{GM_{地}}{R^2}\left(1+\frac{2L\cos\alpha}{R}\right)\\&=m_2\omega^2R\left(1+\frac{2L\cos\alpha}{R}\right)\\&=m_2\omega^2R+2m_2\omega^2L\cos\alpha\end{aligned}$$

卫星 S 所受合力的切向分量 F_t（其正方向如力图 2－17－2 所示）为

$$\begin{aligned}F_t&=(F_i-F_G)\sin\alpha=m_2[\omega^2(R-L\cos\alpha)-\omega^2R-2\omega^2L\cos\alpha]\sin\alpha\\&=-3m_2\omega^2L\cos\alpha\sin\alpha=-\frac{3}{2}m_2\omega^2L\sin2\alpha\end{aligned}$$

卫星 S 的平衡位置由所受合力的切向分量为零的条件确定．由 $F_t=0$ 求得卫星的平衡位置为

$$\alpha=0,\quad\frac{\pi}{2},\quad\pi,\quad\frac{3\pi}{2}$$

当 $\alpha=0$ 时，若 α 稍有增大，则 $\sin2\alpha>0$，故 $F_t<0$，切向力指向与力图 2－17－2 所示方向相反，即指向 $\alpha=0$ 的位置；若 α 稍有减小，α 变为负值，则 $\sin2\alpha<0$，故 $F_t>0$，切向力指向与力图 2－17－2 所示方向相同，即指向 $\alpha=0$ 的位置．总之，在 $\alpha=0$ 附近，切向力是回复力，$\alpha=0$ 是稳定平衡的位置．

当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，若 α 稍有增大，则 $\sin2\alpha<0$，$F_t>0$，切向力使 α 角进一步增大；若 α 稍有减小，则 $\sin2\alpha>0$，$F_t<0$，切向力使 α 角进一步减小．总之，$\alpha=\frac{\pi}{2}$ 是不稳定平衡的位置．

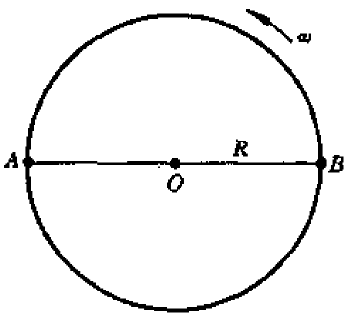
同样分析可知，$\alpha=\pi$ 是稳定平衡的位置，$\alpha=\frac{3\pi}{2}$ 是不稳定平衡的位置．

总之，当刚性杆与 A 及地心连线一致时是稳定平衡位置；当刚性杆与 A 及地心连线垂直时是不稳定平衡位置．

【题 18】 如力图 2－18－1，半径为 R 的圆盘与水平面平行，绕通过盘中心 O 的竖直轴以角速度 ω 匀速旋转．盘边缘 A 点处的射手相对于圆盘以水平初速 v_0 发射子弹，目标是直径 AB 的另一端点 B．设子弹速度远大于盘的转速，且发射子弹不影响圆盘的角速度，设空气阻力可忽略．试问射手应瞄准何方才能击中目标？从射手看来，子弹的轨迹如何？

【分析】 本题选圆盘作参考系较方便．在旋转的非惯性系中，子弹在水平面内除受惯性离心力 $-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$ 外，还因有相对速度而受科里奥利力 $-2m\,\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$ 的作用．因题设子弹速度远大于圆盘转速，即 $|\boldsymbol{v}|\gg|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}|$，故惯性离心力可忽略．又因子弹速度很大，竖直方向的运动可不考虑．

解此题有两种方法．一是根据子弹受力情况列出动力方程，通过积分运算求出子弹的轨迹．击中目标意味着运动轨迹必须通过 B 点，由此可求出发射方向．另一是根据子弹的受力特点，直接判断其运动轨迹，借助于几何方法得到子弹的运动轨迹．



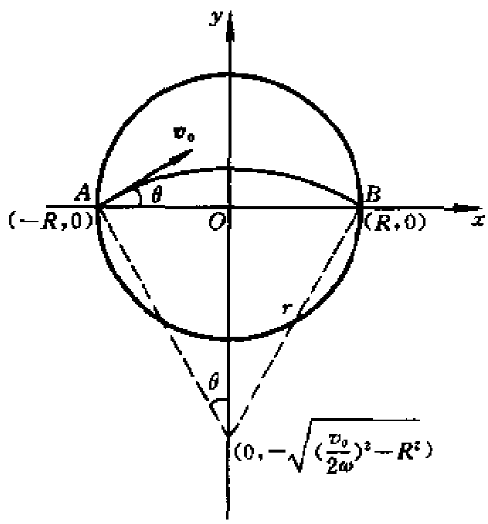
力图 2－18－1

【解】 方法一．取圆盘为参考系，如力图 2－18－2，取直角坐标 $Oxyz$，原点 O 在圆盘中心，xy 平面为盘面，z 轴垂直于盘面．A 和 B 两点的坐标分别为 $(-R,0)$ 和 $(R,0)$．设子弹初速 $\boldsymbol{v}_0$ 与 x 轴的夹角为 θ．子弹的动力方程为

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 是子弹在 xy 平面内的位矢，$\boldsymbol{v}$ 是子弹相对于圆盘的速度．在所设置的坐标系中，

$$\boldsymbol{r}=(x,y,0)$$
$$\boldsymbol{\omega}=(0,0,\omega)$$
$$\boldsymbol{v}=(\dot{x},\dot{y},0)$$



力图 2－18－2

代入动力方程，写成分量形式，得

$$\begin{cases}\ddot{x}=2\omega\dot{y}\\ \ddot{y}=-2\omega\dot{x}\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\mathrm{d}\dot{x}=2\omega\mathrm{d}y\\ \mathrm{d}\dot{y}=-2\omega\mathrm{d}x\end{cases}$$

积分，得

$$\begin{cases}\dot{x}=2\omega y+C_1\\ \dot{y}=-2\omega x+C_2\end{cases}$$

初条件为，当 $x=-R$，$y=0$ 时，

$$\dot{x}=v_0\cos\theta,\quad \dot{y}=v_0\sin\theta$$

故积分常量为

$$C_1=v_0\cos\theta$$
$$C_2=v_0\sin\theta-2\omega R$$

代入，得

$$\begin{cases}\dot{x}=2\omega y+v_0\cos\theta\\ \dot{y}=-2\omega x+v_0\sin\theta-2\omega R\\ \quad=-2\omega(x+R)+v_0\sin\theta\end{cases}$$

两式相除，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{2\omega y+v_0\cos\theta}{-2\omega(x+R)+v_0\sin\theta}$$

即

$$[-2\omega(x+R)+v_0\sin\theta]\mathrm{d}x=(2\omega y+v_0\cos\theta)\mathrm{d}y$$

再积分，得轨迹方程为

$$-\omega(x+R)^2+(v_0\sin\theta)x=\omega y^2+(v_0\cos\theta)y+C$$

因 $x=-R, y=0$ 是轨迹曲线上的一点，故积分常量为

$$C=-v_0R\sin\theta$$

代入轨迹方程，得

$$-\omega(x+R)^2+(v_0\sin\theta)x=\omega y^2+(v_0\cos\theta)y-v_0R\sin\theta$$

或写成

$$\left(x+R-\frac{v_0}{2\omega}\sin\theta\right)^2+\left(y+\frac{v_0}{2\omega}\cos\theta\right)^2=\frac{v_0^2}{4\omega^2}$$

这是一个圆的方程．

为了使子弹能击中目标 B，上述圆必须通过 B 点，把 B 点的坐标 $x=R, y=0$ 代入，得

$$\sin\theta=\frac{2\omega R}{v_0}$$

所以，为了能击中目标 B，从 A 点以 v_0 发射的子弹的方位角应为

$$\theta=\arcsin\left(\frac{2\omega R}{v_0}\right)$$

相应的轨迹方程为

$$x^2+\left[y+\sqrt{\left(\frac{v_0}{2\omega}\right)^2-R^2}\right]^2=\frac{v_0^2}{4\omega^2}$$

这是圆心位于$\left[0,-\sqrt{\left(\frac{v_0}{2\omega}\right)^2-R^2}\right]$，半径 $r=\frac{v_0}{2\omega}$的圆的方程．如力图 2－18－2 所示．

方法二．因科里奥利力为

$$\boldsymbol{F}_c=2m\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}$$

其方向总是与 $\boldsymbol{v}$ 垂直的，故子弹在水平面内相对于圆盘作匀速圆周运动，$\boldsymbol{F}_c$ 提供所需的向心力．由牛顿第二定律，有

$$2mv_0\omega=m\frac{v_0^2}{r}$$

故圆周半径为

$$r=\frac{v_0}{2\omega}$$

为使轨迹圆通过 B 点，必须满足几何关系

$$R=r\sin\theta$$

即

$$\sin\theta=\frac{R}{r}=\frac{2\omega R}{v_0}$$

从力图 2－18－2 中的几何关系不难得出圆心的坐标为

$$\begin{cases}x=0\\ y=-\sqrt{\left(\frac{v_0}{2\omega}\right)^2-R^2}\end{cases}$$

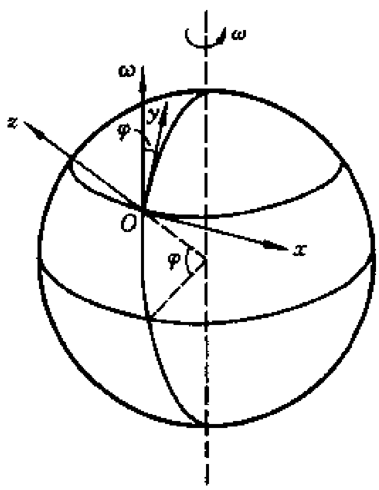
圆的方程为

$$x^2-\left[y+\sqrt{\left(\frac{v_0}{2\omega}\right)^2-R^2}\right]^2=\frac{v_0^2}{4\omega^2}$$

【题 19】 地球以角速度 ω 自转，一质点在纬度 φ 上空 h 高度处自由下落．忽略空气阻力和惯性离心力．试求因科里奥利力引起的落地点的偏离．

【分析】 落体偏离是地球上观察到的一个重要现象，它是地球自转和物体相对地球运动所引起的科里奥利力的效应．应取地球为参考系（非惯性系），处理方法与上题类似，只是本题还有重力的作用．

【解】 如图，取地球为参考系，取直角坐标 $Oxyz$，原点 O 在落体初始位置正下方的地面上，x 轴与纬度线相切指向东方，y 轴与经度线相切指向北方，z 轴垂直地面向上．图中 $\boldsymbol{\omega}$ 为地球自转角速度，质点初始位置为$(0,0,h)$，初速度为$(0,0,0)$．



力图 2－19－1

质点受重力 $m\boldsymbol{g}$ 及科里奥利力 $-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$，由牛顿第二定律，其运动方程为

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=m\boldsymbol{g}-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v} \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},\ddot{\boldsymbol{r}}$ 分别是质点的位矢，速度和加速度．式中有关量的具体形式为

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=(\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z})$$
$$\boldsymbol{g}=(0,0,-g)$$
$$\boldsymbol{\omega}=(0,\omega\cos\varphi,\omega\sin\varphi)$$
$$\boldsymbol{v}=(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$$

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 0 & \omega\cos\varphi & \omega\sin\varphi\\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\end{vmatrix}$$
$$=(\omega\cos\varphi\cdot\dot{z}-\omega\sin\varphi\cdot\dot{y})\boldsymbol{i}+\omega\sin\varphi\cdot\dot{x}\boldsymbol{j}-\omega\cos\varphi\cdot\dot{x}\boldsymbol{k}$$

其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是 x,y,z 轴的单位矢量．于是，(1)式的分量形式为

$$\begin{cases}\ddot{x}=-2\omega\left(\cos\varphi\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}-\sin\varphi\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\\ \ddot{y}=-2\omega\sin\varphi\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\\ \ddot{z}=-g+2\omega\cos\varphi\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\end{cases} \tag{2}$$

或

$$\begin{cases}\mathrm{d}\dot{x}=-2\omega(\cos\varphi\mathrm{d}z-\sin\varphi\mathrm{d}y) & (3)\\ \mathrm{d}\dot{y}=-2\omega\sin\varphi\mathrm{d}x & (4)\\ \mathrm{d}\dot{z}=-g\mathrm{d}t+2\omega\cos\varphi\mathrm{d}x & (5)\end{cases}$$

(3)式积分，得

$$\dot{x}=-2\omega(z\cos\varphi-y\sin\varphi)+C$$

初条件为 $z=h$，$y=0$ 处(起始点)的 $\dot{x}=0$，故积分常量为

$$C=2\omega h\cos\varphi$$

代入，得

$$\dot{x}=-2\omega[(z-h)\cos\varphi-y\sin\varphi]$$

(4)式积分，得

$$\dot{y}=-2\omega x\sin\varphi+C$$

初条件为 $x=0$ 处，$\dot{y}=0$，故积分常量 $C=0$，代入，得

$$\dot{y}=-2\omega x\sin\varphi$$

(5)式积分，得

$$\dot{z}=-gt+2\omega x\cos\varphi+C$$

初条件为 $t=0$ 时，$x=0$，$\dot{z}=0$，故积分常量 $C=0$，代入，得

$$\dot{z}=-gt+2\omega x\cos\varphi$$

把上述由(3)、(4)、(5)式积分得出的 $\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{z}$ 代入(2)式，得

$$\begin{cases}\ddot{x}=-2\omega(-gt\cos\varphi+2\omega x\cos^2\varphi+2\omega x\sin^2\varphi)\\ \quad=2\omega gt\cos\varphi-4\omega^2x\\ \ddot{y}=4\omega^2\sin\varphi[(z-h)\cos\varphi-y\sin\varphi]\\ \ddot{z}=-g-4\omega^2\cos\varphi[(z-h)\cos\varphi-y\sin\varphi]\end{cases}$$

因地球自转角速度 ω 较小，上式中各 ω^2 项可略，得

$$\begin{cases}\ddot{x}=2\omega gt\cos\varphi\\ \ddot{z}=-g\end{cases}$$

积分，得

$$\begin{cases}\dot{x}=(\omega g\cos\varphi)t^2+C_1\\ \dot{z}=-gt+C_2\end{cases}$$

初条件为 $t=0$ 时，$\dot{x}=0$，$\dot{z}=0$，故积分常量 $C_1=C_2=0$，代入，得

$$\begin{cases}\dot{x}=(\omega g\cos\varphi)t^2\\ \dot{z}=-gt\end{cases}$$

再积分，得

$$\begin{cases}x=(\frac{1}{3}\omega g\cos\varphi)t^3+C_3\\ z=-\frac{1}{2}gt^2+C_4\end{cases}$$

初条件为 $t=0$ 时，$x=0$，$z=h$，故积分常量 $C_3=0$，$C_4=h$，代入，得

$$\begin{cases}x=\left(\frac{1}{3}\omega g\cos\varphi\right)t^3 & (6)\\ z=h-\frac{1}{2}gt^2 & (7)\end{cases}$$

前已由(4)式积分得出 $\dot{y}=-2\omega x\sin\varphi$，把上述 x 代入，得

$$\dot{y}=(-\frac{2}{3}\omega^2 g\sin\varphi\cos\varphi)t^3$$

积分，得

$$y=(-\frac{1}{6}\omega^2 g\sin\varphi\cos\varphi)t^4+C$$

初条件为 $t=0$ 时，$y=0$，故积分常量 $C=0$，代入，得

$$y=(-\frac{1}{6}\omega^2 g\sin\varphi\cos\varphi)t^4 \tag{8}$$

(6)、(7)、(8)式就是质点自由下落时，位置随时间变化的规律．因落地点的 $z=0$，由(7)式，质点自高 h 处落地所需的时间为

$$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

代入(6)、(8)式，得出质点落地点的 x，y 坐标为

$$\begin{cases} x=\frac{1}{3}\omega g\cos\varphi\sqrt{\frac{8h^3}{g^3}} \\ \quad=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{8h^3}{g}}\omega\cos\varphi \\ y=-\frac{2\omega^2h^2}{3g}\sin\varphi\cos\varphi \end{cases}$$

若质点在北纬40°从离地面100 m的高度处自由下落，将 $\varphi=40°$，$h=100\ \text{m}$，$\omega=\frac{2\pi}{24\times3600}=7.3\times10^{-5}\ \text{rad/s}$ 代入，得

$$\begin{cases} x=1.68\times10^{-2}\ \text{m}=16.8\ \text{mm} \\ y=-8.86\times10^{-5}\ \text{m}=-0.0886\ \text{mm} \end{cases}$$

即落地点向东偏16.8 mm，向南偏0.0886 mm(与东偏相比可忽略)，这正是科里奥利力的效应．

【题20】 1851年，法国物理学家傅科发现单摆并不在固定的平面内摆动．如果把每次摆动近似看作在一个平面内，并把这个平面称为摆动平面，则摆动平面将以一定角速度作缓慢的顺时针转动(在北半球)．这个现象是由地球的自转造成的，这种摆称为傅科摆．试证明傅科摆摆动平面的旋转周期 T' 与摆所在处的纬度 φ 有关，并遵守

$$T'=\frac{T_0}{\sin\varphi}$$

的关系，其中 T_0 为地球自转周期．

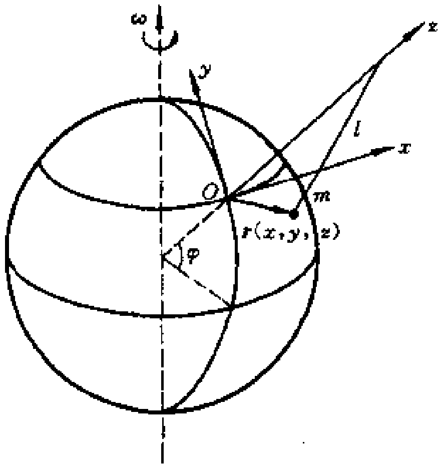
【分析】 如力图2-20-1，在纬度为 φ 处的地面上悬挂一个摆长为 l、摆球质量为 m 的单摆．取摆球的平衡位置 O 点为坐标原点，取纬线的切线为 x 轴，取子午经线的切线为 y 轴，取 z 轴与地面(xy 平面)垂直并向上．摆球的位置矢量为 $\boldsymbol{r}(x, y, z)$．由于地球自转，地球上的观察者位于一转动系统中，因而摆球除受指向地球中心的重力 mg，沿摆线的拉力 $\boldsymbol{T}$ 外，还由于存在相对地球的运动而受到科里奥利力 $\boldsymbol{F}_c=-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$ 的作用，式中 $\boldsymbol{\omega}$ 是地球自转角速度，$\boldsymbol{v}$ 是摆球

相对地球的运动速度．(另外，还受惯性离心力的作用，但可忽略．) $\boldsymbol{F}_c$ 始终与 $\boldsymbol{v}$ 垂直，是一种横向惯性力，正是由于 $\boldsymbol{F}_c$ 的存在而使摆球离开固定的摆动平面．

根据牛顿第二定律，列出摆球的动力方程如下，

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} \tag{1}$$

为了解释摆平面的旋转，只需考察摆球在 xy 平面(即水平面)的投影的运动即可．简化上述方程后可解出摆球在 xy 平面内的运动规律，从而求得摆平面的旋转周期．



力图 2－20－1

【解】 在所设置的 xyz 坐标系中，动力方程(1)式中各矢量的分量形式为

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{x},\ \ddot{y},\ \ddot{z})$$

$$\boldsymbol{g} = (0,\ 0,\ -g)$$

$$\boldsymbol{\omega} = (0,\ \omega\cos\varphi,\ \omega\sin\varphi)$$

$$\boldsymbol{v} = (\dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z})$$

$$\boldsymbol{T} = \left(-T\frac{x}{l},\ -T\frac{y}{l},\ \frac{l-z}{l}\right)$$

摆线拉力 $\boldsymbol{T}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha = -\frac{x}{l}$，$\cos\beta = -\frac{y}{l}$，$\cos\gamma = \frac{l-z}{l}$．动力方程(1)式可写成如下的分量形式

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{T}{ml}x - 2\omega(\cos\varphi\cdot\dot{z} - \sin\varphi\cdot\dot{y}) \\ \ddot{y} = -\dfrac{T}{ml}y - 2\omega\sin\varphi\cdot\dot{x} \\ \ddot{z} = -g + \dfrac{T}{m}\left(1 - \dfrac{z}{l}\right) + 2\omega\cos\varphi\cdot\dot{x} \end{cases}$$

若只考虑摆球在 xy 平面内的投影的运动，则有 $z = 0, \dot{z} = 0, \ddot{z} = 0$，于是上述方程简化为

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{T}{ml}x + 2\omega\sin\varphi\cdot\dot{y} \\ \ddot{y} = -\dfrac{T}{ml}y - 2\omega\sin\varphi\cdot\dot{x} \\ 0 = -g + \dfrac{T}{m} + 2\omega\cos\varphi\cdot\dot{x} \end{cases}$$

因地球自转角速度 ω 很小，上述第三式可简化为

$$T = mg$$

于是，前两式可简化为

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{g}{l}x + 2\omega\sin\varphi\cdot\dot{y} & (2) \\ \ddot{y} = -\dfrac{g}{l}y - 2\omega\sin\varphi\cdot\dot{x} & (3) \end{cases}$$

将(3)式乘虚数 i 并与(2)式相加，得

$$\ddot{x} + \mathrm{i}\ddot{y} = -\frac{g}{l}(x + \mathrm{i}y) + 2\omega\sin\varphi(\dot{y} - \mathrm{i}\dot{x}) \tag{4}$$

引进复数

$$Z = x + \mathrm{i}y$$

并令

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \dfrac{g}{l} \\ \omega' = \omega \sin\varphi \end{cases} \tag{5}$$

则方程(4)式可写成

$$\ddot{Z} + \omega_0^2 Z = -2\omega' \mathrm{i}(\dot{x} + \mathrm{i}\dot{y})$$

或

$$\ddot{Z} + 2\omega' \mathrm{i}\dot{Z} + \omega_0^2 Z = 0$$

令

$$\beta = \mathrm{i}\omega'$$

则上式变成标准的阻尼振动微分方程的形式，

$$\ddot{Z} + 2\beta\dot{Z} + \omega_0^2 Z = 0$$

其通解为

$$Z = \mathrm{e}^{-\beta t}(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' t}(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}) \tag{6}$$

如力图 2-20-2，取坐标系 $Ox'y'$，它与 Oxy 共面，并相对 Oxy 以角速度 $-\omega'$ 绕 O 点旋转．同一复矢量 Z 在两个坐标系中的表示式只差一个幅角 $\omega' t$，即

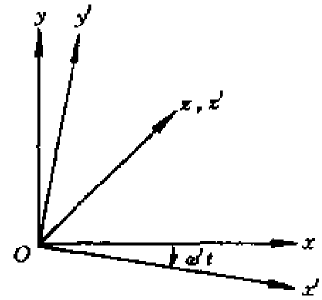
$$Z' = Z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega' t}$$

或

$$Z = Z'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' t}$$

将上式与(6)式比较，得到摆球在转动坐标系 $Ox'y'$ 中的解为

$$\begin{aligned} Z' &= A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t} \\ &= (A\cos\omega_0 t + B\cos\omega_0 t) + \mathrm{i}(A\sin\omega_0 t - B\sin\omega_0 t) \\ &= (A + B)\cos\omega_0 t + \mathrm{i}(A - B)\sin\omega_0 t \\ &= a\ \cos\omega_0 t + \mathrm{i}b\ \sin\omega_0\ t \\ &= x' + \mathrm{i}y' \end{aligned}$$



力图 2-20-2

最后得出摆球在转动坐标系 $Ox'y'$ 中的运动方程为

$$\begin{cases} x' = a\cos\omega_0 t \\ y' = b\sin\omega_0 t \end{cases}$$

式中

$$\begin{cases} a = A + B \\ b = A - B \end{cases}$$

这是很扁的椭圆方程．

由此可见，从地球上的观察者看来，摆球相对 $Ox'y'$ 作固定的椭圆运动，而 $Ox'y'$ 又相对观察者以角速度 ω' 顺时针旋转(北半球)．如果定义椭圆长轴为摆动平面，则摆动平面将相对观察者以角速度 ω' 旋转．旋转周期为

$$T' = \frac{2\pi}{\omega'}$$

由(5)式

$$T' = \frac{2\pi}{\omega \sin \varphi} = \frac{T_0}{\sin \varphi}$$

式中

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$$

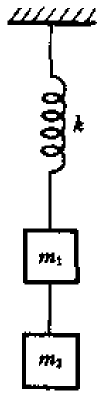
为地球自转周期．

在地球两极，$\varphi = \frac{\pi}{2}$，$\sin \varphi = 1$，$T' = T_0$，即摆平面的旋转周期与地球的自转周期相同；在赤道，$\varphi = 0$，$\sin \varphi = 0$，$T' \to \infty$，即摆动平面不旋转，这是因为摆球在南半球和北半球之间摆动，科里奥利力的影响互相抵消了．北京的纬度约为40°，在北京，傅科摆的摆动平面约经37小时20分旋转一周．

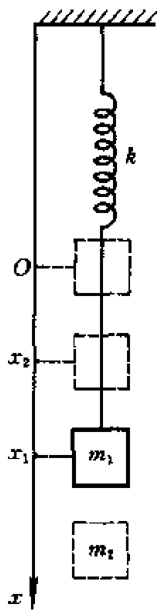
第三章　功、能和动量

【题 1】 如力图 3-1-1，劲度系数为 k 的弹簧下端竖直悬挂着两个物体，质量分别为 m_1 和 m_2。达到平衡后，突然撤去 m_2，试求 m_1 运动的最大速度。

【分析】 重力和弹簧弹性力都是保守力，由 m_1、弹簧、地球组成的物体系的机械能守恒。可取弹簧为原长(即弹簧松弛)时 m_1 的位置为原点。撤去 m_2 时，m_1 所在位置的弹性势能与重力势能之和即为物体系的总机械能，因为此时动能为零。m_1 的最大动能相应于物体系的最小总势能，后者可由总势能的一般表达式得出。



力图 3-1-1



力图 3-1-2

【解】 如力图 3-1-2，取 x 坐标竖直向下，原点 O 是弹簧为原长时 m_1 的位置。悬挂 m_1 和 m_2 后，m_1 的平衡位置为

$$x_1=\frac{m_1+m_2}{k}g$$

选 m_1、弹簧、地球组成物体系。撤去 m_2 后，在 m_1 运动的过程中，物体系的机械能守恒。在 x_1 处，m_1 的动能为零，弹性势能与重力势能之和即为总机械能。选原点 $x=0$ 处的重力势能和弹性势能为零，则物体系的总机械能为

$$E=\frac{1}{2}kx_1^2-mgx_1$$

$$=\frac{(m_1+m_2)^2}{2k}g^2-\frac{m_1(m_1+m_2)}{k}g^2$$

$$=\frac{m_2^2-m_1^2}{2k}g^2$$

物体系总势能的一般表达式为

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2-mgx$$

E_p 为最小值的条件是

$$\frac{dE_p}{dx}=0$$

即

$$kx-m_1g=0$$

故

$$x=x_2=\frac{m_1g}{k}$$

是物体系最小总势能的位置，在该处 m_1 的动能最大，为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m_1v_{max}^2&=E-E_{p,min}\\&=\frac{m_2^2-m_1^2}{2k}g^2-\left(\frac{1}{2}kx_2^2-m_1gx_2\right)\\&=\frac{m_2^2-m_1^2}{2k}g^2-\left[\frac{1}{2}k\left(\frac{m_1g}{k}\right)^2-m_1g\left(\frac{m_1g}{k}\right)\right]=\frac{m_2^2g^2}{2k}\end{aligned}$$

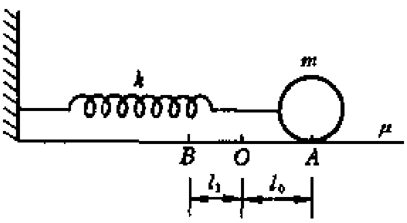
故 m_1 的最大速度为

$$v_{max}=\frac{m_2g}{\sqrt{m_1k}}$$

【题 2】 如力图 3－2－1，水平弹簧一端固定，另一端系一质量为 m 的小球，弹簧的劲度系数为 k，小球与水平面之间的摩擦系数为 μ．当弹簧为原长时小球位于 O 点，开始时小球位于 O 点右方的 A 点，O 与 A 之间的距离为 l_0，从静止释放小球．

1．为使小球能通过 O 点，而且只能通过 O 点一次，试问 μ 值应在什么范围？

2．在上述条件下，小球在 O 点左方的停住点 B 点与 O 点的最大距离 l_1 是多少？



力图 3－2－1

【分析】 1．小球开始时在 A 点静止，初始动能为零；弹簧拉长 l_0，具有初始弹性势能 $\frac{1}{2}kl_0^2$．释放后，小球在弹性力作用下向左运动，克服摩擦力作功，总机械能减小．为使小球能通过 O 点，要求初始弹性势能应大于克服摩擦力作的功 μmgl_0，于是可得出 μ 值的上限．

当小球越过 O 点向左运动，又从左方最远点 B 往回(即向右)运动时，为使小球不再越过 O 点，要求初始弹性势能 $\frac{1}{2}kl_0^2$ 小于克服摩擦力作的功 $\mu mg(l_0+2l_1)$，其中 l_1 是 B 点与 O 点的距离，于是可得出 μ 值的下限．

2. 设 B 点为小球向左运动的最远点，且小球在 B 点能够停住，则小球克服摩擦力作的功应等于弹性势能的减少 .此外，小球在 B 点所受静摩擦力必须小于最大静摩擦力，由此可得出停住点 B 点与 O 点之间的最大距离 .

【解】 1. 小球向左运动时受摩擦力 μmg，其方向与运动方向相反，故摩擦力作负功 .本题要求小球的停住点在 O 点或在 O 点左方，则必须满足如下条件，

$$\mu mgl_0 \leqslant \frac{1}{2}kl_0^2$$

即

$$\mu \leqslant \frac{kl_0}{2mg}$$

上式决定了 μ 值的上限 μ_{max}. 当

$$\mu = \mu_{max} = \frac{kl_0}{2mg}$$

时，小球正好在 O 点停住 .当 $\mu < \mu_{max}$ 时，小球将通过 O 点，并继续向左方运动 .在向左方运动的过程中，可能停于某点，也可能在到达左方最远的 B 点后，再往回（即向右）运动的过程中停于某点 .本题要求最后的停住点不能越过 O 点，即必须满足如下条件

$$\frac{1}{2}kl_0^2 < \mu mg(l_0 + 2l_1) \tag{1}$$

式中 l_1 是向左运动的最远点 B 点与 O 点的距离 . 因小球在 B 点的速度为零，故有

$$\mu mg(l_0 + l_1) = \frac{1}{2}k(l_0^2 - l_1^2)$$

即

$$\mu mg = \frac{1}{2}k(l_0 - l_1) \tag{2}$$

解出

$$l_1 = l_0 - \frac{2\mu mg}{k}$$

代入(1)式，得

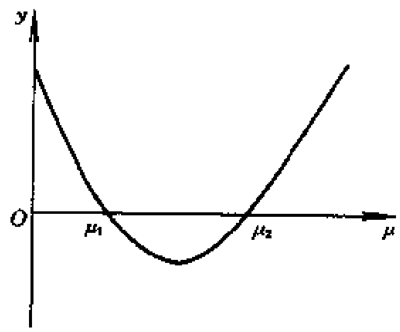
$$\mu mg\left(3l_0 - \frac{4\mu mg}{k}\right) > \frac{1}{2}kl_0^2$$

即

$$\frac{4m^2g^2}{k}\mu^2 - 3mgl_0\mu + \frac{1}{2}kl_0^2 < 0$$

令

$$y = \frac{4m^2g^2}{k}\mu^2 - 3mgl_0\mu + \frac{1}{2}kl_0^2$$



力图 3－2－2

作 $y(\mu)$ 曲线如力图 3－2－2 所示，图中的 μ_1 和 μ_2 是二次方程 $y=0$ 的两个根，分别等于

$$\mu_1 = \frac{kl_0}{4mg}$$

$$\mu_2=\frac{kl_0}{2mg}$$

因要求 $y<0$,如力图 3－2－2,μ 的取值范围应为

$$\mu_1<\mu<\mu_2$$

其中 μ_2 即为前已求出的 μ 的上限 μ_{max},即 $\mu_2=\mu_{max}$,总之,所求 μ 值的范围为

$$\frac{kl_0}{4mg}<\mu<\frac{kl_0}{2mg}$$

2. 要求小球在左方最远点 B 点停住,除需满足上述(2)式外,小球在 B 点所受弹性力不得超过最大静摩擦力,即要求

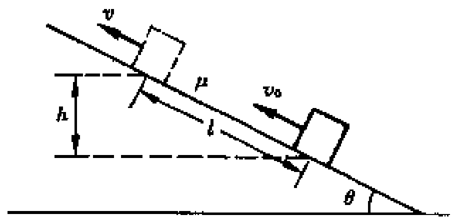
$$kl_1<\mu mg \tag{3}$$

联合(2)式和(3)式,得出

$$l_1\leqslant\frac{l_0}{3}$$

可见小球从 A 点静止释放后,若只能通过 O 点一次,且在到达左方最远点 B 点能停住,则停住点 B 点与 O 点的距离不会超过 $\frac{l_0}{3}$,其中 l_0 是 A 点与 O 点的距离 .

【题 3】 如图所示,一木块沿倾角 $\theta=30^\circ$ 的斜面从某初始位置以 $v_0=4.5\text{m/s}$ 的初速向上运动 .已知木块与斜面之间的摩擦系数 $\mu=0.35$. 规定木块初始位置处的重力势能为零 .试求木块动能等于重力势能处相对其初始位置的高度 .



力图 3－3－1

【分析】 木块运动时摩擦力作负功,利用功能关系及木块动能等于重力势能的条件,即可求出所求位置相对初始位置的高度 .

但应注意,当木块达到斜面最高点后,它将向下运动,在此过程中,另一地点又会出现木块动能与重力势能相等的情形,切勿遗漏此解 .当然,为求此第二个高度,必须先求出木块在斜面上能达到的最大高度 .

【解】 规定木块初始位置处的重力势能为零 .木块所受摩擦力为

$$f=\mu mg\cos\theta$$

式中 m 是木块质量 . 如图,设木块上滑 l 距离后,木块相对初始位置的高度为 h,木块的速度为 v,根据功能关系,摩擦力作功等于木块机械能的增量,即

$$-\mu mg\cos\theta\cdot l=\left(\frac{1}{2}mv^2+mgh\right)-\frac{1}{2}mv_0^2$$

因

$$l=\frac{h}{\sin\theta}$$

代入,得

$$\mu mgh\ \cot\theta=\frac{1}{2}mv_0^2-\left(\frac{1}{2}mv^2+mgh\right)$$

设木块相对初始位置的高度为 $h=h_1$ 时，其动能与重力势能相等，即有

$$\frac{1}{2}mv^2=mgh_1$$

代入，得

$$\mu\ mgh_1\cot\theta=\frac{1}{2}mv_0^2-2mgh_1$$

解出

$$h_1=\frac{v_0^2}{2g(2+\mu\cot\theta)}=0.38\ \text{m}$$

设木块在斜面上能到达的最高高度为 H（相对初始位置），则木块在 H 处的速度 $v=0$，由功能关系，得

$$\mu\ mgH\cot\theta=\frac{1}{2}mv_0^2-mgH$$

解出

$$H=\frac{v_0^2}{2g(1+\mu\cot\theta)}=0.61\ \text{m}$$

因题目所给数据满足

$$\mu<\tan\theta$$

故木块到达斜面最高点后，将向下滑动．设在下滑过程中，当木块动能等于重力势能时，木块的高度为 h_2（相对初始位置），速度为 v_2，则由功能关系，得

$$\mu\ mg\cos\theta\cdot\frac{(H-h_2)}{\sin\theta}=mgH-\left(mgh_2+\frac{1}{2}mv_2^2\right)$$

因

$$mgh_2=\frac{1}{2}mv_2^2$$

故上式简化为

$$\mu(H-h_2)\cot\theta=H-2h_2$$

解出

$$h_2=\frac{1-\mu\cot\theta}{2-\mu\cot\theta}H=0.15\ \text{m}$$

【题4】 如图，在水平桌面上开有一孔，绳子的一部分平放在桌面上，另一部分经孔下垂．设绳不可伸长，均匀柔软，全长为 l，下垂长度为 x_0，从静止开始下落．设摩擦可略．试求在下落过程中，绳子速度随下落长度变化的规律，以及绳的下端位置随时间变化的规律．

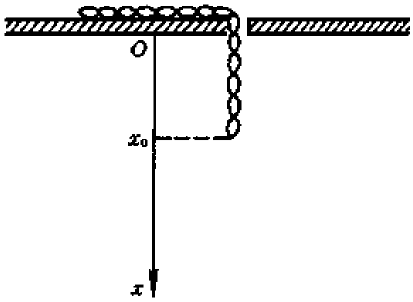
【分析】 以绳和地球为物体系，系统所受的唯一外力为桌面所施的支持力，在绳运动过程中支持力不作功，故系统的机械能守恒．据此，可直接解出速度与绳下端位置之间的关系．也可根据牛顿第二定律通过积分运算求解．求出速度的变化规律后，由速度定义 $v=\frac{dx}{dt}$ 可解出下端位置随时间的变化．

【解】 方法一．取绳与地球为物体系．取 x 坐标竖直向下，原点 O 在桌面上，规定 O 点的重力

势能为零．设绳的质量线密度为 λ，绳的总质量为 $m=\lambda l$.

当绳下端从 x_0 处由静止开始下落时，动能为零，重力势能为

$$-\int_0^{x_0} m_x g\mathrm{d}x=-\int_0^{x_0}\lambda xg\mathrm{d}x=-\frac{\lambda}{2}gx_0^2$$



力图 3－4－1

当绳下端落到任意 x 处时，设绳速度为 v，则动能和重力势能分别为

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2$$

$$E_p=-\lambda x\cdot\frac{x}{2}g=-\frac{\lambda g}{2}x^2$$

因在绳下落过程中，物体系机械能守恒，故有

$$-\frac{\lambda}{2}gx_0^2=\frac{1}{2}mv^2-\frac{\lambda}{2}gx^2$$

解出 v 随 x 变化的规律为

$$v=\sqrt{\frac{g}{l}(x^2-x_0^2)}$$

方法二．当绳下端在任意位置 x 时，在竖直方向绳受力为

$$F=m_xg=\lambda xg=\frac{m}{l}gx$$

由牛顿第二定律

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{m}{l}gx \tag{1}$$

因

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

故(1)式可写为

$$v\mathrm{d}v=\frac{g}{l}x\mathrm{d}x$$

积分，得

$$\frac{1}{2}v^2=\frac{g}{2l}x^2+C'$$

或

$$v^2=\frac{g}{l}x^2+C$$

初条件为

$$x=x_0\text{ 时},v=0$$

故积分常量为

$$C=-\frac{g}{l}x_0^2$$

代入，得

$$v=\sqrt{\frac{g}{l}(x^2-x_0^2)}$$

因 $v=\frac{dx}{dt}$，故有

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{g}{l}(x^2-x_0^2)}}=dt$$

积分，得

$$\text{arc cosh}\frac{x}{x_0}=\sqrt{\frac{g}{l}}t+C$$

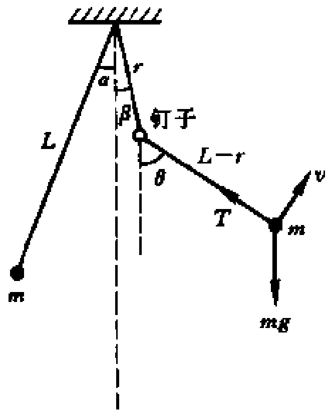
初条件为 $t=0$ 时，$x=x_0$，故积分常量 $C=0$，代入，得

$$x=x_0\cosh\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$$

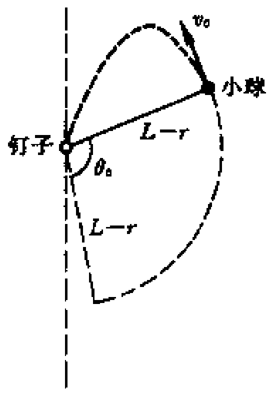
这就是绳下端位置 x 随时间 t 变化的规律．式中 cosh 为双曲余弦函数．

【题 5】 如力图 3－5－1，单摆的摆长为 L，摆球质量为 m，从左侧与竖直方向夹角 α 处静止下摆．在右侧，与悬点相距为 r、与竖直方向夹角为 $\beta(\beta<\alpha)$处有一固定的钉子．设空气阻力可略．

试求：1．为使小球能绕钉子作一个完整的圆周运动，角 α 至少应多大？2．为使小球能与钉子相碰，角 α 应多大？



力图 3－5－1



力图 3－5－2

【分析】 从小球自左侧下摆，以及尔后绕钉运动的整个过程中，由小球及地球组成的物体系的机械能守恒．当小球以钉为中心作圆周运动时，所受重力及绳张力提供了所需的向心力．小球能绕钉完成整个圆周运动的条件是，当小球到达钉正上方时，所受绳张力 $T\geqslant0$．如力图 3－5－2，小球能与钉相碰的条件是，当小球绕钉作圆周运动到达某个特定的角度 θ_0 时，所受绳张力应减为零($T=0$)，从此小球脱离绕钉的圆周运动，尔后小球只受重力作用，作斜抛运动，并且其抛物线

轨迹应刚好经过钉子 .

【解】 1. 如力图 3-5-1,小球绕钉作圆周运动时受重力 mg 和绳的张力 T,设小球在任意位置 θ 角处的速度为 v,则由牛顿第二定律

$$T-mg\cos\theta=\frac{mv^2}{L-r} \tag{1}$$

在小球从左侧 α 角处静止下摆,以及尔后小球绕钉运动的整个过程中,由小球和地球组成的物体系的机械能守恒 .取悬点为势能零点,取小球静止下摆的状态及小球绕钉到达 θ 角并具有速度 v 的状态,则有

$$-mgL\cos\alpha=\frac{1}{2}mv^2-mg[r\cos\beta+(L-r)\cos\theta] \tag{2}$$

由(1)式和(2)式,消去 v,解出

$$T=3mg\cos\theta+\frac{2mg}{L-r}(r\cos\beta-L\cos\alpha) \tag{3}$$

小球能绕钉完成整个圆周运动的条件是

$$\theta=\pi\text{ 时}, T\geqslant 0$$

把(3)式代入,得

$$\cos\alpha\leqslant\frac{r}{L}\cos\beta-\frac{3(L-r)}{2L}$$

这就是对 α 角的要求 .

2. 如力图 3-5-2,小球能与钉子相碰,要求小球在某个角度 θ_0 处开始脱离绕钉的圆周运动,亦即要求

$$\text{在 }\theta=\theta_0\text{ 处,}\qquad T=0$$

把(1)式代入,得

$$-mg\cos\theta_0=\frac{mv_0^2}{L-r} \tag{4}$$

式中 v_0 是小球在 θ_0 位置的速度 .

然后,小球只受重力作用,以 v_0 的初速和 θ_0 的角度作斜抛运动 . 为了使小球与钉子相碰,小球的抛物线轨迹应经过钉子所在位置,故有

$$\begin{cases}v_0\cos(\pi-\theta_0)\cdot t=(L-r)\sin(\pi-\theta_0)\\-(L-r)\cos(\pi-\theta_0)=v_0\sin(\pi-\theta_0)\cdot t-\frac{1}{2}gt^2\end{cases}$$

式中 t 是小球从 θ_0 位置沿抛物线运动到达钉子的时间 . 在上两式中消去 t,得

$$v_0^2=-\frac{(L-r)g\sin^2\theta_0}{2\cos\theta_0} \tag{5}$$

从(4)式和(5)式中消去 v_0,解出 $\cos\theta_0=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$,因 θ_0 应在第二象限,故取

$$\cos\theta_0=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

因小球在 θ_0 处脱离圆周运动,故在该处的 $T=0$,把 $\theta=\theta_0$ 及 $T=0$ 代入(3)式,得

$$3mg\cos\theta_0+\frac{2mg}{L-r}(r\cos\beta-L\cos\alpha)=0$$

即

$$\frac{2}{L-r}(r\cos\beta-L\cos\alpha)=\sqrt{3}$$

故

$$\cos\alpha=\frac{r}{L}\cos\beta-\frac{\sqrt{3}(L-r)}{2L}$$

这就是为使小球能与钉子相碰应取的 α 角 .

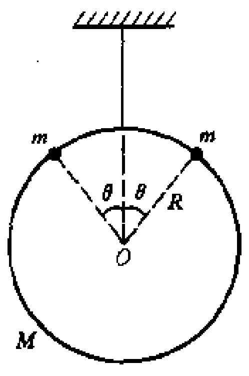
【题6】 如力图 3－6－1，质量为 M 的圆环用细线(质量可略)悬挂，圆环上串着两个质量均为 m 的小球．两小球自圆环顶端从静止开始同时向两边滑下，设摩擦可略．

试求：1. 在圆环不动的条件下，画出悬线中的张力 T 随 $\cos\theta$ 变化的曲线(角 θ 的含义如力图 3－6－1)，并求出张力 T 的极小值及相应的角θ.

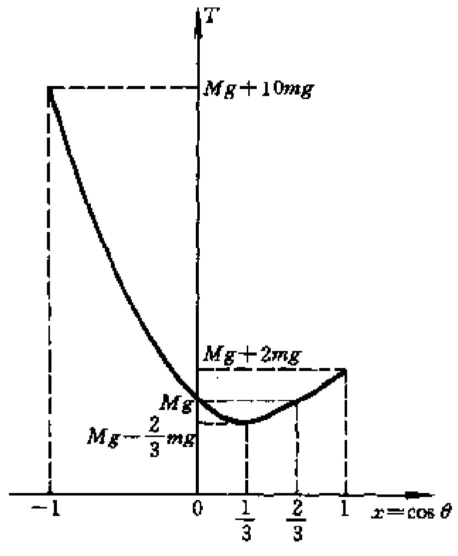
2. 小球与圆环的质量比$\frac{m}{M}$至少为多大时圆环才有可能上升？画出临界情况(即能使圆环上升的最小质量比)下，T 随 $\cos\theta$ 变化的曲线，并求圆环开始上升时的角θ.

【分析】 圆环不动时，小球作圆周运动，由所受重力、支持力提供所需之向心力．小球沿圆环运动过程中，小球和地球组成的物体系的机械能守恒．圆环受重力、两小球的压力以及绳的张力 T，圆环不动时所受合力为零．由此可得出张力 T 随 $\cos\theta$ 变化的曲线以及 T_{min}相应的角θ.

圆环上升的条件是合力向上不为零，即既要求 $T_{min}=0$，又要求两小球的压力(实际此时是拉力)及 Mg 的合力向上．在临界情况下，圆环所受合力为零．



力图 3－6－1



力图 3－6－2

【解】 1. 圆环不动．小球受重力 mg，圆环的支持力 N，由牛顿第二定律，当小球在角 θ 位置以速度 v 运动时，有

$$mg\cos\theta - N = \frac{mv^2}{R}$$

因小球沿圆环运动过程中，小球和地球系统的机械能守恒，故有

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR(1-\cos\theta)$$

其中取圆环中心为重力势能零点．

由以上两式消去 v，解出

$$N = mg\cos\theta - 2mg(1-\cos\theta) = mg(3\cos\theta - 2) \tag{1}$$

圆环受重力 Mg，张力 T 以及两小球的压力 N 和 N，因圆环不动，合力为零，故有

$$T = 2N\cos\theta + Mg$$

把(1)式代入，并令 $x = \cos\theta$，得

$$T = Mg + 2mg(3\cos^2\theta - 2\cos\theta) = Mg + 2mg(3x^2 - 2x) \tag{2}$$

由(2)式给出的 $T(x)$ 曲线是抛物线，如力图 3－6－2 所示．

利用 $T = T_{\min}$ 时，$\frac{dT}{dx} = 0$ 的条件，可求出 $T_{\min}$. 由(2)式，当 $\frac{dT}{dx} = 0$ 时，有

$$x = \cos\theta = \frac{1}{3}$$

即

$$\theta = \arccos\frac{1}{3} = 70.5°$$

相应的

$$T_{\min} = Mg - \frac{2}{3}mg$$

$T(x)$ 函数如下表所示．

$x=\cos\theta$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	-1
T	Mg	$Mg - \frac{2}{3}mg$	Mg	$Mg + 2mg$	$Mg + 10mg$

2. 圆环可能上升的条件是

$$T_{\min} = 0$$

即要求

$$m = \frac{2}{3}M, 或 \frac{m}{M} = \frac{3}{2}$$

圆环上升时小球的位置为，

$$\theta = \arccos\frac{1}{3} = 70.5°$$

由(1)式，小球给圆环的压力为

$$N = mg(3\cos\theta - 2) = mg(3x - 2)$$

当 $x = \cos\theta > \frac{2}{3}$ 时，$N > 0$，为压力；当 $x = \cos\theta < \frac{2}{3}$ 时，$N < 0$，为拉力，这是圆环上升的必要条

件．圆环上升时 $T=0$，所受拉力和重力应满足

$$-2N\cos\theta \geqslant Mg$$

将上述 N 代入，得

$$-2mg(3x-2)x \geqslant Mg$$

临界情况为

$$3x^2-2x+\frac{M}{2m}=0$$

上式有实根的条件为

$$\left(4-4\cdot 3\cdot\frac{M}{2m}\right)\geqslant 0$$

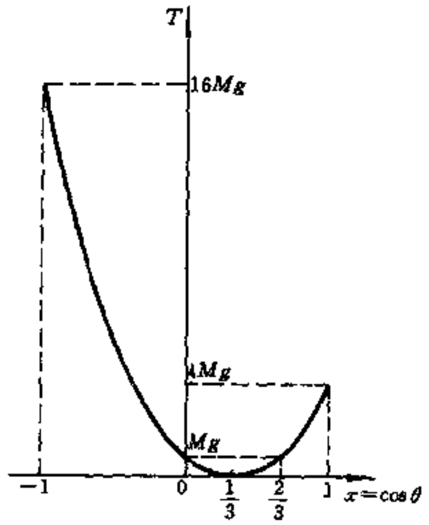
即要求

$$m\geqslant\frac{3}{2}M$$

当 $m=\frac{3}{2}M$ 时，T 随 $\cos\theta=x$ 变化的关系为

$$T=mg(9x^2-6x+1)$$

$T(x)$ 曲线如力图 3－6－3 及下表所示．

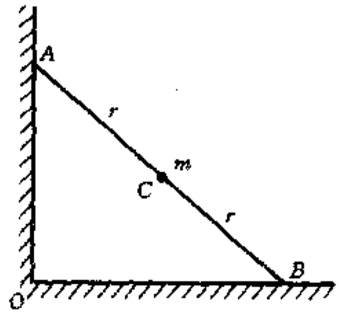


力图 3－6－3

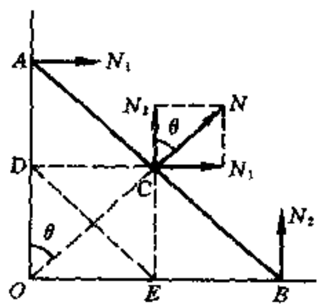
$x=\cos\theta$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	−1
T	Mg	0	Mg	$4Mg$	$16Mg$

【题 7】 如力图 3－7－1，长为 $2r=20$cm、质量可以忽略的棒，中心点 C 处有一固定的质量为 m 的质点．棒一端 A 点靠在竖直墙上，另一端 B 点支在地面上，两端可分别沿墙和地面无摩擦地滑动．棒从竖直位置静止下滑，滑动过程中棒始终保持在同一竖直平面内．试求棒中心 C 点触地的位置．

【分析】 首先应指出，棒在下滑过程中会与墙脱离(这一点在求解过程中会自然地予以证明)，脱离前与脱离后的运动颇为不同，应分段讨论．



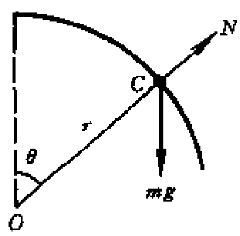
力图 3－7－1



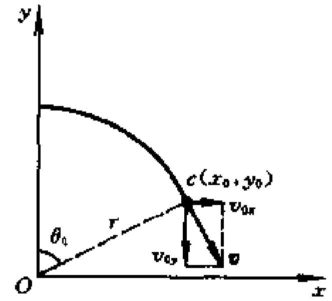
力图 3－7－2

当棒的 A、B 端不离开墙、地时，如力图 3－7－2 和力图 3－7－3，利用几何关系可求出棒中心 C 的轨迹是以 O 为中心、以 r 为半径的圆．棒受重力 mg，地面支持力 N_2(垂直地面向上)及墙支持力 N_1(垂直墙向右)．因棒质量可略，质量 m 又在棒中心 C，故对点 C 的转动惯量为零．因此，N_1 和 N_2 对点 C 的合力矩也应为零，否则棒将有无穷大角速度，不合理．换言之，N_1 和 N_2 的合力 N 应通过 C，并可证明 N 沿点 C 轨迹圆的半径方向．这样，问题等价于质点 m 沿半径为 r 的光滑圆弧下滑，所受重力 mg 及 N 提供所需之向心力，且在运动过程中机械能应守恒．

C 点离开圆弧的条件是 $N=0$，同时 A 端与墙脱离，由此可求出 A 点刚刚离墙时，C 点的位置和速度．



力图 3－7－3



力图 3－7－4

A 端离墙后 $N_1=0$，故同时 N_2 亦必为零(否则其力矩不为零，又会使棒产生无穷大角速度，且亦与 $N=0$ 不符)，即同时 B 端离地．于是 C 点的运动是在重力作用下的单纯的斜抛运动，如力图 3－7－4 所示，不难计算．

【解】 如力图 3－7－2，当棒的 A、B 端不离开墙和地面，处在任意位置时，作 $CD /\!/ OB$，$CE /\!/ AO$，则有

$$\frac{DE}{2r}=\frac{OD}{OA}=\frac{1}{2}$$

故

$$OC=DE=r$$

即棒中心 C 点与 O 点的距离总是 r，C 点的运动轨迹是以 O 为圆心，以 r 为半径的圆．

因棒质量可略，C 点有固定的质量为 m 的质点，故棒对 C 点的转动惯量为零，所以 N_1 和 N_2 对 C 点的合力矩为零，有

$$N_1 r\cos\theta=N_2 r\sin\theta$$

即

$$\frac{N_1}{N_2}=\tan\theta$$

因此，N_1 与 N_2 的合力 N 通过中心 C 点，且沿 C 点轨迹圆半径的方向(如力图 3－7－3)．这样，C 点的运动相当于质点 m 沿半径为 r 的光滑圆弧下滑．

质点 m 受重力 mg，支持力 N，在任意位置 θ 处以速度 v 运动，则由牛顿第二定律，

$$mg\cos\theta-N=\frac{mv^2}{r} \tag{1}$$

质点 m 作圆周运动过程中，由 m 和地球组成的系统的机械能守恒，有

$$0=\frac{1}{2}mv^2-mgr(1-\cos\theta)$$

其中取 $\theta=0$ 的位置为重力势能零点，又题设棒从竖直位置静止下滑，故上式左边为零．由以上两式，解出

$$N=mg(3\cos\theta-2)$$

当棒的端点 A 刚刚离开墙时（同时另一端 B 离地），C 点刚刚离开圆轨迹，即所受支持力 $N=0$，由上式，相应的 θ_0 角满足

$$mg(3\cos\theta_0-2)=0$$

故

$$\cos\theta_0=\frac{2}{3}$$

又由(1)式，当 C 点刚刚离开圆轨迹时，$N=0$，$\theta=\theta_0$，相应的速度 v_0 为

$$v_0=\sqrt{gr\cos\theta_0}=\sqrt{\frac{2}{3}gr}$$

因此，当 C 点刚刚离开圆轨迹时，其位置和速度为

$$\begin{cases}x_0=r\sin\theta_0=\dfrac{\sqrt{5}}{3}r\\ y_0=r\cos\theta_0=\dfrac{2}{3}r\end{cases}$$

$$\begin{cases}v_{0x}=v_0\cos\theta_0=\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}gr}\\ v_{0y}=-v_0\sin\theta_0=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}gr}\end{cases}$$

C 点离开圆轨迹后，只受重力 mg 作用，作斜抛运动（如力图 3－7－4），由运动学公式，有

$$\begin{cases}x=x_0+v_{0x}t\\ y=y_0+v_{0y}t-\dfrac{1}{2}gt^2\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{5}}{2}r+\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}gr}\right)t\\ y=\dfrac{2}{3}r-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}gr}\right)t-\dfrac{1}{2}gt^2\end{cases}$$

C 点触地时，$y=0$，设该时刻为 t_1，则

$$0=\frac{2}{3}r-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\sqrt{\frac{2}{3}gr}\right)t_1-\frac{1}{2}gt_1^2$$

解出

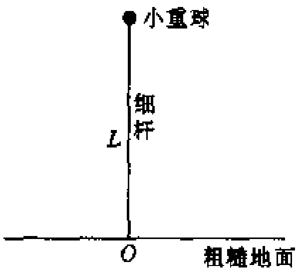
$$t_1=\frac{\sqrt{gr}}{2\sqrt{27}g}(\sqrt{184}\quad\sqrt{40})$$

代入 x 的表达式，得出 C 点触地时的位置为

$$x=\frac{\sqrt{5}}{3}r+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}gr}\frac{\sqrt{gr}}{2\sqrt{27g}}(\sqrt{184}-\sqrt{40})$$

$$=\frac{5\sqrt{5}+4\sqrt{23}}{27}r=12.5\ \text{cm}$$

【题 8】 如力图 3-8-1 所示，长为 L 的细杆顶端固定一小重球，竖直倒置在粗糙的水平地面上．小球处于不稳定的平衡状态，稍有扰动，小球将从静止开始向下跌落．假设细杆很轻，其质量可略．试求小球碰地时速度的水平分量和竖直分量．



力图 3-8-1

【分析】 因地面粗糙，小球下跌过程的最初阶段可认为细杆下端 O 点与地面之间无相对滑动，小球将沿着以 O 点为圆心、以 L 为半径的圆周下落，小球所受重力沿细杆的分力以及细杆对小球的支持力提供了小球作圆周运动所需的向心力．N 的大小随小球位置变化，当 $N=0$ 时，细杆下端将脱离地面，小球不再受地面的约束．

设细杆脱离地面时，小球的速度为 v_0．怎样确定 v_0 的大小和方向呢？首先，因细杆脱离地面的条件是 $N=0$，故小球以 v_0 沿半径为 L 的圆周运动时，所需向心力全部由重力的径向分量提供．其次，若取小球和地球为物体系，则在小球绕 O 点作圆周运动的过程中，因外力 N 不作功，故系统机械能（小球动能与重力势能之和）守恒．由此即可确定细杆下端脱离地面，小球不再受约束时速度 v_0 的大小和方向．

小球脱离约束后，以 v_0 为初速作抛体运动．显然，小球碰地时速度的水平分量即为 v_0 的水平分量．小球碰地速度 v 的大小则可由机械能守恒定律求得（仍取小球和地球为物体系）．由 v 及其水平分量，v 的竖直分量可求．

【解】 设小球质量为 m，当小球以细杆下端 O 点为圆心、以杆长 L 为半径作圆周运动时，其位置用细杆与竖直 y 轴的夹角 θ 表示，相应的速度为 v，小球受重力 mg 及细杆支持力 N，由牛顿第二定律，有

$$mg\cos\theta-N=\frac{mv^2}{L}$$

设当 $\theta=\theta_0$，$v=v_0$ 时，细杆脱离地面，小球不受约束，如力图 3-8-2 所示，则因此时

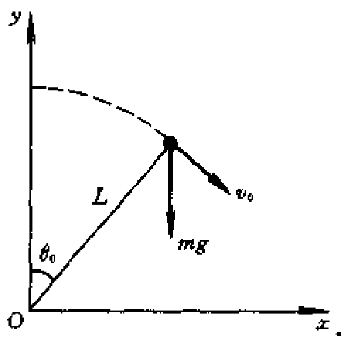
$$N=0$$

故有

$$mg\cos\theta_0=\frac{mv_0^2}{L}$$

取小球与地球为物体系，在上述圆周运动过程中，系统机械能守恒，有

$$\frac{1}{2}mv_0^2=mgL(1-\cos\theta_0)$$



力图 3-8-2

由以上两式，解出

$$\cos\theta_0=\frac{2}{3}$$

及

$$v_0=\sqrt{2gL(1-\cos\theta)}=\sqrt{\frac{2}{3}gL}$$

小球脱离约束后，以 v_0 为初速作抛体运动，v_0 的 x 和 y 分量(即水平和竖直分量)为

$$\begin{cases}v_{0x}=v_0\cos\theta_0=\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}gL}\\ v_{0y}=-v_0\sin\theta_0=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}gL}\end{cases}$$

设小球碰地时的速度为 v，其大小可由机械能守恒定律求出．仍取小球与地球为物体系，取小球从静止开始运动为初态，取小球碰地时为终态，则有

$$mgL=\frac{1}{2}mv^2$$

即

$$v=\sqrt{2gL}$$

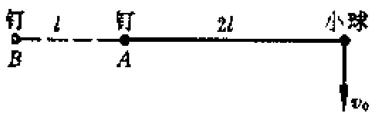
小球作抛体运动时，其速度的水平分量不变，故 v 的水平分量为

$$v_x=v_{0x}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}gL}$$

v 的竖直分量的大小为

$$|v_y|=\sqrt{v^2-v_x^2}=\sqrt{2gL-\frac{8}{27}gL}=\sqrt{\frac{46}{27}gL}$$

【题 9】 如力图 3－9－1，长为 $2l$ 的不可伸长的细绳一端固定于 A 点的钉子上，另一端系一小球，小球可绕 A 点在铅垂面内运动．开始时小球与 A 点位于同一水平线上，小球在 A 点右侧，垂直向下的初速度为 v_0．与 A 点在同一水平线上左侧的 B 点也有一钉子，A 与 B 之间的距离为 l．当细绳转到 B 点后，小球将绕 B 点向上运动．为使小球能与 A 点的钉子相碰，试问小球初速 v_0 的最小值应为多少？



力图 3－9－1

【分析】 如力图 3－9－2，小球在通过 A 点的水平线右侧 $2l$ 以垂直向下的初速度 v_0 射出后，受绳拉力和重力的作用，绕着以 A 为圆心、以 $2l$ 为半径的半圆运动，到达 A 左侧 $2l$ 处时具有的垂直向上的速度仍为 v_0(因绳拉力不作功，小球与地球体系的机械能守恒)，同时，绳中点与钉子 B 接触．接着，小球以垂直向上的速度 v_0 绕 B 点运动．为了使小球能与钉子 A 相碰，有两种可能的方式．

一种方式是，若 v_0 足够大，确保小球在水平线上方运动时，能始终沿着以 B 点为圆心、以 L 为半径的半圆运动，则小球必能与 A 点相碰．在此情形下，所需的最小的 v_0 为

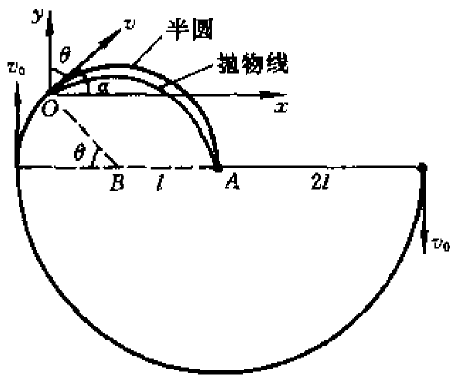
$$v_0=\sqrt{3gl}$$

现在证明这一结果．如力图3-9-3所示(力图3-9-3是力图3-9-2的一部分)，若小球始终在水平线之上的以 B 为圆心、以 l 为半径的半圆上运动，则其运动方程为

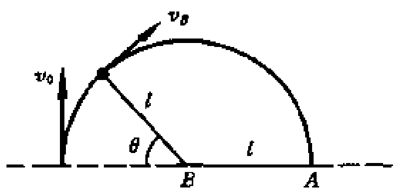
$$mg\sin\theta - N = \frac{mv_\theta^2}{l}$$

其中 v_θ 是小球在 θ 位置时的速度(即力图3-9-2中的 v)，当小球在半圆上运动时，绳拉力应满足

$$N \geqslant 0$$



力图3-9-2



力图3-9-3

由以上两式，即要求

$$mg\sin\theta \geqslant \frac{mv_\theta^2}{l}$$

故小球到达半圆最高点 $\theta=90°$ 时的速度 $v_{90°}$ 应满足

$$v_{90°} \leqslant \sqrt{gl}$$

因小球在半圆运动过程中，小球与地球体系的机械能守恒，故有

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgl + \frac{1}{2}mv_{90°}^2$$

由以上两式，得出

$$v_0 \leqslant \sqrt{3gl}$$

但 $v_0=\sqrt{3gl}$ 并不是本题所求的最小的 v_0．当 $v_0<\sqrt{3gl}$ 时，小球不能完成水平线之上的整个半圆运动，即小球在到达半圆最高点之前已经脱离了圆周．尽管如此，小球在脱离圆周后，仍有可能沿着斜抛运动的抛物线轨迹到达 A 点(见力图3-9-2)．这就是小球到达 A 点的第二种方式，相应的 v_0 即为本题所求的最小值．

按第二种方式，如力图3-9-2所示，设小球在 θ 角位置脱离圆周，相应的速度设为 v．由机械能守恒定律，v 的大小应由 θ 角决定．根据脱离圆周的条件：绳拉力为零，可以确定 θ 角与 v_0 的关系．脱离圆周后，小球从脱离的位置 θ 角，以 $\boldsymbol{v}$ 为初速作抛物运动．取脱离位置为原点 O，取 x 轴和 y 轴如力图3-9-2，可写出小球作抛物运动的轨迹方程．为使小球到达 A 点，其抛物线轨迹应通过 A 点．把 A 点的坐标代入抛物线方程，可求出对 θ 角的要求，于是 v_0 可得．

【解】 如力图3-9-2，设小球在 θ 角位置脱离圆周，并设小球在 θ 角处的速度为 v，因脱离条件

是绳拉力

$$N=0$$

故由牛顿第二定律，得

$$mg\sin\theta=\frac{mv^2}{l}$$

由机械能守恒定律，有

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv^2+mgl\sin\theta$$

由以上两式，解出

$$\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{v_0^2}{3gl}\\ v^2=gl\sin\theta\end{cases}$$

这两个公式给出了小球脱离圆周的位置 θ 与相应的速度 v 以及初速 v_0 之间的关系．

如力图 3-9-2，取小球脱离圆周的那一点为坐标原点 O，取水平方向为 x 轴，取竖直向上为 y 轴，则小球从 O 点以 $\boldsymbol{v}$ 为初速（$\boldsymbol{v}$ 的大小是 v，$\boldsymbol{v}$ 与 y 轴的夹角为 θ，$\boldsymbol{v}$ 与 x 轴的夹角为 α）作抛物运动的轨迹方程为

$$y=x\tan\alpha-\frac{g}{2v^2\cos^2\alpha}x^2$$

因 α 与 θ 互为余角，即

$$\alpha+\theta=\frac{\pi}{2}$$

故上述抛物轨迹方程可改写为

$$y=x\cot\theta-\frac{g}{2v^2\sin^2\theta}x^2$$

为使小球与 A 点相碰，上述抛物线应通过 A 点，A 点的坐标为

$$\begin{cases}x_A=l(1+\cos\theta)\\ y_A=-l\sin\theta\end{cases}$$

代入抛物运动的轨迹方程，并利用前述 $v^2=gl\sin\theta$，得

$$\sin\theta+\frac{(1+\cos\theta)\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{(1+\cos\theta)^2}{2\sin^3\theta}=0$$

展开，整理，得出 $\cos\theta$ 的方程为

$$1-3\cos^2\theta-2\cos^3\theta=0$$

令

$$x=\cos\theta$$

得

$$2x^3+2x^2-1=0$$

因式分解，

$$(x-\frac{1}{2})(x+1)(x+1)=0$$

解出

$$x=\frac{1}{2}\quad 和\quad x=-1$$

其中 $x=-1$ 意味着 $x=\cos\theta<0$，即 $\theta>90°$，表明小球已沿着半圆越过了最高点，这样以后受绳的约束小球不可能再脱离圆周，与本题的讨论(即所谓第二种方式)不符．换言之，$x=-1$ 的解不合理，应弃去．剩下的是

$$x=\cos\theta=\frac{1}{2}$$

即

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

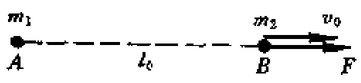
前已得出

$$\sin\theta=\frac{v_0^2}{3gl}$$

由以上两式，得出，为了使小球能与 A 点相碰，小球初速 v_0 的最小值应为

$$v_0=\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}gl}$$

【题 10】 如力图 3－10－1 所示，在惯性系 S 中有两质点 A 和 B，质量分别为 m_1 和 m_2，彼此间以万有引力相互吸引．开始时 A 静止，A 和 B 相距 l_0，B 以速度 $\boldsymbol{v}_0$ 沿连线方向远离 A 而运动($v_0<\sqrt{\frac{2Gm_2}{l_0}}$，$G$ 为引力常量)．B 受一指向其运动方向的变力 $\boldsymbol{F}$ 的作用，使 B 保持速度 $\boldsymbol{v}_0$ 不变．



(在 S 系中)

力图 3－10－1

试求：1．两质点之间的最大距离 l_{max}．2．从开始到最大距离过程中，变力 F 所作的功(相对于惯性系 S)．

【分析】 质点 B 受到指向其运动方向(向右)的力 $\boldsymbol{F}$ 和背向其运动方向(向左)的引力的作用，为使 B 能保持其初速 $\boldsymbol{v}_0$ 向右作匀速直线运动，要求 $\boldsymbol{F}$ 每时每刻均与引力平衡抵消．质点 A 只受到指向右方的引力的作用，从初速为零开始，向右加速，以 v_1 表示其速度．当 v_1 尚未达到 v_0 时($v_1<v_0$)，A 和 B 的间距逐渐增加，A 所受引力逐渐减小，其加速度相应减小，故质点 A 作变加速直线运动．与此同时，由于 A 和 B 的间距增大，质点 B 所受引力也逐渐减小，与之平衡的力 F 需相应减小，即 F 应为变力，以确保 B 作匀速直线运动．当 $v_1>v_0$ 时，A 和 B 的间距逐渐缩短，故当 $v_1=v_0$ 时，A 和 B 之间为最大间距 l_{max}．

取质点 A 和 B 为物体系，取 $v_1=0$，$l=l_0$ 为初态，取 $v_1=v_0$，$l=l_{max}$ 为终态．根据功能原理，在此过程中，外力 F 所作的功 W 等于系统机械能(动能与引力势能之和)的变化．由此可给出 W 与 l_{max} 的关系．

为求 l_{max}，选取质点 B 作参考系为宜，由于 B 始终在惯性系 S 中作匀速直线运动，所以 B 系也是惯性系．在 B 参考系中 B 静止，故外力 F 不作功，因而物体系 A 和 B 的机械能守恒．由此可方便地求出 l_{max}，代入前述关系式，功 W 便可求得．

本章许多题目都涉及变力．一种情形是，变力已知，可按牛顿第二定律列出的微分方程求

解．另一种情形是，涉及变力且不知其如何变化（即写不出力的表达式），根本列不出方程．正是在这些情形，功能原理、机械能守恒定律等往往能显示其独特的威力，使我们能够求解的问题得以大大拓宽．本题即是一例．请读者注意体会，了然于胸．

又，本题还显示出适当变换参考系带来的好处，也请注意．

【解】 根据分析，如力图 3－10－1，在惯性系 S 中，取 A 和 B 为物体系，取 A 静止、B 以 v_0 运动、A 和 B 相距 l_0 为初态，则系统在初态的机械能（动能与引力势能之和）为

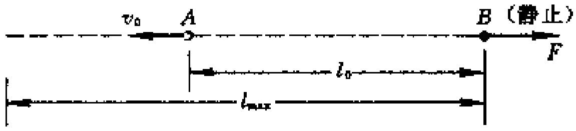
$$E_1=\frac{1}{2}m_2v_0^2-G\frac{m_1m_2}{l_0}$$

取 A 和 B 均以 v_0 运动，A 和 B 相距 l_{max} 为终态，则系统在终态的机械能为

$$E_2=\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_0^2-G\frac{m_1m_2}{l_{max}}$$

由功能原理，系统机械能的变化等于外力 F 所作的功 W，故有

$$\begin{aligned}W&=E_2-E_1=\left[\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_0^2-G\frac{m_1m_2}{l_{max}}\right]-\left[\frac{1}{2}m_2v_0^2-G\frac{m_1m_2}{l_0}\right]\\&=\frac{1}{2}m_1v_0^2+Gm_1m_2\left(\frac{1}{l_0}-\frac{1}{l_{max}}\right)\end{aligned} \tag{1}$$



（在 B 参考系中）

力图 3－10－2

为求 l_{max}，取质点 B 为参考系，如力图 3－10－2 所示．在 B 参考系中，质点 B 始终不动，质点 A 则在 B 左方 l_0 处以初速 v_0 向左运动，并因受引力（向右）的作用而减速，最后相对 B 静止，这时 A 和 B 的间距即为 l_{max}．因在 B 参考系中，B 始终静止不动，外力 F 不作功，故 A 和 B 系统的机械能（动能与引力势能之和）守恒，有

$$\frac{1}{2}m_1v_0^2-G\frac{m_1m_2}{l_0}=-G\frac{m_1m_2}{l_{max}} \tag{2}$$

解出

$$l_{max}=\frac{2Gm_2}{2Gm_2-l_0v_0^2}$$

由(2)式

$$Gm_1m_2\left(\frac{1}{l_0}-\frac{1}{l_{max}}\right)=\frac{1}{2}m_1v_0^2$$

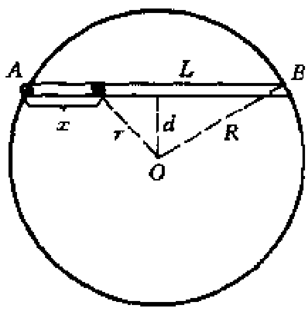
代入(1)式，得外力 F 所作的功 W 为

$$W=m_1v_0^2$$

【题 11】 如力图 3－11－1，设想在地球表面的 A、B 两地之间开凿一直通隧道，在 A 处放置一小球，小球在地球引力的作用下从静止开始在隧道内运动．忽略一切摩擦阻力．试求小球的最

大速度，以及小球从 A 到 B 所需的时间．已知地球半径为 R，地球表面的重力加速度为 g，A 和 B 之间的直线距离为 L．又设地球内部质量密度为恒量．

【分析】 小球在万有引力作用下运动，摩擦阻力忽略不计，故小球与地球体系的机械能守恒．如力图 3－11－1，小球在任意位置 r 或 x 处（r 是小球与地球中心的距离，x 是小球与 A 的距离）的机械能应等于小球在 A 处的引力势能．写出机械能守恒的表达式，可得出小球速度 v 与位置 r（或 x）的关系，于是小球的最大速度以及小球从 A 到 B 所需时间可求．



力图 3－11－1

求解本题的关键是要给出小球的引力势能的表达式．

【解】 由于小球始终在地球内部运动，为了写出小球在任意位置 r 时的机械能，必须先求出小球位于地球内部的引力势能．取小球位于无穷远处时，小球的引力势能为零，则小球位于 r 处（如力图 3－11－1）的引力势能为

$$E_p(r)=\int_r^{\infty}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_r^{\infty}\boldsymbol{F}_{内}\cdot d\boldsymbol{r}+\int_R^{\infty}\boldsymbol{F}_{外}\cdot d\boldsymbol{r} \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{F}_{外}$ 是小球在地球外部时所受地球引力，为

$$\boldsymbol{F}_{外}=-\frac{GmM}{r^2}\boldsymbol{r}^0 \tag{2}$$

其中 m 和 M 分别是小球和地球的质量，$\boldsymbol{r}^0$ 是小球位矢方向的单位矢量．$\boldsymbol{F}_{内}$是小球位于地球内部时所受地球引力．下面我们将证明，如力图 3－11－2 所示，当小球与地心的距离 r 小于地球半径 R（$r<R$）时，小球所受地球引力只取决于 $r<R$ 区域（在力图 3－11－2 中划斜线部分）的质量，小球所在球面之外的质量对小球的总引力为零，即

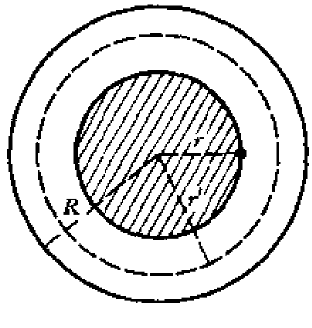
$$\boldsymbol{F}_{内}=-\frac{Gm\dfrac{4}{3}\pi r^3\rho}{r^2}\boldsymbol{r}^0$$

式中

$$\rho=\frac{M}{\dfrac{4}{3}\pi R^3}$$

是地球的密度．故

$$\boldsymbol{F}_{内}=-\frac{GmM}{R^3}r\boldsymbol{r}^0 \tag{3}$$



力图 3－11－2

为了证明上述结论，只需证明 $r'>r$ 的任一均匀物质球壳对球壳内任意位置处的质点 m 的总引力为零即可．为此，如力图 3－11－3，通过质点 m 作两条夹角很小的弦，作为两个顶角相同的圆锥面的母线，两个圆锥面对质点 m 所张的立体角相同，均为 $d\Omega$，两个圆锥面与半径为 r' 的球面相截的面积分别是 dS_1 和 dS_2，法线方向分别是 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$，dS_1 和 dS_2 到 m 点的距离分别为 r_1 和 r_2，设球面的质量面密度为 σ，则面积 dS_1 和 dS_2 的质量分别为 σdS_1 和 σdS_2，它们对 m 的引力为

$$dF_1=\frac{Gm\sigma dS_1}{r_1^2}$$

$$dF_2=\frac{Gm\sigma dS_2}{r_2^2}$$

由力图 3－11－3 可知，立体角 $d\Omega$ 为

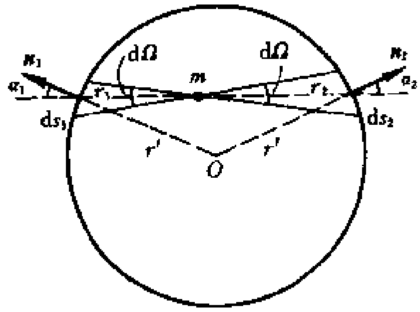
$$d\Omega=\frac{dS_1\cos\alpha_1}{r_1^2}=\frac{dS_2\cos\alpha_2}{r_2^2}$$

因

$$\alpha_1=\alpha_2$$

故有

$$\frac{dS_1}{r_1^2}=\frac{dS_2}{r_2^2}$$



力图 3－11－3

于是得出

$$dF_1=dF_2$$

由此可见，球面上按力图 3－11－3 画出的两个相应的面元 dS_1 和 dS_2 的质量，对质点 m 的两个引力大小相等、方向相反，互相抵消．球面上其他质量对 m 的引力也可以如法处理．总之，均匀物质球壳（球面）的质量，对球内任意位置质点的总引力等于零．因此，(3)式成立．

现在回到原来的问题，继续求解．

将(2)式、(3)式代入(1)式，得出质点 m 在地球内部 r 处的引力势能为

$$\begin{aligned}E_p(r)&=-\frac{GmM}{R^3}\int_r^R r\,dr-GmM\int_R^\infty\frac{dr}{r^2}\\&=\frac{GmM}{2R^3}(R^2-r^2)-\frac{GmM}{R}=\frac{GmM}{2R^3}(r^2-3R^2)\end{aligned}$$

由机械能守恒，小球 m 在隧道 r 处的机械能等于在 A 处的势能，即

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{GmM}{2R^3}(r^2-3R^2)=-\frac{GmM}{R}$$

解出小球在 r 处的速度 v 为

$$v^2=\frac{GM}{R^3}(R^2-r^2)=\frac{g}{R}(R^2-r^2)$$

式中

$$g=\frac{GM}{R^2}$$

是地球表面的重力加速度．如力图 3－11－1，当小球 m 在 r 处时，小球与 A 点的距离为 x，由几何关系，有

$$\begin{aligned}r^2&=d^2+\left(\frac{L}{2}-x\right)^2\\&=\left(R^2-\frac{L^2}{4}\right)+\left(\frac{L}{2}-x\right)^2=R^2-Lx+x^2\end{aligned}$$

代入 v 的表达式，得

$$v^2=\frac{g}{R}(Lx-x^2)$$

即

$$v=\sqrt{\frac{g}{R}(Lx-x^2)}$$

小球的最大速度应满足如下条件

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\sqrt{\frac{g}{R}}\cdot\frac{L-2x}{2\sqrt{Lx-x^2}}=0$$

故在

$$x=\frac{L}{2}$$

处，小球具有最大速度 $v_{\max}$，为

$$v_{\max}=\sqrt{\frac{g}{R}\left(\frac{L^2}{2}-\frac{L^2}{4}\right)}=\frac{L}{2}\sqrt{\frac{g}{R}}$$

因 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，小球移动 $\mathrm{d}x$ 距离所需时间 $\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{v}$，故小球从 A 到 B 所需总时间为

$$t=\int_0^L\frac{\mathrm{d}x}{v}=\sqrt{\frac{g}{R}}\int_0^L\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(L-x)}}$$

引入新变量 θ，令

$$x=L\sin^2\theta$$

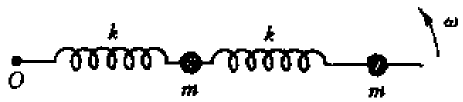
则上述积分式变成

$$t=\sqrt{\frac{g}{R}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\mathrm{d}\theta=\pi\sqrt{\frac{g}{R}}$$

可见，小球从 A 到 B 所需时间是一恒量，与隧道长度 L 无关，参看力学第 7 章题 4.

【题 12】 如图，两个质量均为 m 的小球串在质量可忽略的光滑细杆上，用两根完全相同的弹簧相连，两弹簧的劲度系数均为 k，原长均为 l_0，左侧弹簧的左端固定在细杆的 O 点，细杆绕 O 点在水平面内转动．

试求：1. 当细杆的角速度从零无限缓慢地增加到 ω 时，外力所作的功．2. 当细杆以角速度 ω 转动时，两弹簧的长度之比是多少？对 ω 有何限制？



力图 3－12－1

【分析】 当细杆绕 O 点以 ω 转动时，两球作圆周运动，所需向心力由弹簧的弹性力提供．注意，内球受到两个弹簧的弹性力；外球只受到一个弹簧的弹性力．当角速度为零时，小球与弹簧组成的系统的机械能为零，当角速度为 ω 时，相应的动能及弹性势能之和即为外力所需作的功．

两弹簧的长度都应是 ω 的函数，其比值亦然，由此可看出对 ω 的限制．

【解】 1. 设弹簧原长为 l_0，设细杆以 ω 转动时，内侧弹簧的长度为 l_1，外侧弹簧的长度为 l_2，则对内、外小球分别有

$$\begin{cases}k(l_1-l_0)-k(l_2-l_0)=ml_1\omega^2\\k(l_2-l_0)=m(l_1+l_2)\omega^2\end{cases}$$

令

$$x=\frac{m}{k}\omega^2$$

则

$$\begin{cases}l_1(x-1)+l_2=0\\l_1x+l_2(x-1)=-l_0\end{cases}$$

解出

$$l_1=\frac{l_0}{x^2-3x+1} \tag{1}$$

$$l_2=\frac{l_0(1-x)}{x^2-3x+1} \tag{2}$$

取小球和弹簧为物体系，$\omega=0$ 时总机械能为零，以 ω 旋转时总机械能为

$$\begin{aligned}E&=E_R+E_p\\&=\left[\frac{1}{2}ml_1^2\omega^2+\frac{1}{2}m(l_1+l_2)^2\omega^2\right]+\left[\frac{1}{2}k(l_1-l_0)^2+\frac{1}{2}k(l_2-l_0)^2\right]\end{aligned}$$

把(1)式和(2)式代入，得

$$E=\frac{1}{2}kxl_0^2\frac{(2x^3-9x^2+9x+5)}{(x^2-3x+1)^2}$$

式中 $x=\frac{m}{k}\omega^2$，因无机械能损耗，$E=W$ 即为外力的功．

2. 由(1)式和(2)式，物体系以 ω 转动时，两弹簧长度之比为

$$\frac{l_2}{l_1}=1-x=1-\frac{m}{k}\omega^2$$

由(1)式和(2)式，为使 l_1 和 l_2 不为无穷大，要求

$$x^2-3x+1\neq0$$

即要求

$$x\neq\frac{3-\sqrt{5}}{2}\quad 和 \quad x\neq\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

又由(2)式，因 l_2 为正值，要求

$$1-x>0,\quad 即\ x<1$$

因此，由以上要求，x 的取值范围为

$$x<\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

即

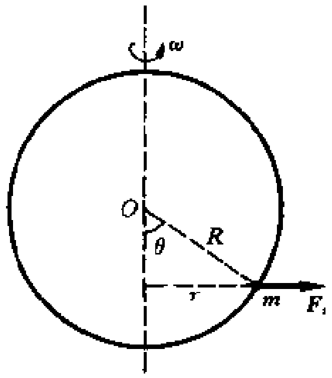
$$\frac{m}{k}\omega^2<\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

故对 ω 的限制为

$$\omega<\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}(\sqrt{5}-1)$$

【题 13】 如图，半径为 R 的光滑圆环绕竖直的直径轴以角速度 ω 旋转．一质量为 m 的小球串在圆环上，可沿环无摩擦地滑动．试求小球的平衡位置，并讨论平衡的稳定性．

【分析】 取圆环参考系，小球受重力，竖直向下；受环作用力，指向或背向环中心，与小球的运动方向垂直（图中重力与环作用力均未画出）；以及惯性离心力 F_i，沿水平方向，与竖直转轴垂直向外，如图所示．平衡条件是三者的合力为零，则小球相对圆环静止．



力图 3－13－1

从能量角度看，小球的能量包括动能 E_k 与势能两者．当小球沿环运动时，环作用力不作功，但重力和惯性离心力都对小球作功，前者可表为重力势能 $E_{p,重}$ 的减少，后者则可表为离心势能 $E_{p,离}$ 的减少．取 $\theta=0$ 的位置为 $E_{p,重}$ 与 $E_{p,离}$ 的零点，即可写出小球在任意位置 θ 时的 $E_{p,重}$ 与 $E_{p,离}$ 的表达式．$E_{p,重}$ 与 $E_{p,离}$ 之和通常称为小球的有效势能 $E_{p,eff}$，平衡条件是 $E_{p,eff}$ 为极值，即 $\frac{d}{d\theta}E_{p,eff}=0$．由此即可确定小球可能的平衡位置．

平衡是否稳定，取决于小球在各个平衡位置上受到扰动后，扰动是否会急剧增长．亦即取决于各平衡位置相应的 $E_{p,eff}$ 的极值是极大值还是极小值．若 $E_{p,eff}$ 为极小值，则平衡是稳定的；若 $E_{p,eff}$ 为极大值，则平衡是不稳定的．

【解】 取圆环参考系，小球的位置用 θ 表示．小球受重力 mg，惯性离心力 F_i（还有环作用力，它与小球运动方向垂直，不作功）．其中 F_i 为

$$F_i=mr\omega^2=mR\omega^2\sin\theta$$

取 $\theta=0$ 的位置为重力势能 $E_{p,重}$ 和离心势能 $E_{p,离}$ 的零点，则小球在任意 θ 位置时 $E_{p,重}$ 和 $E_{p,离}$ 的表达式为

$$E_{p,重}=mgR(1-\cos\theta)$$

$$E_{p,离}=-\int_0^\theta F_i\cos\theta\cdot R\mathrm{d}\theta$$

$$=-mR^2\omega^2\int_0^\theta\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta=-\frac{1}{2}mR^2\omega^2\sin^2\theta$$

小球的有效势能为

$$E_{p,eff}=E_{p,重}+E_{p,离}=mgR(1-\cos\theta)-\frac{1}{2}mR^2\omega^2\sin^2\theta \tag{1}$$

小球的总机械能为

$$E=E_k+E_{p,eff}$$

式中 E_k 为小球动能．

小球平衡位置相应的 $E_{p,eff}$ 为极值，即应满足

$$\frac{d}{d\theta}E_{p,eff}=0$$

把(1)式代入，得

$$\frac{d}{d\theta}E_{p,eff}=mgR\sin\theta-mR^2\omega^2\sin\theta\cos\theta=0$$

即

$$\sin\theta(g-R\omega^2\cos\theta)=0$$

上述方程有三个解，即小球有三种可能的平衡位置，为

$$\theta=0,\quad \pi,\quad \arccos\frac{g}{R\omega^2}$$

前两个解 $\theta=0$ 和 π 都与 ω 无关，即在任意角速度 ω 时都是平衡位置．第三个解只在 $\cos\theta=\frac{g}{R\omega^2}<1$ 时才成立，即对角速度 ω 有所限制．

为了讨论各平衡位置的稳定性，需计算 $E_{p,eff}$对 θ 的二阶导数．由(1)式，得

$$\frac{d^2}{d\theta^2}E_{p,eff}=mgR\cos\theta-mR^2\omega^2\cos2\theta=mR^2\left(\frac{g}{R}\cos\theta-\omega^2\cos2\theta\right)$$

对于平衡位置 $\theta=0$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}E_{p,eff}=mR^2\left(\frac{g}{R}-\omega^2\right)$$

当 $\omega<\sqrt{\frac{g}{R}}$时，$\frac{d^2}{d\theta^2}E_{p,eff}>0$，$E_{p,eff}$为极小值，属稳定平衡；当 $\omega>\sqrt{\frac{g}{R}}$时，$\frac{d^2}{d\theta^2}E_{p,eff}<0$，$E_{p,eff}$为极大值，属不稳定平衡．可见，$\theta=0$ 位置的平衡是否稳定，与角速度 ω 的值有关．

对于平衡位置 $\theta=\pi$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}E_{p,eff}=-mR^2\left(\frac{g}{R}+\omega^2\right)<0$$

$E_{p,eff}$为极大值，故 $\theta=\pi$ 位置的平衡总是不稳定平衡，与角速度 ω 无关．

对于平衡位置 $\theta=\arccos\frac{g}{R\omega^2}$，

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\theta^2}E_{p,eff}&=mR^2\left(\frac{g}{R}\cos\theta-\omega^2\cos2\theta\right)=mR^2\left[\frac{g}{R}\cdot\frac{g}{R\omega^2}-\omega^2(2\cos^2\theta-1)\right]\\&=mR^2\left(\frac{g^2}{R^2\omega^2}-\frac{2g^2}{R^2\omega^2}+\omega^2\right)=mR^2\left(\omega^2-\frac{g^2}{R^2\omega^2}\right)=\frac{m}{\omega^2}(R^2\omega^4-g^2)\end{aligned}$$

因 $\cos\theta=\frac{g}{R\omega^2}<1$，故 $R^2\omega^4-g^2>0$，即

$$\frac{d^2}{d\theta^2}E_{p,eff}>0$$

$E_{p,eff}$为极小值，属稳定平衡．可见，只要存在平衡位置 $\theta=\arccos\frac{g}{R\omega^2}$（要求$\frac{g}{R\omega^2}<1$），则平衡总是稳定的，与角速度 ω 无关．

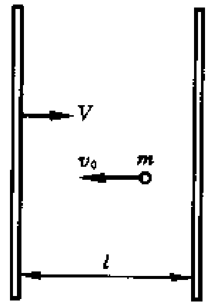
［题 14］ 如图，在相距为 l 的两平行弹性墙壁之间，有质量为 m 的弹性小球以垂直于壁的初速

度 v_0 往返弹跳．设壁的质量远大于 m，碰撞是完全弹性的，重力及空气阻力可略．

试求：1．每壁所受的平均作用力．2．若用外力使左壁以速度 $V(V \ll v_0)$ 缓缓右移，证明外力作功等于小球动能的增加．

【分析】 由题设，左壁不动时，小球往返弹跳的速度应保持为 v_0，小球碰壁时动量的变化等于在相应时间内施予壁的冲量，由此可求出壁所受的平均作用力．

当左壁右移时，小球与左壁的相对速度加大，导致反弹后小球的绝对速度加大，与此同时，两壁间距不断减少，由此可求出小球速度以及小球施予左壁的平均作用力随两壁间距的变化关系．左壁缓缓右移所需之外力应与小球施予之平均作用力相等而反向，于是外力作功可求．



力图 3－14　1

【解】 1．左壁不动时，小球往返一次所需的时间为

$$\Delta t=\frac{2l}{v_0}$$

在此时间内小球碰壁一次，其动量改变 $2mv_0$．由动量定理

$$\overline{F}\Delta t=2mv_0$$

故小球给每个壁的平均作用力为

$$\overline{F}=\frac{2mv_0}{\Delta t}=\frac{mv_0^2}{l}$$

2．左壁以 V 右移，设壁距为 x 时，小球速度为 v．小球碰左壁时，以 $-(V+v)$ 的相对速度入射，以 $(V+v)$ 的相对速度向右反弹．在地面参考系中，小球以 v 的绝对速度入射，以 $(V+v)+V=2V+v$ 的绝对速度反弹．因 $V \ll v$，小球往返一次的时间为

$$\Delta t\approx\frac{2x}{v}$$

在此时间内碰左壁一次，小球速度大小的增量为

$$\Delta v=(2V+v)-v=2V$$

同时，在 Δt 时间内壁距改变了

$$\Delta x=-V\Delta t$$

因此，小球速度随壁距的变化为

$$\frac{\Delta v}{\Delta x}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\cdot\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{2V}{\frac{2x}{v}}\cdot\frac{1}{(-V)}=-\frac{v}{x}$$

以无穷小量代替，为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-\frac{v}{x}$$

即

$$x\mathrm{d}v+v\mathrm{d}x=0$$

即

$$\mathrm{d}(vx)=0$$

积分，得

$$vx=C$$

因初条件为

$$x=l\text{ 时},\quad v=v_0$$

故积分常量

$$C=v_0 l$$

代入,得

$$v=\frac{v_0 l}{x}$$

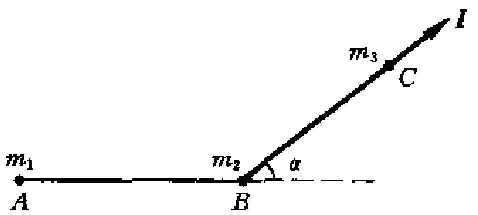
与本题 1 问类似,小球施予左壁的平均作用力为

$$\overline{F}(x)=\frac{mv^2}{x}=\frac{mv_0^2l^2}{x^3}$$

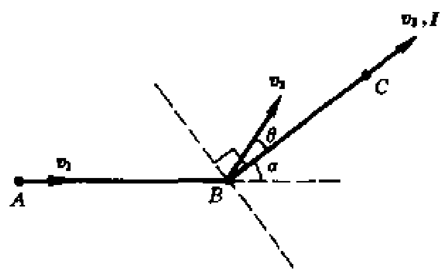
因左壁缓缓移动,处于准平衡态,外力应与 $\overline{F}$ 平衡,故外力作功为

$$W=\int_l^x-\overline{F}(x)\mathrm{d}x=mv_0^2l^2\int_l^x\frac{-\mathrm{d}x}{x^3}$$
$$=\frac{1}{2}mv_0^2l^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{l^2}\right)=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$$

【题 15】 如力图 3-15-1,A、B、C 三质点静止放置在光滑水平面上,它们的质量分别为 m_1、m_2、m_3,用柔软、不可伸长、质量可略的绳子相连并拉直,AB 与 BC 的夹角为 α. 以沿 BC 方向的冲量 $\boldsymbol{I}$ 作用于 C,试求质点 A 开始运动时的初速 .



力图 3-15-1



力图 3-15-2

【分析】 三质点从静止开始运动,其初速方向应与其加速度方向(即与所受力的方向)一致,故 $\boldsymbol{v}_1$ 沿 AB 方向,$\boldsymbol{v}_3$ 沿 BC 方向,$\boldsymbol{v}_2$ 则沿所受两张力的合力方向 . 如力图 3-15-2 所示 .

取三质点为质点组,由动量定理,外力的冲量等于质点组动量的变化 . 于是可得两个分量形式的表达式 .

又,三质点的运动是关联的,绳不可伸长意味着 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$,$\boldsymbol{v}_2$ 与 $\boldsymbol{v}_3$ 之间应有一定关系 .

【解】 如力图 3-15-2,设 A,B,C 三质点开始运动的初速为 $\boldsymbol{v}_1$,$\boldsymbol{v}_2$,$\boldsymbol{v}_3$,则 $\boldsymbol{v}_1$ 沿 AB 方向,$\boldsymbol{v}_3$ 沿 BC 方向,$\boldsymbol{v}_2$ 沿两绳张力的合力方向,设 $\boldsymbol{v}_2$ 与 BC(即与 $\boldsymbol{I}$)的夹角为 θ.

取 A,B,C 三质点为质点组,由动量定理,得

$$\boldsymbol{I}=m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2+m_3\boldsymbol{v}_3$$

上式在 BC 方向和垂直 BC 方向的分量为

$$\begin{cases} I = m_1v_1\cos\alpha + m_2v_2\cos\theta + m_3v_3 & (1) \\ 0 = -m_1v_1\sin\alpha + m_2v_2\sin\theta & (2) \end{cases}$$

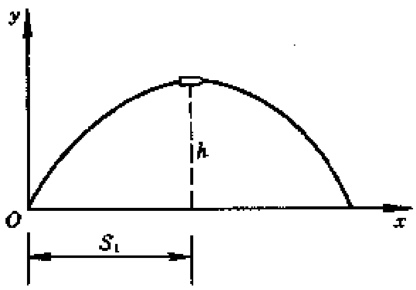
因绳不可伸长，B、C 两质点沿 BC 方向的速度分量相同，A、B 两质点沿 AB 方向的速度分量相同，故有

$$\begin{cases} v_2\cos\theta = v_3 & (3) \\ v_2\cos(\theta+\alpha) = v_1 & (4) \end{cases}$$

(1)、(2)、(3)、(4)式联立求解，得

$$v_1 = \frac{Im\cos\alpha}{m_2(m_1+m_2+m_3)+m_1m_3\sin^2\alpha}$$

【题 16】 如力图 3-16-1，从地面发射的炮弹在达到最高点处炸裂为质量相等的两块．第一块在炸裂后 1*s* 落到爆炸点正下方的地面上，该处与发射点的距离为 $S_1 = 1\,000$ m. 已知最高点距地面的高度为 $h = 19.6$ m，忽略空气阻力，试求第二块的落地点与发射点的距离．



力图 3-16-1

【分析】 炮弹在最高点爆炸，意即爆炸前瞬间炮弹的速度 $\boldsymbol{v}$ 沿水平方向，而且 $\boldsymbol{v}$ 也就是炮弹发射速度的水平分量．因 h 及 S_1 已知，v 可求．

炸裂后，第一块落于正下方，表明其初速 $\boldsymbol{v}_1$ 沿竖直方向，且作匀加速直线运动．因下落高度及所需时间均已知，v_1 不难求出．

炮弹在炸裂前后的动量守恒．由此，第二块的初速 $\boldsymbol{v}_2$ 可求，并以此 $\boldsymbol{v}_2$ 为初速作斜抛运动，在何处落地不难求得．

【解】 如力图 3-16-1，取直角坐标 Oxy，原点 O 为发射点，设炮弹发射速度为

$$\boldsymbol{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y})$$

设炮弹到达最高点的速度为 $\boldsymbol{v}$，则 $\boldsymbol{v}$ 沿 x 方向，且

$$v = v_{0x}$$

设炮弹发射后经 t 时间到达最高点，则

$$S_1 = v_{0x}t = vt$$

即

$$v = \frac{S_1}{t}$$

炮弹发射后，在 y 方向作匀减速直线运动，有

$$\begin{cases} h = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ 0 = v_{0y} - gt \end{cases}$$

得出

$$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}=2\ \mathrm{s}$$

代入 v 表达式，得

$$v=\frac{S_1}{t}=\frac{1\ 000}{2}=500\ \mathrm{m/s}$$

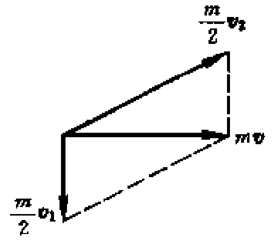
炸裂后，第一块落于正下方，表明其初速 $\boldsymbol{v}_1$ 沿竖直方向（如力图 3－16－2 所示），作匀加速直线运动，其位置 y_1 随时间 t 的变化为

$$y_1=h+v_1t-\frac{1}{2}gt^2$$

因题设第一块经 1s 后落在爆炸点正下方的地面上，即经 $t=1$ s 后，$y_1=0$，代入，解出

$$v_1=\frac{g}{2}-h=-14.7\ \mathrm{m/s}$$

负号表明 $\boldsymbol{v}_1$ 的方向竖直向下．



力图 3－16－2

如力图 3－16－2，炸裂前、后炮弹的动量守恒．设炮弹质量为 m，炸裂前瞬间炮弹速度 $\boldsymbol{v}$ 沿水平方向，其动量 $m\boldsymbol{v}$ 如力图 3－16－2．炸裂后，第一块 $\frac{m}{2}$ 的速度 $\boldsymbol{v}_1$ 竖直向下，第二块 $\frac{m}{2}$ 的速度设为 $\boldsymbol{v}_2$，其方向应如力图 3－16－2，满足

$$m\boldsymbol{v}=\frac{m}{2}\boldsymbol{v}_1+\frac{m}{2}\boldsymbol{v}_2$$

上式的 x，y 分量为

$$\begin{cases} mv=\dfrac{m}{2}v_{2x} \\ \dfrac{m}{2}v_1=\dfrac{m}{2}v_{2y} \end{cases}$$

解出，

$$\begin{cases} v_{2x}=2v=1\ 000\ \mathrm{m/s} \\ v_{2y}=v_1=14.7\ \mathrm{m/s} \end{cases}$$

以炸裂的瞬间为计时起点，第二块以上述初速 $\boldsymbol{v}_2$ 作斜抛运动，故有

$$\begin{cases} x_2=S_1+v_{2x}t \\ y_2=h+v_{2y}t-\dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

设第二块经 t_2 时间落地，落地时 $y_2=0$，代入上式，得

$$0=h+v_{2y}t_2-\frac{1}{2}gt_2^2$$

解出

$$t_2=4\ \mathrm{s}$$

代入 x_2 表达式，得

$$x_2 = S_1 + v_{2x}t_2 = 5\,000\ \text{m}$$

第二块的落地点与发射点相距 5 000 m.

【题 17】 地面上静止放置着质量为 M 的平板车，车上有 N 个人，每个人的质量均为 m. 每个人以相同的相对速度 u（相对跳后的车速）沿水平方向从车后跳离平板车．忽略一切阻力．试问，在 N 个人同时跳出和逐个跳出两种情况下，平板车在哪种情况下获得的动能大．

【分析】 取平板车和 N 人作为物体系，水平方向的动量应守恒，系统在跳前的总动量为零，跳后系统的总动量仍应为零．利用动量守恒处理类似本题的问题时，必须明确相对速度的含义．在本题中，相对速度已指明为跳后的相对速度．明确这点后，利用动量守恒分别处理 N 人同时跳出与逐个跳出两种情况，不难求出最后的车速．

【解】 1. N 个人同时跳出．取车和 N 人组成物体系，跳出前后物体系动量守恒．因跳前，车和 N 人均静止，动量为零．跳后，设车速为 v，则因 N 人同时以相对速度 u 跳出，故 N 人的绝对速度为 $(v+u)$. 于是有

$$Mv + Nm(v+u) = 0$$

解出

$$v = -\frac{N}{M+Nm}mu \tag{1}$$

负号表示 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 反向．

2. N 个人逐个跳出．取 $(M+Nm)$ 为物体系，设第一人跳出后车速为 v_1，由动量守恒，有

$$[M+(N-1)m]v_1 + m(v_1+u) = 0$$

解出

$$v_1 = -\frac{m}{M+Nm}u$$

负号表示 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{u}$ 反向．

取 $[M+(N-1)m]$ 为物体系，设第二人跳出后车速为 v_2，由动量守恒，有

$$[M+(N-1)m]v_1 = [M+(N-2)m]v_2 + m(v_2+u)$$

把 v_1 代入，解出

$$v_2 = -mu\left[\frac{1}{M+Nm} + \frac{1}{M+(N-1)m}\right]$$

依次类推，逐个跳出，直至第 N 人跳出后，车速为

$$\begin{aligned} v_N &= -mu\left[\frac{1}{M+Nm} + \frac{1}{M+(N-1)m} + \frac{1}{M+(N-2)m} + \cdots + \frac{1}{M+m}\right] \\ &= -mu\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{M+(N+1-n)m} \end{aligned}$$

式中的各项逐项增大，共 N 项，故

$$v_N > mu\frac{N}{M+Nm} \tag{2}$$

由(1)、(2)式，

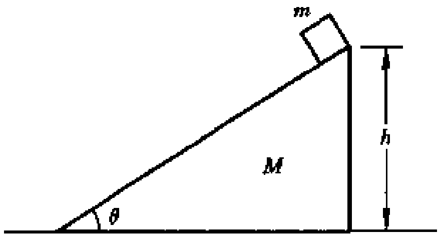
$$|v_N| > |v|$$

或

$$\frac{1}{2}Mv_N^2>\frac{1}{2}Mv^2$$

因此，N 个人逐个跳出时车的速度、动量、动能大于 N 个人同时跳出时车的速度、动量、动能 .

【题 18】 如力图 3－18－1，地面上有质量为 M、倾角为 θ 的斜面体，其顶端高 h 处有质量为 m 的小木块 . 开始时两者均静止，然后小木块从斜面体顶端滑至底部 . 忽略各种摩擦及阻力 . 试求：以地面为参考系，在小木块下滑过程中斜面体的支持力对它所作的功 .



力图 3－18－1

【分析】 小木块 m 在下滑过程中，受重力 mg 及斜面支持力 N 的作用 . 由动能定理，重力 mg 对 m 作的功 W_{mg} 以及支持力 N 对 m 作的功 W_N 之和应等于 m 到达地面时的动能 $\frac{1}{2}mv^2$，所以为求 W_N 需要知道 v. 在小木块下滑过程中，由 m、M 和地球组成的物体系的机械能守恒，故 v 与 m 到达地面时 M 的速度 v_M 相联系 . 斜面体 M 在地面上作匀加速直线运动，v_M 取决于它的加速度 a_M 和移动的距离 X. 其中 a_M 已在第二章题 4 中求出，因而问题在于求 X. 由于在下滑过程中由 m 和 M 组成的系统在水平方向动量守恒，所以 M 的位移与相应的 m 的位移 x 有关 . 又因 m 与 M 始终不脱离，所以 x 与 X 相关联，于是 X 可求 .

总之，本题涉及力学多方面的基本原理，颇具综合性，值得注意 .

【解】 在 m 下滑过程中，由动能定理，有

$$W_N+mgh=\frac{1}{2}mv^2$$

式中 W_N 是 m 下滑过程中斜面体支持力 N 对它作的功，v 是 m 滑到地面时的速度 .

在下滑过程中，由 m、M、地球组成的系统的机械能守恒，有

$$\frac{1}{2}mv^2=mgh-\frac{1}{2}Mv_M^2$$

式中 v_M 是 m 到达地面时 M 的速度 . 由以上两式，得

$$W_N=-\frac{1}{2}Mv_M^2$$

斜面体 M 在地面上作匀加速直线运动，由运动学公式，

$$v_M^2=2a_MX$$

式中 a_M 是 M 的加速度，X 是 m 到达地面时 M 移动的距离 . 由以上两式，得

$$W_N=-Ma_MX$$

其中 a_M 已由第二章题 4 解出，为

$$a_M=\frac{m\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}g$$

在下滑过程中，由 m 和 M 组成的系统在水平方向的动量守恒，故有

$$m\mathrm{d}x+M\mathrm{d}X-0$$

式中 x 和 X 分别是 m 和 M 的坐标．

如力图 3－18－2，由于下滑过程中 m 和 M 始终不脱离，故当 M 的位置从 O 移到 X 处时，m 的水平位置则从 O 移到 $(X-\frac{h}{\tan\theta})$ 处．把上式积分，

$$m\int_0^{(X-\frac{h}{\tan\theta})} dx + M\int_0^X dX = 0$$

得出

$$m\left(X-\frac{h\cos\theta}{\sin\theta}\right)+MX=0$$

故

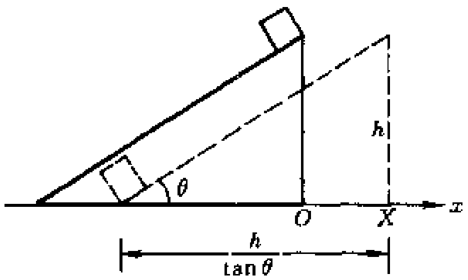
$$X=\frac{mh\cos\theta}{(M+m)\sin\theta}$$

把 a_M 和 X 的结果代入 W_N，得

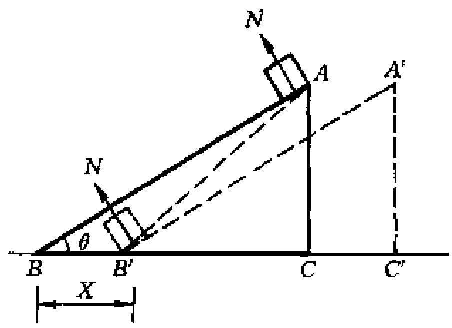
$$W_N=-Ma_MX=-M\frac{m\sin\theta\cos\theta}{(M+m\sin^2\theta)}g\cdot\frac{mh\cos\theta}{(M+m)\sin\theta}$$

$$=-\frac{Mm^2h\cos^2\theta}{(M+m)(M+m\sin^2\theta)}g$$

求解本题的另一方法是，直接由功的定义来计算 W_N.



力图 3－18－2



力图 3－18－3

如力图 3－18－3，在斜面体参考系中，m 沿着斜面 AB 下滑．在地面参考系中，因斜面体也在运动，m 从 A 点移至 B' 点．

由第二章题 4 可知，m 的绝对加速度的水平分量 a_x 和竖直分量 a_y 均为常数，故 m 作直线运动，即力图 3－18－3 中的 AB' 为直线．又，m 在运动过程中所受斜面支持力 N 的方向总是与 AB 或 $A'B'$ 垂直的．由于 m 在 N 方向上的位移为 $(-X\sin\theta)$，故支持力 N 作功为

$$W_N=-NX\sin\theta$$

在第二章题 4 中已经得出，

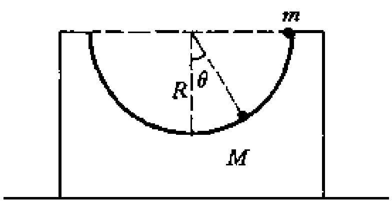
$$N=\frac{M}{\sin\theta}a_M=\frac{mM\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}g$$

由以上两式，得

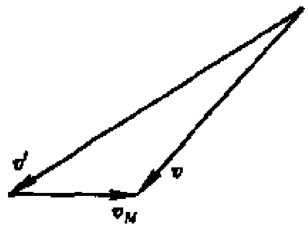
$$W_N = -\frac{Mm^2 h\cos^2\theta}{(M+m)(M+m\sin^2\theta)}g$$

【题 19】 如力图 3－19－1，地面上静止地放置着质量为 M 的木块，其底部为平面，上部有截面为半圆的凹槽，半径为 R，质量为 m 的小球从最高处静止下滑．设各种摩擦及阻力均可略．试求：1. 在小球 m 下滑过程中，m 的绝对速度 v，M 的绝对速度 v_M 以及 m 的相对速度 v' 随小球位置 θ 的变化规律．2. 小球 m 在最低点时给木块 M 的压力．

【分析】 在 m 下滑过程中，由 m、M、地球组成的系统的机械能守恒．在 m 下滑过程中，由 m 和 M 组成的系统在水平方向的动量守恒．在 m 下滑过程中，由于 m 和 M 始终不脱离，故 $\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{v}_M$ 以及 $\boldsymbol{v}'$ 三者是关联的，如力图 3－19－2 所示．利用以上关系，$v(\theta)$、$v_M(\theta)$、$v'(\theta)$ 可求．



力图 3－19－1



力图 3－19－2

取 M 为参考系，则 m 以 $\boldsymbol{v}'$ 作圆周运动，所需之向心力由重力 mg、支持力 N 及惯性力提供．但当 m 在最低点时，因 M 的加速度为零，惯性力亦为零，所需之向心力仅由 mg 及 N 提供，于是 m 在最低点时的 N 可求．

【解】 1. 在 m 下滑过程中，由 m、M、地球组成的物体系的机械能守恒，故有

$$mgR = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2 + mgR(1-\cos\theta)$$

即

$$mgR\cos\theta = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2 \tag{1}$$

式中 v 和 v_M 是当 m 在 θ 位置时 m 和 M 的绝对速度．

在 m 下滑过程中，由 m 和 M 组成的物体系在水平方向的动量守恒，取 x 轴沿水平方向，有，

$$mv_x + Mv_M = 0 \tag{2}$$

由于 m 和 M 不能脱离，如力图 3－19－2，有

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}_M$$

式中 $\boldsymbol{v}'$ 是 m 相对 M 的速度．上式的水平分量为

$$v_x = v_x' + v_m = -v'\cos\theta + v_M \tag{3}$$

式中 v_x' 是 $\boldsymbol{v}'$ 的水平分量．又如力图 3－19－2，由余弦定理，有

$$v^2 = v'^2 + v_M^2 - 2v'v_M\cos\theta \tag{4}$$

(1)、(2)、(3)、(4)式联立求解，得

$$v_M=\sqrt{\frac{m^2\cos^3\theta}{(m+M)^2-m(M+m)\cos^2\theta}}\sqrt{2gR}$$

$$v=\sqrt{\frac{[(m+M)^2-m(2M+m)\cos^2\theta]\cos\theta}{(m+M)^2-m(M+m)\cos^2\theta}}\sqrt{2gR}$$

$$v'=\sqrt{\frac{(M+m)^2\cos\theta}{(m+M)^2-m(M+m)\cos^2\theta}}\sqrt{2gR}$$

2. 当 m 到达最低点时，取 M 为参考系，因 M 的加速度为零，故 m 不受惯性力，只受重力 mg 和支持力 N，于是有

$$N-mg=\frac{mv'^2}{R}$$

式中的 v' 是 $\theta=0$ 处 m 相对 M 的速度．由上述 $v'(\theta)$ 表达式，在 $\theta=0$ 时，有

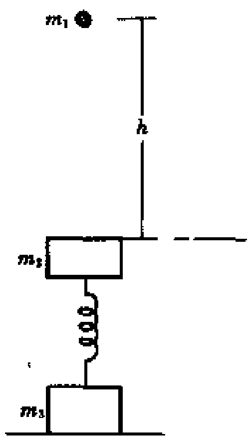
$$v'=\sqrt{\frac{m+M}{M}}\cdot\sqrt{2gR}$$

代入，得出 m 在最低点处(即 $\theta=0$ 处)所受支持力为

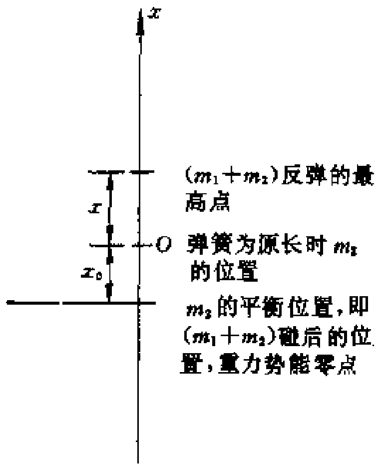
$$N=\left(\frac{2m+3M}{M}\right)mg$$

小球 m 在最低点时给木块 M 的压力等于 N，但方向竖直向下．

【题 20】 如力图 3－20－1，质量为 m_3 的木块平放在地面上，通过劲度系数为 k 的竖直弹簧与质量为 m_2 的木块相联，达到平衡．质量为 m_1 的小球从距 m_2 为 h 的高处静止下落，与 m_2 作完全非弹性碰撞．试问：为使 m_2 向上反弹时能带动 m_3 刚好离开地面，h 应为多少？



力图 3－20－1



力图 3－20－2

【分析】 取 m_1 和 m_2 为物体系，在 m_1 和 m_2 碰撞过程中，物体系动量守恒，由此可求出碰后相粘的 m_1 和 m_2 的速度，即(m_1+m_2)的速度．尔后，在弹簧压缩并反弹的过程中，取 m_1、m_2、m_3、弹簧、地球为物体系，其机械能守恒．初态可取 m_1 与 m_2 碰后的瞬间，因为相应的动能与弹簧势能均可知，并可取该时刻(m_1+m_2)的位置为重力势能的零点(如力图 3－20－2)．终

态可取(m_1+m_2)上升到最高点时的状态，这时 m_3 将获得最大的弹簧拉力，使之刚好离开地面(如力图 3-20-2)．列式时，请注意初态、终态位置与弹簧为原长(即弹簧松弛)时的位置之间的关系，以便正确表达初态和终态的弹簧势能和重力势能．最后，m_3 刚好离开地面的条件是，m_3 所受弹性力与重力相等而反向．

【解】 取 m_1 和 m_2 为物体系，在两者完全非弹性碰撞过程中动量守恒．取碰前瞬间为初态，取碰后瞬间为终态，设碰后瞬间相粘的(m_1+m_2)的速度为 v，则有

$$m_1\sqrt{2gh}=(m_1+m_2)v$$

即

$$v=\frac{m_1}{m_1+m_2}\sqrt{2gh} \tag{1}$$

在弹簧压缩并反弹的过程中，由 m_1、m_2、m_3、弹簧、地球组成的物体系的机械能守恒．取初态为 m_1 和 m_2 碰后相粘的一瞬间，则动能为$\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2$；弹簧势能为$\frac{1}{2}kx_0^2$，其中 x_0 是弹簧为原长时的位置与 m_2 的平衡位置(亦即碰后瞬间相粘的(m_1+m_2)的位置)之间的距离；取碰后瞬间(m_1+m_2)的位置为重力势能零点．终态取(m_1+m_2)上升到最高点．终态的动能为零；设终态时弹簧伸长了 x，则弹簧势能为$\frac{1}{2}kx^2$；终态的重力势能为$(m_1+m_2)g(x_0+x)$．故有

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2+\frac{1}{2}kx_0^2=\frac{1}{2}kx^2+(m_1+m_2)g(x_0+x) \tag{2}$$

m_2 的平衡位置即(m_1+m_2)碰后瞬间的位置 x_0 满足下式，

$$kx_0=m_2g$$

即

$$x_0=\frac{m_2g}{k} \tag{3}$$

当(m_1+m_2)反弹达到最高点时，为了刚好将 m_3 拉离地面，要求

$$m_3g=kx$$

即

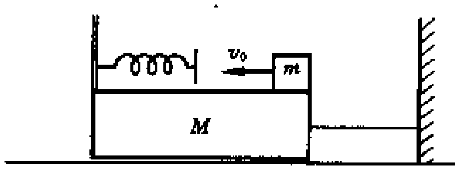
$$x=\frac{m_3g}{k} \tag{4}$$

(1)、(2)、(3)、(4)式联立求解，得出

$$h=\frac{(m_1+m_2)(m_2+m_3)(2m_1+m_2+m_3)}{2km_1^2}g$$

【题 21】 如图所示，质量为 M 的长滑块静止地放在光滑的水平桌面上，一质量可略的弹簧固定在滑块左端，弹簧的劲度系数为k，滑块右端用一不可伸长的细绳固定在竖直墙上，细绳能承受的最大拉力为 T_0．一质量为 m，初速为 v_0(其方向水平向左)的小物在滑块上无摩擦地向左滑动，最终与弹簧相碰并压缩弹簧．

试求：1．使细绳断裂的最小的 v_0 值．2．细绳断裂后滑块获得的最大加速度是多少？3．小物离开滑块时相对桌面的速度为零的条件是什么？



力图 3－21－1

【分析】 1. 小物向左运动压缩弹簧时，滑块左端便受到向左的弹簧力的作用，此力与细绳所能承受的最大拉力 T_0 相平衡即为细绳刚能被拉断的条件．使细绳被拉断所需的最小弹簧力由弹簧的相应压缩量决定，而后者又取决于 v_0．

2. 细绳断开时，弹簧处于压缩状态，滑块在向左的弹簧力的作用下，将向左运动，其最大加速度由弹簧的最大压缩量决定．最大压缩量则可运用动量守恒定律和机械能守恒定律求得，因为细绳断开后，由小物、弹簧、滑块组成的物体系不受外力，其动量守恒，机械能也守恒．

3. 小物压缩弹簧使细绳断开，继而弹簧恢复原长并将小物推开．本题实际上是求小物刚被推离弹簧时速度为零(相对桌面)的条件．由于滑块以一定速度向左运动，又无摩擦(桌面、滑块均光滑)，故即使小物速度为零，仍能脱离滑块．

【解】 1. 设细绳被拉断时弹簧的压缩量为 x_0，则 x_0 由下式决定，

$$kx_0 = T_0$$

为使弹簧压缩到弹簧力 kx_0 等于或大于 T_0，小物的初始动能必须满足，

$$\frac{1}{2}mv_0^2 \geqslant \frac{1}{2}kx_0^2$$

即要求小物的初速

$$v_0 \geqslant \frac{T_0}{\sqrt{mk}}$$

2. 设 v_0 满足上述条件，则细绳将被拉断．设细绳被拉断时小物的速度为 v_1．取小物、弹簧、滑块组成物体系，则从小物以 v_0 开始滑动到细绳被拉断，物体系机械能守恒，即有

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_0^2$$

注意，因细绳刚被拉断时，滑块尚未获得速度(速度为零)，式中的 x_0 应满足下式

$$x_0 = \frac{T_0}{k}$$

由以上两式，解出

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - \frac{T_0^2}{mk}}$$

细绳被拉断后，由小物、弹簧、滑块组成的上述物体系不受外力(重力与支持力抵消，可不计)，故动量守恒，机械能也守恒．当弹簧压缩量最大时，施予滑块的弹簧力也最大，从而滑块获得的加速度也最大．此时小物与滑块相对静止，具有共同的速度(相对桌面)，设为 v_2．根据物体系动量守恒，取细绳刚被拉断为初态，取滑块获得最大加速度，即小物与滑块具有共同速度 v_2 为终态，则有

$$mv_1 = (M + m)v_2$$

根据物体系机械能守恒，取小物以 v_0 开始运动为初态，取滑块获得最大加速度，即小物与滑块以共同的 v_2 运动为终态，在终态弹簧具有最大压缩量，设为 x，则有

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}(M+m)v_2^2+\frac{1}{2}kx^2$$

由以上五式，解出

$$kx=\sqrt{\frac{m}{M+m}(kMv_0^2+T_0^2)}$$

故滑块获得的最大加速度 a 为

$$a=\frac{kx}{M}=\frac{1}{M}\sqrt{\frac{m}{M+m}(kMv_0^2+T_0^2)}$$

3. 设小物被弹离弹簧时速度为零(相对桌面)，设此时滑块的速度为 v_M，此时弹簧为原长．由物体系的机械能守恒和动量守恒，取小物刚被弹离弹簧(速度为零)为终态，则有

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}Mv_M^2$$

及

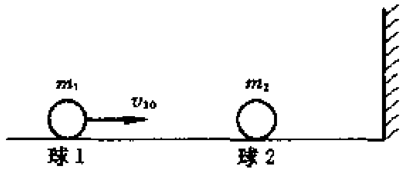
$$mv_1=Mv_M$$

由以上两式及前面求出的 v_1，解出

$$v_0=\frac{T_0}{\sqrt{(m-M)k}}$$

为使小物以相对桌面速度为零离开滑块，v_0 应满足的条件就是上式，上式还要求 $m>M$，否则无解．

【题 22】 如图，球 1 和球 2 的质量分别为 m_1 和 m_2，放置在光滑水平地面上，球 1 以一定的水平初速 v_{10} 向右沿两球连心线运动，球 2 则静止．两球连心线右侧有一竖直弹性墙．设两球之间以及球与墙之间的所有碰撞均为完全弹性碰撞．为了使两球能发生、而且只能发生两次碰撞，试问两球的质量之比 $\frac{m_1}{m_2}$ 应满足什么条件?



力图 3　22－1

【分析】 两球碰撞前后的速度方向均沿两球的连心线，这种碰撞称为正碰或对心碰撞．这是一维的碰撞．在正碰前后，两球的总动量守恒．所谓完全弹性碰撞是指两球碰撞过程中无机械能损失，碰撞前后两球的总机械能(动能)守恒．由上述动量守恒及机械能守恒，即可求出两球作完全弹性碰撞前后速度的关系．

利用上述关系，在本题中可确定两球每次碰撞后速度的大小和方向．然后，分别就 $m_1>m_2$，$m_1=m_2$，$m_1<m_2$ 三种情形作具体分析，即可求得为使两球只碰撞两次，$\frac{m_1}{m_2}$ 所应满足的条件．

【解】 首先导出两球作完全弹性碰撞(正碰)的公式．设两球的质量分别为 m_1 和 m_2，设两球碰前的速度方向均沿连心线，速度大小分别为 v_{10} 和 v_{20}，正碰后，两球的速度方向仍均沿连心线，设速度大小分别变为 v_1 和 v_2．因碰撞前后两球总动量不变，有

$$m_1v_{10}+m_2v_{20}=m_1v_1+m_2v_2$$

若两球作完全弹性碰撞，则碰撞前后两球总机械能(动能)不变，有

$$\frac{1}{2}m_1v_{10}^2+\frac{1}{2}m_2v_{20}^2=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2$$

由以上两式，解出

$$\begin{cases}v_1=v_{10}-\dfrac{2m_2}{m_1+m_2}(v_{10}-v_{20})\\[2ex]v_2=v_{20}+\dfrac{2m_1}{m_1+m_2}(v_{10}-v_{20})\end{cases}\tag{1}$$

这就是完全弹性碰撞(正碰)的公式．顺便指出，在完全弹性碰撞中，由两球碰前和碰后相对速度之比定义的恢复系数 $e=(v_2-v_1)/(v_{10}-v_{20})=1$.

现在回到本题．因球 2 开始静止，即 $v_{20}=0$，由(1)式，球 1 和球 2 第一次碰撞后，两球的速度分别为

$$\begin{cases}v_1=\left(1-\dfrac{2m_2}{m_1+m_2}\right)v_{10}=\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_{10}\\[2ex]v_2=\dfrac{2m_1}{m_1+m_2}v_{10}\end{cases}\tag{2}$$

在(2)式中，v_1 和 v_2 取正值表示速度方向向右，取负值表示向左．可见，第一块碰撞后，v_2 必为正值，球 2 总是右行；v_1 可能为正、为负或为零，即球 1 可能右行、静止、或左行，由 m_1 和 m_2 的比值决定．现分别讨论如下．

1. $m_1>m_2$

由(2)式，v_1 和 v_2 均为正值，即第一次碰撞后，球 1 和球 2 均右行，且 $v_2>v_1$. 球 2 向右碰壁后弹回，以速度 $-v_2$ 左行，与以速度 v_1 右行的球 1 发生第二次碰撞，设第二次碰撞后球 1 和球 2 的速度分别为 v_1' 和 v_2'，则由(1)式，并将(2)式代入，得出

$$\begin{cases}v_1'=v_1-\dfrac{2m_2}{m_1+m_2}[v_1-(-v_2)]\\[2ex]\quad=\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_{10}-\dfrac{2m_2}{m_1+m_2}\left(\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}+\dfrac{2m_1}{m_1+m_2}\right)v_{10}\\[2ex]\quad=\dfrac{(m_1-m_2)^2-4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}v_{10}\\[2ex]v_2'=(-v_2)+\dfrac{2m_1}{m_1+m_2}[v_1-(-v_2)]\\[2ex]\quad=-\dfrac{2m_1}{m_1+m_2}v_{10}+\dfrac{2m_1}{m_1+m_2}\left(\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}+\dfrac{2m_1}{m_1+m_2}\right)v_{10}\\[2ex]\quad=\dfrac{4m_1(m_1-m_2)}{(m_1+m_2)^2}v_{10}\end{cases}\tag{3}$$

因 $m_1>m_2$，故 $v_2'>0$，第二次碰撞后球 2 必右行，与竖直墙碰撞后反弹，以速度 $-v_2'$ 左行．为了不与球 1 发生第三次碰撞，首先要求球 1 左行，即要求

$$v_1'<0$$

由(3)式，亦即要求

$$(m_1-m_2)^2-4m_1m_2<0$$

或

$$m_1^2-6m_1m_2+m_2^2<0 \tag{4}$$

其次，为了不发生第三次碰撞，还要求碰墙后反弹左行的球 2 追不上左行的球 1，即要求

$$v_2' \leqslant -v_1'$$

由(3)式，亦即要求

$$4m_1(m_1-m_2) \leqslant 4m_1m_2-(m_1-m_2)^2$$

或

$$5m_1^2-10m_1m_2+m_2^2 \leqslant 0 \tag{5}$$

由不等式(4)及(5)，$\frac{m_1}{m_2}$应分别满足

$$3-2\sqrt{2}<\frac{m_1}{m_2}<3+2\sqrt{2}$$

及

$$1-\frac{2\sqrt{5}}{5} \leqslant \frac{m_1}{m_2} \leqslant 1+\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

由以上两个不等式，加上讨论的前提

$$\frac{m_1}{m_2}>1$$

得出在 $m_1>m_2$ 时，两球只发生两次碰撞的条件是，$\frac{m_1}{m_2}$的取值范围为

$$1<\frac{m_1}{m_2} \leqslant 1+\frac{2\sqrt{5}}{5} \tag{6}$$

2. $m_1=m_2$

在完全弹性碰撞的条件下，由(1)式，质量相同的两个球相碰后互换速度．在本题中，碰前，球 1 以速度 v_{10}右行，球 2 静止；第一次碰后，球 1 静止，球 2 以 $v_2=v_{10}$右行；球 2 碰壁后，以 $-v_2=-v_{10}$左行，与静止的球 1 作第二次碰撞，碰后，球 2 静止，球 1 以 $v_1'=-v_{10}$左行；此后两球不再相碰．

所以在 $m_1=m_2$ 时，两球刚好能发生两次碰撞．

3. $m_1<m_2$

两球第一次碰后，由(2)式，$v_1<0$，球 1 左行；$v_2>0$，球 2 右行．球 2 碰墙后，以 $-v_2$ 左行，为了能追上球 1 作第二次碰撞，要求

$$-v_2>v_1$$

由(2)式，即要求

$$2m_1>m_2-m_1$$

或

$$\frac{m_1}{m_2}>\frac{1}{3}$$

因 $m_2>m_1$，故两球第二次碰后，球 1 左行速度加大，球 2 仍左行（不会改向右行），且速度减小（小于球 1 左行速度），所以两球不会发生第三次碰撞．总之，在 $m_1<m_2$ 条件下，两球只发生两次碰撞的条件是，$\frac{m_1}{m_2}$的取值范围应为

$$\frac{1}{3}<\frac{m_1}{m_2}<1 \tag{7}$$

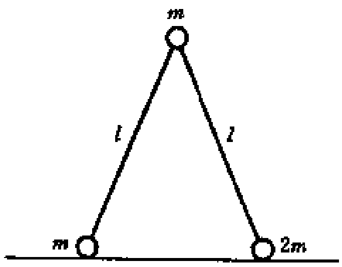
综合以上的(6)式，$\frac{m_1}{m_2}=1$ 时两球刚好碰撞两次，及(7)式，为了使两球能够作两次碰撞，且只能作两次碰撞的条件是，$\frac{m_1}{m_2}$的取值范围应为

$$\frac{1}{3}<\frac{m_1}{m_2}\leqslant 1+\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

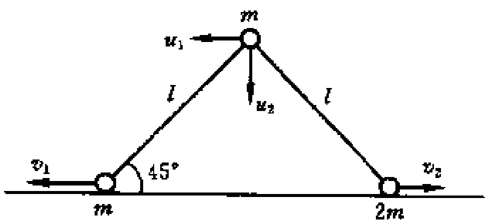
【题 23】 如力图 3－23－1，两根长度均为 l 的刚性细杆，一端用质量为 m 的球形铰链相连，两杆另一端分别安装质量为 m 和 $2m$ 的小球．开始时两杆并拢，铰链球朝上，竖直放置在光滑桌面上，从静止释放，下面两球开始向两边滑动，两杆始终保持在同一铅垂面内．设三球本身的大小，轻杆的质量以及各种摩擦均可忽略．

试求：1．铰链球碰桌面时的速度．2．当两杆夹 90°角时，质量为 $2m$ 的小球的速度．

【分析】 1．取经两刚性细杆相连的三球装置为物体系，因物体系在水平方向不受外力，故在滑动过程中物体系在水平方向动量守恒．开始时物体系的动量为零，铰链球碰桌面时物体系的水平动量仍为零，又因三球刚性相连，不可能此左行彼右行，故铰链球碰桌面时，三球的水平速度必均为零，只有铰链球具有竖直向下的速度．利用机械能守恒定律即可求得铰链球碰桌面时的速度．



力图 3－23－1



力图 3－23－2

2．如力图 2－23－2，当两杆夹 90°角时，三球都有一定速度．设两杆下端两球的速度分别为 v_1 和 v_2（均沿水平方向），设铰链球速度的水平分量为 u_1，竖直分量为 u_2，可见共有四个速度未知量，需有四个独立方程才能求解．本题求的是 v_2，水平方向动量守恒和机械能守恒可提供两个方程，另两个方程则可由三球的约束关系提供．因为轻杆是刚性的，故每根轻杆上下两端小球沿杆长方向的速度分量应相等，两根杆可提供两个方程，于是可解．

【解】 1．根据分析，铰链球与桌面相碰时，三球的水平速度均为零，只有铰链球具有竖直向下的速度 u．取三球及地球为物体系，从两杆竖直三球静止到铰链球碰桌面，物体系机械能守恒，故

有

$$mgl=\frac{1}{2}mu^2$$

解出

$$u=\sqrt{2gl}$$

上述结果与铰链球自由下落到桌面时的末速度相同,表明在下落过程中,两杆对铰链球并无作用力.

2. 取三球为物体系,在铰链球下落过程中,水平方向不受力,故物体系水平动量守恒.取两杆竖直,三球静止为初态;取两杆夹90°角,三球速度如力图3-23-2所示为终态,则有

$$mv_1+mu_1-2mv_2=0 \tag{1}$$

取三球及地球为物体系,则在铰链球下落过程中,物体系机械能守恒.取两杆竖直,三球静止为初态;取两杆夹90°角,三球速度如力图3-23-2所示为终态,则有

$$\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}m(u_1^2+u_2^2)+\frac{1}{2}(2m)v_2^2=mgl\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \tag{2}$$

因杆刚性,每杆上、下两端小球沿杆长方向的速度分量应相同,此即约束条件.在两杆夹90°角时,如力图3-23-2所示,应有

$$\begin{cases}v_1\cos45°=(u_1+u_2)\cos45°\\ v_2\cos45°=(u_2-u_1)\cos45°\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}v_1=u_1+u_2 & (3)\\ v_2=u_2-u_1 & (4)\end{cases}$$

联立(1)、(2)、(3)、(4)式,解出

$$v_2=\sqrt{\frac{3}{10}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)gl}$$

另外,$v_1=\frac{5}{3}v_2$,$u_1=\frac{1}{3}v_2$,$u_2=\frac{4}{3}v_2$ 亦均可知.

【题24】 小球从高度为 h 处静止下落,与地面碰撞时的恢复系数为 e.忽略空气阻力,忽略碰撞过程所需时间.

试求:小球从高 h 处静止下落经多次往返弹跳直至最后静止在地面上所需的总时间.

【分析】 恢复系数 e 的定义是,两物碰撞后分离时的相对速度与碰撞前接近时的相对速度之比.小球与地球碰撞,取地球参考系,则地球始终静止,恢复系数 e 就等于小球碰后速度与碰前速度之比,即 $e=\frac{v_n}{v_{n-1}}$,如图所示.每次碰后至下次相碰所经时间可由运动学公式求得.从 h 处静止下落到最后静止在地面上所需总时间即为各段时间之和.

【解】 小球从高 h 处静止下落,第一次碰地前的速度为

$$v_0=\sqrt{2gh}$$

第一次碰地后(反弹)的速度为

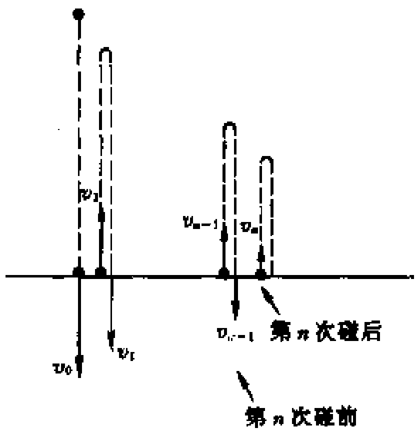
$$v_1=ev_0$$

由机械能守恒可知，v_1 即为第二次碰地前的速度．第二次碰地后的速度为

$$v_2=ev_1$$

依次类推，第 n 次碰地前的速度 v_{n-1} 与第 n 次碰地后的速度 v_n 的关系为

$$v_n=ev_{n-1}$$



力图 3-24-1

由此得出，

$$v_n=ev_{n-1}=e^2v_{n-2}=\cdots$$
$$=e^nv_0=e^n\sqrt{2gh}$$

第 n 次碰后，在空中往返(上升再下降)所需的时间为

$$t_n=\frac{2v_n}{g}=2e^n\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

因此，小球从高 h 处静止下落，经多次弹跳，直至最后静止在地面上所需的总时间为

$$t_{总}=t_0+\sum_{n=1}^{\infty}t_n$$

式中 t_0 是从 h 处静止下落所需时间，为

$$t_0=\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

将 t_0 及 t_n 代入 $t_{总}$ 表达式，得

$$t_{总}=\sqrt{\frac{2h}{g}}+\sum_{n=1}^{\infty}2e^n\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}e^n\right)$$
$$=\sqrt{\frac{2h}{g}}[1+2e(1+e+e^2+e^3+\cdots\cdots)]=\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(1+\frac{2e}{1-e}\right)$$
$$=\left(\frac{1+e}{1-e}\right)\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

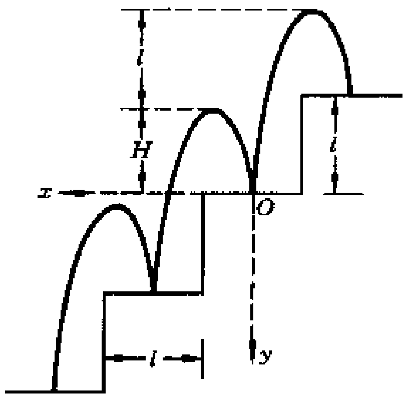
【题 25】 如力图 3-25-1，台阶每级的宽和高均为 l．一小球向下逐级弹跳，每次反弹后，相对本级达到的最高高度均为 H，每次的下落点均在各级的同一地点．已知小球与台阶碰撞时的恢复系数为 e，忽略空气阻力．

试求：1．小球的水平速度．2．H 为多少？

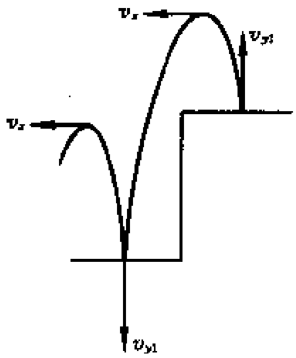
【分析】 小球每次反弹后，都作斜抛运动，由于达到的高度和落地点的位置都相同，可以断定小球在每两次反弹之间的运动轨迹和飞行时间都相同，只是逐级下移而已．因此无论在哪一级，每次反弹前小球速度的竖直分量都是 v_{y1}，反弹后则都是 v_{y2}，小球速度的水平分量 v_x 则始终不变，如力图 3-25-2 所示．

给定的恢复系数 e 是 v_{y2} 与 v_{y1} 之比，表明经一次非弹性碰撞后，小球的动能损耗了．但到下

一次碰撞前小球的动能又恢复如初，这是靠逐级往下时重力势能减少 mgl 来弥补的，于是 v_{y1} 和 v_{y2} 可求．



力图 3－25－1



力图 3－25－2

在斜抛运动中，竖直分量作简单的匀加速运动，由初速 v_{y2} 和终速 v_{y1} 可求出从反弹到落在下一级（即完成一个完整的斜抛运动）所需的时间 t，在 t 时间内，水平分量以 v_x 匀速前进了 l 的距离，于是 v_x 可求．在斜抛运动中机械能守恒，由初速的两个分量 v_x 和 v_{y2}，达到的最高高度 H 可求．

【解】 如力图 3－25－1，取直角坐标 Oxy，原点 O 为反弹点，x 轴水平向左，y 轴竖直向下．小球逐级下跳，作一个个斜抛运动，因最高高度 H 及落地点（反弹点）位置相同，故斜抛运动的轨迹及所需时间相同，小球速度的水平分量 v_x 不变，在每级反弹前小球速度的竖直分量均为 v_{y1}，反弹后均为 v_{y2}．由此，小球每次反弹前的速度 $\boldsymbol{v}_1$ 和反弹后的速度 $\boldsymbol{v}_2$ 可表为

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = v_x\boldsymbol{i} + v_{y1}\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{v}_2 = v_x\boldsymbol{i} + v_{y2}\boldsymbol{j} \end{cases}$$

式中 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 是 x 和 y 方向的单位矢量．

由恢复系数 e 的定义

$$e = \frac{-v_{y2}}{v_{y1}} \tag{1}$$

反弹前和反弹后，小球的机械能分别为

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_{y1}^2) = \frac{1}{2}mv_x^2 + mg(H+l) \\ \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_{y2}^2) = \frac{1}{2}mv_x^2 + mgH \end{cases}$$

相减，得

$$v_{y1}^2 - v_{y2}^2 = 2gl \tag{2}$$

由(1)、(2)式，解出

$$v_{y1}^2 = \frac{2gl}{1-e^2}$$

设从反弹到落在下一个台阶上经历的时间为 t，则

$$t=\frac{v_{y1}-v_{y2}}{g}=\frac{1+e}{g}v_{y1}=\frac{1+e}{g}\sqrt{\frac{2gl}{1-e^2}}$$

故

$$v_x=\frac{l}{t}=\sqrt{\frac{(1-e)gl}{2(1+e)}}$$

从反弹点到达最高点，机械能守恒，有

$$\frac{1}{2}m(v_x^2+v_{y2}^2)=\frac{1}{2}mv_x^2+mgH$$

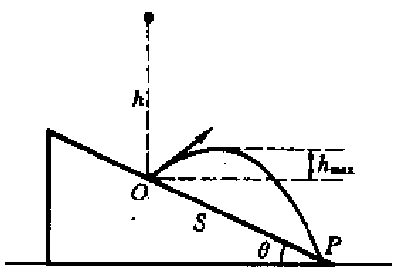
故

$$H=\frac{v_{y2}^2}{2g}=\frac{v_{y1}^2-2gl}{2g}=\frac{e^2}{1-e^2}l$$

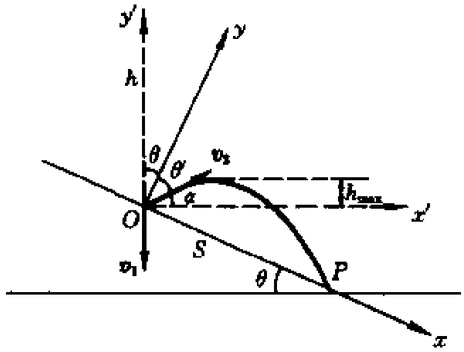
【题 26】 如力图 3-26-1，在固定斜面的 O 点上方 $h=1.60$ m 处有一小球从静止自由下落．已知斜面是光滑的，倾角为 $\theta=15°$，小球与斜面碰撞时的恢复系数为 $e=0.60$，忽略空气阻力．

试求：1. 小球碰后达到的最高点与 O 点之间的高度差 h_{max}．2. 设小球碰后落在斜面上 P 点，则 O 点与 P 点的距离 S 是多少？ 3. 小球与斜面碰撞后，其机械能损失的百分数是多少？

【分析】 因斜面光滑无摩擦，故碰前小球速度沿斜面切向的分量在碰后不变，但碰前小球速度沿斜面法向的分量在碰后改变了，其间的比值就是恢复系数 e．由碰后小球的速度，即可求出小球作斜抛运动所能达到的高度(射高)h_{max}以及机械能的损失．由于所求的 S 是斜面上的距离，不能采用斜抛运动的射程公式，需将小球的轨迹方程(抛物线)与斜面方程联立求解．又，选用有关公式时应注意坐标的选取．



力图 3-26-1



力图 3-26-2

【解】 如力图 3-26-2，取直角坐标 Oxy 及 $Ox'y'$，x 轴沿斜面切向，y 轴沿斜面法向，x'轴为水平方向，y'轴为竖直方向，原点 O 为碰撞点．设碰前小球速度为 v_1，碰后为 v_2，设 v_2 与 y 轴夹角为θ'，v_2 与 x'轴夹角为α

小球碰前速度为

$$v_1=\sqrt{2gh}$$

v_1 的两个分量为

$$\begin{cases} v_{1x} = v_1\sin\theta \\ v_{1y} = -v_1\cos\theta \end{cases}$$

因斜面光滑，故碰前、后小球速度沿斜面切向（即沿 x 轴）的分量不变，有

$$v_{2x} = v_{1x} = v_1\sin\theta$$

恢复系数的定义为

$$e = \frac{v_{2y}}{-v_{1y}}$$

故

$$v_{2y} = -ev_{1y} = ev_1\cos\theta$$

所以碰后小球的速度 v_2 为

$$\begin{aligned} v_2 &= \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} \\ &= \sqrt{\sin^2\theta + e^2\cos^2\theta}\sqrt{2gh} = 3.55\ \text{m/s} \end{aligned}$$

碰后 $\boldsymbol{v}_2$ 的方向用 θ' 表示（见力图 3－26－2），为

$$\tan\theta' = \frac{v_{2x}}{v_{2y}} = \frac{1}{e}\tan\theta$$

$$\theta' = 24.06°$$

小球碰后作斜抛运动的射高 $h_{\max}$ 为

$$\begin{aligned} h_{\max} &= \frac{v_2^2\sin^2\alpha}{2g} = \sin^2\alpha(\sin^2\theta + e^2\cos^2\theta)h \\ &= \cos^2(\theta + \theta')(\sin^2\theta + e^2\cos^2\theta)h = 0.39\ \text{m} \end{aligned}$$

2. 在 $Ox'y'$ 坐标中，小球作斜抛运动的轨迹方程为

$$y' = x'\tan\alpha - \frac{g}{2v_2^2\cos^2\alpha}x'^2$$

斜面方程为

$$y' = -x'\tan\theta'$$

由以上两式，解出小球落在斜面上的 P 点的 x' 坐标为

$$x' = \frac{2v_2^2\sin^2(\theta + \theta')}{g}[\cot(\theta + \theta') + \tan\theta]$$

O 点与 P 点的距离 S 为

$$\begin{aligned} S &= \frac{x'}{\cos\theta} \\ &= \frac{2v_2^2\sin^2(\theta + \theta')}{g\cos\theta}[\cot(\theta + \theta') + \tan\theta] = 1.59\ \text{m} \end{aligned}$$

3. 小球因碰撞损失的机械能为

$$\Delta E = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_2^2)$$

损失的百分数为

$$\frac{\Delta E}{E}=\frac{\frac{1}{2}m(v_1^2-v_2^2)}{\frac{1}{2}mv_1^2}=1-\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2$$

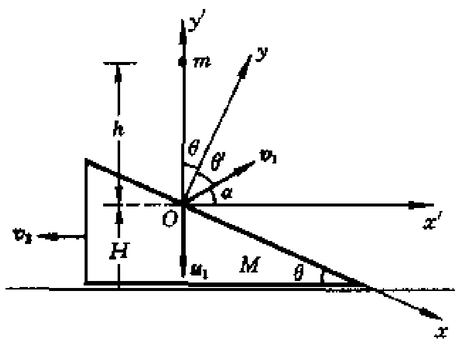
$$=1-(\sin^2\theta+e^2\cos^2\theta)=60\%$$

【题 27】 如图,质量为 M 的斜面体静止放置在光滑的水平桌面上,斜面体的倾角 $\theta=15°$. 质量为 m 的小球由静止自由下落到斜面体上,下落高度 $h=1.60$ m. 设斜面体表面是光滑的,并知小球碰后和碰前相对斜面体的相对速度在垂直于斜面方向的分量之比为 $e=0.60$,碰撞点离桌面高度 $H=1.00$ m,$M=2m$.

试求:1. 碰后小球的反弹速度和斜面体获得的速度 .2. 碰后小球达到的最高位置相对原碰撞点的高度 h_{max}.3. 判断小球碰后落在斜面体上还是落在桌面上 .

【分析】 本题基本上是碰撞问题,关键在于寻找斜面体和小球碰撞前、后速度之间的联系 .

取斜面体与小球为物体系,碰撞前、后物体系的总动量不守恒,但在水平方向上动量守恒 . 取小球、斜面体、地球为物体系,碰撞前、后物体系的总机械能也不守恒,但可利用斜面的光滑条件和比值 e 的规定,来确定有关速度分量之间的联系 . 结合以上两点可解出碰后小球与斜面体的绝对速度 .



力图 3-27-1

碰后,小球作斜抛运动,h_{max}即其射高,小球碰后的速度即抛射的初速度确定后,h_{max}即可算出 .

碰后斜面体与小球的绝对速度解出后,判断小球落于何处则纯属运动学问题 .

【解】 1. 如图,取直角坐标 Oxy,取碰撞点为原点 O,x 轴沿斜面,y 轴垂直于斜面 .

小球碰前的速度表为 $\boldsymbol{u}_1$,竖直向下,它的两个分量表为 u_{1x}和 u_{1y},则

$$u_1=\sqrt{u_{1x}^2+u_{1y}^2}=\sqrt{2gh}$$

$$u_{1x}=u_1\sin\theta$$

$$u_{1y}=-u_1\cos\theta$$

小球碰后的速度表为 $\boldsymbol{v}_1$,它的两个分量表为 v_{1x}和 v_{1y},由斜面体光滑的假设,碰前、后小球速度的 x 分量(沿斜面的分量)应相等,故有

$$v_{1x}=u_{1x}=u_1\sin\theta$$

斜面体碰前的速度表为 $\boldsymbol{u}_2$,它的两个分量表为 u_{2x}和 u_{2y},因碰前斜面体静止,故有

$$u_{2x}=0$$

$$u_{2y}=0$$

斜面体碰后的速度表为 $\boldsymbol{v}_2$,方向水平向左,它的两个分量表为 v_{2x}和 v_{2y},则

$$v_{2x}=-v_2\cos\theta$$

$$v_{2y}=-v_2\sin\theta$$

根据题目中关于比值 e 的规定

$$e=\frac{v_{2y}-v_{1y}}{u_{1y}-u_{2y}}$$
$$=\frac{v_2\sin\theta+v_{1y}}{u_1\cos\theta} \qquad (1)$$

如图,取坐标系 $Ox'y'$,x'轴沿水平方向向右,y'轴沿铅垂方向向上．因小球与斜面体系统碰撞前、后在 x'方向动量守恒,故有

$$Mv_2=mv_{1x'}$$

式中 $v_{1x'}$是$\boldsymbol{v}_1$ 在 x'方向的分量,在 Oxy 坐标中可表为

$$v_{1x'}=v_{1x}\cos\theta+v_{1y}\sin\theta$$

由以上两式,得

$$Mv_2=m(v_{1x}\cos\theta+v_{1y}\sin\theta)$$
$$=m(u_1\sin\theta\cos\theta+v_{1y}\sin\theta) \qquad (2)$$

式中 $u_1=\sqrt{2gh}$．由(1)、(2)式,可解出 v_{1y}和v_2,以及 v_{1x}的结果,有

$$v_{1x}=u_1\sin\theta=\sqrt{2gh}\sin\theta=1.45\ \text{m/s}$$

$$v_{1y}=\left(\frac{e-\dfrac{m}{M}\sin^2\theta}{1+\dfrac{m}{M}\sin^2\theta}\right)\cos\theta\cdot\sqrt{2gh}=2.97\ \text{m/s}$$

$$v_2=\frac{m\sin2\theta}{2M}\left(1+\frac{e-\dfrac{m}{M}\sin^2\theta}{1+\dfrac{m}{M}\sin^2\theta}\right)=1.08\ \text{m/s}$$

小球碰后速度的大小为

$$v_1=\sqrt{v_{1x}^2+v_{1y}^2}=3.31\ \text{m/s}$$

$\boldsymbol{v}_1$ 与 y 轴的夹角θ'满足

$$\tan\theta'=\frac{v_{1x}}{v_{1y}}=\frac{1+\dfrac{m}{M}\sin^2\theta}{e-\dfrac{m}{M}\sin^2\theta}\tan\theta=0.489$$

故

$$\theta'=26.1^\circ$$

可见 $\theta'>\theta$,这是非弹性碰撞的必然结果．$\boldsymbol{v}_1$ 与水平轴 x'的夹角α 为

$$\alpha=90^\circ-(\theta+\theta')=49.9^\circ$$

2. 由射高公式

$$h_{\max}=\frac{v_1^2\sin^2\alpha}{2g}=0.32\ \text{m}$$

3. 设碰后小球落于桌面所需时间为 t,则由运动学公式

$$y'=v_{1y'}t-\frac{1}{2}gt^2=-H$$

解出

$$t=\frac{v_{1y'}}{g}\left(1+\sqrt{1+\frac{2gH}{v_{1y'}^2}}\right)$$

$$=\frac{v_1\cos(\theta+\theta')}{g}\left[1+\sqrt{1+\frac{2gH}{v_1^2\cos^2(\theta+\theta')}}\right]=0.773\ \mathrm{s}$$

在 t 时间内斜面体向左移动的距离 X' 为

$$X'=v_2t=0.835\ \mathrm{m}$$

在 t 时间内小球向右移动的水平距离 x' 为

$$x'=v_{1x'}t=\frac{M}{m}v_2t=1.67\ \mathrm{m}$$

故小球相对斜面体沿水平方向的相对位移为

$$x'+X'=2.50\ \mathrm{m}$$

因

$$\frac{H}{\tan\theta}=3.73\ \mathrm{m}$$

可见

$$x'+X'<\frac{H}{\tan\theta}$$

故小球将落于斜面体上．

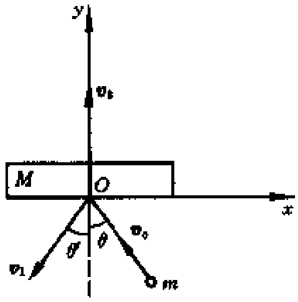
【题 28】 一平板放置在光滑水平桌面上，一小球在此桌面上运动并与平板作完全弹性碰撞，设小球也是光滑的．试证明：不论平板原来静止或处于运动状态，相对平板而言，小球总是遵守入射角等于反射角的规律．

【分析】 先假定平板在碰前相对桌面静止，小球以一定初速与平板相碰．取桌面为参考系，根据动量守恒、弹性碰撞和光滑假设，可解出平板和小球的碰后速度．从桌面参考系考察，小球并不遵守入射角等于反射角的规律．碰后平板开始作匀速直线运动，取碰后的平板为参考系，并将小球相对于桌面的碰后速度转换到平板参考系中，即可证明小球相对平板遵守入射角等于反射角的规律．

若碰前平板正作匀速直线运动，可取平板为参考系（也是惯性系），在此参考系中平板在碰前是静止的，于是上述讨论与结论同样适合平板处于运动状态的情形．

【解】 如图，设平板和小球的质量分别为 M 和 m，设平板碰前相对水平桌面静止，取桌面为参考系，取直角坐标系 Oxy 如图（图面是水平面）．

设碰前小球速度为 $\boldsymbol{v}_0$，其分量为 v_{0x} 和 v_{0y}．设碰后小球速度为 $\boldsymbol{v}_1$，其分量为 v_{1x} 和 v_{1y}．设平板碰前速度为零．设平板碰后速度为 $\boldsymbol{v}_2$，其分量为 v_{2x} 和 v_{2y}．可认为碰前速度是已知的，要求的是碰后的四个速度分量（也可理解为需要找出碰前、后速度的关系，以便确定入射角 θ 与反射角 θ' 的关系）．



力图 3－28－1

题设小球光滑,表明小球与平板之间无切向(x 方向)的摩擦力,即无论是平板还是小球,其速度的 x 分量在碰撞前、后均保持不变,故有

$$\begin{cases} v_{1x} = v_{0x} \\ v_{2x} = 0 \end{cases}$$

于是四个未知的分量中尚剩 v_{1y}和 v_{2y}待求．取小球与平板为物体系,在 y 方向运用碰前、后动量守恒定律,有

$$mv_{0y} = mv_{1y} + mv_{2y}$$

因小球与平板作完全弹性碰撞,碰撞恢复系数 $e=1$,即有

$$e = \frac{v_{2y} - v_{1y}}{v_{0y}} = 1$$

由以上两式,解出 v_{1y}和 v_{2y}为

$$\begin{cases} v_{1y} = \dfrac{m-M}{M+m} v_{0y} \\ v_{2y} = \dfrac{2m}{M+m} v_{0y} \end{cases}$$

可见,碰后平板将以速度 $\boldsymbol{v}_2$ 沿 y 轴运动(因为 $v_{2x}=0, v_2 = v_{2y}$).

如图,以 θ 和 θ'分别代表入射角和反射角,则有

$$\tan\theta = \left|\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right|$$

$$\tan\theta' = \left|\frac{v_{1y}}{v_{1x}}\right| = \left|\frac{m-M}{M+m}\right| \left|\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right| = \left|\frac{m-M}{M+m}\right| \tan\theta$$

显然,在桌面参考系中入射角并不等于反射角,即

$$\theta \neq \theta'$$

取平板为参考系,因设碰前平板相对桌面静止,故小球的入射角 θ 仍由上式决定．因碰后平板沿 y 方向运动,相对桌面的速度为 $\boldsymbol{v}_2$,故相对平板而言,小球碰后的速度 $\boldsymbol{v}'_1$ 为

$$\boldsymbol{v}'_1 = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$$

即

$$v'_{1x} = v_{1x} - v_{2x} = v_{0x}$$

$$v'_{1y} = v_{1y} - v_{2y}$$

$$= \left(\frac{m-M}{M+m} - \frac{2m}{M+m}\right) v_{0y} = -v_{0y}$$

故相对平板,小球碰后的反射角为

$$\tan\theta' = \left|\frac{v'_{1y}}{v'_{1x}}\right| = \left|\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right| = \tan\theta$$

这就证明了相对平板而言,小球的入射角 θ 等于反射角 θ'.

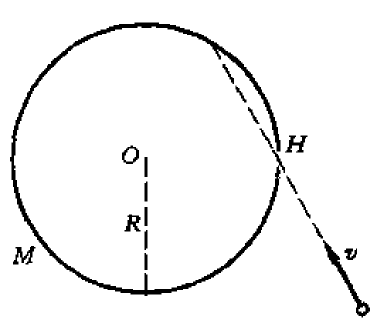
以上证明中假设平板原来处于静止状态,如果平板在碰前就处在匀速直线运动状态,则取碰前的平板为参考系,在此参考系中平板碰前处于静止状态,由于作匀速直线运动的平板仍是惯性系,故上面的所有讨论和所得结论均仍成立．

总之,不论平板原先是静止的还是作匀速直线运动,只要满足完全弹性碰撞和光滑的条件,

小球与平板碰撞前后,相对平板而言,总有入射角等于反射角的规律．

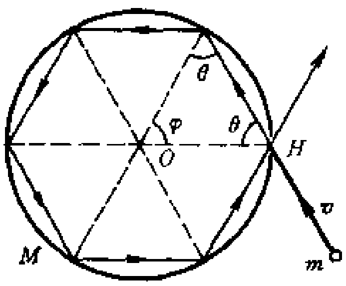
【题29】 如图3-29-1,均匀圆环静止放置在光滑水平桌面上,圆环质量为M,半径为R.一质量为m的小球(可看作质点)以水平速度v通过环上的小孔H射入环内．小球与环内壁作完全弹性碰撞,环壁光滑,碰撞N次后小球绕环一周,且恰好又经小孔H从圆环内穿出．

试求:1.小环应沿什么方向射入? 2.小球经小孔H穿出圆环后,圆环和小球的速度(相对桌面)各是多少?

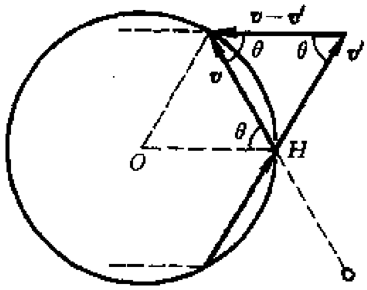


力图3-29-1

【分析】 用本题的圆环替换上题(本章题28)的平板,根据上题的论证,可以得出结论:不论圆环如何运动,小球与圆环相碰时,每次碰撞相对圆环而言都遵守入射角等于反射角的规律．因而求解本题第一问时,不必考虑圆环如何运动．相对圆环而言,小球每次碰撞均有相同的入射角θ,经N次碰撞后绕环一周又从H孔穿出,故小球相对圆环的轨迹必定是一个正多边形,碰撞N次,就是正$(N+1)$边形．力图3-29-2所示是碰撞5次$(N=5)$,所以是正六边形$(N+1=6)$.若以θ角表示小球的入射方向,则θ角可求．



力图3-29-2,$N=5$



力图3-29-3,$N=5$

利用动量守恒定律和相对运动公式,可求出小球穿出圆环后的速度及圆环的速度(均相对桌面).

【解】 1.如力图3-29-2所示,用θ角表示小球的入射方向,θ角是OH与小球入射方向的夹角,则环心O与小球圆环第一次碰撞点的连线和小球入射方向的夹角亦为θ,相应的圆心角φ为

$$\varphi=\pi-2\theta$$

取圆环参考系,小球与圆环相碰时入射角等于反射角．设经N次碰撞,小球经正$(N+1)$边形轨迹从H射出,则应有

$$(N+1)\varphi=2\pi$$

由以上两式,得

$$\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{N+1}$$
$$=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{N+1}\right)$$

例如，当 $N=1$ 时，$\theta=0$；$N=2$ 时，$\theta=\frac{\pi}{6}$；$N=3$ 时，$\theta=\frac{\pi}{4}$；$N=5$ 时，$\theta=\frac{\pi}{3}$（力图 3-29-2 即为 $N=5$）；等等．

2．如力图 3-29-3，第一次碰撞前圆环是静止的，故小球相对圆环从 H 的入射速度为 $\boldsymbol{v}$，经 N 次碰撞后，小球从 H 的出射速度设为 $\boldsymbol{v}'$，因作完全弹性碰撞，其大小 $v'=v$．设小球从 H 出射时的绝对速度（相对桌面）为 $\boldsymbol{v}_N$，设小球穿出后，圆环的最终速度（相对桌面的绝对速度）为 $\boldsymbol{v}_M$．由相对运动公式，有

$$\boldsymbol{v}_N=\boldsymbol{v}_M+\boldsymbol{v}'$$

在桌面参考系中，小球和圆环系统的动量守恒，即有

$$\begin{aligned} m\boldsymbol{v} &= m\boldsymbol{v}_N+M\boldsymbol{v}_M \\ &= m(\boldsymbol{v}_M+\boldsymbol{v}')+M\boldsymbol{v}_M \end{aligned}$$

即

$$(M+m)\boldsymbol{v}_M=m(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}')$$

或

$$\boldsymbol{v}_M=\frac{m}{M+m}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}')$$

因小球与圆环作完全弹性碰撞，故小球相对圆环的入射速度 $\boldsymbol{v}$ 和出射速度 $\boldsymbol{v}'$ 的大小均为 v，即力图 3-29-3 中的矢量 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}'$ 构成一等腰三角形的两等边．由力图 3-29-3 可知，$(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}')$ 的大小为

$$2v\cos\theta=2v\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{N+1}\right)=2v\sin\frac{\pi}{N+1}$$

$(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}')$ 的方向与 $\overline{HO}$ 平行．所以，小球从 H 孔穿出后，圆环获得的绝对速度大小为

$$v_M=\frac{2mv}{M+m}\sin\frac{\pi}{N+1}$$

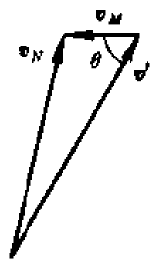
$\boldsymbol{v}_M$ 的方向与 $\overline{HO}$ 平行．

小球从 H 孔穿出圆环的绝对速度 $\boldsymbol{v}_N$，小球穿出后圆环的绝对速度 $\boldsymbol{v}_M$，以及小球从 H 穿出时相对圆环的出射速度 $\boldsymbol{v}'$，三者的关系如力图 3-29-4 所示，为

$$\boldsymbol{v}_N=\boldsymbol{v}_M+\boldsymbol{v}'$$

因 $\boldsymbol{v}_M$ 与 $\overline{HO}$ 平行，故 $\boldsymbol{v}_M$ 与 $\boldsymbol{v}'$ 的夹角为 θ，又 $\boldsymbol{v}'$ 的大小为 v．由余弦定理，得

$$\begin{aligned} v_N^2 &= v^2+v_M^2-2vv_M\cos\theta \\ &= v^2+\frac{4m^2v^2}{(M+m)^2}\sin^2\frac{\pi}{N+1}-2v\left(\sin\frac{\pi}{N+1}\right)\cdot\frac{2vm}{M+m}\sin\frac{\pi}{N+1} \\ &= v^2\left[1+\frac{4m}{M+m}\left(\frac{m}{M+m}-1\right)\sin^2\frac{\pi}{N+1}\right]=v^2\left[1-\frac{4mM}{(M+m)^2}\sin^2\frac{\pi}{N+1}\right] \end{aligned}$$



力图 3-29-4

即

$$v_N=v\sqrt{1-\frac{4mM}{(M+m)^2}\sin^2\frac{\pi}{N+1}}$$

【题 30】 三质点的质量分别为 m_1、m_2、m_3，以万有引力相互作用，绕垂直于三质点所在平面并

通过质心 C 的转轴旋转．

试问：为使三质点的相对位置保持不变，需满足什么条件？

【分析】 三质点系统因无外力又无耗散力，系统的机械能守恒．要求三质点相对位置不变，即要求系统的引力势能恒定，于是系统的动能亦应恒定．系统的动能包括质心的动能和绕质心转动的动能两部分．因无外力，质心的动能不变，故绕质心的转动动能亦应不变，才能确保系统动能恒定．由于三质点相对位置不变，它们到质心的距离不变，即绕通过质心的垂直轴（垂直三质点所在平面）的转动惯量不变，所以三质点绕质心转动动能不变，要求三质点系统绕质心 C 的转动角速度 ω 恒定．

为了寻找 ω 与三质点间距的关系，可取以 ω 旋转的非惯性参考系．在该参考系中，任一质点除受另两质点的引力外，还有惯性离心力，三者的合力应为零．由此可得所求．

【解】 如图，取质心 C 为坐标原点，三质点的位矢分别为 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{r}_3$，三质点之间的间距分别为 a_{12}、a_{23}、a_{31}，则质心位矢为

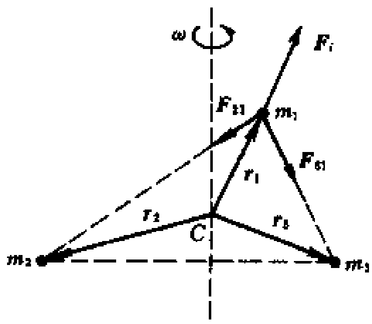
$$\boldsymbol{r}_c=\frac{m_1\boldsymbol{r}_1+m_2\boldsymbol{r}_2+m_3\boldsymbol{r}_3}{m_1+m_2+m_3}=0$$

即

$$m_1\boldsymbol{r}_1+m_2\boldsymbol{r}_2+m_3\boldsymbol{r}_3=0 \tag{1}$$

取以 ω 旋转的非惯性参考系，三质点在其中均静止．任选 m_1，它受 m_2 的引力 $\boldsymbol{F}_{21}$，m_3 的引力 $\boldsymbol{F}_{31}$，以及惯性离心力 $\boldsymbol{F}_i$ 分别为

$$\begin{cases}\boldsymbol{F}_{21}=G\dfrac{m_1m_2}{a_{12}^3}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\\ \boldsymbol{F}_{31}=G\dfrac{m_1m_3}{a_{31}^3}(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1)\\ \boldsymbol{F}_i=m_1\omega^2\boldsymbol{r}_1\end{cases}$$



力图 3-30-1

因 m_1 静止，故三力平衡，合力为零，

$$\boldsymbol{F}_{21}+\boldsymbol{F}_{31}+\boldsymbol{F}_i=0$$

即

$$m_1\boldsymbol{r}_1\left(\omega^2-G\frac{m_2}{a_{12}^3}-G\frac{m_3}{a_{31}^3}\right)+G\frac{m_1m_2}{a_{12}^3}\boldsymbol{r}_2+G\frac{m_1m_3}{a_{31}^3}\boldsymbol{r}_3=0 \tag{2}$$

(1)、(2)式联立，消去 $\boldsymbol{r}_2$，得

$$m_1\left(\omega^2-G\frac{m_2}{a_{12}^3}-G\frac{m_3}{a_{31}^3}-G\frac{m_1}{a_{12}^3}\right)\boldsymbol{r}_1+Gm_1m_3\left(\frac{1}{a_{31}^3}-\frac{1}{a_{12}^3}\right)\boldsymbol{r}_3=0$$

因 $\boldsymbol{r}_1$ 与 $\boldsymbol{r}_3$ 不共线，故上式成立的条件是两项的系数均为零，即有

$$\begin{cases}\dfrac{1}{a_{31}^3}-\dfrac{1}{a_{12}^3}=0 & (3)\\ \omega^2-G\dfrac{m_2}{a_{12}^3}-G\dfrac{m_3}{a_{31}^3}-G\dfrac{m_1}{a_{12}^3}=0 & (4)\end{cases}$$

由(3)式，得

$$a_{12}=a_{31}$$

取 m_2 或 m_3，重复以上讨论，得

$$a_{12}=a_{23}=a_{31}=a$$

把此结果代入(4)式，得

$$\omega^2=G\frac{m_1+m_2+m_3}{a^3}=G\frac{m}{a^3}$$

因此，三质点相对位置保持不变(即相对静止)的条件有二．一是三质点等间距(设间距为 a)，二是绕质心旋转的角速度 $\omega=\sqrt{\frac{Gm}{a^3}}$，其中 $m=(m_1+m_2+m_3)$是三质点的总质量．

【题 31】 质量为 M 的平板车静止在光滑地面上，车上有 N 个人，每人的质量均为 m，若每人消耗同样的体力(即每人作功相同)沿水平方向向后跳，忽略空气阻力，人可看作是质点．

试问：怎样的跳法可使车得到最大的动能？

【分析】 因每人作功相同，故 N 个人所作总功 W 为常量．W 全部变为车和 N 个人的动能．

把 N 个人看作是质点组．在地面参考系中，质点组相对地面的动能等于其质心相对地面的动能与质点组相对其质心的动能之和．因此，W 将变为三部分：车的动能，质心(N 人质点组的质心)动能，质点组相对其质心的动能．

对于由车和 N 人组成的物体系，因无摩擦及阻力，无论 N 人的跳法如何(逐个跳，结伴跳，一起跳，等等)，跳前、后物体系在水平方向的动量总是守恒的，因跳前物体系总动量为零，故跳后车的动量与 N 人的动量之和亦应为零．跳后 N 人的动量就是由 N 人构成的质点组的质心的动量．由此可得出跳后质点组的质心速度与车速的关系．因此，跳后质点组的质心动能与车的动能是密切相关的．

但对于不同的跳法，跳后质点组相对其质心的动能是不同的．为使跳后车获得最大动能，要求跳后质点组相对其质心的动能为最小，即为零．换言之，要求跳后 N 人相对其质心没有运动，实现的办法显然是 N 人同时跳出．

【解】 取地面为参考系．设 N 人跳出过程中所作总功为 W(W 为常量)，设跳后车的动能为 $E_{k,车}$，设跳后 N 人的总动能为$\sum E_{k,N人}$，则有

$$W=E_{k,车}+\sum E_{k,N人} \tag{1}$$

把 N 人看作质点组．设跳后质点组质心的动能为 $E_{k,质心}$，设跳后 N 人相对其质心的动能为$E_{k,相对}$，则由科尼希第二定理，有

$$\sum E_{k,N人}=E_{k,质心}+E_{k,相对} \tag{2}$$

由(1)、(2)式，得

$$W=E_{k,车}+E_{k,质心}+E_{k,相对} \tag{3}$$

取车和 N 人为物体系，在 N 人跳出前后，物体系在水平方向的动量守恒．跳前，物体系总动量为零．设跳后车速为 v，设跳后 N 人的质心速度为 v_c，则有

$$Mv+Nmv_c=0$$

式中 Nmv_c 是跳后质心的动量，即质点组的动量．故跳后质心的速度为

$$v_c = -\frac{M}{Nm}v$$

跳后质点组质心的动能为

$$E_{k,质心} = \frac{1}{2}Nm\left(\frac{Mv}{Nm}\right)^2 = \frac{M}{Nm}\left(\frac{1}{2}Mv^2\right) = \frac{M}{Nm}E_{k,车}$$

代入(3)式，得

$$W = \left(1+\frac{M}{Nm}\right)E_{k,车} + E_{k,相对}$$

因 W 为常量，为使 $E_{k,车}$ 最大，要求

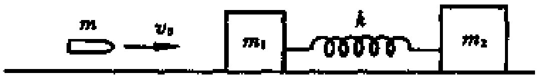
$$E_{k,相对} = 0$$

所以当 N 人一起跳出时，因 N 人相对其质心的动能为零，可使车获得最大动能，为

$$E_{k,车,max} = \frac{Nm}{Nm+M}W$$

【题 32】 如图，质量分别为 m_1 和 m_2 的两木块用劲度系数为 k 的弹簧相连，静止地放在光滑地面上．质量为 m 的子弹以水平初速 v_0 射入木块 m_1，设子弹射入过程的时间极短．

试求：1. 弹簧的最大压缩长度．2. 木块 m_2 相对地面的最大速度和最小速度．



力图 3－32－1

【分析】 m 和 m_1 相碰过程动量守恒，碰后 $(m+m_1)$ 的速度可求．

碰后，由 $(m+m_1)$ 和 m_2 以及弹簧组成的系统，在运动过程中机械能守恒，动量守恒．系统的总机械能和总动量就是碰后 $(m+m_1)$ 的初始动能和初始动量(因设子弹射入，即 m 与 m_1 碰撞过程时间极短，弹簧尚来不及压缩)．

弹簧最大压缩的条件是 $(m+m_1)$ 与 m_2 的速度相同．相应的弹性势能与动能之和应等于系统的总机械能．相应的动量应等于系统的总动量．由此，弹簧的最大压缩可求．

系统的弹性势能为零(即弹簧为原长)时，系统的动能最大，m_2 或 $(m+m_1)$ 具有最大动能，即 m_2 具有最大或最小速度．相应的系统的总机械能和总动量仍不变．于是 m_2 的最大或最小速度可求．

也可取质心参考系，在质心系中，碰后运动过程中系统的机械能守恒，总动量始终为零．在质心系中，弹簧最大压缩时，相应的动能为零；m_2 具有最大或最小速度时，弹簧的弹性势能为零．

【解】 取地面参考系．m 与 m_1 系统在碰撞前、后的动量守恒，有

$$mv_0 = (m+m_1)v_{10}$$

故

$$v_{10} = \frac{m}{m+m_1}v_0 \tag{1}$$

式中 v_{10} 是碰后 $(m+m_1)$ 的速度．

取 $(m+m_1)$ 与 m_2 和弹簧为物体系．在碰后运动过程中，物体系的机械能守恒，动量守恒．

物体系的总机械能即为碰后$(m+m_1)$的初始动能，为

$$\frac{1}{2}(m+m_1)v_{10}^2$$

物体系的总动量即为碰后$(m+m_1)$的动量，为

$$(m+m_1)v_{10}=mv_0$$

当弹簧达到最大压缩长度 x 时，$(m+m_1)$与 m_2 的速度相同，设为 v．由碰后运动过程中物体系机械能守恒，得

$$\frac{1}{2}(m+m_1)v_{10}^2=\frac{1}{2}(m+m_1+m_2)v^2+\frac{1}{2}kx^2 \tag{2}$$

由碰后运动过程中物体系动量守恒，得

$$(m+m_1)v_{10}=(m+m_1+m_2)v \tag{3}$$

(1)、(2)、(3)式联立，解出弹簧的最大压缩长度 x 为

$$x=mv_0\sqrt{\frac{m_2}{(m+m_1)(m+m_1+m_2)k}}$$

当弹簧的弹性势能为零（即弹簧为原长）时，设$(m+m_1)$的速度为 v_1，设 m_2 的速度为 v_2，则 v_2 将是 m_2 的最大或最小速度．由物体系机械能守恒，得

$$\frac{1}{2}(m+m_1)v_{10}^2=\frac{1}{2}(m+m_1)v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2 \tag{4}$$

由物体系动量守恒，得

$$(m+m_1)v_{10}=(m+m_1)v_1+m_2v_2 \tag{5}$$

(1)、(4)、(5)式联立，得

$$v_2[(m+m_1+m_2)v_2-2mv_0]=0$$

故

$$v_2=\begin{cases}0, & \text{最小速度}\\ \dfrac{2mv_0}{m+m_1+m_2}, & \text{最大速度}\end{cases}$$

另一方法．取$(m+m_1)$和 m_2 以及弹簧为物体系，在运动过程中物体系的动量守恒且等于其质心的动量．设质心速度为 v_C，则有

$$mv_0=(m+m_1+m_2)v_C$$

故

$$v_C=\frac{m}{m+m_1+m_2}v_0$$

取质心参考系．碰后，$(m+m_1)$和 m_2 在质心系的速度 v_{10}'和v_{20}'分别为

$$\begin{cases}v_{10}'=v_{10}-v_C=\dfrac{m_1m_2}{(m+m_1)(m+m_1+m_2)}v_0\\ v_{20}'=0-v_C=-\dfrac{m}{m+m_1+m_2}v_0\end{cases}$$

碰后，物体系在质心系中机械能守恒，取终态为弹簧具有最大压缩长度 x 的状态，则终态动能为零．故有

$$E' = \frac{1}{2}(m + m_1)v_{10}'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{20}'^2 = \frac{1}{2}kx^2 + 0$$

把 v_{10}' 和 v_{20}' 代入，得

$$x = mv_0\sqrt{\frac{m_2}{(m + m_1)(m + m_1 + m_2)k}}$$

在质心系中，当弹簧弹性势能为零时，m_2 具有最大或最小速度，设 $(m + m_1)$ 和 m_2 的速度分别为 v_1' 和 v_2'，取此为终态．由机械能守恒，得

$$\frac{1}{2}(m + m_1)v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 = E' = \frac{1}{2}kx^2 \tag{6}$$

在质心系中，物体系的动量恒为零，故

$$(m + m_1)v_1' + m_2 v_2' = 0 \tag{7}$$

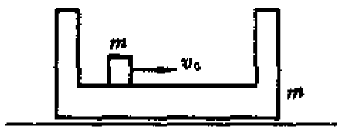
(6)、(7)式联立，并将 x 代入，解出 m_2 在质心系中的最大和最小速度为

$$v_2' = \pm\frac{mv_0}{m + m_1 + m_2}$$

因此，在地面参考系中，m_2 的最大和最小速度为

$$v_2 = v_2' + v_C = \begin{cases} 0, & \text{最小速度} \\ 2v_C = \dfrac{2mv_0}{m + m_1 + m_2}, & \text{最大速度} \end{cases}$$

【题 33】 如图，在光滑地面上静止地放着质量为 m 的箱子．在箱内光滑的底面上，质量也为 m 的滑块以水平初速 v_0 开始运动，并与两壁反复碰撞．已知滑块与箱子每碰一次后，两者的相对速度改变 $e = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ 倍．



力图 3-33-1

试求：1．最多经几次碰撞后，系统总能量的损耗不大于40%．
2．从滑块开始运动到完成上述次数的碰撞后，箱子的平均速度是多少？

【分析】 为了计算使总动能有一定损耗的碰撞次数，需要知道每次碰后滑块与箱子分别具有的速度或动能．显然，仅由滑块与箱子系统碰撞前、后在水平方向的动量守恒难以如愿．

然而，题目还给出了滑块与箱子碰撞前、后的相对速度之比，即给出了恢复系数 e，为了由此找出碰后滑块与箱子速度之间的关系，取质心参考系较为方便，因为在质心系中系统的总动量为零，关系比较简单．

【解】 取滑块与箱子为物体系．碰撞前后，物体系在水平方向的动量守恒，总动量为 mv_0（也就是物体系质心的动量）．设质心速度为 v_C，则有

$$mv_0 = (m + m)v_C$$

故

$$v_C = \frac{v_0}{2}$$

设箱子和滑块碰后的绝对速度（相对地面）分别为 v_1 和 v_2，碰后在质心系中的速度分别为 v_{1C} 和 v_{2C}，则

$$v_1 = v_0 + v_{1C}$$

$$v_2 = v_0 + v_{2C}$$

即

$$v_1 - v_2 = v_{1C} - v_{2C}$$

可见，箱子与滑块在地面参考系和质心系中的相对速度相同．

1．碰前，箱子与滑块的相对速度为 v_0，第 1 次碰后的相对速度为 ev_0，第 2 次碰后的相对速度为 e^2v_0，依次类推，第 N 次碰后的相对速度为 e^Nv_0，即有

$$v_{1C}^{(N)} - v_{2C}^{(N)} = e^N v_0$$

因在质心系中，物体系的总动量为零，故

$$v_{1C}^{(N)} = -v_{2C}^{(N)}$$

由以上两式，得

$$v_{1C}^{(N)} = -v_{2C}^{(N)} = \frac{1}{2}e^N v_0$$

在地面参考系中，物体系的初始动能为

$$E_{k0} = \frac{1}{2}mv_0^2$$

经 N 次碰撞后，在质心系中，物体系的动能为

$$E_{kC} = \frac{1}{2}m[v_{1C}^{2(N)}]^2 + \frac{1}{2}m[v_{2C}^{(N)}]^2 = \frac{1}{4}mv_0^2e^{2N}$$

经 N 次碰撞后，在地面参考系中，物体系的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}(2m)v_C^2 + E_{kC} = \frac{1}{4}mv_0^2(1+e^{2N})$$

经 N 次碰撞后，在地面参考系中，物体系的动能损失为

$$\begin{aligned}\Delta E_k &= E_{k0} - E_k \\ &= \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{4}mv_0^2(1+e^{2N}) = \frac{1}{2}mv_0^2\left(1 - \frac{1+e^{2N}}{2}\right)\end{aligned}$$

为使损耗能量的百分比小于 40%，即要求

$$\frac{\Delta E_k}{E_{k0}} = 1 - \frac{1+e^{2N}}{2} \leqslant 0.4$$

即

$$1 + e^{2N} \geqslant 1.2$$

或

$$e^{2N} \geqslant 0.2$$

因

$$e = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$$

代入，得

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}\cdot 2N} \geqslant 0.2$$

$$2^{\frac{N}{2}}\leqslant\frac{1}{0.2}=5$$

故

$$N\leqslant 2\frac{\lg 5}{\lg 2}=4.6$$

所以,为使能量损耗不大于 40%,最多碰撞四次.

2. 取质心系,设箱子宽度为 L,则箱子总在$\frac{L}{2}$范围内运动.经偶数次碰撞后,箱子总位移为零,所以在质心系中,箱子从静止到第 4 次碰撞后的平均速度为零.因质心相对地面的速度为$\frac{v_0}{2}$,故在地面参考系中,箱子从静止到第 4 次碰撞后的平均速度为

$$\bar{v}=v_C=\frac{v_0}{2}$$

【题 34】 动能为 E_0 的^{4}He 核轰击静止的^{7}Li 核,作完全非弹性碰撞后成为复合核^{11}B,^{11}B 进一步分裂为^{10}B 和中子^{1}n.上述核反应过程需消耗能量 $Q=2.8$MeV.反应方程为

$$^4\text{He}+{}^7\text{Li}\to({}^{11}\text{B})\to{}^{10}\text{B}+{}^1\text{n}-2.8\ \text{MeV}$$

试求:上述核反应过程所需的 E_0 的最小值是多少?相应的中子动能为多大?

【分析】 ^{4}He 与^{7}Li 碰撞合成复合核^{11}B 的过程动量守恒,复合核以一定的速度运动.复合核^{11}B 分裂的过程要损失机械能,复合核在分裂过程中虽无外力作功,但系统非保守内力作负功,机械能损失.复合核^{11}B 能够分裂产生^{10}B 和^{1}n 的条件是,^{10}B 和^{1}n 相对复合核的动能≥0.因此,在复合核^{11}B 参考系,即在质心系中讨论比较方便.

【解】 取实验室参考系,碰前^{4}He 的动能为

$$E_0=\frac{1}{2}m_{He}v_{He}^2$$

故

$$v_{He}=\sqrt{\frac{2E_0}{m_{He}}}$$

碰前^{7}Li 的速度为

$$v_{Li}=0$$

设^{4}He 和^{7}Li 系统的质心速度为 v_C,因碰撞过程动量守恒,故

$$m_{He}v_{He}=(m_{He}+m_{Li})v_C$$

由以上几式,得质心速度 v_C 为

$$v_C=\frac{m_{He}}{m_{He}+m_{Li}}v_{He}=\frac{1}{1+\frac{m_{Li}}{m_{He}}}v_{He}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{7}{4}}v_{He}=\frac{4}{11}v_{He}=\frac{4}{11}\sqrt{\frac{2E_0}{m_{He}}}$$

v_C 在整个过程中始终不变.

在质心系中，^{4}He 和^{7}Li 的速度分别为

$$v_{He}' = v_{He} - v_C = \frac{7}{11}\sqrt{\frac{2E_0}{m_{He}}} \tag{1}$$

$$v_{Li}' = 0 - v_C = -\frac{4}{11}\sqrt{\frac{2E_0}{m_{He}}} \tag{2}$$

设在质心系中，^{10}B 的速度为 v_B'，^{1}n 的速度为 v_n'

在质心系中的功能关系为

$$W'_{外} + W'_{非保} = 机械能的增量$$

因无外力，故

$$W'_{外} = 0$$

因 $W'_{非保}$是系统非保守内力作的功，与参考系无关，故

$$W'_{非保} = -Q$$

即作负功，系统损失机械能．由以上三式，得

$$-Q = \left(\frac{1}{2}m_B v'^2_B + \frac{1}{2}m_n v'^2_n\right) - \left(\frac{1}{2}m_{He} v'^2_{He} + \frac{1}{2}m_{Li} v'^2_{Li}\right)$$

式中 m_B 为^{10}B 的质量，v'_B 为其速度．产生核反应(即^{11}B 能够分裂)的条件为

$$\frac{1}{2}m_B v'^2_B + \frac{1}{2}m_n v'^2_n = \frac{1}{2}m_{He} v'^2_{He} + \frac{1}{2}m_{Li} v'^2_{Li} - Q \geqslant 0$$

把(1)、(2)式代入，得

$$\frac{1}{2}m_{He}\left(\frac{7}{11}\right)^2\left(\frac{2E_0}{m_{He}}\right) + \frac{1}{2}m_{Li}\left(\frac{4}{11}\right)^2\left(\frac{2E_0}{m_{He}}\right) - Q \geqslant 0$$

即

$$E_0 \geqslant \frac{11}{7}Q = 4.4\ \text{MeV}$$

当 $E_0 = 4.4$MeV 时

$$\frac{1}{2}m_B v'^2_B + \frac{1}{2}m_n v'^2_n = 0 \tag{3}$$

又因在质心系中的总动量为零，有

$$m_B v_B' + m_n v_n' = 0 \tag{4}$$

(3)、(4)式联立求解，得

$$v_B' = 0，及\ v_n' = 0$$

当 E_0 为最小值 4.4MeV 时，中子 n 在质心系中的速度 v_n'为零．因此中子在实验室参考系中的速度为 v_C，动能为

$$\frac{1}{2}m_n v_C^2 = \frac{1}{2}m_n\left(\frac{4}{11}\right)^2\left(\frac{2E_0}{m_{He}}\right)$$

$$= \frac{4}{121}E_0 = 0.15\ \text{MeV}$$

【题 35】 一物体作直线运动，其质量不断随时间变化．设该物体在 t 时刻的质量为 $M(t)$，速度

为 $v(t)$. 试证明下述密舍尔斯基方程：

$$M\frac{dv}{dt}=(u-v)\frac{dM}{dt}+F$$

式中 F 是质量不断变化的主体所受的合外力，u 是附加物附加到主体前的绝对速度或抛出物抛离主体后的绝对速度．

【分析】 密舍尔斯基方程(参看，梁昆淼著，力学，人民教育出版社，1978 年 12 月第二版)是变质量物体运动的动力学方程，常用于讨论变质量物体运动的各种有关问题．

密舍尔斯基方程是动量定理的结果．取主体和附加物为物体系，合并后物体系动量的增量来源于外力的冲量，由此即可证明．

注意，在实际问题中，附加物质量往往远小于主体质量，附加物所受外力往往远小于主体所受外力，这些正是密舍尔斯基方程适用的条件．

【解】 如图，设主体在 t 时刻的质量为 $M(t)$，速度为 $v(t)$. 设在 dt 时间内有质量为 dM、速度为 u 的附加物加到主体上，使得在 $(t+dt)$ 时刻主体的质量为 $(M+dM)$，速度为 $(v+dv)$.

取主体和附加物为物体系．则在 t 时刻，物体系的动量为

$$p=Mv+u\,dM$$

在 $(t+dt)$ 时刻，物体系的动量为

$$p+dp=(M+dM)(v+dv)$$

因此，在 dt 时间物体系动量的增量为

$$\begin{aligned}dp&=(M+dM)(v+dv)-(Mv+u\,dM)\\&=M\,dv+(v-u)dM+dM\,dv\end{aligned}$$

在 dt 时间内，设主体受外力 F，附加物受外力 F'，由动量定理，

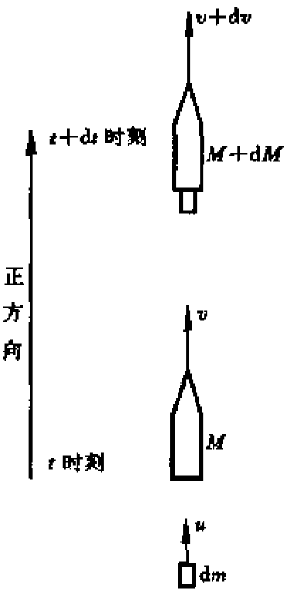
$$(F+F')dt=dp=M\,dv+(v-u)dM+dM\,dv$$

通常，在上式中 $F'dt \ll F dt$，$dM\,dv$ 为高级小量，均可略，故有

$$F=M\frac{dv}{dt}+(v-u)\frac{dM}{dt}$$

即

$$M\frac{dv}{dt}=(u-v)\frac{dM}{dt}+F$$



力图 3-35-1

证完．

若 $\frac{dM}{dt}<0$，表明主体不断抛出质量，上述密舍尔斯基方程仍适用，只是式中 u 为抛出物抛离主体后的绝对速度．

【题 36】 竖直下垂的绳子从静止自由下落，开始时绳下端刚好与地面接触．设绳均匀柔软，全长为 l.

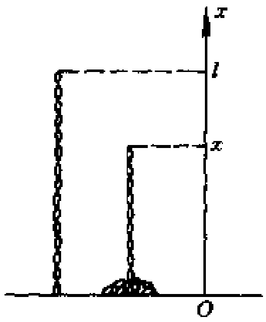
试证明：下落过程中地面所受压力等于已经落在地面上的绳子重量的 3 倍．

【分析】 本题有多种解法．

方法一．用变质量物体的动力学方程——密舍尔斯基方程．可取已落在地面上的那部分绳子作为主体，不断加入的部分作为附加物．

方法二．用动量定理．绳中任意小质元的落地速度即为自由下落的速度，落地后速度变为零，其动量的改变等于地面给予的冲量．由此得出的地面冲力的反作用力即是该质元对地面的压力，加上已落在地面部分绳子的重量，就是地面所受总压力．

方法三．用质心运动定理．把全部绳子看作质点组，其质心的运动取决于所受重力及地面支持力．



力图 3－36－1

【解】 方法一．用密舍尔斯基方程．如图，设在某时刻 t，已有长为$(l-x)$的一段绳子落在地面上，把它取作主体，其质量为

$$M(t)=\lambda(l-x)$$

式中 λ 是绳子的质量线密度．这段绳子的速度为

$$v(t)=0$$

这段绳子(主体)所受外力 F 为重力 $-\lambda(l-x)g$ 及地面支持力 N，即

$$F=-\lambda(l-x)g+N$$

在 dt 时间有质量为 dM 的绳子(附加物)加入主体，附加物加入主体前的速度为

$$u=\frac{dx}{dt}=-\sqrt{2g(l-x)}$$

由密舍尔斯基方程，

$$M\frac{dv}{dt}=(u-v)\frac{dM}{dt}+F$$

把前三式代入密舍尔斯基方程，得

$$0=u\frac{dM}{dt}-\lambda(l-x)g+N$$

故地面支持力 N 为

$$\begin{aligned}N&=\lambda(l-x)g-u\frac{dM}{dt}\\&=\lambda(l-x)g-\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d}{dt}[\lambda(l-x)]=\lambda(l-x)g+\lambda u^2\\&=\lambda(l-x)g+2\lambda(l-x)g=3\lambda(l-x)g\end{aligned}$$

可见，地面支持力 N(其大小等于地面受绳的压力)为已经落在地面上的那部分绳子质量 $\lambda(l-x)g$ 的 3 倍．

方法二．用动量定理．设已有$(l-x)$一段绳子落在地面上．接着，在 dt 时间内有 dx 一小段绳子以速度$\sqrt{2g(l-x)}$下落到地面上，落地后其速度变为零，故其动量改变了 $\lambda dx\sqrt{2g(l-x)}$．由动量定理，这一小段绳子动量的改变等于它在 dt 时间所受的冲量，设 N_1 是地面对 dx 段绳子的支持力，则有

$$\lambda dx\sqrt{2g(l-x)}=N_1dt$$

故

$$\begin{aligned}N_1&=\lambda\sqrt{2g(l-x)}\frac{dx}{dt}\\&=\lambda\sqrt{2g(l-x)}\sqrt{2g(l-x)}=2\lambda g(l-x)\end{aligned}$$

地面对已落下的$(l-x)$段绳子的支持力N_2为

$$N_2=\lambda g(l-x)$$

故总支持力为

$$N=N_1+N_2=3\lambda g(l-x)$$

方法三．用质心运动定理．把全部绳子看作质点组，其质心位置随着绳子的下落而降低．设已有$(l-x)$段绳子落在地面上，则质心的位置、速度、加速度为

$$x_C=\frac{\lambda(l-x)\cdot 0+\lambda x\cdot\frac{x}{2}}{\lambda l}=\frac{x^2}{2l}$$

$$v_C=\frac{\mathrm{d}x_C}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2l}\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t}=\frac{x}{l}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{x}{l}\sqrt{2g(l-x)}$$

$$a_C=\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}=\frac{x}{l}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{l}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

$$=-\frac{x}{l}g+\frac{1}{l}[-\sqrt{2g(l-x)}]^2=\frac{2g(l-x)}{l}-\frac{xg}{l}$$

由质心运动定理，

$$N-\lambda lg=\lambda la_C$$

把a_C代入，得出地面支持力N为

$$N=\lambda lg+\lambda la_C$$

$$=\lambda lg+\lambda l\left[\frac{2g(l-x)}{l}-\frac{xg}{l}\right]=3\lambda g(l-x)$$

【题37】 火箭从地面竖直向上发射．已知火箭自身质量为M_s，燃料的初始质量为M_f，燃气相对火箭的喷射速度为v'，单位时间的喷气质量为a．设在火箭上升的高度范围内g为常量，忽略空气阻力．

试求：1．火箭的推力和加速度．2．任意时刻火箭的速度和上升高度．3．燃料耗尽时，火箭的加速度、速度和高度．4．火箭能达到的最大高度及所需时间．

【分析】 这是典型的变质量物体运动问题，可用密舍尔斯基方程求解．

【解】 取y坐标竖直向上，原点O在地面上．取火箭及燃料为主体，不断喷射的燃气是抛射物．设主体的初始质量为M_0，则

$$M_0=M_s+M_f$$

因单位时间喷气质量为a，故经t时间喷气at，在t时刻主体的质量M为

$$M=M_0-at$$

设t时刻，主体的绝对速度为v，抛射物的绝对速度为u，则燃气相对火箭的速度v'（为负值）为

$$v'=u-v$$

密舍尔斯基方程为

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=(u-v)\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}+F$$

式中$-\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=a$是单位时间喷气质量，$F=-Mg$是主体所受重力，于是得

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=v'a-Mg$$

式中 v' 取绝对值．可见，火箭的推力 $F_{推}$ 为，

$$F_{推}=av'$$

火箭的加速度$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{v'a-Mg}{M}=\frac{av'}{M}-g=\frac{av'}{M_0-at}-g$$

随着时间 t 的增长，火箭的加速度$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$不断增大，这是因为推力($av'$)不变而主体质量不断减少的缘故．

由加速度公式，得

$$\mathrm{d}v=\left(\frac{av'}{M_0-at}-g\right)\mathrm{d}t$$

积分，因 $t=0$ 时 $v=0$，故有

$$\int_0^v\mathrm{d}v=\int_0^t\left(\frac{av'}{M_0-at}-g\right)\mathrm{d}t$$

得

$$v=v'\ln\frac{M_0}{M_0-at}-gt$$

因 $v=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，再积分，因 $t=0$ 时 $y=0$，故有

$$\begin{aligned}y&=\int_0^t\left(v'\ln\frac{M_0}{M_0-at}-gt\right)\mathrm{d}t\\&=v't-v'\left(\frac{M_0-at}{a}\right)\ln\frac{M_0}{M_0-at}-\frac{1}{2}gt^2\end{aligned}$$

上述 v 和 y 就是任意时刻 t 火箭的速度和上升高度．

设燃料在 $t=t_1$ 时刻耗尽，则

$$t_1=\frac{M_f}{a}$$

在 t_1 时刻（即燃料耗尽时），火箭的加速度、速度、高度分别为

$$\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)_{t=t_1}=\frac{av'}{M_0-at_1}-g=\frac{av'}{M_s+M_f-M_f}-g=\frac{av'}{M_s}-g$$

$$v_1=v'\ln\frac{M_0}{M_0-at_1}-gt_1=v'\ln\frac{M_0}{M_s}-\frac{gM_f}{a}$$

$$\begin{aligned}y_1&=v't_1-v'\left(\frac{M_0-at_1}{a}\right)\ln\frac{M_0}{M_0-at_1}-\frac{1}{2}gt_1^2\\&=\frac{v'}{a}\left[M_f-M_s\ln\frac{M_s+M_f}{M_s}\right]-\frac{g}{2}\left(\frac{M_f}{a}\right)^2\end{aligned}$$

可见，为了使火箭能上升到足够的高度(y_1 足够大)，要求喷气的相对速度 v' 足够大，还要求 M_f 大于 M_s 而且要大很多．

设火箭达到的最大高度为 y_{max}，相应的时间为 t_2，则因火箭燃料耗尽后从 y_1 的高度以 v_1 作

上抛运动,故有

$$y_{\max}=y_1+\frac{v_1^2}{2g}$$

$$t_2=t_1+\frac{v_1}{g}$$

【题 38】 如图,质量为 m 的小球下系一条足够长的柔软均匀且不可伸长的绳子．绳子的质量线密度为 λ．将小球以初速 v_0 从地面竖直上抛,忽略空气阻力．

试问:在上升过程中,小球的速率怎样随高度变化?

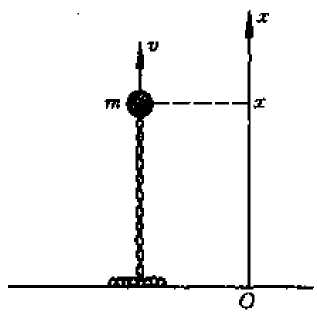
【分析】 这是变质量物体的运动问题,可用密舍尔斯基方程求解．取小球及已随球上升的那段绳子为主体,取正在离地面开始参与运动的那小段绳子为附加体．

【解】 变质量物体的动力学方程即密舍尔斯基方程为

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=(u-v)\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}+F$$

如图,取 x 坐标竖直向上,原点 O 在地面上．设在 t 时刻,小球上升到 x 位置,速度为 v．取小球及已离地上升的绳子为主体,则其质量 M 为

$$M=m+\lambda x$$



力图 3-38-1

主体所受外力 F 为

$$F=-(m+\lambda x)g$$

从 t 时刻,经 $\mathrm{d}t$ 时间,附加物的质量 $\mathrm{d}M$ 为

$$\mathrm{d}M=\lambda\mathrm{d}x$$

附加物的速度 u 为

$$u=0$$

将以上四式代入密舍尔斯基方程,得

$$(m+\lambda x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-v\lambda\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-(m+\lambda x)g$$

因 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$,故有

$$(m+\lambda x)v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-\lambda v^2-(m+\lambda x)g \tag{1}$$

为便于积分,作变量替换,令

$$\zeta=(m+\lambda x)^2v^2$$

则

$$\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x}=2(m+\lambda x)\lambda v^2+2(m+\lambda x)^2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

即

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2(m+\lambda x)^2}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x}-\frac{\lambda v^2}{m+\lambda x}$$

代入(1)式,得

$$\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x}=-2(m+\lambda x)^2g$$

或

$$d\zeta=-2(m+\lambda x)^2 g\mathrm{d}x$$

积分，得

$$\zeta=-\frac{2g}{3\lambda}(m+\lambda x)^3+C$$

初条件为

$$t=0\text{ 时},\quad x=0,\quad v=v_0,\quad \zeta=m^2v_0^2$$

故积分常量 C 为

$$C=m^2v_0^2+\frac{2g}{3\lambda}m^3$$

代入 ζ 表达式，得

$$\zeta=-\frac{2g}{3\lambda}(m+\lambda x)^3+m^2v_0^2+\frac{2g}{3\lambda}m^3$$

由 ζ 的定义式，

$$\begin{aligned}v^2&=\frac{m^2v_0^2}{(m+\lambda x)^2}-\frac{2g}{3\lambda}\left[\frac{(m+\lambda x)^3-m^3}{(m+\lambda x)^2}\right]\\&=\frac{1}{3(m+\lambda x)^2}[3m^2v_0^2-2g(3m^2+3m\lambda x+\lambda^2x^2)x]\end{aligned}\tag{2}$$

这就是小球速率 v 随高度 x 变化的规律．

当 $v=0$ 时，x 的值 x_0 就是小球能上升的最大高度．由(2)式，当 $v=0$ 时，有

$$\frac{m^2v_0^2}{(m+\lambda x)^2}=\frac{2g}{3\lambda}\left[\frac{(m+\lambda x)^3-m^3}{(m+\lambda x)^2}\right]$$

即

$$\begin{aligned}x=x_0&=\frac{1}{\lambda}\sqrt[3]{\frac{3\lambda}{2g}m^2v_0^2+m^3}-\frac{m}{\lambda}\\&=\frac{m}{\lambda}\left[\sqrt[3]{\frac{3\lambda v_0^2}{2mg}+1}-1\right]\end{aligned}$$

【题 39】 球状小水滴在静止的雾气中下落，下落过程中吸附了全部所遇到的水分子．设水滴始终保持球状，设雾气密度均匀，忽略空气的粘滞力，重力加速度取恒定值 g．

试证明经过足够长时间后，水滴加速度趋于稳定值，并求出此稳定值．

【分析】 取水滴为主体，在下落过程中不断吸附的雾气中的水分子为附加物，在下落过程中质量不断增加，是典型的变质量物体运动问题，可用密舍尔斯基方程，

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=(u-v)\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}+F$$

式中 v 是作为主体的水滴的速度；u 是被吸附雾气原先的速度，由题设 $u=0$；F 是水滴所受重力，随着水滴吸附雾气中水分子，其质量 M 增大，F 相应增大(忽略空气粘滞力)．于是上述方程变为

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-v\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}+Mg\tag{1}$$

水滴在下降过程中因吸附雾气中的水分子体积不断增大(密度不变)，即水滴的半径 r 随时

间变化(保持球形),由此可得出$\frac{dM}{dt}$与$\frac{dr}{dt}$的关系,从而由(1)式得出水滴半径 r 遵守的方程,解此方程,找出半径与时间的关系 $r(t)$.

另外,根据水滴可吸收途中所遇到全部雾气质量的假设,可找到水滴速度 v 与$\frac{dr}{dt}$的关系,于是水滴速度与时间的关系 $v(t)$可求,长时间后的加速度可得.

【解】 由方程(1)式,水滴加速度为

$$\frac{dv}{dt}=g-\frac{v}{M}\frac{dM}{dt} \tag{2}$$

因水滴不断吸附动量为零的雾气,使水滴的加速度比纯粹由重力引起的加速度 g 要小.一般情形下,M、v 和$\frac{dM}{dt}$均与时间 t 有关,导致水滴加速度$\frac{dv}{dt}$也随时间 t 变化.

设水滴在任意时刻 t 的质量为M,速度为 v,半径为 r,水的密度为 ρ_1,则有

$$M=\frac{4}{3}\pi r^3\rho_1 \tag{3}$$

$$\frac{dM}{dt}=4\pi\rho_1 r^2\frac{dr}{dt} \tag{4}$$

水滴在 dt 时间内扫过雾气的体积为 $\pi r^2 v$,设雾气的密度为 ρ_2,则该体积内雾气的质量 $\pi r^2 v\rho_2$ 就是在 dt 时间内水滴增加的质量 dM,即

$$\frac{dM}{dt}=\pi r^2\rho_2 v$$

比较以上两个$\frac{dM}{dt}$的表达式,得出水滴速度 v 与其半径变化率$\frac{dr}{dt}$的关系为

$$v=\frac{4\rho_1}{\rho_2}\frac{dr}{dt} \tag{5}$$

为了建立水滴半径 r 变化所遵循的方程,将(3)、(4)、(5)式代入(2)式,得

$$\frac{d^2r}{dt^2}+\frac{3}{r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=\frac{\rho_2}{4\rho_1}g \tag{6}$$

上述关于 r 的非齐次方程的特解形式为

$$r=\alpha t^2$$

其中 α 为待定系数,代入方程(6)式,得

$$2\alpha+\frac{3}{\alpha t^2}\cdot 4\alpha^2t^2=\frac{\rho_2}{4\rho_1}g$$

得

$$\alpha=\frac{\rho_2}{56\rho_1}g$$

故方程(6)式的特解为

$$r=\frac{\rho_2}{56\rho_1}gt^2$$

方程(6)式对应的齐次方程的形式为

$$\frac{d^2r}{dt^2}+\frac{3}{r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=0 \tag{7}$$

为解上述方程，令

$$Z=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

并改用 r 为自变量，则有

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}r}\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=Z\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}r}$$

于是，方程(7)式变为

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}r}+\frac{3}{r}Z=0$$

分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}Z}{Z}=-\frac{3}{r}\mathrm{d}r$$

积分，得

$$\ln Z+\ln r^3=C$$

或

$$Zr^3=C_1$$

式中 C_1 为积分常量．把 $Z=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$代入，得

$$r^3\mathrm{d}r=C_1\mathrm{d}t$$

积分，得

$$r^4=4(C_1t+C_2)$$

式中 C_2 为积分常量．最后得出方程(7)式的通解为

$$r=[4(C_1t+C_2)]^{\frac{1}{4}}$$

因而方程(6)式的通解为

$$r=[4(C_1t+C_2)]^{\frac{1}{4}}+\frac{\rho_2}{56\rho_1}gt^2$$

这就是水滴半径 r 随时间 t 增大的规律，式中第一项与时间的关系为 $t^{\frac{1}{4}}$，第二项则为 t^2，所以经足够长时间后，第一项可忽略．因此，长时间后的近似解为

$$r=\frac{\rho_2}{56\rho_1}gt^2$$

代入(5)式，得出水滴速度 v 随时间 t 变化的规律为

$$v=\frac{4\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{\rho_2}{28\rho_1}gt=\frac{g}{7}t$$

水滴的加速度 a 为

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{g}{7}$$

由此可见，由于吸附全部遇到的雾气中的水分子，经过足够长的时间后，水滴将作匀加速直线运动，加速度 a 为重力加速度 g 的七分之一．

第四章 角动量，有心运动

【题 1】 试根据牛顿万有引力定律证明开普勒行星运动三定律．

【分析】 丹麦天文学家第谷·布拉赫于 1580—1600 年间在布拉格天文台系统地观察了行星的运行规律，全部观测都凭肉眼进行．在所测定的行星位置以高度准确著称．大量观测资料留给了他的助手开普勒．开普勒根据第谷的观察数据总结出行星运动三定律：

1．行星沿椭圆轨道绕太阳运动，太阳位于焦点之一．(1609 年)

2．同一行星的径矢 $\boldsymbol{r}$ 在单位时间内扫过的面积为常量(即面积速度为常量)．(1609 年)

3．对不同行星，$\frac{a^3}{T^2}=$ 常量，a 为椭圆半长轴，T 为绕太阳的周期．(1618 年)

开普勒行星运动三定律在历史上曾作为建立万有引力定律的重要基础．本题则是要从已知的万有引力定律出发，从理论上证明开普勒三定律．从而加深对两者密切联系的认识．

假定太阳静止不动，行星绕太阳运动．行星只受太阳的引力作用，引力是有心力，太阳－行星系统的角动量守恒、机械能守恒．从这两个守恒定律出发，可建立行星运动的微分方程，解此微分方程可得出行星的轨迹方程，一般情形下轨迹是圆锥曲线(椭圆，抛物线或双曲线)，椭圆轨迹只是其中之一．根据面积速度的定义，从角动量守恒可直接证明开普勒第二定律．由第二定律和机械能守恒可证明开普勒第三定律．

【解】 1．开普勒第一定律的证明．

如力图 4－1－1，设太阳静止不动，太阳和行星的质量分别为 M 和 m．取平面极坐标，行星的位置可用(r,φ)来描述．力图 4－1－1 中行星的位置矢量 $\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{r}^0$，$\boldsymbol{r}^0$ 是径向单位矢量，$\boldsymbol{\varphi}^0$ 是与径向(即 $\boldsymbol{r}^0$)垂直的单位矢量．

行星所受太阳引力为

$$\boldsymbol{F}=-\frac{GmM}{r^2}\boldsymbol{r}^0$$

首先证明行星一定在同一平面内运动．由牛顿第二定律，

$$\boldsymbol{F}=m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

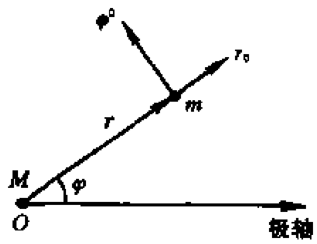
力矩

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=-\frac{GmM}{r^2}r\boldsymbol{r}^0\times\boldsymbol{r}^0=0$$

即

$$\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=0$$

或



力图 4－1－1

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=0$$

积分，得

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{h}(\text{常矢量})$$

上式表明，行星的径矢 $\boldsymbol{r}$ 始终与常矢量 $\boldsymbol{h}$ 正交，故行星一定在同一平面内运动．

为了得出行星运动的轨迹，采用如力图 4-1-1 的平面极坐标较方向．取静止的太阳为极点 O，行星的位置用坐标 (r,φ) 表示．在平面极坐标中，描述行星运动的有关物理量罗列如下．

$$\text{径矢 } \boldsymbol{r}=r\boldsymbol{r}^0$$

$$\begin{aligned}\text{速度 } \boldsymbol{v}&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\\&=\dot{r}\boldsymbol{r}^0+r\dot{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^0\end{aligned}$$

式中 $\boldsymbol{r}^0$ 是径向单位矢量，$\boldsymbol{\varphi}^0$ 是与径向垂直的单位矢量，$\dot{r}$ 是径向速度分量，$r\dot{\varphi}$ 是横向速度分量．速度的大小满足

$$v=\dot{r}^2+(r\dot{\varphi})^2$$

$$\text{动量}\quad m\boldsymbol{v}=m\dot{r}\boldsymbol{r}^0+mr\dot{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^0$$

$$\begin{aligned}\text{角动量}\quad \boldsymbol{L}&=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}=m\dot{r}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}^0)+mr^2\dot{\varphi}(\boldsymbol{r}^0\times\boldsymbol{\varphi}^0)\\&=mr^2\dot{\varphi}(\boldsymbol{r}^0\times\boldsymbol{\varphi}^0)\\L&=mr^2\dot{\varphi}\end{aligned}$$

行星所受的太阳引力指向 O 点，故对 O 点的力矩 $\boldsymbol{M}=0$．由角动量定理

$$\boldsymbol{M}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}=0$$

故

$$\boldsymbol{L}=\text{常矢量}$$

即角动量守恒，L 为常量．

太阳行星系统的机械能守恒，设系统的总机械能为 E，则

$$E=\frac{1}{2}mv^2-G\frac{mM}{r}=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)-G\frac{mM}{r}$$

因

$$\begin{cases}\dot{\varphi}=\dfrac{L}{mr^2}\\ \dot{r}=\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\dot{\varphi}=\dfrac{L}{mr^2}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\end{cases}$$

代入上式，得

$$E=\frac{m}{2}\left[\frac{L^2}{m^2r^4}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+\frac{L^2}{m^2r^2}\right]-G\frac{mM}{r}$$

或

$$\frac{L^2}{m^2r^4}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+\frac{L^2}{m^2r^2}=\frac{2E}{m}+\frac{2GM}{r}$$

上式两边同乘 $\frac{m^2}{L^2}$，得

$$\frac{1}{r^4}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+\frac{1}{r^2}=\frac{2mE}{L^2}+\frac{2Gm^2M}{L^2r}$$

为简化上式，令

$$\rho=\frac{1}{r}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}=-\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}=-r^2\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi}$$

于是前述方程变为

$$\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+\rho^2-\frac{2Gm^2M}{L^2}\rho=\frac{2mE}{L^2} \tag{1}$$

上式对 φ 求导，并注意 E 和 L 均为常量，得

$$2\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi}\right)\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}\varphi^2}+2\rho\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi}-\frac{2Gm^2M}{L^2}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi}=0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}\varphi^2}+\rho-\frac{Gm^2M}{L^2}\right)=0$$

故有

$$\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}\varphi^2}+\rho=\frac{Gm^2M}{L^2} \tag{2}$$

上述非齐次方程的特解为$\frac{Gm^2M}{L^2}$，对应齐次方程的通解为$(A\cos\varphi+B\sin\varphi)$．故方程(2)的通解为

$$\rho=\frac{Gm^2M}{L^2}+A\cos\varphi+B\sin\varphi \tag{3}$$

式中 A 和 B 为任意常量．选择适当的极轴方向，使得 $\varphi=0$ 时，$r=r_{\min}$(即近日点)，即 $\rho=\rho_{\max}$，对此点有$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi}=0$，即

$$\left.\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi}\right|_{\varphi=0}=\left.(-A\sin\varphi+B\cos\varphi)\right|_{\varphi=0}=0$$

故

$$B=0$$

于是(3)式简化为

$$\rho=\frac{Gm^2M}{L^2}+A\cos\varphi \tag{4}$$

为将上式写成标准的极坐标方程，令

$$\frac{Gm^2M}{L^2}=\frac{1}{p}\qquad A=\frac{\varepsilon}{p}$$

式中 p 和 ε 为另两个常量．于是(4)式可写成

$$\rho=\frac{1}{p}+\frac{\varepsilon}{p}\cos\varphi=\frac{1+\varepsilon\cos\varphi}{p} \tag{5}$$

或

$$r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

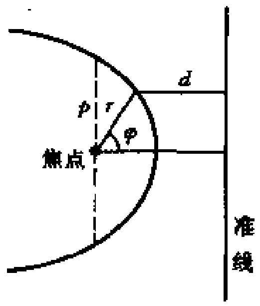
这是圆锥曲线的极坐标方程，从而证明了行星运动的轨迹一般是一条圆锥曲线．

由解析几何知识可知，式中 p 是通过焦点并与极轴垂直的半弦长，$\varepsilon=\frac{r}{d}$ 是离心率(见力图 4-1-2)，$\varepsilon<1$ 为椭圆，$\varepsilon=1$ 为抛物线，$\varepsilon>1$ 为双曲线．

ε 的取值与总能量 E 密切相关，下面推导 ε 与 E 的关系．轨迹方程(5)在极轴方向上 ρ 有极值，即

$$\rho_{\max}=\frac{1+\varepsilon}{p},(\varphi=0)$$

$$\rho_{\min}=\frac{1-\varepsilon}{p},(\varphi=\pi)$$



力图 4-1-2

ρ 取极值的条件为

$$\frac{d\rho}{d\varphi}=0$$

由(1)式，得

$$\rho^2-\frac{2Gm^2M}{L^2}\rho-\frac{2mE}{L^2}=0 \tag{6}$$

上式是决定 ρ 的两个极值的二次方程．由维达定理，

$$\rho_{\max}+\rho_{\min}=\frac{2Gm^2M}{L^2} \tag{7}$$

$$\rho_{\max}\cdot\rho_{\min}=\frac{1-\varepsilon^2}{p^2}=-\frac{2mE}{L^2} \tag{8}$$

即

$$1-\varepsilon^2=-\frac{2mE}{L^2}p^2$$

$$\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2mE}{L^2}p^2}$$

这就是 ε 与 E 的关系，可见

当 $E<0$ 时，$\varepsilon<1$，轨迹为椭圆，
当 $E=0$ 时，$\varepsilon=1$，轨迹为抛物线，
当 $E>0$ 时，$\varepsilon>1$，轨迹为双曲线．

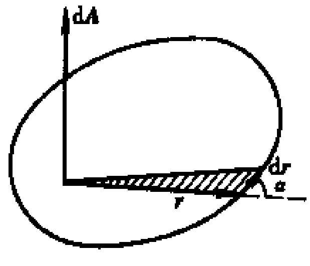
太阳的各个行星被太阳束缚，其总能量 $E<0$(无穷远处的引力势能为零)，故行星的运行轨迹均为椭圆．

2．开普勒第二定律的证明．

如力图 4-1-3，在 dt 时间内，经矢 r 扫过的面积为

$\mathrm{d}A=\frac{1}{2}|\boldsymbol{r}||\mathrm{d}\boldsymbol{r}|\sin\alpha$ 相应的面积矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 表为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\boldsymbol{r}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$



力图 4－1－3

故面积速度为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$$

$$=\frac{1}{2m}\boldsymbol{r}\times(m\boldsymbol{v})=\frac{\boldsymbol{L}}{2m}$$

因行星的角动量守恒，即

$$\boldsymbol{L}=\text{常矢量}$$

故

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=\text{常矢量}$$

此即开普勒第二定律．

第二定律也可表为

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}=\text{常矢量}$$

或

$$r\,v\sin\alpha=\text{恒量}$$

式中 α 是径矢 $\boldsymbol{r}$ 与轨迹切向之间的夹角，如力图 4－1－3 所示．对于近日点和远日点，$\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{r}$，有

$$r_Av_A=r_Bv_B$$

如力图 4－1－4 所示．

3. 开普勒第三定律的证明．

由前

$$r_Av_A=r_Bv_B$$

由机械能守恒

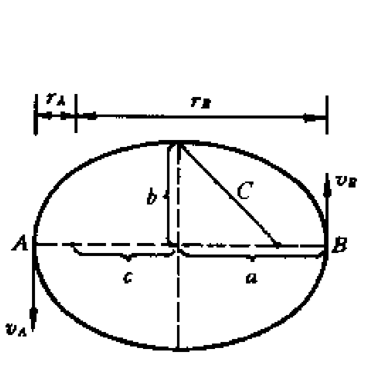
$$\frac{1}{2}mv_A^2-\frac{GmM}{r_A}=\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{GmM}{r_B}$$

由以上两式解出

$$v_A^2=\frac{2GM}{r_A+r_B}\cdot\frac{r_B}{r_A}=\frac{GM}{a}\cdot\frac{r_B}{r_A}$$

式中 a 是椭圆半长轴，为

$$a=\frac{r_A+r_B}{2}$$



力图 4－1－4

面积速度为

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\right)_A=\frac{1}{2}r_Av_A=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{GM}{a}}\cdot\sqrt{r_Ar_B}$$

由力图 4－1－4 可知

$$r_A=a-c$$

$$r_B = a + c$$

故

$$\sqrt{r_A r_B} = \sqrt{a^2 - c^2} = b$$

式中 b 为半短轴．故

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{GM}{a}}$$

行星绕太阳运行的周期 T 为

$$T = \frac{\pi ab}{\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}} = \frac{2\pi a\sqrt{a}}{\sqrt{GM}}$$

故

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3$$

对不同的行星，有

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{恒量}$$

【题 2】 已知行星绕太阳沿椭圆轨道运动(开普勒第一定律)．试证明行星所受太阳引力必定与距离平方成反比．

【分析】 牛顿万有引力定律是在开普勒行星运动定律的基础上建立的，问题的关键是如何根据行星作椭圆运动的事实来论证引力的平方反比律．1679 年，E. 哈雷和 C. 伦恩就圆轨道的特殊情形证明了引力的平方反比律．1684 年，牛顿则从一般的椭圆轨道情形证明了同一命题．本题要求读者从椭圆轨道这一事实出发，运用所掌握的物理知识和近代数学工具，来证明引力与距离平方成反比．

【解】 行星绕太阳作椭圆运动时，其轨迹方程为

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi} \tag{1}$$

这是圆锥曲线的极坐标方程，其中 p 和 ε 是两个常量，r 和 φ 是极坐标．根据牛顿第二定律，行星所受的径向力(即引力)为

$$F = ma_r$$

式中 m 是行星质量，a_r 为径向加速度分量．在平面极坐标系中，径向加速度 a_r 为

$$a_r = \ddot{r} - r^2\dot{\varphi}^2$$

(1)式对时间 t 求导，得

$$\dot{r} = \frac{\varepsilon\sin\varphi\cdot p}{(1 + \varepsilon\cos\varphi)^2}\dot{\varphi} = \frac{\varepsilon\sin\varphi}{p}r^2\dot{\varphi} \tag{2}$$

行星的角动量 L 是恒量，为

$$L = mr^2\dot{\varphi}$$

于是(2)式变为

$$\dot{r}=\frac{\varepsilon L}{mp}\sin\varphi$$

再次对时间 t 求导，得

$$\ddot{r}=\frac{\varepsilon L}{mp}\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}=\frac{\varepsilon L}{mp}\cos\varphi\cdot\frac{L}{mr^2}=\frac{L^2}{m^2r^2}\cdot\frac{\varepsilon\cos\varphi}{p}$$

所以，径向加速度 a_r 可写为

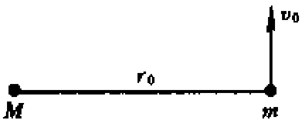
$$\begin{aligned}a_r&=\frac{L^2}{m^2r^2}\cdot\frac{\varepsilon\cos\varphi}{p}-r\frac{L^2}{m^2r^4}\\&=\frac{L^2}{m^2r^2}\left(\frac{\varepsilon\cos\varphi}{p}-\frac{1}{r}\right)=\frac{L^2}{m^2r^2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)=-\frac{L^2}{m^2pr^2}\end{aligned}$$

故引力

$$F=ma_r=-\frac{L^2}{mp}\cdot\frac{1}{r^2}$$

对于固定的行星椭圆轨道，L 和 p 均为常量，故引力与距离平方成反比，证完．

【题3】 如力图4－3－1，设质量为 M 的恒星固定不动．质量为 m 的行星在其引力作用下运动，已知距恒星 r_0 时的速度为 v_0，且 v_0 的方向与径矢垂直．试讨论行星轨迹分别为抛物线、椭圆、圆和双曲线时，v_0 应取何值．



力图4－3－1

【分析】 行星绕固定恒星运动时，总机械能 E 不变，它也就是如力图4－3－1所示状态的机械能．在本章题1中已经讨论过各种圆锥曲线的判据，即 $E=0$ 时为抛物线，$E<0$ 时为椭圆，$E>0$ 时为双曲线，由此可得出各种情形下 v_0 的取值．圆轨道是椭圆轨道的特殊情形，即在 $E<0$ 时，椭圆的半长轴 a 应等于圆轨道的 r_0，$r_0=a$．为了得到取圆轨道时的 v_0 值，必须先导出椭圆半长轴 a 与总机械能 E 的关系式．

【解】 如力图4－3－1，行星绕固定恒星运行的总机械能为

$$E=\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{GmM}{r_0}\tag{1}$$

式中 v_0 的取值不同，E 也不同，行星轨迹的类别也各异．

1．$E=0$ 时为抛物线．此时行星到达无穷远时速度变为零，即刚好能逃逸恒星的束缚，相应的 v_0 值称为逃逸速度，用 v_e 表示．由(1)式，v_e 满足

$$\frac{1}{2}mv_e^2-\frac{GmM}{r_0}=0$$

即

$$v_e=\sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$$

2．$E<0$ 时一般为椭圆轨道．由(1)式，v_0 应满足

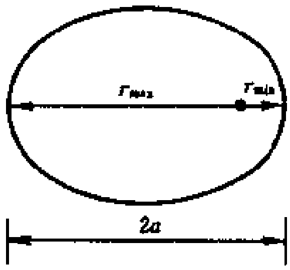
$$\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{GmM}{r_0}<0$$

即

$$v_0 < \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} = v_e$$

圆轨道是椭圆轨道的特殊情形．

在椭圆轨道的情形下，本章题 1 中的方程(6)有两个实根，即 ρ_{max} 和 ρ_{min}，它们对应两个取极值的半径 r_{min} 和 r_{max}（因 $\rho = \frac{1}{r}$）．由题 1 中的(7)式，有



力图 4-3-2

$$\frac{1}{r_{min}} + \frac{1}{r_{max}} = \frac{2Gm^2M}{L^2}$$

即

$$r_{max} + r_{min} = r_{max}r_{min}\frac{2Gm^2M}{L^2}$$

注意到，如力图 4-3-2，有

$$r_{max} + r_{min} = 2a$$

式中 a 是椭圆的半长轴，故有

$$2a = r_{max}r_{min}\frac{2Gm^2M}{L^2}$$

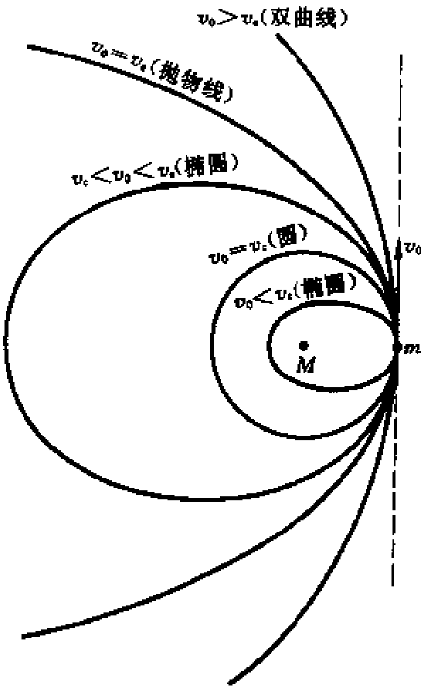
由本章题 1 中的(8)式

$$\frac{1}{r_{max}r_{min}} = -\frac{2mE}{L^2}$$

故有

$$2a = -\frac{GmM}{E}$$

上式表明，椭圆轨道的半长轴完全由总能量 E 决定．将(1)式代入上式，得



力图 4-3-3

$$\frac{1}{2a} = \frac{1}{r_0} - \frac{v_0^2}{2GM}$$

当椭圆退化成圆时

$$r_0 = a$$

将行星取圆轨道时的 v_0 表为 v_c，则 v_c 应满足

$$\frac{1}{r_0} - \frac{1}{2r_0} = \frac{v_c^2}{2GM}$$

即

$$v_c^2 = \frac{GM}{r_0}$$

$$v_c = \sqrt{\frac{GM}{r_0}} = \frac{v_e}{\sqrt{2}}$$

3. $E > 0$ 时为双曲线．行星具有正能量，意即逃逸到无穷远时动能不为零，由(1)式，v_0 满足

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GmM}{r_0} > 0$$

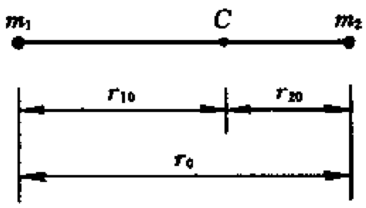
即

$$v_0 > \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} = v_e$$

总之，当 $v_0 > v_e$ 时轨道为双曲线；$v_0 = v_e$ 时为抛物线；$v_c < v_0 < v_e$ 时为（在圆轨道外面的）椭圆；$v_0 = v_c$ 时为圆；$v_0 < v_c$ 时为（在圆轨道里面的）椭圆．以上各种轨道一并在力图 4－3－3 中画出，以便比较．

【题4】 空间两质点的质量分别为 m_1 和 m_2，彼此以万有引力相互作用．开始时两质点静止，相距 r_0，在引力作用下彼此接近并相碰．试求两质点从开始运动到相碰所经历的时间．

【分析】 按常规，如力图 4－4－1，可先确定两质点系统的质心位置，因系统不受外力，质心 C 固定不动．两质点沿两者的连线分别从两端一起向质心 C 靠拢，并同时到达质心处实现相碰，从开始运动到实现相碰所需的时间，也就是 m_1 经 r_{10} 运动到 C 点所需的时间．建立 m_1 的动力方程，原则上可能解出 m_1 的位置随时间的变化关系．然而，当两质点靠得很近时，其间的引力趋于无穷大，在数学上将遇到发散困难，得不出结果．实际上，当两质点足够挨近时，质点概念已经失效，即必须考虑它们的大小、形状和质量分布．因此，为了避免发散困难，需改变思路，另辟蹊径，求解本题．



力图 4－4－1

m_1 在引力作用下向质心 C 作直线运动，这应属有心运动的范畴之内．在引力作用下的有心运动一般是椭圆运动，直线运动可以看成是椭圆运动的特殊情形，即直线轨道是椭圆轨道的退化结果．根据这一看法，m_1 从静止开始运动到达质心 C 所需时间就是相应的退化椭圆运动的半周期．椭圆运动的周期由开普勒第三定律可以求得，于是本题可解．

【解】 设两质点系统的质心为 C，开始时两质点相距 r_0（如力图 4－4－1）．当两质点相距为任意的 r 时（$r < r_0$），设它们与质心 C 的距离分别为 r_1 和 r_2，则有

$$r_2 = \frac{m_1}{m_2} r_1$$

$$r = r_1 + r_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_2} r_1$$

由上式，开始时刻静止的 m_1 与质心 C 的距离 r_{10} 为

$$r_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r_0$$

当 m_1 与 m_2 相距 r 时，m_1 所受万有引力为

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} = G\frac{m_1 m_2^3}{(m_1 + m_2)^2 r_1^2} = G\frac{m_1 m^*}{r_1^2}$$

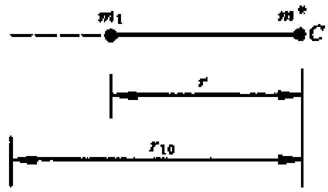
式中

$$m^* = \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2}$$

由此可见，m_1 所受 m_2 的引力等效于在 C 点处存在的质量 m^* 对 m_1 的引力作用．由于质心 C

是固定不动的，故 m_1 的运动可以看作是在 C 处的 m^* 的引力作用下的有心运动(如力图 4－4－2)，应遵守开普勒行星运动三定律，只不过一般的椭圆轨迹已退化为直线轨迹．m_1 从静止开始运动经 r_{10} 的距离到达质心 C 所需的时间 t 相当于椭圆运动的半周期．设该椭圆的半长轴为 a，则

$$a=\frac{r_{10}}{2}=\frac{m_2}{2(m_1+m_2)}r_0$$



力图 4－4－2

m_1 从静止开始运动到 C 点与 m_2 相碰所需时间 t 应为椭圆运动的半周期，

$$t=\frac{T}{2}$$

其中 T 是椭圆运动的周期，可由开普勒第三定律求得．在本章题 1 中已经得出

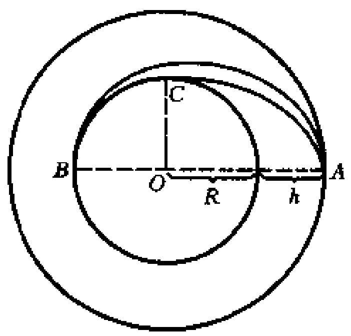
$$T=\frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{Gm^*}}$$

所以

$$t=\frac{T}{2}=\frac{\pi a^{3/2}}{\sqrt{Gm^*}}=\frac{\pi r_0^{3/2}}{2\sqrt{2G(m_1+m_2)}}$$

【本题由参加第 26 届 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)中国代表队队员倪彬提供．】

【题 5】 如力图 4－5－1 所示，质量为 $m=1.20\times10^4$ kg 的飞船在离月球表面高度为 $h=100$ km 处绕月球作圆周运动．飞船采用两种登月方式．1．在 A 点向前(即向力图 4－5－1 上方)短时间喷气，使飞船与月球相切地到达月球上的 B 点($\overline{AB}$ 通过月球中心 O 点)．2．在 A 点向外侧(即向力图 4－5－1 右方)沿月球半径短时间喷气，使飞船与月球相切地到达月球上的 C 点($\overline{CO}$ 与 $\overline{AB}$ 垂直)．设喷气相对飞船的速度为 $u=1.00\times10^4$ m/s．已知月球半径 $R=1\ 700$ km，月球重力加速度(当作常量)$g=1.700$ m/s^2．试求：两种登月方式各需的燃料质量．



力图 4－5－1

【分析】 飞船绕月球作圆周运动所需之向心力来自月球的引力．在短暂的喷气过程中，飞船系统(包括喷出的燃料及其余部分)的动量或动量的某个分量近似守恒(忽略月球引力的影响)．喷气后，飞船速度改变了，作椭圆轨道运动，月球中心是椭圆的一个焦点．运动过程中，飞船的角动量守恒，且飞船与月球系统的机械能守恒．飞船在 B 点登月时，A 和 B 两点是椭圆长轴的两个端点．在 C 点登月时，C 点是椭圆长轴的一个端点．

【解】 设飞船喷气前在 A 点的速度为 v_0，则

$$G\frac{Mm}{(R+h)^2}=\frac{mv_0^2}{R+h}\tag{1}$$

$$G\frac{Mm}{R^2}=mg \qquad (2)$$

式中 M 为月球质量．由(1)、(2)式解出

$$v_0=\sqrt{\frac{R^2g}{R+h}}=1652\ \text{m/s}$$

按方式一，向前喷气后，飞船在 A 点的速度由喷气前的 v_0 减小为 v_A，方向不变．设飞船到达 B 点的速度为 v_B，方向沿月球切向．因飞船角动量守恒，故有

$$mv_BR=mv_A(R+h) \qquad (3)$$

从 A 到 B，飞船与月球系统的机械能守恒，故有

$$\frac{1}{2}mv_A^2-G\frac{Mm}{R+h}=\frac{1}{2}mv_B^2-G\frac{Mm}{R} \qquad (4)$$

由(2)、(3)、(4)式解出

$$v_A=\sqrt{\frac{2gR^3}{(R+h)(2R+h)}}=1628\ \text{m/s}$$

$$v_B=\sqrt{\frac{2ghR}{R+h}+v_A^2}=1724\ \text{m/s}$$

喷气过程中飞船的动量守恒．设喷出燃料的质量为 Δm，则

$$mv_0=(m-\Delta m)v_A+\Delta m(v_0+u) \qquad (5)$$

解出，

$$\Delta m=\frac{m(v_0-v_A)}{u+v_0-v_A}=28.7\ \text{kg}$$

按方式二，向外侧喷气，使飞船得到附加速度 Δv，如力图 4－5－2．故喷气后飞船在 A 点的速度 $\boldsymbol{v}_A$ 的大小为(方向如力图 4－5－2)，

$$v_A=\sqrt{v_0^2+(\Delta v^2)} \qquad (6)$$

由飞船角动量守恒，得

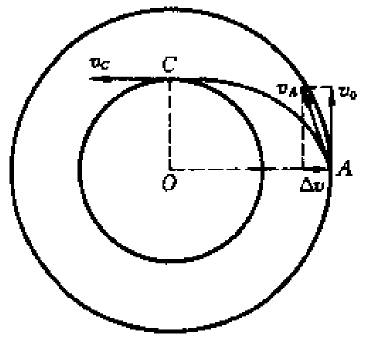
$$mv_CR=mv_0(R+h) \qquad (7)$$

故

$$v_C=\frac{R+h}{R}v_0=1749\ \text{m/s}$$

从 A 到 C，飞船与月球系统的机械能守恒，

$$\frac{1}{2}mv_A^2-G\frac{Mm}{R+h}=\frac{1}{2}mv_C^2-G\frac{Mm}{R} \qquad (8)$$



力图 4－5－2

由(6)、(7)、(8)式解出

$$\Delta v=\frac{h}{R}v_0=\frac{h}{R}\sqrt{\frac{gR^2}{R+h}}=97.0\ \text{m/s}$$

$$v_A=1655\ \text{m/s}$$

喷气过程中，飞船沿 $\overline{AO}$ 方向动量守恒，设喷出燃料质量为 Δm，则有

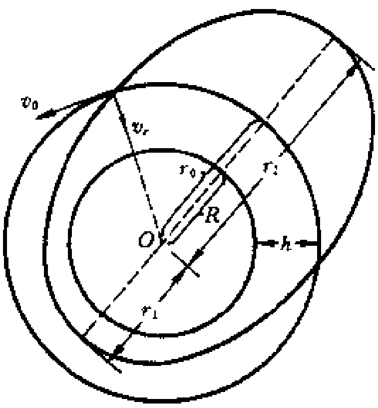
$$0=(\Delta m)u-(m-\Delta m)\Delta v \qquad (9)$$

故

$$\Delta m=\frac{m\Delta v}{u+\Delta v}=115\ \mathrm{kg}$$

【本题是 1979 年第 11 届 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)试题 .】

【题 6】 如 4－6－1 图,飞船绕地球作圆周运动,离地面的高度 $h=800$ km,地球半径 $R=6.40\times10^3$ km,飞船圆轨道半径 $r_0=R+h$,飞船速度 $v_0=3.00\times10^4$ km/h. 经过短暂的沿矢径向外侧喷气,飞船获得了指向地心 O 的附加速度 $v_r=800$ km/h,其轨道变为椭圆．设喷气后飞船的质量可看作不变．试求:飞船椭圆轨道的近地点和远地点离地面的高度．



力图 4－6－1

【分析】 飞船绕地球作圆周运动所需之向心力来自地球引力．因喷气沿飞船与地心的连线向外,外力矩为零,故喷气前、后飞船的角动量守恒．喷气后飞船速度改变了,在沿新的椭圆轨道运行的过程中,飞船与地球系统的机械能守恒．

【解】 设飞船质量为 m,飞船作圆周运动时,由牛顿第二定律,

$$G\frac{Mm}{r_0^2}=\frac{mv_0^2}{r_0}\tag{1}$$

式中 M 为地球质量．设喷气后飞船在椭圆轨道近地点(或远地点)的速度为 v,近地点(或远地点)与地心的距离为 r,因喷气前、后飞船的角动量守恒,有

$$mv_0r_0=mvr.\tag{2}$$

喷气后,飞船沿椭圆轨道运动,飞船与地球系统的机械能守恒,故

$$\frac{1}{2}m(v_0^2+v_r^2)-G\frac{Mm}{r_0}=\frac{1}{2}mv^2-G\frac{Mm}{r}\tag{3}$$

(1)、(2)、(3)式联立,消去 M 和 v,得

$$v_0^2r_0^2\left(\frac{1}{r}\right)^2-2v_0^2r_0\left(\frac{1}{r}\right)+(v_0^2-r_r^2)=0$$

或

$$\left[v_0r_0\left(\frac{1}{r}\right)-(v_0+v_r)\right]\left[v_0r_0\left(\frac{1}{r}\right)-(v_0-v_r)\right]=0$$

故 r 的两个根为

$$\begin{cases}r_1=\dfrac{v_0r_0}{v_0+v_r}, & \text{近地点}\\[2ex] r_2=\dfrac{v_0r_0}{v_0-v_r}, & \text{远地点}\end{cases}$$

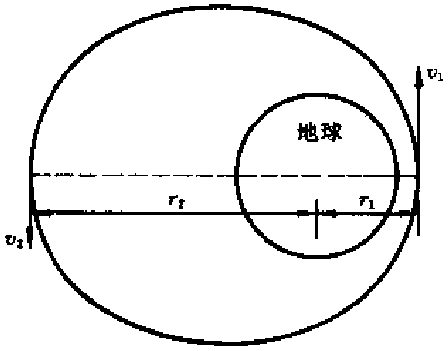
于是,近地点和远地点离地面的高度为

$$\begin{cases}h_1=r_1-R=613\ \mathrm{km}\\ h_2=r_2-R=997\ \mathrm{km}\end{cases}$$

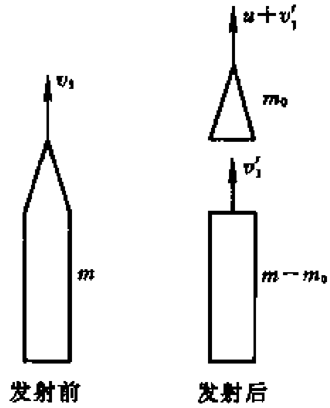
【题7】 如力图4－7－1，飞船总质量为 m，内装质量为 m_0 的探测器，绕地球沿椭圆轨道运行，近地点与地心距离为 r_1，速度为

$$v_1=\sqrt{\frac{2\alpha GM}{r_1}}$$

1. 试证明 $1>\alpha>\frac{1}{2}$.



力图4－7－1



力图4－7－2

2. 如力图4－7－2，飞船在近地点向前发射探测器，并使探测器沿抛物线轨道运动．发射后，飞船沿圆轨道运行．试求：质量比 $\frac{m_0}{m}$ 及发射探测器的相对速度 u.

3. 如力图4－7－3，若在远地点以上述相对速度 u 发射探测器，试求探测器运行的轨道．

【分析】 1. 飞船沿椭圆轨道运行时，角动量守恒，机械能守恒，它们确定了飞船的运动特征，限制了 α 的取值．

2. 发射探测器前后，飞船（包括探测器）动量守恒．发射后，探测器沿抛物线运动，其机械能应为零，飞船（不包括探测器）作圆轨道运动所需之向心力来自地球引力．

3. 发射探测器前后，飞船（包括探测器）动量守恒．探测器轨道的特征由其机械能 E 确定，$E<0$ 为椭圆或圆轨道，$E=0$ 为抛物线，$E>0$ 为双曲线．

【解】 1. 飞船绕地球作椭圆轨道运动，设在远地点 r_2 处的速度为 v_2，由角动量守恒，

$$mr_1v_1=mr_2v_2$$

即

$$mr_1\sqrt{\frac{2\alpha GM}{r_1}}=mr_2v_2$$

飞船地球系统的机械能守恒，故有

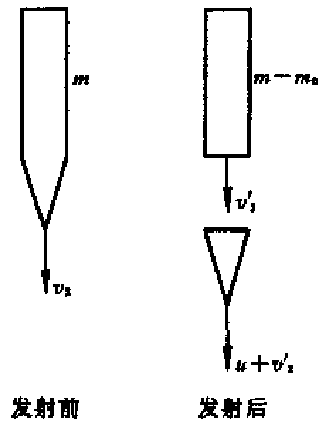
$$\frac{1}{2}m\left(\frac{2\alpha GM}{r_1}\right)-G\frac{Mm}{r_1}=\frac{1}{2}mv_2^2-G\frac{Mm}{r_2}$$

由以上两式，得

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)=0$$

解出两个根为

$$\begin{cases}\dfrac{r_1}{r_2}=1\\[2ex]\dfrac{r_1}{r_2}=\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\end{cases}$$



力图 4-7-3

其中$\dfrac{r_1}{r_2}=1$为圆轨道，不合题意，弃去．应取$\dfrac{r_1}{r_2}=\dfrac{1-\alpha}{\alpha}$，又因

$$0<\frac{r_1}{r_2}<1$$

故有

$$\frac{1}{2}<\alpha<1$$

2．发射探测器前飞船速度为 v_1，设发射后飞船速度为 v_1'，设探测器相对飞船的发射速度为 u，由动量守恒，

$$mv_1=(m-m_0)v_1'+m_0(u+v_1') \tag{1}$$

发射后，探测器沿抛物线运动，总机械能为零，即

$$E=\frac{1}{2}m_0(u+v_1')^2-\frac{GMm_0}{r_1}=0 \tag{2}$$

发射探测器后，飞船作圆运动，故

$$\frac{GM(m-m_0)}{r_1^2}=(m-m_0)\frac{v_1'^2}{r_1}$$

式中 M 为地球质量．即

$$v_1'=\sqrt{\frac{GM}{r_1}}=\frac{v_1}{\sqrt{2\alpha}} \tag{3}$$

由(1)式，

$$mv_1=mv_1'+m_0u$$

即

$$u=\frac{m}{m_0}(v_1-v_1') \tag{4}$$

由(2)、(3)式，得

$$(u+v_1')^2-2v_1'^2=0$$

即

$$u^2+2uv_1'-v_1'^2=0$$

把(4)式代入上式，得出$\dfrac{m}{m_0}$满足的方程为

$$\left(\frac{m}{m_0}\right)^2(v_1-v_1')^2+2\left(\frac{m}{m_0}\right)(v_1-v_1')v_1'-v_1'^2=0$$

舍去负根后，解出

$$\frac{m}{m_0}=(\sqrt{2}-1)\frac{v_1'}{v_1-v_1'}$$

将(3)式代入，得

$$\frac{m}{m_0}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2\alpha}-1}$$

所以质量比为

$$\frac{m_0}{m}=\frac{\sqrt{2\alpha}-1}{\sqrt{2}-1} \tag{5}$$

代入(4)式，得出探测器的相对速度为

$$u=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2\alpha}-1}\left(v_1-\frac{v_1}{\sqrt{2\alpha}}\right)=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2\alpha}}v_1$$

3. 飞船及探测器在发射探测器前在远地点的速度设为 v_2，在近地点的速度为前述 v_1，作椭圆轨道运动，由角动量守恒

$$mr_1v_1=mr_2v_2$$

即

$$v_2=\frac{r_1}{r_2}v_1$$

设飞船在远地点以上述相对速度 u 发射探测器后，飞船的速度变为 v_2'，则探测器的速度应为 $(u+v_2')$，由动量守恒，有

$$mv_2=(m-m_0)v_2'+m_0(u+v_2')$$

或写成

$$mv_2=(m-m_0)(u+v_2')-(m-m_0)u+m_0(u+v_2')$$

故发射后探测器的速度为

$$u+v_2'=\frac{mv_2+(m-m_0)u}{m}=v_2+\left(1-\frac{m_0}{m}\right)u \tag{6}$$

式中的相对速度 u 前已求出，为

$$u=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2\alpha}}v_1$$

利用已知的关系，

$$v_1=\frac{r_2}{r_1}v_2,\quad \frac{r_1}{r_2}=\frac{1-\alpha}{\alpha}$$

可将 u 用 v_2 表示，得

$$u=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2\alpha}}\cdot\frac{r_2}{r_1}v_2=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2\alpha}}\cdot\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)v_2$$

代入(6)式，并注意到 $\frac{m_0}{m}$ 已由(5)式给出，有

$$u+v_2'=v_2+\left(1-\frac{\sqrt{2\alpha}-1}{\sqrt{2}-1}\right)\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2\alpha}}\right)\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)v_2$$

$$=\frac{1-2\alpha+\sqrt{\alpha}}{1-\alpha}v_2$$

因

$$v_2=\frac{r_1}{r_2}v_1=\sqrt{\frac{2\alpha GM}{r_1}}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)=\sqrt{\alpha}\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}\sqrt{\frac{2GM}{r_2}}$$
$$=\sqrt{\alpha}\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\sqrt{\frac{2GM}{r_2}}=\sqrt{1-\alpha}\sqrt{\frac{2GM}{r_2}}$$

故

$$u+v_2'=\frac{1-2\alpha+\sqrt{\alpha}}{\sqrt{1-\alpha}}\sqrt{\frac{2GM}{r_2}}=\sqrt{\frac{2\alpha^* GM}{r_2}}$$

式中

$$\alpha^*=\frac{(1-2\alpha+\sqrt{\alpha})^2}{1-\alpha}$$

令

$$\eta=(1-2\alpha+\sqrt{\alpha})^2-(1-\alpha) \tag{7}$$

探测器轨道的类型可根据其总能量 E 来判断，

$$E=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r}$$

其中 v 是探测器的速度，可写成

$$v=\sqrt{\frac{2E}{m}+\frac{2GM}{r}}=\sqrt{\frac{2\alpha^* GM}{r}}$$

对于椭圆轨道，$E<0$，故 $\alpha^*<1$；对于抛物线轨道，$E=0$，故 $\alpha^*=1$；对于双曲线轨道，$E>0$，故 $\alpha^*>1$. 因此，探测器轨道的类型可由 α^* 的值来判断，或根据(7)式的定义，转用 η 的值来判断．当 $\eta<0$ 时，$\alpha^*<1$，为椭圆轨道；当 $\eta=0$ 时，$\alpha^*=1$，为抛物线轨道；当 $\eta>0$ 时，$\alpha^*>1$，为双曲线轨道．

把(7)式展开并化简，得

$$\eta=2\sqrt{\alpha}(\sqrt{\alpha}-1)(2\alpha-1)$$

因前已得出 $\frac{1}{2}<\alpha<1$，故

$$\eta<0$$

探测器将沿椭圆轨道运动．

【题 8】 如图，地球沿半径为 R_0 的圆轨道绕太阳运动．彗星绕太阳沿抛物线运动．已知抛物线与地球圆轨道一直径的两端相交．忽略地球与彗星之间的引力．

试求：1. 彗星抛物线轨道的方程．2. 彗星的最大速率是地球公转速率的几倍？3. 彗星在地球轨道内的运行时间是多少地球年？

【分析】 1. 由圆锥曲线极坐标方程的一般形式，结合本题的几何条件，可得出彗星抛物线的极坐标方程，再表为直角坐标形式．

2. 彗星作抛物线运动时，总机械能为零．彗星具有最大速率（即最大动能）时，它与太阳的

距离最小，即彗星在抛物线的顶点．

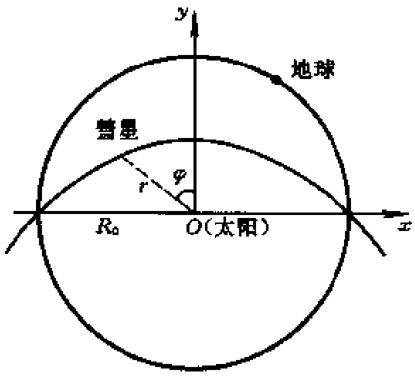
3．彗星作抛物线运动的面积速度是恒定的，可由它在某一特殊点（如顶点）的值求出．彗星在地球轨道内运行所扫过的面积可利用抛物线的极坐标方程积分得出．于是相应的运行时间可求．

【解】 1．圆锥曲线的极坐标方程为

$$r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

取极坐标及直角坐标如图，原点 O 为太阳，极轴为 y 轴．对于抛物线轨道，

$$\varepsilon=1$$



力图 4-8-1

又

$$\varphi=\frac{\pi}{2}\text{时},\quad r=R_0$$

故

$$p=R_0$$

于是，彗星的抛物线方程为

$$r=\frac{R_0}{1+\cos\varphi}$$

在直角坐标中，

$$\begin{cases} x=-r\sin\varphi=-\dfrac{R_0\sin\varphi}{1+\cos\varphi} \\ y=r\cos\varphi=\dfrac{R_0\cos\varphi}{1+\cos\varphi} \quad \text{或} \quad \cos\varphi=\dfrac{y}{R_0-y} \end{cases}$$

消去 φ，得

$$x=R_0\sqrt{1-\left(\frac{y}{R_0-y}\right)^2}\Big/\left(1+\frac{y}{R_0-y}\right)=\sqrt{R_0^2-2R_0y}$$

即

$$x^2=-2R_0\left(y-\frac{R_0}{2}\right)$$

这是彗星抛物线方程的直角坐标形式，可见抛物线顶点与太阳的距离是$\frac{R_0}{2}$(即 $x=0,y=\frac{R_0}{2}$).

2．彗星沿抛物线运动，总机械能

$$E=0$$

即

$$\frac{1}{2}mv^2-G\frac{Mm}{r}=0$$

式中 M 是太阳质量，m 是彗星质量，v 是彗星在 r 位置的速度．彗星在顶点时离太阳最近，相应的速度最大，分别为

$$r_{\min}=\frac{R_0}{2}\ ,\ v_{\max}^2=\frac{2GM}{r_{\min}}=\frac{4GM}{R_0}$$

地球绕太阳公转时，有

$$G\frac{Mm_{地}}{R_0^2}=m_{地}\frac{v_0^2}{R_0}$$

即

$$v_0^2=\frac{GM}{R_0}$$

因此，

$$v_{max}^2=4v_0^2,\quad 或\quad \frac{v_{max}}{v_0}=2$$

彗星的最大速率是地球公转速率的 2 倍 .

3. 彗星的面积速度为

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\frac{1}{2}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}=\frac{1}{2}\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{v}_r+\boldsymbol{v}_\varphi)$$
$$=\frac{1}{2}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}_\varphi$$

因

$$v_\varphi=r\dot{\varphi}$$

故

$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}$$

因$\frac{dA}{dt}$是恒定的，当取 $r=r_{min}=\frac{R_0}{2}$时，相应的 $v_\varphi=r\dot{\varphi}=v_{max}=2v_0$，有

$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}\quad (取\ r=r_{min})$$
$$=\frac{1}{2}r_{min}v_{max}=\frac{1}{2}R_0v_0$$

利用彗星抛物线方程的极坐标形式，可将彗星在 dt 时间扫过的面积 dA 表为

$$dA=\frac{1}{2}r^2d\varphi=\frac{R_0^2d\varphi}{2(1+\cos\varphi)^2}$$

彗星在地球轨道内运行所扫过的面积为

$$A=\frac{R_0^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(1+\cos\varphi)^2}=\frac{2}{3}R_0^2$$

所需时间 t 为

$$t=\frac{A}{\frac{dA}{dt}}=\frac{\frac{2}{3}R_0^2}{\frac{1}{2}R_0v_0}=\frac{4R_0}{3v_0}$$

因地球公转速度 v_0 为

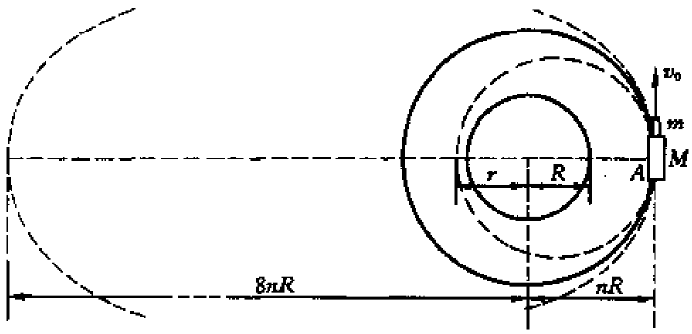
$$v_0=2\pi R_0/a(年)$$

代入，得

$$t=\frac{2}{3\pi}\ \text{a(年)}$$

【题9】 如图，质量为 M 的宇航站和与其对接上的质量为 m 的飞船一起绕地球沿圆轨道运动，轨道半径是地球半径 R 的 n 倍，$n=1.25$. 某一瞬时，宇航站将飞船沿运动方向发射出去．发射后，飞船和宇航站将分别沿各自新的椭圆轨道运行．已知飞船椭圆轨道的远地点离地球中心的距离为 $8nR$. 设发射飞船后宇航站的质量不变(即忽略喷气的质量).

试问：当质量比 $\frac{m}{M}$ 为何值时，飞船绕地球一周后刚好与宇航站相遇．



方图 4-9-1

【分析】 发射前飞船与宇航站作圆周运动，所需之向心力由地球引力提供，共同的速度 v_0 可求．

发射飞船过程，m 和 M 系统的动量守恒，飞船速度从 v_0 增为 v，宇航站速度则从 v_0 减为 v'，因沿 v_0 方向发射，故发射后 v 和 v' 的方向与 v_0 相同．由动量守恒可得出 v、v' 与 m、M(或 $\frac{m}{M}$)的关系．

发射后宇航站的总能量减小，沿椭圆轨道运动，其长轴应小于发射前的圆轨道直径 $2nR$. 发射后飞船的总能量增大，沿椭圆轨道运动，其长轴应大于发射前的圆轨道直径 $2nR$. 因飞船绕地球一周后刚好与宇航站相遇，相遇点必定就是发射点 A，即两椭圆轨道在发射点 A 相切，A 点就是宇航站椭圆轨道的远地点和飞船椭圆轨道的近地点．两椭圆轨道大致如图所示，其中 A 点与地球中心的距离为 nR，飞船远地点与地球中心的距离为 $8nR$，均已知，剩下的只是宇航站椭圆轨道的近地点与地球中心的距离 r.

发射后，m 和 M 在各自的椭圆轨道上运行时，分别遵从机械能守恒以及角动量守恒(即开普勒第二定律). 由此，v 可求，v' 与 r 的关系可知．与上述 v、v' 与 $\frac{m}{M}$ 的关系结合，可得 $\frac{m}{M}$ 与 r 的关系．

为使飞船绕行一周回到 A 点时刚好与宇航站重新相遇，要求飞船运行周期为宇航站运行周期的整数倍 k. 由开普勒第三定律，即对两椭圆长轴之比有一定要求，亦即对 r 或 $\frac{m}{M}$ 有一定要求，于是可解．

【解】 设发射前，飞船和宇航站一起作圆周运动的速度为 v_0，则由牛顿第二定律，有

$$G\frac{M_E(M+m)}{(nR)^2}=(M+m)\frac{v_0^2}{nR}$$

式中 M_E 为地球质量，故 v_0 为

$$v_0=\sqrt{\frac{GM_E}{nR}} \tag{1}$$

发射飞船前后，m 和 M 系统的动量守恒．设发射后瞬间，飞船 m 的速度为 v，宇航站 M 的速度为 v'，则

$$(M+m)v_0=mv'+mv$$

即

$$\left(1+\frac{m}{M}\right)v_0=v'+\frac{m}{M}v$$

即

$$\frac{m}{M}=\frac{v_0-v'}{v-v_0} \tag{2}$$

发射后，M 和 m 在各自的椭圆轨道上运行时，分别遵循机械能守恒与角动量守恒(开普勒第二定律)．设 M 在近地点的速度为 $v_近'$，设 m 在远地点的速度为 $v_远'$，则分别有

$$\begin{cases}\frac{1}{2}Mv'^2-G\frac{M_EM}{nR}=\frac{1}{2}Mv'^2_近-G\frac{M_EM}{r}\\ nRv'=rv_近'\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{1}{2}mv^2-G\frac{M_Em}{nR}=\frac{1}{2}mv'^2_远-G\frac{M_Em}{8nR}\\ nRv=8nRv_远'\end{cases}$$

式中 r 为宇航站 M 的椭圆轨道近地点与地球中心的距离．解以上两组方程，得

$$v'=\sqrt{\frac{GM_E}{nR}}\sqrt{\frac{2r}{r+nR}}$$

$$v=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{GM_E}{nR}}$$

把 v' 和 v 及(1)式代入(2)式，得出 $\frac{m}{M}$ 与 r 的关系为

$$\frac{m}{M}=\frac{v_0-v'}{v-v_0}=3\left(1-\sqrt{\frac{2r}{r+nR}}\right) \tag{3}$$

为使飞船运行一周回到发射点 A 时，刚好与宇航站重新相遇，要求飞船运行周期 t 等于宇航站运行周期 T 的整数倍，

$$t=kT,\quad k=\text{正整数}$$

由开普勒第三定律，

$$\frac{t}{T}=\left(\frac{9nR}{r+nR}\right)^{\frac{3}{2}}$$

由以上两式，解出

$$r=\frac{9-k^{\frac{2}{3}}}{k^{\frac{2}{3}}}nR \tag{4}$$

把(4)式代入(3)式，得

$$\frac{m}{M}=3-\sqrt{2(9-k^{\frac{2}{3}})}=3-\sqrt{18-2k^{2/3}} \tag{5}$$

因$\frac{m}{M}>0$，故

$$3>\sqrt{18-2k^{2/3}}$$

即

$$k>\left(\frac{9}{2}\right)^{3/2}=9.55 \tag{6}$$

又因 $r>R$，由(4)式，要求

$$\frac{9-k^{2/3}}{k^{2/3}}nR>R$$

即

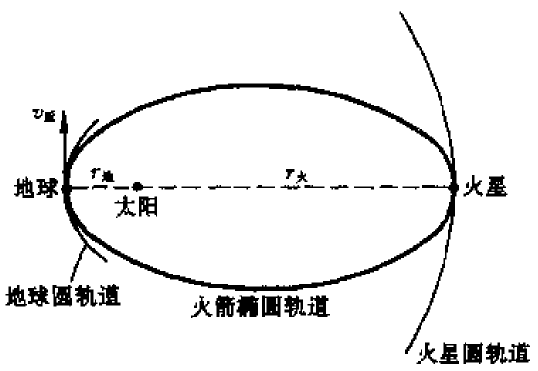
$$k<\left(\frac{9n}{n+1}\right)^{3/2}=11.18 \tag{7}$$

由(6)、(7)式，正整数 k 可能的取值为 10 和 11，由(5)式，

$$当\ k=10\ 时，\quad \frac{m}{M}=0.048$$

$$当\ k=11\ 时，\quad \frac{m}{M}=0.153$$

【题 10】 如图，从地球发射火箭到火星进行探测，发射后火箭绕太阳沿椭圆轨道运行．为了节省能量，火箭离开地球的速度方向与地球绕太阳公转的速度方向一致，并且选择适当的发射时机，使火箭椭圆轨道的远日点为火星，近日点为地球．假定地球和火星均绕太阳作圆周运动，圆轨道半径分别为 $r_{地}$ 和 $r_{火}$，忽略其他行星对火箭的引力作用．



力图 4－10－1

试问：1. 火箭应以多大的相对速度离开地球？2. 火箭到达火星要用多长时间？

【分析】 火箭绕太阳沿椭圆轨道运动，近日点为地球，远日点为火星，故近日点的距离就是地球绕太阳圆轨道的半径 $r_{地}$，远日点的距离就是火星绕太阳圆轨的半径 $r_{火}$．利用开普勒第二定律和机械能守恒定律，可解出火箭在近日点的速度 $v_{近}$，此即火箭离开地球时的绝对速度．地球绕太阳公转的速度可求，因而火箭相对地球的发射速度可得．

火箭从地球发射到达火星所需的时间，就是火箭绕太阳椭圆轨道运动的半周期，运用开普勒第三定律可建立火箭运行周期与地球公转周期(1 年)之间的关系，从而可解．

【解】 设太阳和火箭的质量分别为 M 和 m，设火箭在近日点和远日点的速度分别为 $v_{近}$ 和 $v_{远}$，根据分析，火箭的近日点和远日点的距离分别为 $r_{地}$ 和 $r_{火}$，因火箭运动遵从机械能守恒定律，故有

$$\frac{1}{2}mv_{近}^2-\frac{GMm}{r_{地}}=\frac{1}{2}mv_{远}^2-\frac{GMm}{r_{火}}$$

由开普勒第二定律，火箭绕太阳椭圆轨道运动的面积速度为常量，故有

$$r_{地}v_{近}=r_{火}v_{远}$$

由以上两式，得

$$v_{近}^2-\left(\frac{r_{地}}{r_{火}}\right)^2v_{近}^2=2GM\left(\frac{1}{r_{地}}-\frac{1}{r_{火}}\right)$$

或

$$v_{近}^2\left[1-\left(\frac{r_{地}}{r_{火}}\right)^2\right]=\frac{2GM(r_{火}-r_{地})}{r_{地}r_{火}}$$

故

$$v_{近}=\sqrt{\frac{2GMr_{火}}{(r_{火}+r_{地})r_{地}}}$$

上述 $v_{近}$ 是火箭在近日点即离开地球时的绝对速度．因地球绕太阳的公转速度为

$$v_{地}=\sqrt{\frac{GM}{r_{地}}}$$

式中 $r_{地}$ 是日地距离．故火箭离开地球的相对速度(即从地球上发射火箭的速度)v'应为

$$v'=v_{近}-v_{地}$$

$$=\sqrt{\frac{2GMr_{火}}{(r_{火}+r_{地})r_{地}}}-\sqrt{\frac{GM}{r_{地}}}=\sqrt{\frac{GM}{r_{地}}}\left(\sqrt{\frac{2r_{火}}{r_{火}+r_{地}}}-1\right)$$

设火箭绕太阳运行的周期为 T，已知地球绕太阳公转的周期为 $T_{地}=1\text{a}$. 如图，火箭椭圆轨道的长轴为$(r_{火}+r_{地})$，地球圆轨道的直径为 $2r_{地}$．由开普勒第三定律，得

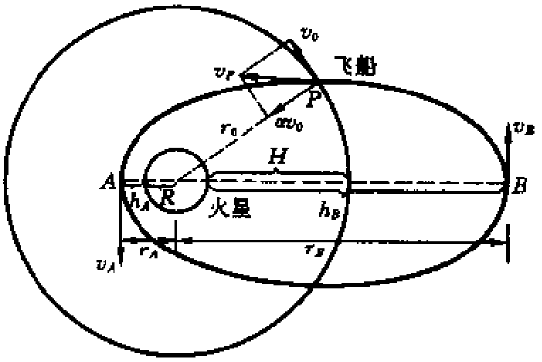
$$\frac{T}{T_{地}}=\left(\frac{r_{火}+r_{地}}{2r_{地}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

故火箭从地球发射到达火星所需时间为

$$t=\frac{T}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{r_{火}+r_{地}}{2r_{地}}\right)^{3/2}\text{a}$$

【题11】 如图，宇宙飞船绕火星沿圆轨道运行，运动速度为 v_0. 已知火星半径为 R，飞船圆轨道离火星表面的高度为 H. 今飞船在极短时间内，沿圆轨道径向向外侧点火喷气，使飞船获得指向火星的径向速度 αv_0，α 是远小于 1 的常数．因喷气量很小，喷气后飞船的质量可视为不变．喷气后，飞船绕火星沿新的椭圆轨道运行．

试求：1. 飞船椭圆轨道近火星点距火星表面的高度 h_A 以及远火星点距火星表面的高度 h_B.2. 飞船绕椭圆轨道的运行周期．



力图 4－11－1

【分析】 飞船绕火星作圆运动时，圆轨道半径为 $r_0=R+H$，面积速度为$\frac{1}{2}r_0v_0$. 飞船沿圆轨道径向向外侧喷气后，飞船将沿新的以火星为焦点的椭圆轨道运行，设近火星点为 A，远火星点为 B，A 和 B 与火星中心的距离分别为 r_A 和 r_B（$r_A=h_A+R$，$r_B=h_B+R$）. 飞船沿椭圆轨道运行时，面积速度恒定，机械能守恒 .

应特别注意，飞船沿圆轨道径向向外侧喷气后，使之获得指向火星的径向速度 αv_0，因喷气方向与飞船原先绕火星作圆轨道运动的速度 $\boldsymbol{v}_0$ 垂直，故喷气并不改变 $\boldsymbol{v}_0$ 的大小和方向，喷气后飞船的速度 $\boldsymbol{v}_p$ 是 $\boldsymbol{v}_0$ 与 $\alpha\boldsymbol{v}_0$（其方向与 $\boldsymbol{v}_0$ 垂直）的矢量和 . 换言之，$v_0=v_p\sin\theta$，故短时间喷气后，飞船绕椭圆轨道的面积速度为$\frac{1}{2}r_0v_p\sin\theta=\frac{1}{2}r_0v_0$，就等于飞船喷气前绕圆轨道运行的面积速度，亦即喷气前后飞船的轨道虽然改变了，但面积速度不变 . 由飞船沿椭圆轨道运行时，面积速度恒定及机械能守恒两条规律可以解出 r_A 和 r_B，再由开普勒第三定律可求出飞船绕椭圆轨道的运行周期 .

【解】 设火星和飞船的质量分别为 M 和 m，飞船沿椭圆轨道运行时，飞船与火星中心的距离统一用 r 表示，飞船的速度统一用 v 表示，再加下标注明飞船所在位置 .

根据分析，飞船喷气前绕圆轨道运行的面积速度$\frac{1}{2}r_0v_0$ 等于喷气后飞船绕椭圆轨道运行在 P 点的面积速度$\frac{1}{2}r_0v_p\sin\theta$（$P$ 点是圆和椭圆的交点）. 由开普勒第二定律，后者又应等于飞船在近火星点 A 和远火星点 B 的面积速度$\frac{1}{2}r_Av_A$ 和$\frac{1}{2}r_Bv_B$. 故有

$$\frac{1}{2}r_0v_0=\frac{1}{2}r_0v_p\sin\theta=\frac{1}{2}r_Av_A=\frac{1}{2}r_Bv_B$$

即

$$r_0v_0=r_Av_A=r_Bv_B \tag{1}$$

由机械能守恒定律，有

$$\frac{1}{2}mv_p^2-\frac{GMm}{r_p}=\frac{1}{2}mv_A^2-\frac{GMm}{r_A}=\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{GMm}{r_B}$$

因

$$v_p^2=v_0^2+(\alpha v_0)^2,\ \ r_p=r_0$$

由以上三式，有

$$\frac{1}{2}m[v_0^2+(\alpha v_0)^2]-\frac{GMm}{r_0}=\frac{1}{2}mv_A^2-\frac{GMm}{r_A}=\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{GMm}{r_B} \tag{2}$$

飞船沿原圆轨道运行时，有

$$\frac{GMm}{r_0^2}=\frac{mv_0^2}{r_0}$$

即

$$GM = r_0 v_0^2 \tag{3}$$

联立(1)、(2)、(3)式，可得出关于 r(指 r_A 或 r_B)的二次方程式为

$$(1-\alpha^2)r^2 - 2r_0 r + r_0^2 = 0$$

上式有两个解，大者就是 r_B，小者就是 r_A，为

$$\begin{cases} r_A = \dfrac{r_0}{1+\alpha} = \dfrac{R+H}{1+\alpha} \\ r_B = \dfrac{r_0}{1-\alpha} = \dfrac{R+H}{1-\alpha} \end{cases}$$

r_A 和 r_B 分别是飞船近火星点和远火星点与火星中心的距离．故近火星点和远火星点距火星表面的高度分别为

$$\begin{cases} h_A = r_A - R = \dfrac{H-\alpha R}{1+\alpha} \\ h_B = r_B - R = \dfrac{H+\alpha R}{1-\alpha} \end{cases}$$

设飞船椭圆轨道的半长轴为 a，则

$$r_A + r_B = 2a$$

即

$$a = \frac{1}{2}(r_A + r_B) = \frac{r_0}{1-\alpha}$$

飞船喷气前绕圆轨道运行的周期为

$$T_0 = \frac{2\pi r_0}{v_0}$$

设飞船喷气后绕椭圆轨道运行的周期为 T，由开普勒第三定律，有

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{a}{r_0}\right)^{3/2}$$

故

$$T = T_0\left(\frac{a}{r_0}\right)^{3/2} = \frac{2\pi r_0}{v_0}\left(\frac{1}{1-\alpha^2}\right)^{3/2}$$

【题 12】 将宇宙飞船从地面发射到太阳系外，有两个方案．方案一：以足够大的速度(大于太阳系逃逸速度)直接发射．方案二：使宇宙飞船接近太阳系的一个外层行星(例如火星)，在它的作用下，改变运动方向，然后逃离太阳系．

试求：1. 按方案一，确定从地面发射飞船所必需的相对地球的最小速度 v_a 及发射方向．2. 按本题第 1 问的方向相对地球以 v_b 从地面发射飞船，求飞船穿过火星轨道的速度，即求飞船速度在火星轨道的切线分量和垂直分量．设飞船穿过火星轨道时，火星离飞船很远．3. 使飞船进入火星引力场，但仍可飞出太阳系，求从地面发射的速度．设飞船相对地球的发射方向与本题第一问相同，设飞船沿火星轨道的切线方向脱离火星引力场．4. 估计方案二比方案一节省能量的最大百分比．

设所有行星在同一平面内以同一方向绕太阳在圆轨道上运行．设空气阻力及地球自转的影响均可忽略．

数据：地球绕太阳公转的速度为 30 km/s，地球到太阳的距离与火星到太阳的距离之比为 2∶3，地球半径 $R_E=6400$ km，地球表面的重力加速度 $g=9.80\ \mathrm{m/s^2}$．

【分析 1】 按方案一，飞船的运动不受其他行星影响，从地面发射的飞船要逃离太阳，需先后脱离地球和太阳的引力场．

第一阶段，脱离地球引力场．取地球参考系，飞船在地面发射，相对地球的速度为 v_a，飞船的能量包括动能$\frac{1}{2}mv_a^2$（m 为飞船质量）和它在地面的重力势能$-G\frac{M_E m}{R_E}$（M_E 和 R_E 为地球的质量和半径）．飞船升空后，动能减少，重力势能增大，机械能守恒．当飞船与地球的距离远大于 R_E，其重力势能增大为零（与$-G\frac{M_E m}{R_E}$相比），其动能减少到$\frac{1}{2}mv_{a1}^2$时，可以认为飞船已经脱离了地球引力场．此时，飞船虽已离地球足够远，但它与太阳的距离仍大致为日地距离 R_S．应该指出，在这个阶段，飞船也受太阳引力作用，但由于飞船与太阳的距离基本上不变，故相应的太阳引力势能亦不变．

第二阶段，飞船脱离地球引力后，相对地球的速度为 $\boldsymbol{v}_{a1}$，然后，在太阳引力的作用下，从日地距离 R_S 处逐渐飞离太阳．取太阳参考系，飞船在日地距离 R_S 处相对太阳的速度 $\boldsymbol{v}_{a2}$应为 $\boldsymbol{v}_{a1}$与地球相对太阳的速度即公转速度 $\boldsymbol{v}_E$ 的矢量和．因而，$\boldsymbol{v}_{a2}$的大小不仅与 v_{a1}和 $\boldsymbol{v}_E$ 的大小有关，还与它们的方向即其间的夹角 θ 有关．显然，当 $\theta=0$，即当 $\boldsymbol{v}_{a1}$与 $\boldsymbol{v}_E$ 同方向时，$\boldsymbol{v}_{a2}$的值最大，最有利于飞船逃离太阳，这就是对飞船发射方向的要求．

在太阳引力场中，取太阳参考系，飞船在日地距离 R_S 处的引力势能为$-G\frac{M_S m}{R_S}$（M_S 为太阳质量），动能为$\frac{1}{2}mv_{a2}^2$．随着飞船远离太阳而去，引力势能增大，动能减小，而机械能守恒．若飞船的引力势能可增大为零（此时飞船与太阳的距离已远大于 R_S），且还稍有动能，就表明飞船足以逃离太阳．所以，飞船能逃离太阳的条件是$\left(\frac{1}{2}mv_{a2}^2-G\frac{M_S m}{R_S}\right)\geqslant 0$．综合以上两个阶段的讨论，即可得出在地面发射飞船使之能逃离太阳所需的最小的相对地球的速度 v_a．

【解 1】 按方案一．

取地球参考系．考虑飞船从地面发射到脱离地球引力的过程，在此过程中机械能守恒，（因在此过程中，飞船与太阳的距离始终大致为日地距离 R_S，故因太阳引力而具有的势能大致保持不变，可不计入）有

$$\frac{1}{2}mv_a^2-G\frac{M_E m}{R_E}=\frac{1}{2}mv_{a1}^2 \tag{1}$$

式中 v_a 是从地面发射的飞船相对地球的速度，v_{a1}是飞船脱离地球引力后在日地距离 R_S 处相对地球的速度，M_E 和 R_E 是地球的质量和半径．

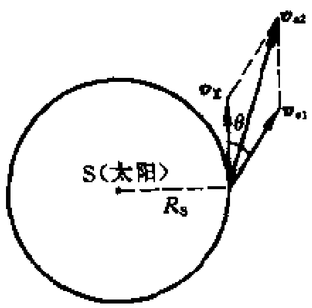
如力图 4－12－1，取太阳参考系．飞船在日地距离 R_S 处相对太阳的速度 $\boldsymbol{v}_{a2}$等于 $\boldsymbol{v}_{a1}$与地球绕太阳的公转速度 $\boldsymbol{v}_E$ 的矢量和，即

$$\boldsymbol{v}_{a2}=\boldsymbol{v}_{a1}+\boldsymbol{v}_E$$

或

$$v_{a2}^2 = v_{a1}^2 + v_E^2 + 2v_{a1}v_E\cos\theta \qquad (2)$$

式中 θ 是 v_{a1} 与 v_E 的夹角．



力图 4－12－1

取太阳参考系．在 R_S 处具有 $\frac{1}{2}mv_{a2}^2$ 动能的飞船能逃离太阳的条件是

$$\frac{1}{2}mv_{a2}^2 - G\frac{M_S m}{R_S} \geqslant 0 \qquad (3)$$

式中 M_S 是太阳质量．由题设，地球绕太阳作圆轨道运动，故

$$G\frac{M_E M_S}{R_S^2} = \frac{M_E v_E^2}{R_S}$$

即

$$v_E^2 = G\frac{M_S}{R_S}$$

代入(3)式，得

$$v_{a2} \geqslant \sqrt{\frac{2GM_S}{R_S}} = \sqrt{2}v_E$$

即

$$v_{a2} \geqslant 42 \text{ km/s}$$

由(2)式，当 $\theta = 0$ 时，能满足 $v_{a2} \geqslant 42$ km/s 所需的 v_{a1} 为最小．当 $\theta = 0$ 时，有

$$v_{a2} = v_{a1} + v_E$$

即

$$v_{a1} = v_{a2} - v_E = (\sqrt{2} - 1)v_E = 12.3 \text{ km/s}$$

代入(1)式，得

$$v_a = \sqrt{v_{a1}^2 + 2G\frac{M_E}{R_E}} = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2 v_E^2 + 2R_E g} = 16.4 \text{ km/s}$$

式中用到地球表面的重力加速度 g 为

$$g = \frac{GM_E}{R_E^2}$$

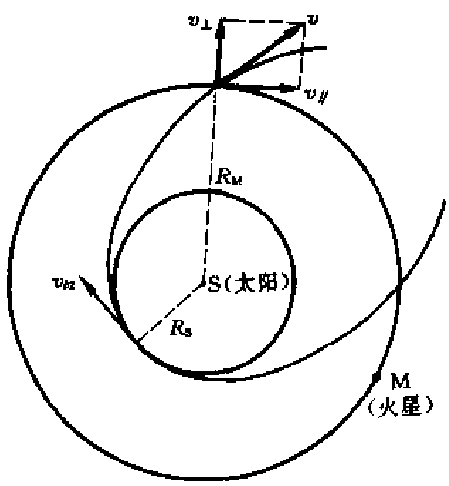
因此，为了使得从地面发射的飞船能逃离太阳系，所需的相对地球的最小速度为 $v_a = 16.4$ km/s.发射的方向应使飞船脱离地球引力后，在日地距离 R_S 处相对地球的速度方向与地球绕太阳公转的方向一致(即 v_{a1} 与 v_E 同方向)．

【分析 2】 第 2 问讨论飞船经过火星(绕太阳运动的)轨道的速度，为第 3 问作准备．

根据题意，可将飞船的运动分成几个阶段：

第一阶段，从地面发射飞船到脱离地球引力．取地球为参考系，从地面相对地球以 v_b 发射飞船(v_b 相当于第 1 问中的 v_a)，脱离地球引力后在日地距离 R_S 处相对地球的速度为 v_{b1}．取太阳为参考系，飞船在 R_S 处相对太阳的速度为 $v_{b2} = v_{b1} + v_E$，为了进一步逃离太阳，最有利的条件是 v_{b1} 和 v_E 的夹角 $\theta = 0$，即有 $v_{b2} = v_{b1} + v_E$．以上各量的关系已在第 1 问中求出．

第二阶段，如力图 4－12－2，在太阳引力的作用下，飞船从与太阳距离为 R_S 的地球轨道的某处以 v_{b2} 的（相对太阳的）速度运动到与太阳距离为 $R_M(R_M>R_S)$ 的火星轨道的某处并具有速度 v. 取太阳为参考系．由于太阳引力为有心力，在飞船运动过程中，角动量守恒．由于太阳引力为保守力，在飞船运动过程中，机械能守恒．又由题设，地球、火星、飞船三者的运动均应在同一平面内．由此即可求出飞船从 R_S 处到达 R_M 处，即飞经火星轨道的速度 $\boldsymbol{v}$（如力图 4－12－2，$\boldsymbol{v}$ 的平行分量为 $v_{/\!/}$，垂直分量为 $v_{\perp}$）．



力图 4－12－2

第三阶段，飞船从火星轨道 R_M 处继续向外飞，直至脱离太阳引力，在此过程仍只受太阳引力．

【解 2】 与第 1 问中的(1)、(2)式类似，有

$$\frac{1}{2}mv_b^2-G\frac{M_Em}{R_E}=\frac{1}{2}mv_{b1}^2 \tag{4}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{v}_{b2}=\boldsymbol{v}_{b1}+\boldsymbol{v}_E\\ \text{当 }\theta=0\text{ 时},v_{b2}=v_{b1}+v_E\end{cases} \tag{5}$$

式中 v_b 是飞船从地球上相对地面发射的速度，v_{b1} 是飞船脱离地球引力后在日地距离 R_S 处相对地球的速度，v_E 是地球绕太阳公转的速度，v_{b2} 是飞船在 R_S 处相对太阳的速度．

如力图 4－12－2，在太阳引力的作用下，飞船从地球轨道某处（与太阳的距离为日地距离 R_S）运动到火星轨道某处（与太阳的距离为 R_M）．由角动量守恒，得

$$m\boldsymbol{R}_S\times\boldsymbol{v}_{b2}=m\boldsymbol{R}_M\times\boldsymbol{v}$$

即

$$mR_Sv_{b2}=mR_Mv_{/\!/} \tag{6}$$

式中 $\boldsymbol{v}$ 是飞船在火星轨道某处的速度（相对太阳），$v_{/\!/}$ 是 $\boldsymbol{v}$ 的平行分量与火星轨道相切的方向．

由能量守恒，得

$$\frac{1}{2}mv_{b2}^2-G\frac{mM_S}{R_S}=\frac{1}{2}mv^2-G\frac{mM_S}{R_M}=\frac{1}{2}m(v_{\perp}^2+v_{/\!/}^2)-G\frac{mM_S}{R_M} \tag{7}$$

式中 $v_{/\!/}$ 和 $v_{\perp}$ 是 $\boldsymbol{v}$ 在火星轨道切向和法向的分量．

把(4)、(5)、(6)式代入(7)式，并利用

$$v_E^2=\frac{GM_S}{R_S}\ ,\ g=\frac{GM_E}{R_E^2}$$

得

$$\begin{aligned}v_{\perp}^2&=v_{b2}^2-v_{/\!/}^2-\frac{2GM_S}{R_S}+\frac{2GM_S}{R_M}\\&=(v_{b1}+v_E)^2-\frac{R_S^2}{R_M^2}(v_{b1}+v_E)^2-2v_E^2+\frac{2R_S}{R_M}v_E^2\\&=(v_{b1}+v_E)^2\left(1-\frac{R_S^2}{R_M^2}\right)-2v_E^2\left(1-\frac{R_S}{R_M}\right)\end{aligned}$$

$$=(\sqrt{v_b^2-2R_E g}+v_E)^2\left(1-\frac{R_S^2}{R_M^2}\right)-2v_E^2\left(1-\frac{R_S}{R_M}\right)$$

故

$$\begin{cases} v_\perp=\left[(\sqrt{v_b^2-2R_E g}+v_E)^2\left(1-\dfrac{R_S^2}{R_M^2}\right)-2v_E^2\left(1-\dfrac{R_S}{R_M}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\ v_{/\!/}=\dfrac{R_S}{R_M}(\sqrt{v_b^2-2R_E g}+v_E) \end{cases}$$

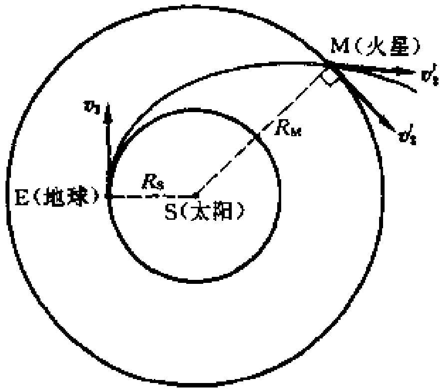
【分析 3】 按方案二，过程比较复杂，应分阶段讨论，要特别注意参考系的选择、各符号的含义及题目给定的条件．

第一阶段，从地面发射飞船到脱离地球引力．取地球为参考系，从地面相对地球以速度 $\boldsymbol{v}$（$\boldsymbol{v}$ 相当于第 1 问中的 $\boldsymbol{v}_a$ 和第 2 问中的 $\boldsymbol{v}_b$）发射飞船，脱离地球引力后在日地距离 R_S 处相对地球的速度为 $\boldsymbol{v}_1$，此过程能量守恒．取太阳参考系，飞船在 R_S 处相对太阳的速度为 $\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_E$（$\boldsymbol{v}_E$ 为地球公转速度）．题设飞船发射方向与第 1 问相同，即在 R_S 处的 $\boldsymbol{v}_1$ 沿 $\boldsymbol{v}_E$ 方向，故有 $v_2=v_1+v_E$.

第二阶段，飞船从地球轨道某处运动到火星轨道某处，即与太阳的距离由 R_S 变为 R_M，在此过程中只受太阳引力，取太阳为参考系，角动量守恒，能量守恒．设飞船在 R_M 处相对太阳的速度表为 $\boldsymbol{v}_2'=\boldsymbol{v}_{/\!/}+\boldsymbol{v}_\perp$（平行和垂直均对火星轨道而言）．

以上两阶段与第 2 问完全相同．

第三阶段，如力图 4－12－3，飞船在 R_M 某处进入火星引力场，在火星引力的作用下改变运动方向，从 R_M 的另一处脱离火星引力场．由题设，飞船在地面的发射方向使之在 R_S 处沿地球公转轨道的切向运动，这将有利于它脱离太阳引力．由此，当飞船到达 R_M 某处时，它的运动方向将不沿火星轨道的切向．为了更有利于飞船脱离太阳引力，使之进入火星引力场，在火星引力的作用下，改变运动方向，脱离火星引力后从 R_M 另一处沿火星轨道切向运动，然后再脱离太阳，这样便可以进一步节约能量，这是本问的关键．



力图 4－12－3

取火星参考系．设飞船在 R_M 某处进入火星引力场时相对火星的速度为 $\boldsymbol{v}_1'$，则 $\boldsymbol{v}_1'+\boldsymbol{v}_M=\boldsymbol{v}_2'$（$\boldsymbol{v}_2'$ 是飞船在该处相对太阳的速度，$\boldsymbol{v}_M$ 是火星公转速度），或 $\boldsymbol{v}_1'=\boldsymbol{v}_2'-\boldsymbol{v}_M$．因 $\boldsymbol{v}_2'=\boldsymbol{v}_{/\!/}+\boldsymbol{v}_\perp$，而 $\boldsymbol{v}_M=\boldsymbol{v}_{M/\!/}$（平行和垂直均对火星轨道而言），故 $v_1'^2=(v_{/\!/}-v_M)^2+v_\perp^2$．设飞船在 R_M 另一处脱离火星引力场时，相对火星的速度为 $\boldsymbol{v}_S$，在此过程中，能量守恒，$\frac{1}{2}mv_S^2=\frac{1}{2}mv_1'^2$，即 $v_S=v_1'$．脱离火星引力场后，即在 R_M 另一处，设飞船相对太阳的速度为 $\boldsymbol{v}_3'$，则 $\boldsymbol{v}_3'=\boldsymbol{v}_S+\boldsymbol{v}_M$，由题设 $\boldsymbol{v}_S$ 沿火星轨道切向，即与 $\boldsymbol{v}_M$ 同方向，故有 $v_3'=v_S+v_M$.

第四阶段，飞船脱离火星引力场后，在 R_M 某处沿火星轨道切向以 $\boldsymbol{v}_3'$ 相对太阳运动，直至脱离太阳引力．取太阳参考系，在此过程中能量守恒．

【解 3】 第一阶段，取地球为参考系，由能量守恒，得

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_E m}{R_E} = \frac{1}{2}mv_1^2$$

在 R_S 处，飞船相对太阳的速度 $\boldsymbol{v}_2$ 为

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_E$$

由题设，发射方向应使 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_E$ 同方向，故

$$v_2 = v_1 + v_E$$

、　第二阶段，取太阳为参考系，由角动量守恒，得

$$m\boldsymbol{R}_S \times \boldsymbol{v}_2 = m\boldsymbol{R}_M \times \boldsymbol{v}_2'$$

即

$$mR_S v_2 = mR_M v_{/\!/}$$

或

$$v_{/\!/} = \frac{R_S}{R_M}v_2$$

由能量守恒，得

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{mM_S}{R_S} = \frac{1}{2}mv_2'^2 - G\frac{mM_S}{R_M}$$

式中

$$\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_{/\!/} + \boldsymbol{v}_\perp$$

$$v_2'^2 = v_{/\!/}^2 + v_\perp^2$$

第三阶段，取火星为参考系，飞船相对火星以 $\boldsymbol{v}_1'$ 进入火星引力场，又以 $\boldsymbol{v}_S$ 沿火星轨道切向离开火星引力场．有

$$\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_1' + \boldsymbol{v}_M$$

即

$$\boldsymbol{v}_1' = \boldsymbol{v}_2' + \boldsymbol{v}_M$$

因

$$\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{v}_{M/\!/}$$

故

$$v_1'^2 = (v_{/\!/} - v_M)^2 + v_\perp^2$$

由能量守恒，得

$$\frac{1}{2}mv_S^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2$$

即

$$v_S = v_1'$$

脱离火星引力场后，设飞船相对太阳的速度为 $\boldsymbol{v}_3'$，则

$$\boldsymbol{v}_3' = \boldsymbol{v}_S + \boldsymbol{v}_{M'}$$

由题设，

$$\boldsymbol{v}_S \parallel \boldsymbol{v}_M$$

故

$$v_3{}' = v_S + v_M$$

第四阶段，取太阳为参考系，由能量守恒，得

$$\frac{1}{2}mv_3{}'^2 - G\frac{M_S m}{R_M} \geqslant 0$$

利用

$$v_E^2 = \frac{GM_S}{R_S},\quad v_M^2 = \frac{GM_S}{R_M},\quad g = \frac{GM_E}{R_E^2}$$

解出

$$v_2 = v_E\left[\left(\frac{R_S}{R_M}\right)^{3/2} + \sqrt{\left(\frac{R_S}{R_M}\right)^3 - \left(2\sqrt{2}\frac{R_S}{R_M} - 2\right)}\right]$$

$$\begin{aligned} v_1 &= v_2 - v_E \\ &= v_E\left[\left(\frac{R_S}{R_M}\right)^{3/2} - 1 + \sqrt{\left(\frac{R_S}{R_M}\right)^3 - \left(2\sqrt{2}\frac{R_S}{R_M} - 2\right)}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_1^2 + \frac{2GM_E}{R_E}} \\ &= \left\{v_E^2\left[\left(\frac{R_S}{R_M}\right)^{3/2} - 1 + \sqrt{\left(\frac{R_S}{R_M}\right)^3 - \left(2\sqrt{2}\frac{R_S}{R_M} - 2\right)}\right]^2 + 2gR_E\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= 12.5\ \text{km/s} \end{aligned}$$

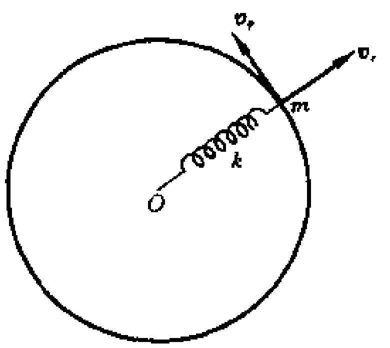
【解 4】 节约能量的百分比为

$$\eta = \frac{E_{\text{I}} - E_{\text{II}}}{E_{\text{I}}} = \frac{v_a^2 - v^2}{v_a^2} = \frac{(16.4)^2 - (12.5)^2}{(16.4)^2} = 0.41 = 41\%$$

式中 E_{I} 和 E_{II} 分别是按方案一和方案二发射飞船所需的能量．

【本题是 1985 年第 16 届 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)试题．】

【题 13】 如力图 4－13－1，劲度系数 $k=3$ 的弹簧一端 O 固定，另一端有质量 $m=20$ km 的质点．质点绕 O 点在光滑水平面内作匀速圆周运动，总机械能为 $E_0=12$ J．突然沿径向给质点一击，使之获得沿径向向外的速度 $v_{r0}=1.0$ m/s．设弹簧的原长很小，可忽略不计．1．试用能量曲线($E\sim r$)描述质点受打击前、后的运动状态．2．试求质点运动的半径范围．



力图 4－13－1

【分析】 打击前，质点圆周运动所需之向心力来自弹簧的弹性，其半径、速度、机械能、角动量均恒定，容易求出．

打击过程中质点获得的动能加上打击前的机械能等于打击后质点的机械能 E，并保持不变，故 $E(r)$ 是一条与 r 轴平行的直线．又，因打击沿径向，外力矩为零，故打击前、后角动量守恒．

打击后，如力图 4－13－2，除了横向速度 v_φ 外，还有径向速度 v_r，总机械能 E 包括与 v_φ 和

v_r 有关的两动能项以及弹性势能 E_p，它们是相关的．大致说来，质点既作圆周运动，又沿径向振动．为了定量地了解质点的运动特征及半径 r 的范围，需要逐项分析能量表达式中各项随 r 的变化．



力图 4－13－2

【解】 设打击前质点圆周运动的半径为 r_0，速度为 v_0，由牛顿第二定律

$$kr_0=\frac{mv_0^2}{r_0}$$

打击前，质点与弹簧系统的机械能为

$$E_0 = E_{k0} + E_{p0} = \frac{1}{2}mv_0^2 + \int_0^{r_0} kr\mathrm{d}r$$

$$= \frac{3}{2}r_0^2 + \frac{3}{2}r_0^2 = 3r_0^2 = 12\ \mathrm{J}$$

故打击前质点的半径 r_0、速度 v_0、角动量 L_0 分别为

$$r_0=2\mathrm{m}$$

$$v_0=\sqrt{\frac{3r_0^2}{m}}=\sqrt{6}=2.45\ \mathrm{m/s}$$

$$L_0=mr_0v_0=9.8\ \mathrm{kg\cdot m^2/s}$$

打击后，质点获得动能 $\frac{1}{2}mv_{r0}^2=1.0\ \mathrm{J}$，总机械能为

$$E=E_0+\frac{1}{2}mv_{r0}^2=13\ \mathrm{J}$$

因打击沿径向，打击前、后质点的角动量守恒，故

$$L=L_0=9.8\ \mathrm{kg\cdot m^2/s}$$

打击后，既有横向速度 $\boldsymbol{v}_\varphi$，又有径向速度 $\boldsymbol{v}_r$．于是质点的速度 $\boldsymbol{v}$，机械能 E，和角动量 L 可表为，

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_r+\boldsymbol{v}_\varphi,\quad v^2=\dot{r}^2+(r\dot{\varphi})^2$$

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \int_0^r kr\mathrm{d}r = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(r\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}kr^2$$

$$L=mr^2\dot{\varphi}$$

式中 (r,φ) 是质点的极坐标，如力图 4－13－2 所示．利用 L 可把 E 改写为

$$E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{L^2}{2mr^2}+\frac{1}{2}kr^2$$

令

$$E_{\mathrm{eff}}=\frac{L^2}{2mr^2}+\frac{1}{2}kr^2$$

$$=\frac{9.8^2}{2\times2r^2}+\frac{3}{2}r^2=\frac{24}{r^2}+\frac{3}{2}r^2$$

则

$$E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+E_{\mathrm{eff}}$$

E_{eff}称为有效势能，它包括弹性势能$\frac{1}{2}kr^2$以及$\frac{L^2}{2mr^2}$两项，即包括了机械能E中与r有关的两项．

现在讨论$\frac{L^2}{2mr^2}$项的物理意义．取随质点旋转的转动参考系，质点在该参考系中受惯性离心力的作用．当质点沿径向从r_1移向r_2时，惯性离心力作功为

$$\int_{r_1}^{r_2} mr\dot{\varphi}\mathrm{d}r = \int_{r_1}^{r_2}\frac{(mr^2\dot{\varphi})^2}{mr^3}\mathrm{d}r = \frac{L^2}{m}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r^3} = \frac{L^2}{2mr_1^2} - \frac{L^2}{2mr_2^2}$$

所以$\frac{L^2}{2mr^2}$项称为离心势能．

作$E_{eff}(r)$曲线如力图4－13－3所示，它包括$\frac{24}{r^2}$和$\frac{3}{2}r^2$两部分（图中用虚线表示）．$E_{eff}(r)$曲线有一极小值，满足

$$\frac{\mathrm{d}E_{eff}}{\mathrm{d}r} = -\frac{48}{r^3} + 3r = 0$$

故$E_{eff,min}$的位置为

$$r = 2\mathrm{m} = r_0$$

即极小值$E_{eff,min}$正好位于打击前质点的位置．

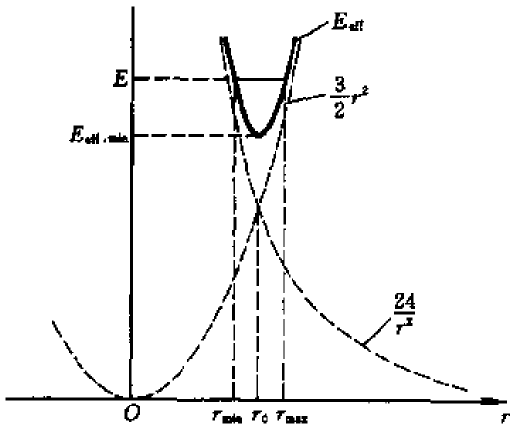
又当$r = r_{min}$或r_{max}时，$\dot{r} = 0$，$E = E_{eff} = 13\ \mathrm{J}$，即

$$\frac{24}{r^2} + \frac{3}{2}r^2 = 13$$

解出

$$r_{min} = 1.63\ \mathrm{m},\quad r_{max} = 2.45\ \mathrm{m}$$

总之，打击后，质点一方面作圆周运动，同时又沿径向在r_{min}与r_{max}之间来回振动．



力图 4－13－3

【题14】 一质量为m的行星绕质量为M的恒星运动．设在行星与恒星之间的整个空间内均匀分布着稀薄的宇宙尘埃，已知尘埃的密度为ρ且很小，可以忽略行星与尘埃之间的直接碰撞作用．

1. 试问，对于角动量为L的圆形行星轨道，其半径r_0应满足什么方程（列出方程即可，不必求解）？

2. 考虑相对上述圆轨道稍有偏离的另一轨道，试解释它是一条作进动的椭圆轨道，进动方向与行星运行方向相反，并求出进动的角速度．

【分析】 题设行星与尘埃间的碰撞作用可略，意即不考虑行星所受的阻力，尘埃对行星的作用仅是增加一个附加的向心力，其大小由行星轨道内的尘埃质量决定（行星轨道外的尘埃对行星的作用可不计，参看力学第三章题11）．根据牛顿第二定律列出径向的动力方程，对圆轨道，半径r不变，由此条件可直接得出圆轨道半径r_0满足的方程．

若行星轨道稍微偏离圆轨道，可列出半径r相对圆轨道半径r_0的偏离量δ遵守的微分方程．这是一个简谐振动的动力方程，偏离量δ随时间作简谐振动，振动频率略大于圆运动的角频

率，故行星轨道大致是一个椭圆，但椭圆将以较慢的角速度作进动，进动频率易求．

【解】 1．行星除受恒星的万有引力作用外，还将受尘埃的引力作用．尘埃的引力由行星轨道半径范围内的尘埃质量 M' 决定(参看力学第三章题 11)，M' 为

$$M'=\frac{4}{3}\pi r^2\rho$$

式中 r 为行星轨道半径．故行星所受尘埃的附加引力为

$$F'=-G\frac{mM'}{r^2}=-\frac{4}{3}\pi G\rho mr=-mkr$$

式中 G 为引力常数，$k=\frac{4}{3}\pi G\rho$ 为另一常量．上式表明，附加引力 F' 与行星的位置半径 r 成正比．在极坐标系中，径向加速度 a_r 为

$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2$$

由牛顿第二定律，行星在径向的动力方程为

$$-G\frac{mM}{r^2}-mkr=ma_r=m(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)$$

即

$$m\ddot{r}=-G\frac{mM}{r^2}-mkr+mr\dot{\varphi}^2$$

行星的角动量为

$$L=mr^2\dot{\varphi}$$

因作用力沿径向，故角动量守恒，L 为恒量．可将行星在径向的动力方程写成

$$\ddot{r}=-\frac{GM}{r^2}-kr+\frac{L^2}{m^2r^3} \tag{1}$$

对于圆轨道，r 不变，设为 r_0，则 $\ddot{r}=0$，由(1)式得出圆轨道半径 r_0 所遵从的方程为，

$$\frac{L^2}{m^2r_0^3}-\frac{GM}{r_0^2}-kr_0=0 \tag{2}$$

这就是所求方程，其中常量 k 为

$$k=\frac{4}{3}\pi G\rho$$

2．若行星轨道稍微偏离圆轨道，则 r 可写成，

$$r(t)=r_0+\delta(t)$$

式中 δ 是轨道半径的偏离量，它将随时间 t 变化．将上式代入方程(1)，得出 $\delta(t)$ 所遵从的微分方程为，

$$\ddot{\delta}=-\frac{GM}{r_0^2}\left(1+\frac{\delta}{r_0}\right)^{-2}-k(r_0+\delta)+\frac{L^2}{m^2r_0^3}\left(1+\frac{\delta}{r_0}\right)^{-3}$$

由 $\delta\ll r_0$，上式中 $\frac{\delta}{r_0}$ 的高次项可以忽略，得

$$\ddot{\delta}=-\frac{GM}{r_0^2}\left(1-\frac{2\delta}{r_0}\right)-k(r_0+\delta)+\frac{L^2}{m^2r_0^3}\left(1-\frac{3\delta}{r_0}\right)$$

$$=\left(-\frac{GM}{r_0}-kr_0+\frac{L^2}{m^2r_0^3}\right)-\delta\left[\frac{1}{r_0}\left(\frac{2L^2}{m^2r_0^3}-\frac{2GM}{r_0^2}+\frac{L^2}{m^2r_0^3}\right)+k\right]$$

利用(2)式,得

$$\ddot{\delta}=-\left(\frac{L^2}{m^2r_0^4}+3k\right)\delta$$

即

$$\ddot{\delta}+\left(\frac{L^2}{m^2r_0^4}+3k\right)\delta=0$$

这是简谐振动的微分方程,δ 随时间 t 作简谐振动,圆频率为

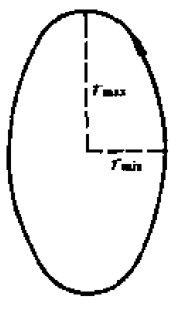
$$\omega_r=\sqrt{\frac{L^2}{m^2r_0^4}+3k}$$

注意到行星绕恒星作半径为 r_0 的圆周运动的角速度为

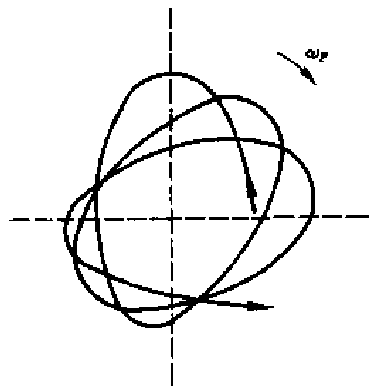
$$\omega_0=\dot{\varphi}=\frac{L}{mr_0^2}$$

可见,当无宇宙尘埃,即当 $\rho=0$,从而 $k=0$ 时,$\omega_r=\omega_0$,这表明,行星绕恒星运行一周,r 的振动也恰好经历一个周期,r 值取两次极大和两次极小,因此行星的轨道是稳定的椭圆轨道,如力图4-14-1所示．当存在宇宙尘埃,即当 $\rho\neq0$,从而 $k\neq0$ 时,$\omega_r>\omega_0$,这表明行星轨道不是一个严格的椭圆．因 k 很小,ω_r 只比 ω_0 稍大,故大致仍是一椭圆,只是不再稳定．因振动比圆运动超前一个相位,椭圆将作进动,如力图4-14-2所示．若行星逆时针运行,则椭圆进动方向为顺时针．设进动角速度为 ω_p,则椭圆的轴转一周所需时间(即进动周期)为

$$T_p=\frac{2\pi}{\omega_p}$$



力图4-14-1



力图4-14-2

进动一周时,圆运动与振动之间的相位差为 2π,即

$$(\omega_r-\omega_0)T_p=2\pi$$

故进动角速度 ω_p 为

$$\omega_p=\frac{2\pi}{T_p}=\omega_r-\omega_0=\sqrt{\frac{L^2}{m^2r_0^4}+3k}-\frac{L}{mr_0^2}$$

$$=\frac{L}{mr_0^2}\left(\sqrt{1+\frac{3km^2r_0^4}{L^2}}-1\right)\approx\frac{L}{mr_0^2}\cdot\frac{3}{2}\frac{km^2r_0^4}{L^2}=\frac{3mkr_0^2}{2L}$$

式中 k 和 L 为

$$k=\frac{4}{3}\pi\rho G$$

$$L=mr_0^2\omega_0=mr_0^2\sqrt{\frac{GM}{r_0^3}}=m\sqrt{GMr_0}$$

代入,得

$$\omega_p=2\pi\rho G\frac{mr_0^2}{L}=\frac{2\pi\rho Gr_0^2}{\sqrt{GMr_0}}=2\pi\rho\sqrt{\frac{r_0^3G}{M}}$$

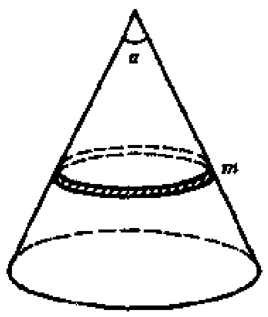
第五章 静力平衡

【题1】 如力图 5－1－1,静止的圆锥体竖直放置,顶角为 α. 质量为 m 且分布均匀的链条环水平地套在圆锥体上,忽略链条与圆锥体之间的摩擦力．试求链条中的张力．

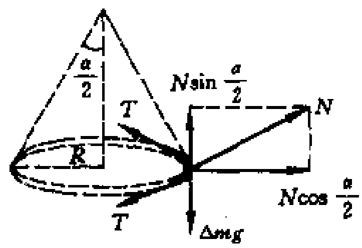
【分析】 如力图 5－1－2,设链条环半径为 R,在链条环中任取一小段 Δl,其质量为 Δm.Δm 受力为:圆锥体的支持力 N,其方向垂直于圆锥面;重力 Δmg,竖直向下;Δl 两端的张力 T,其方向与链条环相切．平衡时合力为零,即合力的水平分量及铅垂分量分别为零,据此,列出两个方程,即可求解．

【解】 如力图 5－1－2,Δl 在铅垂方向受重力 Δmg 及支持力的铅垂分量 $N\sin\frac{\alpha}{2}$(竖直向上),故有

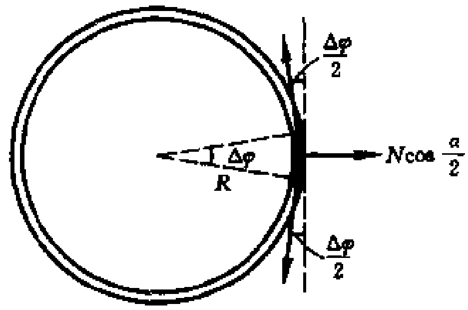
$$\Delta mg = N\sin\frac{\alpha}{2} \tag{1}$$



力图 5－1－1



力图 5－1－2



力图 5－1－3

如力图 5－1－3,在水平面内,Δl 受支持力 N 的水平分量(参看力图 5－1－2)$N\cos\frac{\alpha}{2}$,以及 Δl 两端的张力 T 和 T. 设 Δl 对链条环中心的张角为 $\Delta\varphi$,则有

$$2T\sin\frac{\Delta\varphi}{2} = N\cos\frac{\alpha}{2}$$

因 $\Delta\varphi$ 很小,故有

$$\sin\frac{\Delta\varphi}{2} \approx \frac{\Delta\varphi}{2}$$

代入,得

$$T\Delta\varphi = N\cos\frac{\alpha}{2} \tag{2}$$

由(1)、(2)式,得

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\Delta m}{T\Delta\varphi}g$$

其中

$$\Delta m=\frac{m}{2\pi R}\Delta l=\frac{m\Delta\varphi}{2\pi}$$

代入,得

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{mg}{2\pi T}$$

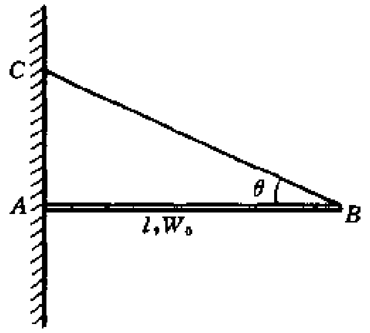
故链条环中的张力为

$$T=\frac{mg}{2\pi\tan\frac{\alpha}{2}}$$

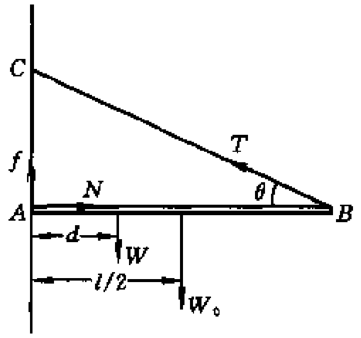
【题 2】 如力图 5－2－1,均匀杆 AB 长 l,重 w_0,A 端与粗糙的竖直墙接触,B 端用不可伸长的绳悬挂于竖直墙的 C 点,杆呈水平状态,绳与杆的夹角为 θ.

试问:1. 为了使杆达到静力平衡,杆 A 端与竖直墙之间的摩擦系数 μ 应满足什么条件?

2. 若在杆上悬挂另一重量为 $w=\frac{w_0}{2}$ 的重物,为了使杆仍维持平衡,所需摩擦系数的最小值与悬点的位置有何关系?



力图 5－2－1



力图 5－2－2

【分析】 1. 如力图 5－2－2,杆 A 端受力:墙的静摩擦力 f,竖直向上;墙支持力 N,水平向右．杆 B 端受力:绳拉力 T,方向沿绳斜向上．另外杆还受重力 w_0,方向竖直向下,通过杆中央．杆平衡时,以上诸力的合力为零,合力矩亦应为零．据此可解出 N 及所需的静摩擦力 f,再由 $f\leqslant f_{max}=\mu N$ 的条件可得出 μ 应满足的条件．

2. 当杆上悬挂另一重物 w 时,设悬挂点与 A 点的距离为 d,同样按合力为零和合力矩为零才能达到平衡的条件,可求出所需 μ 的最小值与悬挂点位置(即与 d)的关系．

【解】 1. 如力图 5－2－2,未悬挂 w 时,由合力为零,即由在竖直方向和水平方向的分力之和分别为零,有,

$$f+T\sin\theta-w_0=0$$
$$N-T\cos\theta=0$$

对 B 点的合力矩为零,有

$$fl-\frac{1}{2}w_0l=0$$

由以上三式，解出

$$f=\frac{w_0}{2}$$

$$N=\frac{w_0}{2}\cot\theta$$

静摩擦力 f 必须满足

$$f\leqslant f_{\max}=\mu N$$

故摩擦系数 μ 应满足的条件是

$$\mu\cot\theta\geqslant 1$$

即

$$\mu\geqslant\tan\theta$$

2. 如力图 5-2-2，设在与 A 点距离为 d 处悬挂 $w=\frac{w_0}{2}$ 的重物，则平衡时，由合力为零(仍按竖直方向和水平方向分解)以及对 B 点的合力矩为零，有

$$f+T\sin\theta-(w_0+w)=0$$

$$N-T\cos\theta=0$$

$$fl=\frac{w_0}{2}l+(l-d)w$$

由以上三式，解出

$$f=\frac{w_0}{2}+w(1-\frac{d}{l})$$

$$N=(\frac{w_0}{2}+\frac{d}{l}w)\cot\theta$$

静摩擦力 f 必须满足

$$f\leqslant\mu N$$

即

$$\frac{w}{2}+w\left(1-\frac{d}{l}\right)\leqslant\mu(\frac{w_0}{2}+\frac{d}{l}w)\cot\theta$$

或

$$\frac{w_0}{2}(\mu\cot\theta-1)\geqslant\left[1-\frac{d}{l}(1+\mu\cot\theta)\right]w$$

因

$$w=\frac{w_0}{2}$$

代入，得

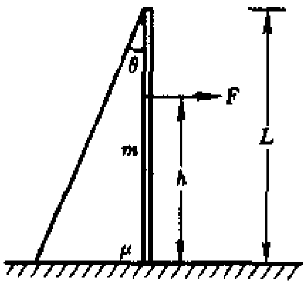
$$\mu\cot\theta-1\geqslant 1-\frac{d}{l}(1+\mu\cot\theta)$$

或

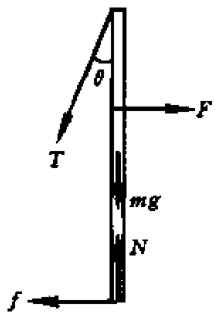
$$\mu\geqslant\frac{2l-d}{l+d}\tan\theta$$

上式表明,当悬点位于 A 点时,$d=0$,要求 $\mu\geqslant 2\tan\theta$;当悬点位于杆中心时,$d=\frac{l}{2}$,要求 $\mu\geqslant\frac{3}{5}\tan\theta$;当悬点位于 B 点时,$d=l$,要求 $\mu\geqslant\frac{1}{2}\tan\theta$.

【题 3】 如力图 5－3－1,质量为 m,长为 L 的均匀细直杆竖直放置,杆下端与地面之间的摩擦系数为 μ,杆上端用绳索拉住,绳与直杆之间的夹角为 θ. 在离地面高度为 h 处以水平力 F 作用于直杆．试问为使直杆不滑倒,作用力 F 的最大值应是多少?



力图 5－3－1



力图 5－3－2

【分析】 如力图 5－3－2 所示,直杆受力为:重力 mg,水平力 F,绳拉力 T,地面支持力 N,静摩擦力 f. 各力的方向已在力图 5－3－2 中画出．直杆平衡条件是,合力为零,合力矩为零．又,静摩擦力 f 应满足 $f\leqslant\mu N$ 的条件．由以上这些,即可求得允许的水平力 F 的最大值．

【解】 直杆平衡时,所受合力为零,故有

$$\begin{cases}F=T\sin\theta-f\\N=T\cos\theta+mg\end{cases}$$

取直杆下端为参考点,由平衡时合力矩为零,有

$$F(L-h)=fL$$

由以上三式,解出

$$f=(1-\frac{h}{L})F$$

$$N=mg+\frac{Fh}{L\tan\theta}$$

静摩擦力 f 应满足

$$f\leqslant\mu N$$

由以上三式,得

$$(1-\frac{h}{L})F\leqslant\mu(mg+\frac{Fh}{L\tan\theta})$$

解出

$$F\leqslant\frac{mgL\tan\theta}{\frac{L-h}{\mu}\tan\theta-h}$$

因 F 总是大于零的,为使上述条件有效,必须满足

$$\frac{L-h}{\mu}\tan\theta - h > 0$$

即

$$h(\mu+\tan\theta) < L\tan\theta$$

或

$$h < \frac{L}{\mu+\tan\theta}\tan\theta$$

当 h 满足上述条件时，允许的最大作用力 F 为，

$$F_{\max} = \frac{mgL\tan\theta}{\frac{L-h}{\mu}\tan\theta - h}$$

当 h 满足

$$h \geqslant \frac{L}{\mu+\tan\theta}\tan\theta$$

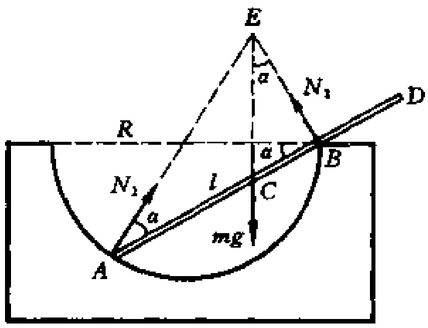
时，F 不受限制，允许的最大作用力 F 为

$$F_{\max} \to \infty$$

【题4】 如图，在半径为 R 的光滑半球形凹面内，有一刚性均匀细杆达到平衡．已知杆在半球面内那部分的长度为 l．试求杆露出半球面外那部分的长度．

【分析】 如图，杆受重力 mg，竖直向下；支持力 N_1，沿球面半径；支持力 N_2，与杆垂直．当三力的合力矩为零时，杆平衡．

为了计算方便，取 $\boldsymbol{N}_1$ 和 $\boldsymbol{N}_2$ 两力的交点 E 为参考点．因对 E 点，$\boldsymbol{N}_1$ 和 $\boldsymbol{N}_2$ 的力矩均为零，故重力的力矩亦应为零，即重力作用线必通过 E 点．因此，图中 $\overline{EC}$ 与半球面的直径垂直，且 C 点应为杆的质心，即 $\overline{AC}=\overline{CD}$，由此，寻找适当的几何关系即可求解．



力图 5-4-1

【解】 如图，A 点和 B 点在圆周上，$\overline{AB}=l$，且 $\overline{BE}\perp\overline{AB}$，故 E 点也在圆周上，$\overline{AE}$ 是圆的直径，$\overline{AE}=2R$．由几何关系，

$$\overline{BE}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{AB}^2 = 4R^2 - l^2$$

又

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}}$$

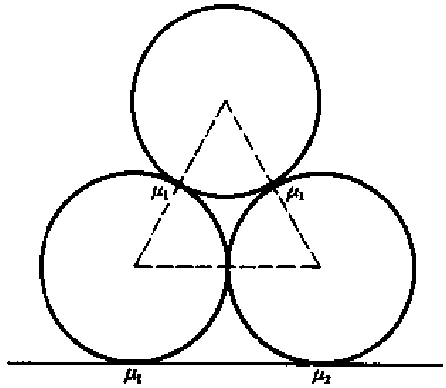
即

$$\overline{CB} = \frac{\overline{BE}^2}{\overline{AB}} = \frac{4R^2-l^2}{l}$$

故

$$\begin{aligned}\overline{BD} &= \overline{CD} - \overline{CB} = \overline{AC} - \overline{CB} = \overline{AB} - \overline{CB} - \overline{CB} \\ &= \overline{AB} - 2\,\overline{CB} = l - \frac{2}{l}(4R^2 - l^2) = \frac{3l^2 - 8R^2}{l}\end{aligned}$$

【题 5】 如力图 5－5－1，三个半径和质量均相同的圆柱体按图中的方式堆放在地面上，互相接触．已知圆柱体之间的摩擦系数为 μ_1，圆柱体与地面之间的摩擦系数为 μ_2．试求使三圆柱体达到平衡所需之 μ_1 和 μ_2 的下限值．

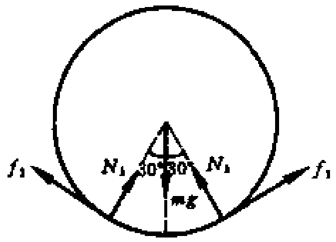


力图 5－5－1

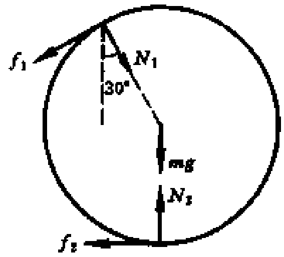
【分析】 如力图 5－5－2，上圆柱体受力为：重力 mg，竖直向下；两下圆柱体的支持力 N_1 和 N_1，由于对称性，两支持力的大小相同，方向垂直切面；两下圆柱体的摩擦力 f_1 和 f_1，两者大小相同，方向沿切面指向斜上方．

如力图 5－5－3，右下圆柱体受力为：重力 mg；上圆柱体的压力 N_1 和摩擦力 f_1；地面的支持力 N_2 和摩擦力 f_2，各力的方向如力图 5－5－3 所示．

平衡条件是上圆柱体与下圆柱体各自受到的合力为零以及合力矩为零．再由 $f_1 \leqslant \mu_1 N_1$ 和 $f_2 \leqslant \mu_2 N_2$ 的要求，即可确定所需 μ_1 和 μ_2 的下限．



力图 5－5－2，上圆柱体



力图 5－5－3，右下圆柱体

【解】 由上圆柱体所受合力的竖直分量为零，有

$$2(f_1\sin 30° + N_1\cos 30°) - mg = 0$$

即

$$f_1 + \sqrt{3}N_1 = mg \tag{1}$$

下圆柱体所受合力的竖直分量及水平分量均应为零，故有

$$\begin{cases} N_1\cos 30° + f_1\sin 30° + mg - N_2 = 0 \\ N_1\sin 30° - f_1\cos 30° - f_2 = 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \dfrac{f_1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}N_1 - N_2 = -mg & (2) \\ \dfrac{N_1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}f_1 - f_2 = 0 & (3) \end{cases}$$

下圆柱体所受合力矩为零，故有

$$f_1 = f_2 \tag{4}$$

(1)、(2)、(3)、(4)式联立，解出

$$\begin{cases} N_1=\dfrac{mg}{2} \\ N_2=\dfrac{3}{2}mg \\ f_1=f_2=\dfrac{mg}{2(2+\sqrt{3})} \end{cases}$$

因

$$f_1 \leqslant \mu_1 N_1, \quad f_2 \leqslant \mu_2 N_2$$

故要求

$$\mu_1 \geqslant \frac{f_1}{N_1}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}, \quad \mu_2 \geqslant \frac{f_2}{N_2}=\frac{1}{3(2+\sqrt{3})}$$

【题6】 如力图5－6－1所示，均匀木板AB长$L=100$ cm，重$2G$，一端用铰链固定于竖直墙，另一端用水平线拉住，木板与竖直墙之间的夹角为60°. 三个完全相同的球按力图5－6－1中的位置放在木板上，球半径均为$R=10$ cm，重量均为G. 设球与墙，球与木板，球与球之间的摩擦力均可忽略．试求水平线的拉力T.

【分析】 以木板为考察对象，根据力矩平衡原理来求水平线的拉力．木板所受作用力中包括三个球对木板的压力，为了求出这些压力，可转求三球所受木板的支持力．分别以三球为考察对象，根据合力为零和合力矩为零的静力平衡条件，原则上可以解出三个支持力．但这样计算比较麻烦．为了简化运算，可把三球看成一个整体，把木板施予三球的三个支持力归结为一个等效的支持力，它的反作用力就是三球施予木板的等效压力．求出此等效压力后，根据木板的静力平衡条件便可求出水平线的拉力T.

【解】 如力图5－6－1，把三个球作为整体，它共受三个作用力：重力$3G$，作用线通过三球的重心C(即中球球心)；竖直墙的支持力N_1，作用线垂直竖直墙并通过左球球心；木板的等效支持力N_2，作用线垂直于木板，设与三球重心C的垂直距离为x(见力图5－6－1). 平衡时，上述三力的合力应为零，故有

$$N_1=N_2\cos 60° \quad (\text{水平方向})$$
$$N_2\cos 30°=3G \quad (\text{竖直方向})$$

解出，

$$N_1=\sqrt{3}G, \quad N_2=2\sqrt{3}G$$

取三球重心C为参考点，平衡时三球所受合力矩应为零，故有

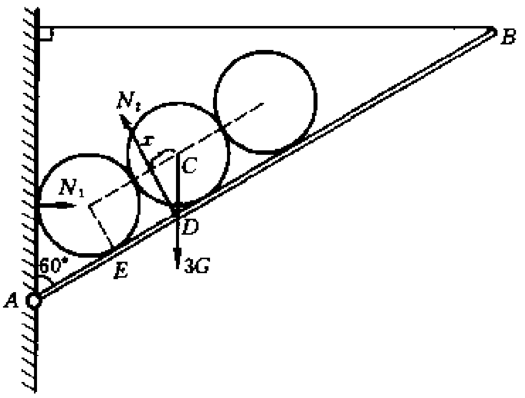
$$N_1 \cdot 2R\sin 30° - N_2 x=0$$

解出，

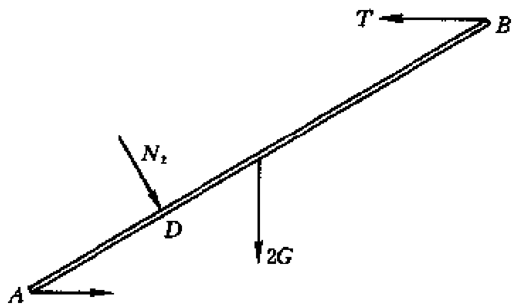
$$x=\frac{R}{2}$$

总之，木板对三球的支持力可归结为一个等效的支持力，其大小为$N_2=2\sqrt{3}G$，方向垂直木板，作用线与三球重心C的垂直距离为$x=\dfrac{R}{2}$. 由牛顿第三定律，木板应受到大小相等而方向相

反的等效压力的作用，等效作用点 D 是等效支持力 N_2 的作用线与木板的交点．



力图 5－6－1



力图 5－6－2

如力图 5－6－2，以木板为考察对象，受力为：A 端受墙的作用力 F，水平向右；B 端受水平线拉力 T，水平向左；重力 $2G$，竖直向下，通过木板重心；三球的等效压力 N_2，与木板垂直，通过 D 点．取 A 端为参考点，平衡时木板所受合力矩为零，故有

$$N_2\overline{AD}+2G\cdot\frac{L}{2}\sin60^\circ=TL\sin30^\circ \qquad (1)$$

由几何关系(见力图 5－6－1)

$$\overline{AD}=\overline{AE}+\overline{ED}$$

$$\overline{AE}=R\cot30^\circ=\sqrt{3}R$$

$$\overline{ED}=2R-x=\frac{3}{2}R$$

故

$$\overline{AD}=(\sqrt{3}+\frac{3}{2})R$$

把上述 $\overline{AD}$ 以及 N_2 的结果代入(1)式，得

$$2\sqrt{3}G(\sqrt{3}+\frac{3}{2})R+\frac{\sqrt{3}}{2}GL=\frac{1}{2}TL$$

因题设 $L=10R$，
故有

$$T=\frac{1}{5}(6+8\sqrt{3})G=3.97G$$

【题 7】 如力图 5－7－1 所示，AB，BC，CD 和 DE 为质量可略的等长细线，长度均为 5 m，A 端和 E 端悬挂在水平天花板上，$AE=14$ m．B 和 D 是质量均为 $m_0=7$ kg 的相同小球．质量为 m 的重物挂于 C 点，平衡时 C 点离天花板的垂直距离为 7 m．1．试求质量 m．2．今用外力将 C 点缓慢提升，使 BCD 位于同一水平线上，试求此过程中外力作的功．

【分析】 1．先确定各有关线段的长度．因力图 5－7－1 左、右两半对称，只需考虑右半侧即可，力图 5－7－2 就是力图 5－7－1 的右半侧．由题给数据，$EF=FC=7$ m，$CD=DE=5$ m，故

$\triangle FDC=\triangle FDE$，故虚线 FD 两侧的图形对称，$FH=FG=x$，$HE=GC=y$. 由

$$x+y=7\ \mathrm{m},\quad x^2+y^2=25\ \mathrm{m}^2$$

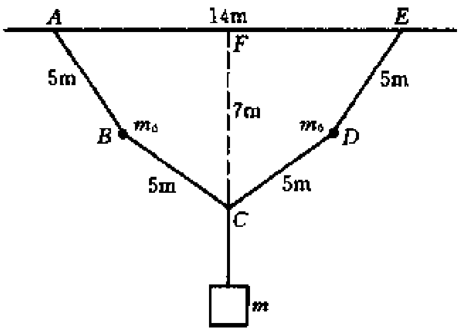
解出

$$x=4\ \mathrm{m}, y=3\ \mathrm{m}$$

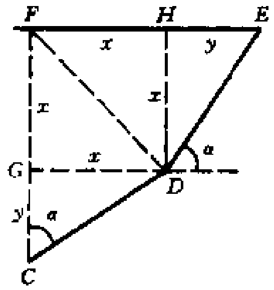
并有

$$\cos\alpha=\frac{3}{5}$$

各线段的长度确定后，根据 C 点和 D 点受力平衡的条件即可求得质量 m.



力图 5－7－1



力图 5－7－2

2. C 点缓慢提升，意指外力作功完全变为系统重力势能的增加，无需考虑动能. 外力所作的功可通过势能的增量求得.

【解】 1. 如力图 5－7－3，线段 CB 和 CD 的拉力相同，设为 T_1，线段 DE 的拉力设为 T_2. 由 C 点受力平衡，有

$$2T_1\cos\alpha=mg$$

式中(见分析)

$$\cos\alpha=\frac{3}{5}$$

故

$$T_1=\frac{5}{6}mg$$

由 D 点受力平衡，有

$$T_1\sin\alpha=T_2\cos\alpha$$

$$T_2\sin\alpha=T_1\cos\alpha+m_0g$$

因

$$\cos\alpha=\frac{3}{5},\quad \sin\alpha=\frac{4}{5}$$

由以上四式，得

$$4T_1=3T_2$$

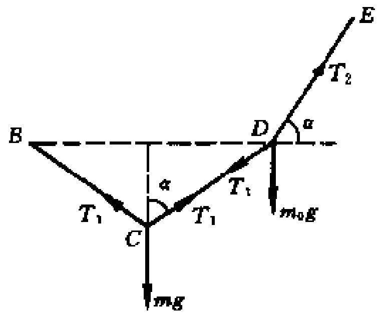
$$\frac{4}{5}T_2=\frac{3}{5}T_1+m_0g$$

解出

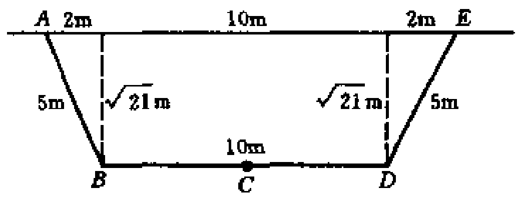
$$T_1=\frac{15}{7}m_0g$$

故

$$m=\frac{18}{7}m_0=18\ \text{kg}$$



力图 5－7－3



力图 5－7－4

2. 如力图 5－7－4 所示，当 C 点提升到与 B 点和 D 点位于同一水平线上时，各线段的长度已在图中标明．由力图 5－7－4 可知，C 点相对原先位置(见力图 5－7－1)升高了$(7-\sqrt{21})$ m，C 点所挂重物的重力势能增加了$(7-\sqrt{21})\ mg$．同时，B 点和 D 点下降了$(\sqrt{21}-4)$ m，故 B 点和 D 点的两小球的重力势能各减少了$(\sqrt{21}-4)m_0g$．故整个系统的重力势能增量，即外力在此过程中所作的功为

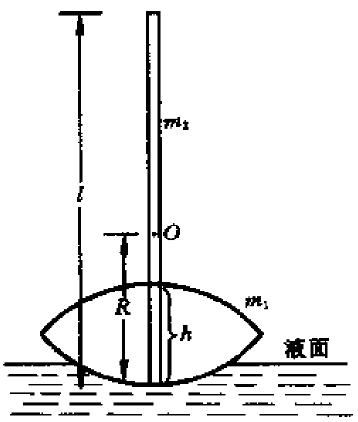
$$\begin{aligned}\Delta E&=(7-\sqrt{21})mg-2(\sqrt{21}-4)m_0g\\&=\left[(7-\sqrt{21})\frac{18}{7}-2(\sqrt{21}-4)\right]m_0g=347\ \text{J}\end{aligned}$$

【题 8】 如力图 5－8－1 所示，浮子由两个半径为 R 的球冠相合而成，其质量为 m_1，中心厚度为 $h(h<2R)$．长为 l，质量为 m_2 的均匀细杆从浮子中心垂直插入，下端刚好到达下球冠表面．细杆的铅垂位置显然是一个平衡位置．试分析平衡的稳定性．

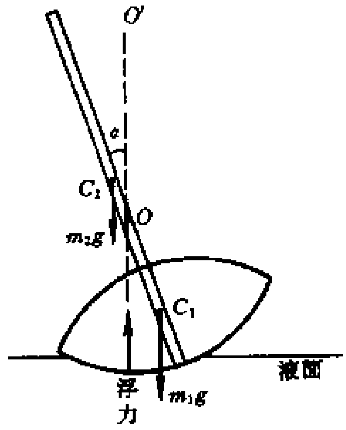
【分析】 当细杆在铅垂位置时，整个浮子所受的重力和浮力均沿铅垂线，合力为零，合力矩为零，显然是平衡位置．

如力图 5－8－2 所示，设想细杆偏离铅垂线 α 角，即浮子倾斜 α 角，则浮力受重力 m_1g，作用点为浮子的重心 C_1；细杆受重力 m_2g，作用点为细杆的重心 C_2；浮子还受液体(如水)的浮力作用，浮力是液体作用于浮子浸没部分的力，其作用线通过下球冠的曲率中心 O 点，即沿力图 5－8－2中 OO'方向．取 O 点为参考点，则浮力的力矩为零，整个浮子及细杆受到两个重力矩的作用．若 m_1g 的力矩大于 m_2g 的力矩，则浮子与细杆偏离 α 角后将受到恢复力矩的作用，使之恢复到力图 5－8－1 的原来状态，故属稳定平衡．若 m_1g 的力矩小于 m_2g 的力矩，则总力矩将使 α 角增大，导致浮子与细杆倾倒，故属不稳定平衡．

【解】 如力图 5－8－2，设浮子与细杆偏离平衡位置一个很小的角度 α，取 O 点为参考点，浮子与细杆受到两个重力矩的作用．重力 m_1g 对 O 点的力矩为



力图 5－8－1



力图 5－8－2

$$M_1 = m_1 g(R - \frac{h}{2})\sin\alpha$$

重力 m_2g 对 O 点的力矩为

$$M_2 = -m_2 g(\frac{l}{2} - R)\sin\alpha$$

总力矩为

$$\begin{aligned} M &= M_1 + M_2 \\ &= [m_1(R - \frac{h}{2}) - m_2(\frac{l}{2} - R)]g\sin\alpha \\ &= [(m_1 + m_2)R - \frac{1}{2}(m_1 h + m_2 l)]g\sin\alpha \\ &= \left[R - \frac{m_1 h + m_2 l}{2(m_1 + m_2)}\right](m_1 + m_2)g\sin\alpha \end{aligned}$$

令

$$x = R - \frac{m_1 h + m_2 l}{2(m_1 + m_2)}$$

则

$$M = x(m_1 + m_2)g\sin\alpha$$

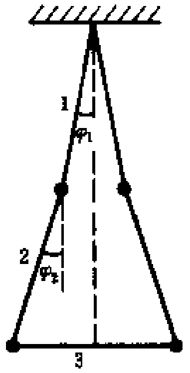
其中 x 是一个常数，它的数值取决于浮子与细杆的质量以及几何尺度．由上式可知，当 $x>0$ 时，$M>0$，总力矩为恢复力矩，故为稳定平衡．当 $x<0$ 时，$M<0$，总力矩为倾倒力矩，故为不稳定平衡．当 $x=0$ 时，$M=0$，总力矩为零，故为随遇平衡．

【题 9】 如力图 5－9－1，五根质量分布均匀、质量和长度完全相同的细杆，用光滑铰链互相连结并悬挂起来．试求平衡时由细杆组成的五边形的五个顶角．

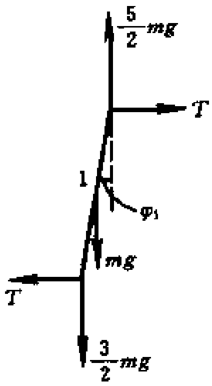
【分析】 如力图 5－9－1，因左右两侧对称，只需求出 φ_1 和 φ_2，五边形的五个顶角就都知道了，即上顶角为 $2\varphi_1$，两个侧顶角为 $[180^\circ + (\varphi_2 - \varphi_1)]$，两个下顶角为 $(90^\circ - \varphi_2)$．

分别隔离杆 1 和杆 2，分析受力情形，根据各杆的静力平衡条件（合力为零，合力矩为零），可

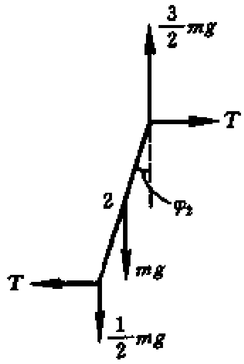
列出 φ_1 和 φ_2 满足的方程式，进而解出 φ_1 和 φ_2.



力图 5－9－1



力图 5－9－2



力图 5－9－3

【解】 设每根杆的质量为 m，长度为 l.

如力图 5－9－2，隔离杆 1，分析杆 1 的受力情形．杆 1 上端受到悬点的作用力，该力可分解成水平分量和铅垂分量，设水平分力为 T，铅垂分力应等于五根细杆总重量的一半，即为$\frac{5}{2}mg$．杆 1 自身受重力 mg 作用，作用点为杆 1 的重心．杆 1 下端受到杆 2 上端所施的作用力，同样可分解成水平分力和铅垂分力．水平分力应与上端所受水平分力大小相等，方向相反；铅垂分力应等于三根细杆总重量的一半，即为$\frac{3}{2}mg$．这样，杆 1 所受合力为零，这是平衡所必须的．

如力图 5－9－3，隔离杆 2，分析杆 2 的受力情形．杆 2 上端受到杆 1 下端的作用力，根据牛顿第三定律，水平分力为 T，铅垂分力为$\frac{3}{2}mg$．杆 2 自身受重力 mg 的作用，作用点为杆 2 的重心．杆 2 下端受杆 3 的作用力，水平分力应为 T，指向左方，铅垂分力则应为$\frac{1}{2}mg$．这样，杆 2 所受合力为零，这是平衡所必须的．

另外，平衡时每根杆所受合力矩亦应为零．对于杆 1，取其上端为参考点，力矩平衡方程为

$$Tl\cos\varphi_1 = mg\cdot\frac{l}{2}\sin\varphi_1 + \frac{3}{2}mgl\sin\varphi_1$$

对于杆 2，也取其上端为参考点，力矩平衡方程为

$$Tl\cos\varphi_2 = mg\cdot\frac{l}{2}\sin\varphi_2 + \frac{1}{2}mgl\sin\varphi_2$$

又，杆 1 和杆 2 关联的几何条件为

$$l\sin\varphi_1 + l\sin\varphi_2 = \frac{l}{2}$$

以上三式可简化为

$$T = 2mg\tan\varphi_1$$

$$T = mg\tan\varphi_2$$

$$\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2 = \frac{1}{2} \qquad (1)$$

前两式可合并为

$$\tan\varphi_2 = 2\tan\varphi_1 \tag{2}$$

(2)式也可从能量观点得到．设每根杆所受重力用 G 表示(即 $G=mg$)，取力图 5－9－1 的悬点为重势能 E_p 的零点．设想在维持五根杆左右对称的条件下，抬高杆 3(力图 5－9－1 中的水平杆)，则 φ_1 和 φ_2 将发生变化，各杆的重力势能也将相应变化．可以证明 φ_1 和 φ_2 的变化不是独立的，亦即五杆系统的总势能 E_p 是 φ_1 的函数．平衡时应有 $\frac{dE_p}{d\varphi_1}=0$，由此条件可同样得出上述方程(2)．

因取悬点的重力势能为零，故各杆的势能均为负值．各杆的势能等效于把杆的质量集中在重心时的势能，故系统的总势能 E_p 为

$$\begin{aligned} E_p &= -\left[2\cdot\frac{l}{2}G\cos\varphi_1 + 2G\left(l\cos\varphi_1+\frac{l}{2}\cos\varphi_2\right)+Gl(\cos\varphi_1+\cos\varphi_2)\right] \\ &= -2Gl(2\cos\varphi_1+\cos\varphi_2) \end{aligned} \tag{3}$$

五根杆之间有一定的几何关联，可由(1)式表示，即 φ_1 和 φ_2 的改变量 $d\varphi_1$ 和 $d\varphi_2$ 之间有一定关系．微分(1)式，得

$$\cos\varphi_1 d\varphi_1 + \cos\varphi_2 d\varphi_2 = 0$$

即

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = -\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2}$$

这就是 φ_1 和 φ_2 的变化应遵循的关系．

将(3)式对 φ_1 求导，并将上述 $\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}=-\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2}$ 代入，得

$$\begin{aligned} \frac{dE_p}{d\varphi_1} &= 4Gl\sin\varphi_1 + 2Gl\sin\varphi_2\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \\ &= 4Gl\sin\varphi_1 - 2Gl\sin\varphi_2\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} = 2Gl(2\sin\varphi_1 - \tan\varphi_2\cos\varphi_1) \end{aligned}$$

平衡时应有

$$\frac{dE_p}{d\varphi_1} = 0$$

故得出

$$\tan\varphi_2 = 2\tan\varphi_1$$

此即(2)式．

由于求得方程(1)和(2)的解析解有困难，可采用逐项近似的数值解法．为此，将方程(2)写成，

$$\frac{\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2} = 2\frac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1}$$

平方，得

$$\frac{\sin^2\varphi_2}{1-\sin^2\varphi_2} = 4\frac{\sin^2\varphi_1}{1-\sin^2\varphi_1}$$

即

$$\sin^2\varphi_2(1+3\sin^2\varphi_1)=4\sin^2\varphi_1 \tag{4}$$

由(1)式，

$$\sin\varphi_2=\frac{1}{2}(1-2\sin\varphi_1) \tag{5}$$

把(5)式代入(4)式，得

$$(1-4\sin\varphi_1+4\sin^2\varphi_1)(1+3\sin^2\varphi_1)=16\sin^2\varphi_1$$

令

$$x=\sin\varphi_1$$

得

$$f(x)=12x^4-12x^3-9x^2-4x+1=0$$

可用数值解法求出满足上述代数方程的解．首先选择两个特定的 x 值，使相应的函数值 $f(x)$ 分别大于零和小于零，由于 $f(x)$ 是连续函数，使 $f(x)=0$ 的 x 值必定介于所选的这两个特定的 x 值之间．注意到 $x=\sin\varphi_1$，故 $0\leqslant x\leqslant 1$，x 的选择范围是受到限制的．例如

当 $x=0.1$ 时，$f(x)=0.5$

当 $x=0.2$ 时，$f(x)=-0.24$

可见，使 $f(x)=0$ 的 x 值必定介于 0.1 和 0.2 之间．进一步选择其间的其它 x 值，算出相应的 $f(x)$ 值，列表如下．

x	0.15	0.17	0.171	0.1715
$f(x)$	0.16	0.011	0.003	-0.00086

可见，当 $x=0.1715$ 时，$f(x)=-0.00086$ 已经非常接近于零，误差不到千分之一．于是，得出

$$x=\sin\varphi_1=0.1715$$

$$\varphi_1=9.9^\circ$$

由(1)式，

$$\sin\varphi_2=\frac{1}{2}-\sin\varphi_1=0.3285$$

$$\varphi_2=19.2^\circ$$

故五杆构成的如力图 5－9－1 的五边形在平衡时的五个顶角为，

上顶角　$2\varphi_1=19.8^\circ$

侧顶角　$180^\circ+(\varphi_2-\varphi_1)=189.3^\circ$

下顶角　$90^\circ-\varphi_2=70.8^\circ$

【题 10】 如力图 5－10－1，半径为 R 的圆柱体在水平面上固定不动，厚度为 t 的均匀木板水平地放置在圆柱体上，其长度方向(力图 5－10－1 中的横向)与圆柱体的轴(水平方向与力图 5－10－1 的平面垂直)垂直，并处于平衡状态．试问厚度 t 取何值时属稳定平衡．

【分析】 如力图 5－10－2，设木板偏离平衡位置后，与圆柱体的接触点从 P 点移至 M 点，即木

板偏转一小角 θ. 此时,木板受圆柱体的支持力 N(沿 OM 方向);重力 mg(m 为木板质量,竖直向下,通过质心 C 点);摩擦力 f(通过 M 点,沿切向). 木板不沿圆柱体滑动的条件是切向合力为零,即

$$f - mg\sin\theta = 0$$

静摩擦力 f 的最大值为最大静摩擦力 f_{max},因

$$f \leqslant f_{max} = \mu N = \mu mg\cos\theta$$

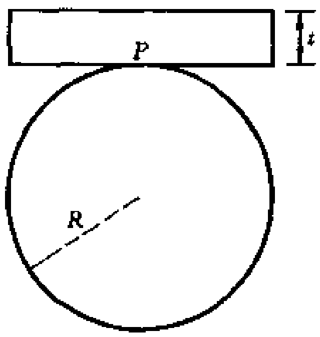
故

$$mg\sin\theta \leqslant \mu mg\cos\theta$$

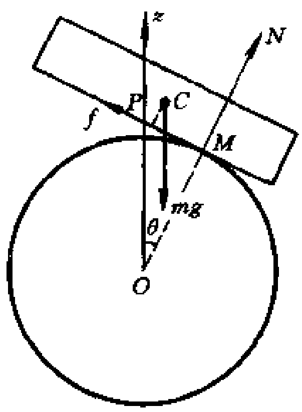
即

$$\mu \geqslant \tan\theta \approx 0$$

所以,只要 $\mu \neq 0$,木板作小角偏离时就不会产生滑动,这是保持稳定所必须的,是求解本题的出发点 .



力图 5－10－1



力图 5－10－2

写出木板势能 E_p 与 θ 角的函数关系,平衡位置($\theta = 0$)为稳定平衡的条件是 $\frac{d^2E_p}{d\theta^2} > 0$. 由此条件即可得出对厚度 t 取值的限制 .

【解】 如力图 5－10－2,取圆柱体中心 O 为原点,竖直向上为 z 轴 . 木板质心 C 点的位置矢量为

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PC}$$

其中

$$OM = R$$

$$PC = \frac{t}{2}$$

因木板与圆柱体之间无滑动,有

$$MP = R\theta$$

由以上四式,C 点的 z 坐标为

$$z_C = R\cos\theta + R\theta\sin\theta + \frac{t}{2}\cos\theta$$

因 θ 角很小，上式按 θ 展开时，忽略比 θ^2 项更高级的小量，得

$$z_C = R(1-\frac{\theta^2}{2}) + R\theta(\theta - \frac{\theta^3}{6}) + \frac{t}{2}(1-\frac{\theta^2}{2})$$
$$= R + \frac{t}{2} + (R - \frac{t}{2})\frac{\theta^2}{2}$$

取 O 点为势能零点，木板的势能 E_p 为

$$E_p = mgz_C = mg[R + \frac{t}{2} + (R - \frac{t}{2})\frac{\theta^2}{2}]$$

求 E_p 对 θ 的二阶导数，得

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = mg(R - \frac{t}{2}).$$

为了使 $\theta=0$ 为稳定平衡位置，要求 E_p 有极小值，即要求

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} > 0$$

故

$$R - \frac{t}{2} > 0$$

即

$$t < 2R$$

当木板厚度 t 小于圆柱体的直径 $2R$ 时，$\theta=0$ 才是木板稳定平衡的位置．

【题 11】 如图，四根质量、长度都相同的均匀木条用光滑铰链连接成菱形，一均匀圆盘静止地夹在两木条之间，整个系统竖直悬挂起来，悬点为 O 点．设圆盘与木条之间的接触是光滑的．已知每根木条的长度 $l=50$ cm，质量 $m=50$ g；圆盘的半径 $r=8$ cm，质量 $M=200$ g．试求系统的平衡位置(用 θ 角表示)．

【分析】 取悬点 O 为原点，取竖直向上为 z 轴．先求出整个系统的质心 C 的位置 z_C，取悬点为重力势能零点，系统的重力势能为

$$E_p = (4m + M)gz_C$$

系统达到平衡的条件是 E_p 取极小值，由此即可解出平衡时的 θ 角．

【解】 如图，四根木条的质心为 C_1，C_1 点的坐标为

$$z_1 = -l\cos\theta$$

圆盘质心为 C_2，其坐标为

$$z_2 = -(2l\cos\theta - \frac{r}{\sin\theta})$$

故整个系统的质心 C 的坐标为

$$z_C = \frac{4mz_1 + Mz_2}{4m + M} = -\frac{4ml\cos\theta + M(2l\cos\theta - \frac{r}{\sin\theta})}{4m + M}$$

系统的重力势能为

$$E_p = (4m + M)gz_C$$

平衡位置满足

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z_C}\frac{\mathrm{d}z_C}{\mathrm{d}\theta}=0$$

即满足

$$\frac{\mathrm{d}z_C}{\mathrm{d}\theta}=0$$

将 z_C 代入,求导,得

$$\frac{\mathrm{d}z_C}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{1}{4m+M}\left[-4ml\sin\theta+M\left(\frac{r\cos\theta}{\sin^2\theta}-2l\sin\theta\right)\right]=0$$

即

$$(4m+2M)l\sin\theta=\frac{Mr\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

令

$$t=\tan\theta$$

则上式简化为

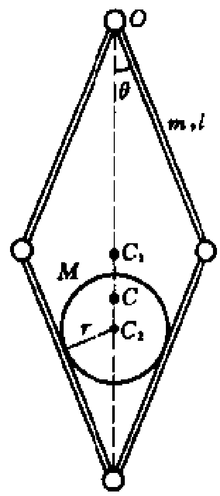
$$(4m+2M)lt=\frac{Mr(1+t^2)}{t^2}$$

把有关数据代入,得

$$560\times50t^3-1600t^2-1600=0$$

即

$$f(t)=17.5t^3-t^2-1=0$$



力图 5－11－1

这个代数方程难以求解析解,可用数值解法求 t. 选几个尝试的 t 值,算出 $f(t)$,列表如下.

t	0.2	0.4	0.6
$f(t)$	-0.9	-0.04	2.46

可见,使 $f(t)=0$ 的 t 值介于 0.4 和 0.6 之间,并接近 0.4. 再取 $t=0.41$,得 $f(t)=0.038$. 所以 t 值介于 0.4 和 0.41 之间. 再用内插法可得,

$$t=\tan\theta=0.405$$

故系统的平衡位置为

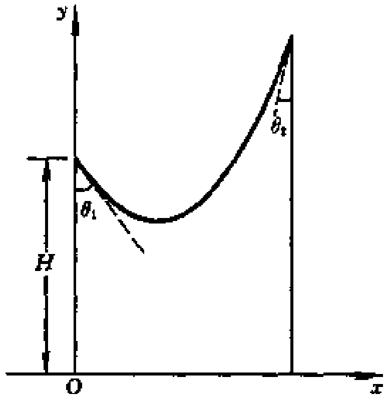
$$\theta=22°3'$$

【题 12】 如力图 5－12－1,质量分布均匀的柔软细绳全长 L,质量线密度为 λ,悬挂在两根竖直杆上,测得细绳在两悬挂点的切线与竖直杆之间的夹角分别为 θ_1 和 θ_2. 1. 试求细绳两端所受的拉力. 2. 若左悬点的高度为 H,试导出在 Oxy 坐标系中的悬链线方程.

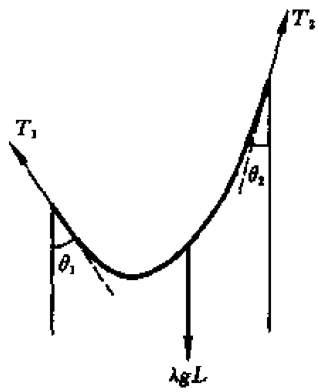
【分析】 如力图 5－12－2,细绳受两端的拉力 T_1 和 T_2,以及重力 λgL 的作用,T_1 和 T_2 沿细绳在悬点的切线方向,重力竖直向下,三力平衡,由题给的 θ_1 和 θ_2 即可求得 T_1 和 T_2.

为求悬链线方程,可在悬线上任取弧长为 dS 的一小段,分析小段所受的力,先在自然坐标

系中列出切向和法向的静力平衡方程，然后转换到直角坐标 Oxy 中，解方程即可求得悬链线曲线的方程．



力图 5－12－1



力图 5－12－2

【解】 1．如力图 5－12－2，两端拉力 T_1 与 T_2 及重力 λgL 三力平衡，分别在竖直方向和水平方向列出静力平衡方程，为

$$T_1\cos\theta_1 + T_2\cos\theta_2 = \lambda gL$$
$$T_1\sin\theta_1 = T_2\sin\theta_2$$

解得，

$$T_1 = \frac{\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)}\lambda gL$$

$$T_2 = \frac{\sin\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)}\lambda gL$$

2．如力图 5－12－3，在悬线上任取小段弧长 ds，它可看作是圆弧的一部分，切向为 $\boldsymbol{t}$，法向为 $\boldsymbol{n}$．ds 受重力 $\lambda g ds$，它与半径方向的夹角为 θ；两端受张力 $T+dT$ 和 T，它们与切线的夹角均为 $\frac{d\theta}{2}$，$d\theta$ 是 ds 所对应的圆心角．分别在切向和法向列出 ds 的静力平衡方程为，

$$(T+dT)\cos\frac{d\theta}{2} = T\cos\frac{d\theta}{2} + \lambda g ds\sin\theta \quad （切向）$$

$$(T+dT+T)\sin\frac{d\theta}{2} = \lambda g ds\cos\theta \quad （法向）$$

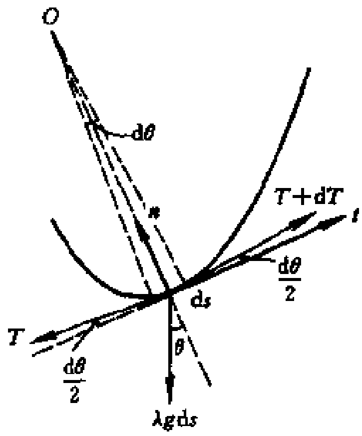
化简，得

$$dT\cos\frac{d\theta}{2} = \lambda g ds\sin\theta$$

$$(2T+dT)\sin\frac{d\theta}{2} = \lambda g ds\cos\theta$$

因 $d\theta$ 很小，$\cos\frac{d\theta}{2}\approx 1$，$\sin\frac{d\theta}{2}\approx\frac{d\theta}{2}$，忽略高级小量，得

$$\frac{dT}{ds} = \lambda g\sin\theta \qquad (1)$$



力图 5－12－3

$$T=\lambda g\cos\theta\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} \tag{2}$$

以上两式相除，得

$$\frac{\mathrm{d}T}{T}=\tan\theta\mathrm{d}\theta$$

积分，得

$$\ln T=-\ln\cos\theta+\ln C_1$$

式中 $\ln C_1$ 为积分常量，即

$$T\cos\theta=C_1,\text{或 } T=\frac{C_1}{\cos\theta} \tag{3}$$

因

$$\theta=\theta_1\text{ 时,}\quad T=T_1=\frac{\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)}\lambda gL$$

故常量 C_1 为

$$C_1=\frac{\cos\theta_1\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)}\lambda gL=\frac{\lambda gL}{1+\dfrac{\sin\theta_1\cos\theta_2}{\cos\theta_1\sin\theta_2}}=\frac{\lambda gL}{1+\dfrac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}}$$

$$=\frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1+\tan\theta_2}\lambda gL \tag{4}$$

弧元 $\mathrm{d}s$ 在直角坐标中的分量 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 为

$$\mathrm{d}x=\mathrm{d}s\cos\theta,\quad \mathrm{d}y=\mathrm{d}s\sin\theta$$

故(1)式可改写为

$$\mathrm{d}T=\lambda g\mathrm{d}y$$

积分，得

$$T=\lambda gy+C_2 \tag{5}$$

式中 C_2 为积分常量．因

$$y=H\text{ 时,}\quad T=T_1$$

故

$$C_2=T_1-\lambda gH=\lambda g\left[\frac{\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)}L-H\right] \tag{6}$$

(2)式可改写为

$$T\mathrm{d}\theta=\lambda g\mathrm{d}x$$

把(3)式代入，得

$$\frac{C_1\mathrm{d}\theta}{\cos\theta}=\lambda g\mathrm{d}x$$

积分，得

$$x=\frac{C_1}{\lambda g}\int\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta}=\frac{C_1}{\lambda g}\ln\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)+C_3$$

$$=\frac{C_1}{\lambda g}\ln\left(\frac{1}{\cos\theta}+\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}-1}\right)+C_3=\frac{C_1}{\lambda g}\mathrm{Arch}\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)+C_3 \tag{7}$$

式中 C_3 是积分常量,因

$$x=0\text{ 时},\quad \theta=\theta_1$$

故

$$C_3=-\frac{C_1}{\lambda g}\text{Arch}\left(\frac{1}{\cos\theta_1}\right) \tag{8}$$

由(7)式

$$\text{Arch}\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)=\frac{\lambda g}{C_1}(x-C_3)$$

故

$$\frac{1}{\cos\theta}=\text{ch}\left[\frac{\lambda g}{C_1}(x-C_3)\right]$$

把上式代入(3)式,得 T,再代入(5)式,得

$$y=\frac{T-C_2}{\lambda g}=\frac{1}{\lambda g}\left(\frac{C_1}{\cos\theta}-C_2\right)$$

$$=\frac{1}{\lambda g}\left\{C_1\text{ch}\left[\frac{\lambda g}{C_1}(x-C_3)\right]-C_2\right\}=\frac{C_1}{\lambda g}\text{ch}\left[\frac{\lambda g}{C_1}(x-C_3)\right]-\frac{C_2}{\lambda g}$$

这就是用直角坐标(x,y)表示的悬链线方程,式中的 C_1,C_2 和 C_3 是三个常量,分别在(4)、(6)和(8)式中给出．上式表明,悬链线方程是一条双曲余弦曲线．在两根电线杆之间悬挂的电线,其曲线就属于悬链线．

注:推导公式(7)时用到反双曲余弦函数的对数表示式:

$$\text{Arch}\,x=\pm\ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

第六章 刚体动力学

【题1】 汽车在后轮的推动下，以加速度 a 在地面上沿直线前进．已知汽车前轮与后轮的间距为 $2l$，质心位于前后轮的中央，离地高度为 h，后轮与地面之间的摩擦系数为 μ，前轮为非驱动轮，与地面的摩擦可略．试问：μ 至少为多大时，后轮不致打滑？

【分析】 如图，汽车在竖直方向受重力 mg，地面支持力 N_1(前轮)和 N_2(后轮)，三者合力为零．汽车在水平方向受摩擦力 f(后轮)，在 f 的推动下以加速度 a 前进．因汽车平动而不转动，质心所受合力矩为零．由此各力可求．后轮不打滑即作纯滚动的条件是 $f\leqslant\mu N_2$，由此可确定所需的 μ 值．

【解】 汽车以加速度 a 前进，故有

$$f=ma \tag{1}$$

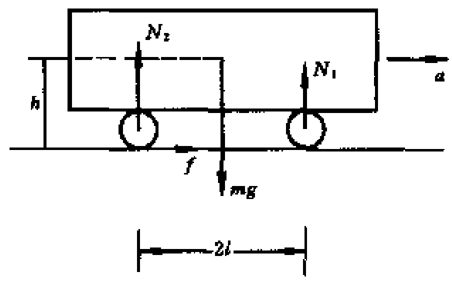
$$N_1+N_2-mg=0 \tag{2}$$

汽车平动，故对质心的合力矩为零，有

$$fh+N_1l-N_2l=0 \tag{3}$$

(1)、(2)、(3)式联立，解出

$$\begin{cases} N_1=\dfrac{1}{2}m\left(g-\dfrac{ha}{l}\right) \\ N_2=\dfrac{1}{2}m\left(g+\dfrac{ha}{l}\right) \end{cases}$$



力图 6-1-1

后轮不打滑的条件是

$$f\leqslant\mu N_2$$

即

$$ma\leqslant\mu\cdot\frac{m}{2}\left(g+\frac{ha}{l}\right)$$

故 μ 应满足

$$\mu\geqslant\frac{2la}{gl+ha}$$

讨论：当 $a>0$ 时，$N_2>N_1$，后轮弹簧比前轮弹簧压缩得厉害，表现为车的后部下沉．当 $a=\dfrac{l}{h}g$ 时，$N_1=0$，前轮弹簧不压缩．当 $a>\dfrac{l}{h}g$ 时，前轮离地翘起，车翻．当 $a<0$ 时(刹车或反向加速)，$N_2<N_1$，前轮下沉．

【题2】 如力图6-2-1，质量为 m 的均匀圆柱体，截面半径为 R，长为 $2R$．试求：圆柱体绕通过质心及两底面边缘的转轴(力图 6-2-1 中的 σ_1 或 σ_2)的转动惯量．

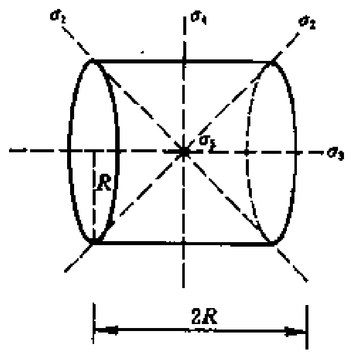
【分析】 根据转动惯量的定义，利用转动惯量的垂直轴定理(亦称正交轴定理)及平行轴定理，考

虑到本题圆柱体的对称性，适当选取转轴即可求解．

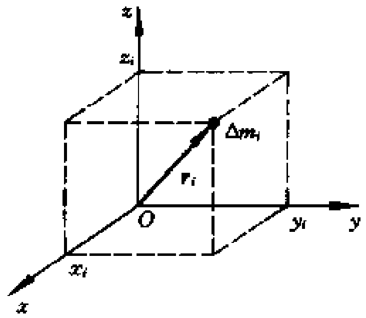
【解】 如力图 6－2－1，设圆柱体对于转轴 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4,\sigma_5$（通过质心，垂直图面）的转动惯量分别为 I_1,I_2,I_3,I_4,I_5．其中 $I_1=I_2=I$ 为本题所求，$I_3=\frac{1}{2}mR^2$ 是已知的．又，$\sigma_1,\sigma_2,\sigma_5$ 三轴两两垂直；$\sigma_3,\sigma_4,\sigma_5$ 三轴两两垂直．

为了寻找本题所求的 I_1 或 I_2 与 I_3,I_4,I_5 的关系，先证明下述普遍结果，即

$$I_x+I_y+I_z=2\sum\Delta m_i r_i^2$$



力图 6－2－1



力图 6－2－2

对任意的刚体，任取直角坐标 $Oxyz$，式中 I_x、I_y、I_z 分别是刚体对 x、y、z 轴的转动惯量，式中 Δm_i 是刚体中任一质元的质量，x_i、y_i、z_i 是该质元的坐标，$r_i^2=x_i^2+y_i^2+z_i^2$ 是该质元矢径的平方（矢径就是从原点 O 到 Δm_i 的距离），$\sum$是对刚体的全部质元求和，如力图 6－2－2 所示．根据转动惯量的定义，显然，任意刚体对 x、y、z 轴的转动惯量分别为

$$I_x=\sum\Delta m_i(y_i^2+z_i^2)$$

$$I_y=\sum\Delta m_i(z_i^2+x_i^2)$$

$$I_z=\sum\Delta m_i(x_i^2+y_i^2)$$

相加，得

$$I_x+I_y+I_z=2\sum\Delta m_i(x_i^2+y_i^2+z_i^2)=2\sum\Delta m_i r_i^2$$

或

$$I_x+I_y=2\sum\Delta m_i r_i^2-I_z \tag{1}$$

现在，将上述普遍结论用于本题．如力图 6－2－1，取 σ_5 轴为 z 轴，先取 σ_1 轴和 σ_2 轴为 x 轴和 y 轴，再取 σ_3 轴和 σ_4 轴为 x 轴和 y 轴，则由(1)式，得出，

$$I_1+I_2=2\sum\Delta m_i r_i^2-I_5,\quad I_3+I_4=2\sum\Delta m_i r_i^2-I_5$$

即

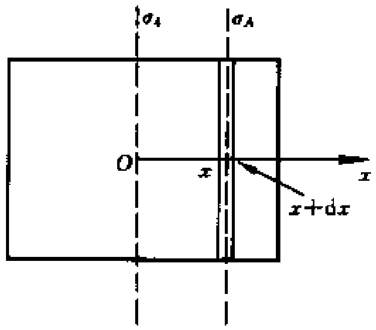
$$I_1+I_2=I_3+I_4$$

其中 $I_1=I_2=I$ 为所求，$I_3=\frac{1}{2}mR^2$，故有

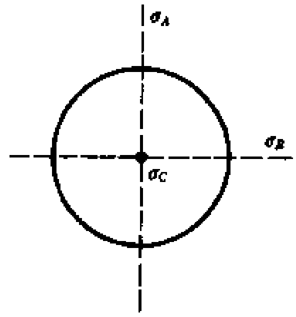
$$2I=\frac{1}{2}mR^2+I_4 \tag{2}$$

可见，为求 I，需要求出 I_4，I_4 是圆柱体绕 σ_4 轴的转动惯量（见力图 6－2－1）．为求 I_4，将

力图 6－2－1 画成力图 6－2－3(圆柱体的侧视图)，取 x 轴沿圆柱体的中轴，取原点 O 为圆柱体质心．将圆柱体垂直于 x 轴(即平行 σ_4 轴)切成许多薄圆片．其中在 x 位置，厚为 $\mathrm{d}x$ 的薄圆片对 σ_A 轴的转动惯量表为 $\mathrm{d}I_A$．该薄圆片对 σ_4 轴的转动惯量表为 $\mathrm{d}I_4$，积分后可得 I_4．



力图 6－2－3



力图 6－2－4

先求 $\mathrm{d}I_A$．把力图 6－2－3 中的薄圆片画成力图 6－2－4．对此薄圆片，取转轴 σ_A、σ_B、σ_C(相互垂直)，相应的转动惯量表为 $\mathrm{d}I_A$、$\mathrm{d}I_B$、$\mathrm{d}I_C$，由转动惯量的垂直轴定理，有

$$\mathrm{d}I_C=\mathrm{d}I_A+\mathrm{d}I_B=2\mathrm{d}I_A$$

因对称性，$\mathrm{d}I_A=\mathrm{d}I_B$，故有上式．又 $\mathrm{d}I_C$ 为

$$\mathrm{d}I_C=\frac{1}{2}\mathrm{d}m\cdot R^2$$

其中 $\mathrm{d}m$ 是薄圆片的质量，R 是薄圆片的半径．如力图 6－2－3，$\mathrm{d}m$ 为

$$\mathrm{d}m=\frac{m}{2R}\mathrm{d}x$$

代入，得

$$\mathrm{d}I_C=\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{2R}\mathrm{d}x\cdot R^2=\frac{mR}{4}\mathrm{d}x$$

故

$$\mathrm{d}I_A=\frac{1}{2}\mathrm{d}I_C=\frac{mR}{8}\mathrm{d}x$$

由转动惯量的平行轴定理，薄圆片绕 σ_4 轴的转动惯量 $\mathrm{d}I_4$ 与绕 σ_A 轴的转动惯量 $\mathrm{d}I_A$ 的关系为

$$\mathrm{d}I_4=\mathrm{d}I_A+x^2\mathrm{d}m=\frac{mR}{8}\mathrm{d}x+\frac{m}{2R}x^2\mathrm{d}x$$

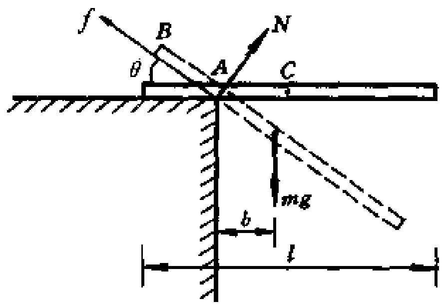
积分，得

$$I_4=\frac{mR}{8}\int_{-R}^{R}\mathrm{d}x+\frac{m}{2R}\int_{-R}^{R}x^2\mathrm{d}x=\frac{m}{4}R^2+\frac{m}{3}R^2=\frac{7}{12}mR^2$$

代入(2)式，得

$$I=\frac{1}{4}mR^2+\frac{1}{2}I_4=\left(\frac{1}{4}+\frac{7}{24}\right)mR^2=\frac{13}{24}mR^2$$

【题3】 如图，长为 l 的均匀细杆水平地放置在桌面上，质心离桌边缘的距离为 b，从静止下落．已知杆与桌边缘之间的摩擦系数为 μ．试求杆开始滑动时的角度 θ_C．



力图 6－3－1

【分析】 杆受重力 mg，桌面的支持力 N 及摩擦力 f，三者的方向如图．当杆无滑动时，杆绕桌边缘的 A 轴(固定轴)转动，遵循转动定理．质心 C 作圆周运动，遵循质心运动定理．由此可得出 N 和 f 随着杆倾斜角度 θ 如何变化．当 f 大于 μN 时杆开始滑动，即杆开始滑动的临界条件是 $f=\mu N$，于是相应的角度 θ_C 可求．

【解】 无滑动时，细杆绕固定轴 A 转动，由转动定理，得

$$mgb\cos\theta=(I_C+mb^2)\beta \tag{1}$$

式中 m 是杆的质量，$\beta=\frac{d\omega}{dt}$是杆的角加速度，ω 是杆的角速度，I_C 是杆绕质心 C 的转动惯量，为

$$I_C=\frac{1}{12}ml^2$$

无滑动时，质心 C 作圆周运动，由质心运动定理，得

$$\begin{cases} f-mg\sin\theta=mb\omega^2 & (2)\\ mg\cos\theta-N=ma_C=mb\beta & (3)\end{cases}$$

由(1)、(3)式，得

$$\begin{aligned}N&=mg\cos\theta-mb\beta\\ &=mg\cos\theta-mb\frac{mbg\cos\theta}{I_C+mb^2}=\frac{I_C}{I_C+mb^2}mg\cos\theta\end{aligned}$$

代入(3)式，得

$$mb\beta=mg\cos\theta\left(1-\frac{I_C}{I_C+mb^2}\right)=\frac{mb^2}{I_C+mb^2}mg\cos\theta$$

即

$$\beta=\frac{d\omega}{dt}=\frac{b}{I_C+mb^2}mg\cos\theta$$

因

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{d\omega}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}=\omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

故有

$$\omega d\omega=\frac{b}{I_C+mb^2}mg\cos\theta\ d\theta$$

积分，得

$$\frac{1}{2}\omega^2=\frac{b}{I_C+mb^2}mg\ \sin\theta+C$$

式中 C 为积分常量．初条件为

$$t=0\text{时}，\quad \omega=0$$

故

$$C=0$$

代入，得

$$\omega^2=\frac{2b}{I_C+mb^2}mg\sin\theta$$

代入(2)式，得

$$f=mg\sin\theta+\frac{2mb^2}{I_C+mb^2}mg\sin\theta=mg\sin\theta\left(1+\frac{2mb^2}{I_C+mb^2}\right)$$

开始滑动的临界条件为

$$f=\mu N$$

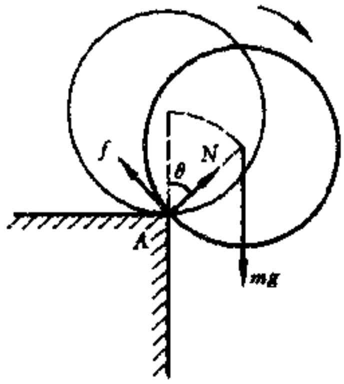
把上面解出的 f 和 N 代入，θ 应取杆开始滑动时的角度 θ_C，得

$$\frac{I_C+3mb^2}{I_C+mb^2}mg\sin\theta_C=\frac{\mu I_C}{I_C+mb^2}mg\cos\theta_C$$

即

$$\tan\theta_C=\frac{\mu I_C}{I_C+3mb^2}=\frac{\mu\left(\frac{1}{12}ml^2\right)}{\frac{1}{12}ml^2+3mb^2}=\frac{\mu l^2}{l^2+36b^2}$$

【题4】 如力图6－4－1，实心圆柱体从桌边由静止下滚，圆柱体与桌边之间的摩擦系数为 μ．圆柱体下滚过程中所转过的角度用 θ 表示(如力图 6－4－1 所示)．试求圆柱体开始相对桌边滑动时相应角度 θ 所满足的关系式，并用图解法在图上标出这个角度以及不滑动的转角范围．



力图 6－4－1

【分析】 圆柱体相对桌边无滑动时必须遵从的动力学条件是 $f\leqslant f_{max}=\mu N$，其中 f 为静摩擦力，N 为支持力．开始阶段 N 较大而 f 较小，上述条件能满足，圆柱体无滑动地往下滚．随着角度 θ 的增大，N 减小，f 增大，当角度 θ 达到某一临界角 θ_C 时，刚好 $f=\mu N$．当 $\theta>\theta_C$ 时，上述条件不再满足，产生相对滑动．当 θ 角继续增大时，圆柱体将脱离桌边(脱离桌边的条件是 $N=0$)．

先在不滑动的前提下列出圆柱体的动力方程(根据质心运动定理和转动定理)，解出 f 和 N，再利用 $f=f_{max}=\mu N$ 的条件求出相应的临界角 θ_C．

【解】 圆柱体沿桌边往下滚动时，其质心作圆周运动，在无滑动时圆柱体绕 A 轴作定轴转动．设圆柱体的质量为 m，半径为 R，由质心运动定理，可列出法向和切向的动力方程为，

$$mg\cos\theta-N=mR\dot{\theta}^2 \tag{1}$$

$$mg\sin\theta-f=mR\ddot{\theta} \tag{2}$$

由转动定理，得

$$mgR\ \sin\theta = I\ddot{\theta} \tag{3}$$

式中 I 是圆柱体绕 A 轴的转动惯量，为

$$I = \frac{3}{2}mR^2 \tag{4}$$

由(2)、(3)式，解出摩擦力 f 为

$$f = \frac{1}{3}mg\ \sin\theta$$

为求支持 N，必须先求出 $\dot{\theta}^2$，由(3)、(4)式，得

$$\ddot{\theta} = \frac{2g}{3R}\sin\theta$$

因

$$\ddot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}$$

故有

$$\dot{\theta}\mathrm{d}\dot{\theta} = \frac{2g}{3R}\sin\theta\ \mathrm{d}\theta$$

积分，得

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = -\frac{2g}{3R}\cos\theta + C$$

式中 C 是积分常量．由初条件

$$\theta = 0\ \text{时}，\dot{\theta} = 0$$

得

$$C = \frac{2g}{3R}$$

于是，有

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4g}{3R}(1-\cos\theta)$$

上式也可由机械能守恒定律求得．因无滑动时摩擦力不作功，圆柱体下滚过程中机械能守恒，故有

$$mgR(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

将 $I = \frac{3}{2}mR^2$ 代入，得

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4g}{3R}(1-\cos\theta)$$

与上面的结果相同．

把 $\dot{\theta}^2$ 的结果代入(1)式，解出 N 为

$$N = \frac{mg}{3}(7\cos\theta - 4)$$

圆柱体不滑动的条件是，

$$f \leqslant \mu N$$

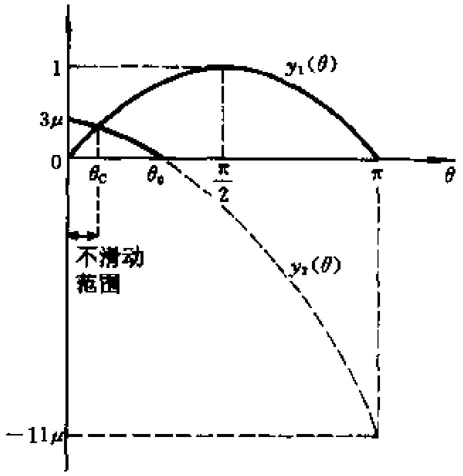
把解出的 f 和 N 代入，可得出不滑动时 θ 应满足的条件是，

$$\sin\theta \leqslant \mu(7\cos\theta - 4)$$

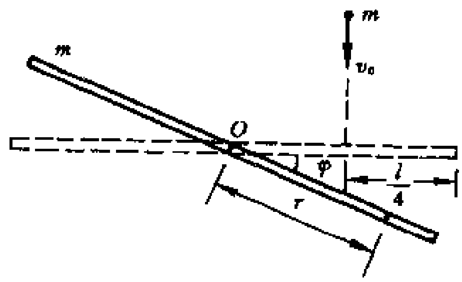
开始滑动时的临界角 θ_C 应满足的关系式是，

$$\sin\theta_C = \mu(7\cos\theta_C - 4)$$

以上结论也可用图表示．在力图 6－4－2 中画出了 $y_1 = \sin\theta$ 和 $y_2 = \mu(7\cos\theta - 4)$ 两条曲线，$y_1(\theta)$ 代表摩擦力 f，$y_2(\theta)$ 代表支持力 N．两条曲线交点的 θ 角即为圆柱体开始滑动的临界角 θ_C，θ 从 0 到 θ_C 就是圆柱体不滑动的范围．由 $y_2(\theta) = 0$ 解出的 θ_0 是支持力 $N = 0$ 的角度，亦即圆柱体开始脱离桌边的角度．因为当 $\theta = \theta_C$ 时，$(7\cos\theta_C - 4) = \dfrac{\sin\theta_C}{\mu} > 0$，所以相应的支持力 $N_C = \dfrac{mg}{3}(7\cos\theta_C - 4) > 0$，这表明圆柱体开始滑动时尚未脱离桌边．换言之，圆柱体在脱离桌边之前必定经历一个相对滑动的阶段．



力图 6－4－2



力图 6－5－1

【题 5】 如图，均匀细麦杆长 l，可绕通过中心 O 的固定水平轴在铅垂面内自由转动．开始时麦杆静止于水平位置．一质量与麦杆相同的甲虫以速度 v_0 垂直落到麦杆的 $\dfrac{1}{4}$ 长度处，落下后立即向端点爬行．

试问：1. 为使麦杆以均匀的角速度转动，甲虫沿麦杆爬行的速度应是多少？2. 甲虫轨迹的参变方程是什么？3. 为了使甲虫在麦杆转到铅直位置前能爬到端点，甲虫下落速度 v_0 的最高值是多少？

【分析】 在甲虫落到麦杆上与麦杆作完全非弹性碰撞的短暂过程中，因重力的冲量矩可以忽略，麦杆与甲虫系统的角动量守恒．由此可得出麦杆碰后瞬间的角速度 ω 与甲虫下落速度 v_0 之间的关系．

碰后，麦杆和甲虫系统绕固定轴 O 转动，因受重力矩作用，系统角动量的变化遵循角动量定理．由于要求 ω 保持不变，所以系统的转动惯量 I 必须变化，这是靠甲虫的爬行来实现的．于

是可以确定甲虫所需的沿麦杆爬行的速度．

甲虫既沿麦杆爬行又随麦杆以不变的 ω 转动，爬行速度确定了甲虫与麦杆中心 O 点的距离随时间 t 的变化，ω 则确定了麦杆与水平方向的夹角 φ 随时间 t 的变化．因此，用极坐标(r,φ)可以方便地给出甲虫的轨迹方程．

为使麦杆转到铅直位置时，甲虫刚好爬到端点，对甲虫的轨迹，即对 r 和 φ 有一定要求，亦即对 ω 或 v_0 有一定要求．

【解】 设麦杆与甲虫的质量为 m，设碰后麦杆的恒定角速度为 ω，取麦杆中心的 O 为原点，任意时刻 t 甲虫在麦杆上的位置用 r 表示，麦杆与通过 O 点的固定水平轴的夹角即麦杆转过的角度，用 φ 表示，如图所示．

甲虫落到麦杆上与麦杆作完全非弹性碰撞过程中，甲虫与麦杆系统的角动量守恒，故有

$$mv_0\cdot\frac{l}{4}=I_0\omega=\left[\frac{1}{12}ml^2+m\left(\frac{l}{4}\right)^2\right]\omega$$

式中 I_0 是甲虫落在$\frac{l}{4}$处时，麦杆甲虫系统绕 O 轴的转动惯量．由此，麦杆的角速度为

$$\omega=\frac{12v_0}{7l} \tag{1}$$

碰后任意时刻 t，甲虫位于(r,φ)位置，麦杆与甲虫系统受外力矩为

$$M=mg\,r\cos\varphi$$

由角动量定理，得

$$M=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\omega)$$

因设 ω 保持不变，故有

$$M=\omega\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

式中 I 是 t 时刻麦杆甲虫系统绕 O 轴的转动惯量，为

$$I=\frac{1}{12}ml^2+mr^2$$

代入(2)式，得

$$mg\,r\cos\varphi=\omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{12}ml^2+mr^2\right)=2mr\omega\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

因此，为使 ω 保持不变，甲虫爬行的速度$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$应为

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{g}{2\omega}\cos\varphi=\frac{g}{2\omega}\cos\omega t \tag{3}$$

(3)式表明，甲虫速度$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$随时间变化，即甲虫需按(3)式适当调整其爬行速度，以确保 ω 不变．

由(3)式，得

$$\mathrm{d}r=\frac{g}{2\omega}\cos\omega t\,\mathrm{d}t$$

积分，得

$$r=\frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t+C$$

式中 C 为积分常量．因初条件为

$$t=0\text{ 时},r=\frac{l}{4}$$

故

$$C=\frac{l}{4}$$

因此，在极坐标系中，甲虫轨迹的参变方程为

$$\begin{cases}r=\dfrac{l}{4}+\dfrac{g}{2\omega^2}\sin\omega t\\ \varphi=\omega t\end{cases}\tag{4}$$

当麦杆转到竖直位置时，$\varphi=\omega t=\frac{\pi}{2}$，要使甲虫在此之前爬到杆端，要求 $r\geqslant\frac{l}{2}$，由(4)式，得

$$\frac{g}{2\omega^2}\geqslant\frac{l}{4}$$

即

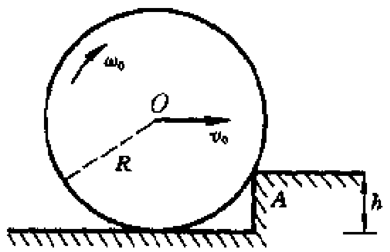
$$\omega^2\leqslant\frac{2g}{l}$$

把(1)式代入，得出对 v_0 的限制为

$$v_0^2\leqslant\frac{49}{72}gl$$

【题6】 如力图6－6－1，半径为 R 的均匀实心圆柱体在水平地面上作纯滚动，其中心 O 点的速度为 v_0，它向前滚动时遇到一个高为 h 的台阶，并发出完全非弹性碰撞．设圆柱和台阶前缘之间的摩擦系数足够大．

试问：1. v_0 为何值时圆柱体能不脱离 A 点而滚上台阶继续前进？ 2. 对台阶高度 h 有什么限制？

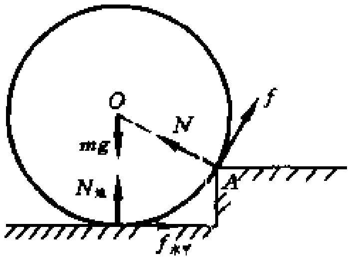


力图 6－6－1

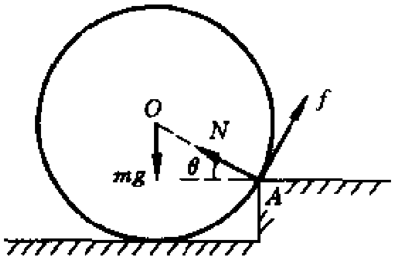
【分析】 因碰撞时间极短，全过程可简化为两个互相衔接的力学过程：圆柱体与台阶的完全非弹性碰撞过程，从圆柱体与台阶相接触到圆柱体脱离地面开始上翻为止；以及圆柱体的上翻过程，从开始上翻到完全登上台阶为止．两个过程是互相衔接的，碰后的瞬间就是开始上翻的瞬间．通过碰撞过程的讨论，可将圆柱体碰后开始上翻的初角速度 ω 与圆柱体碰前的质心速度 v_0 建立联系．通过上翻过程的讨论，可求出能登上台阶所需的初角速度．

如力图 6－6－2，在碰撞过程中，圆柱体的动量与机械能均不守恒，但经分析后可知，圆柱体对 A 点的角动量在碰撞前、后近似守恒．实际上，在碰撞过程中圆柱体受到五个力：重力 mg，水平地面所施支持力 $N_{地}$，水平地面所施摩擦力 $f_{水平}$，台阶所施摩擦力 f，以及台阶的支持力 N，各力的作用点和方向已在力图 6－6－2 中画出．取 A 点为参考点，则 N 和 f 对圆柱体的冲量矩为

零，即对圆柱体角动量的改变无贡献．对圆柱体角动量改变有贡献的是 mg，$N_{地}$ 和 $f_{水平}$ 三力的冲量矩．由于碰撞时间极短，上述三力又是有限力，故它们的冲量矩很小，所引起的角动量改变比原先圆柱体的角动量要小得多，可忽略不计．于是，圆柱体对 A 轴的角动量在碰撞前、后可近似看作不变．



力图 6－6－2



力图 6－6－3

如力图 6－6－3，在上翻过程中，因圆柱体与台阶之间的摩擦系数足够大，两者之间无相对滑动，故圆柱体以 A 轴作定轴转动．取圆柱体和地球为物体系，其机械能守恒．由此可求出圆柱体能翻上台阶所必须的初角速度．此初角速度与原来的质心速度已经通过碰撞过程的角动量守恒建立了联系，于是本题可解．

圆柱体能否翻上台阶，还受到另一因素的制约，即在整个上翻过程中必须满足 $N>0$ 的条件，否则圆柱体将脱离台阶 A 点，一旦中途脱离，圆柱体就不可能翻上台阶．$N>0$ 的条件能否满足，与圆柱体最初的质心速度 v_0 有关．v_0 越大，上翻时的初始角速度 ω 也越大，质心绕 A 点作圆周运动所需的向心力也越大，N 就越小．当 v_0 超过某一临界值时，上翻过程中必将出现 $N=0$ 的情况，圆柱体将脱离台阶，无法完成翻上台阶的过程．

总之，圆柱体要能翻上台阶，v_0 不能太小，否则能量不够，翻不上去；v_0 也不能太大，否则虽然能满足能量条件，但圆柱体在上翻过程中会与台阶脱离接触，同样翻不上去．根据对 v_0 的这些要求，即可求出对台阶高度 h 的限制．

【解】 1．在圆柱体与台阶作完全非弹性碰撞的过程中，对于通过 A 点的轴，圆柱体的角动量守恒，故有

$$mv_0(R-h)+I_0\omega_0=I_A\omega \tag{1}$$

式中 I_0 和 I_A 分别是圆柱体绕 O 点和 A 点的转动惯量，ω_0 是碰前圆柱体的角速度，ω 是碰后即圆柱体开始上翻时的初始角速度，$mv_0(R-h)$ 是碰前圆柱体质心绕 A 点的角动量，$I_0\omega_0$ 是碰前圆柱体绕质心转动的角动量，$I_A\omega$ 是碰后圆柱体绕 A 点的角动量．其中

$$v_0=R\omega_0 \tag{2}$$

$$I_0=\frac{1}{2}mR^2 \tag{3}$$

$$I_A=\frac{1}{2}mR^2+mR^2=\frac{3}{2}mR^2 \tag{4}$$

由(1)、(2)、(3)、(4)式，解出

$$\omega=\frac{v_0}{R}\left(1-\frac{2h}{3R}\right) \tag{A}$$

圆柱体上翻过程中，圆柱体与地球构成的物体系的机械能守恒．取 A 点所在的水平面为势能零点．开始上翻时的动能为$\frac{1}{2}I_A\omega^2$，重力势能为 $mg(R-h)$；上翻到任意的 θ 位置时（见力图 6-6-3），重力势能为 $mgR\sin\theta$，动能为$\frac{1}{2}I_A\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2$，其中$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\omega_\theta$ 是圆柱体上翻到 θ 位置时的角速度．于是，

$$mg(R-h)+\frac{1}{2}I_A\omega^2=mg\sin\theta+\frac{1}{2}I_A\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 \tag{5}$$

把(A)式的 ω 代入(5)式，得

$$\omega_\theta^2=\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2=\frac{4g(R-h)}{3R^2}-\frac{4g\sin\theta}{3R}+\left(1-\frac{2h}{3R}\right)^2\frac{v_0^2}{R^2} \tag{B}$$

圆柱体能够滚上台阶的条件是，当 $\theta=\frac{\pi}{2}$时，

$$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)_{\theta=\frac{\pi}{2}}>0 \tag{6}$$

取(B)式中的 $\theta=\frac{\pi}{2}$，代入(6)式，得

$$\left(1-\frac{2h}{3R}\right)^2 v_0^2>\frac{4}{3}gh$$

或

$$v_0^2>\frac{12R^2hg}{(3R-2h)^2} \tag{C}$$

圆柱体上翻过程中，不脱离 A 点的条件是

$$N>0 \tag{7}$$

在圆柱体上翻过程中，mg、N、f 决定了圆柱体质心的运动，在 OA 方向质心的运动方程为

$$mg\ \sin\theta-N-mR\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 \tag{8}$$

由(7)、(8)式及(B)式，得

$$\begin{aligned}N&=mg\ \sin\theta-mR\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\\&=\frac{7}{3}mg\ \sin\theta-\frac{4}{3}mg\left(1-\frac{h}{R}\right)-m\left(1-\frac{2h}{3R}\right)^2\frac{v_0^2}{R}>0\end{aligned} \tag{D}$$

(D)式表明，N 是 θ 的函数，在上翻过程中 θ 逐渐加大，N 相应增大，θ 的最小值 $\theta_{\min}$ 相应于 N 的最小值 $N_{\min}$．由几何关系，$\theta_{\min}$ 满足

$$\sin\ \theta_{\min}=1-\frac{h}{R} \tag{9}$$

把(9)式代入(D)式，得

$$\begin{aligned}N_{\min}&=\frac{7}{3}mg\ \left(1-\frac{h}{R}\right)-\frac{4}{3}mg\left(1-\frac{h}{R}\right)-m\left(1-\frac{2h}{3R}\right)^2\frac{v_0^2}{R}\\&=mg\left(1-\frac{h}{R}\right)-m\left(1-\frac{2h}{3R}\right)^2\frac{v_0^2}{R}>0\end{aligned}$$

即

$$\left(1-\frac{2h}{3R}\right)^2\frac{v_0^2}{R}<g\left(1-\frac{h}{R}\right) \tag{E}$$

由(C)、(E)式,圆柱体既不脱离 A 点又能滚上台阶继续前进的条件是

$$g(R-h)>\left(1-\frac{2h}{3R}\right)^2 v_0^2>\frac{4}{3}gh$$

因此,对 v_0 取值的限制是

$$\frac{9gR^2(R-h)}{(3R-2h)^2}>v_0^2>\frac{12ghR^2}{(3R-2h)^2} \tag{F}$$

2. 上述(F)式是全部(1)式至(9)式的结果,它还给出了对台阶高度 h 的限制条件为

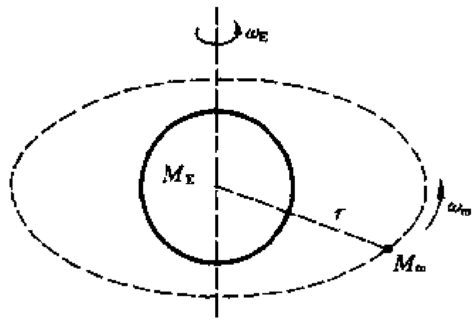
$$\frac{9gR^2(R-h)}{(3R-2h)^2}>\frac{12ghR^2}{(3R-2h)^2}$$

即

$$h<\frac{3}{7}R \tag{G}$$

(F)、(G)两式即为所求 .

【题 7】 如图,地球和月球的质量分别为 M_E 和 M_m,两者中心的距离用 r 表示,月球可看作质点 . 设地球的自转轴和月球绕地球作圆周运动的转轴重合,都通过地球中心,地球和月球的角速度分别为 ω_E 和 ω_m. 由于潮汐运动,地球自转角速度会发生微小变化,从而地球和月球的间距以及地球和月球系统的总能量也将发生变化 .



力图 6－7－1

1. 试证明,地球和月球间距的时间变化率 $\dot{r}$ 与地球自转角速度的时间变化率 $\dot{\omega}_E$ 的关系为

$$\dot{r}=-\frac{2\sqrt{r}\,I_E}{M_m\sqrt{GM_E}}\dot{\omega}_E$$

式中 I_E 是地球对自转轴的转动惯量,G 是引力常量 .

2. 试导出地球和月球系统机械能时间变化率的表达式 .

3. 设现在的地球与月球间距为 $r(0)$,地球的自转角速度为 $\omega_E(0)$,受扰动后相应的量变为 $r(t)$ 和 $\omega_E(t)$,因扰动很小,月球仍作圆周运动 . 试证明

$$\omega_E(t)=\omega_E(0)-\frac{M_m\sqrt{GM_E}}{I_E}\left[\sqrt{r(t)}-\sqrt{r(0)}\right]$$

已知 $G=6.672\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$,$M_E=5.89\times10^{24}$ kg,$M_m=7.34\times10^{22}$ kg,$r=3.84\times10^8$ m,$R_E=6.37\times10^6$ m(地球半径). 试计算地球和月球间距增加 2% 时,地球日将变成多少小时 .

【分析】 地、月系统不受外力矩,系统的角动量守恒,它给出了 ω_E、ω_m、r 的关系 . 月球绕地球作圆周运动的向心力为地球引力,所以 ω_m 与 r 有关 . 由此可得出 ω_E 与 r 的关系,于是第 1 问和第 3 问可解 . 它表明 r 的变化与 ω_E 的变化是有联系的 .

地、月系统的总机械能 E 包括地球自转动能(与 ω_E 有关),月球绕地球转动的动能(与 ω_m

有关），以及地、月之间的引力势能（与 r 有关）．因此，$\frac{dE}{dt}$ 可用 $\dot{r}$ 表示，此即第 2 问．

月球引力引起的潮汐摩擦将损耗的机械能转变为热能，使地、月系统的总机械能 E 减少，导致地球自转角速度 ω_E 变小，地、月间距 r 加大．

【解】 1．地、月系统不受外力矩，角动量守恒，相对于地球的自转轴，有

$$I_E\omega_E + M_m r^2\omega_m = 常量$$

式中

$$I_E = \frac{2}{5}M_E R_E^2$$

为地球的转动惯量．对时间 t 求导，得

$$I_E\dot{\omega}_E + M_m\frac{d}{dt}(r^2\omega_m) = 0 \tag{1}$$

月球绕地球作圆周运动，由牛顿第二定律，得

$$G\frac{M_E M_m}{r^2} = M_m r\omega_m^2 \tag{2}$$

即

$$\omega_m = \left(\frac{GM_E}{r^3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

代入(1)式，得

$$I_E\dot{\omega}_E + M_m\sqrt{GM_E}\,\frac{d}{dt}(r^{\frac{1}{2}}) = 0 \tag{3}$$

即

$$\frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}\dot{r} = -\frac{I_E\,\dot{\omega}_E}{M_m\sqrt{GM_E}}$$

故

$$\dot{r} = -\frac{2\sqrt{r}\,I_E}{M_m\sqrt{GM_E}}\dot{\omega}_E \tag{4}$$

它表明，地球自转角速度 ω_E 的减小，将导致地、月间距 r 的增大．

2．地、月系统的机械能 E 包括地球自转动能，月球绕地球转动的动能以及地、月间的引力势能，为

$$E = \frac{1}{2}I_E\,\omega_E^2 + \frac{1}{2}M_m\,r^2\,\omega_m^2 - G\frac{M_E M_m}{r}$$

把(2)式代入，得

$$E = \frac{1}{2}I_E\,\omega_E^2 - G\frac{M_E M_m}{2r}$$

机械能 E 随时间 t 的变化率为

$$\frac{dE}{dt} = I_E\,\omega_E\,\dot{\omega}_E + \frac{GM_E M_m}{2r^2}\,\dot{r}$$

把(4)式中的 $\dot{\omega}_E$ 代入，得

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=-\frac{M_{\mathrm{m}}}{2}\left(\omega_{\mathrm{E}}\sqrt{\frac{GM_{\mathrm{E}}}{r}}-\frac{GM_{\mathrm{E}}}{r^2}\right)\dot{r}$$

把基本常量值代入，可知上式圆括号内的量是正值．因此，当 $\dot{r}>0$ 时，$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}<0$. 因潮汐摩擦，$\omega_{\mathrm{E}}$ 将变小，由(4)式，r 要变大，故 E 将变小．

3．由(3)式，

$$\mathrm{d}\omega_{\mathrm{E}}=-\frac{M_{\mathrm{m}}}{I_{\mathrm{E}}}\sqrt{GM_{\mathrm{E}}}\,\mathrm{d}(\sqrt{r})$$

积分，得

$$\omega_{\mathrm{E}}(t)-\omega_{\mathrm{E}}(0)=-\frac{M_{\mathrm{m}}\sqrt{GM_{\mathrm{E}}}}{I_{\mathrm{E}}}[\sqrt{r(t)}-\sqrt{r(0)}]$$

或

$$\frac{\omega_{\mathrm{E}}(t)}{\omega_{\mathrm{E}}(0)}=1-\frac{M_{\mathrm{m}}\sqrt{GM_{\mathrm{E}}\,r(0)}}{I_{\mathrm{E}}\,\omega_{\mathrm{E}}(0)}\left[\sqrt{\frac{r(t)}{r(0)}}-1\right]$$

式中 $t=0$ 为现在时刻，$t=t$ 是将来某时刻．当

$$\frac{r(t)}{r(0)}=1.02$$

时，利用有关基本常量，得

$$\frac{\omega_{\mathrm{E}}(t)}{\omega_0(t)}=0.96$$

因此，当因潮汐摩擦使地、月间距比现在增加 2% 时，一个地球日（地球自转一圈的时间）将延长为

$$\frac{24}{0.96}=25\ \mathrm{h}$$

【题 8】 某行星相对其质心轴的转动惯量为 I，自转角速度为 Ω. 质量为 m 的卫星（可看作质点）绕该行星沿圆轨道运动，轨道半径为 r，角速度为 ω，假定两种角速度的方向一致．

1. 一般情形下 Ω 与 ω 并不相等，由于行星上的潮汐摩擦，行星自转角速度将发生变化，卫星的圆运动角速度也将相应地改变，试求两种角速度的改变量之间的关系．

2. 潮汐摩擦将引起行星与卫星系统机械能的损耗，试问在什么情形下系统机械能可达稳定值．

【分析】 取行星及其卫星为物体系，由于系统内部的摩擦作用，总机械能不守恒，但总角动量是守恒的．总角动量不仅与 Ω 和 ω 有关，还与行星与卫星之间的距离 r 有关．Ω，ω 和 r 三者会同时发生变化（参看本章题 7），设三者的改变量分别为 $\mathrm{d}\Omega$，$\mathrm{d}\omega$ 和 $\mathrm{d}r$. 只要找到 $\mathrm{d}r$ 与 $\mathrm{d}\omega$ 之间的关系，利用角动量守恒定律就可求得 $\mathrm{d}\Omega$ 与 $\mathrm{d}\omega$ 的关系．

写出系统总机械能 E 的表达式，并把它看成是 ω 的函数，在稳定状态下应有 $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\omega}=0$，据此可得出 E 达到稳定的条件．

【解】 1. 行星与卫星系统角动量 L 和总机械能 E 的表达式为

$$L = I\Omega + mr^2\omega \tag{1}$$

$$E = \frac{1}{2}I\Omega^2 + \frac{1}{2}mr^2\omega^2 - G\frac{Mm}{r} \tag{2}$$

式中 M 是行星的质量,卫星看作质点．

因卫星绕行星作圆周运动,故有

$$G\frac{Mm}{r^2} = mr\omega^2$$

或

$$\frac{GM}{r^3} = \omega^2$$

取微分,得

$$-3\frac{GM}{r^4}\mathrm{d}r = 2\omega\ \mathrm{d}\omega$$

故 $\mathrm{d}r$ 与 $\mathrm{d}\omega$ 之间的关系为

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\omega} = -\frac{2\omega r}{\frac{3GM}{r^3}} = -\frac{2r}{3\omega} \tag{3}$$

对(1)式取微分,得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}L &= I\mathrm{d}\Omega + mr^2\,\mathrm{d}\omega + 2m\omega r\ \mathrm{d}r \\ &= I\ \mathrm{d}\Omega + \left(mr^2 + 2m\omega r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\omega}\right)\mathrm{d}\omega\end{aligned}$$

把(3)式代入,又因角动量守恒,$\mathrm{d}L=0$,得

$$I\mathrm{d}\Omega - \frac{1}{3}mr^2\mathrm{d}\omega = 0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}\omega} = \frac{mr^2}{3I} \tag{4}$$

由于系统内部耗散力的作用,使行星自转角速度 Ω 发生变化,则 ω 和 r 都将发生相应变化．(3)、(4)两式表明,r 和 Ω 的改变量都可用 ω 的改变量表示．

2. 对(2)式取微分,注意 Ω、ω 和 r 均为可变量,得

$$\mathrm{d}E = I\Omega\ \mathrm{d}\Omega + mr\omega^2\mathrm{d}r + mr^2\omega\mathrm{d}\omega + \frac{GMm}{r^2}\mathrm{d}r$$

上式右边最后一项可写成 $mr\omega^2\mathrm{d}r$,故有

$$\mathrm{d}E = I\Omega\mathrm{d}\Omega + 2mr\omega^2\mathrm{d}r + mr^2\omega\mathrm{d}\omega = \left(I\Omega\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}\omega} + 2mr\omega^2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\omega} + mr^2\omega\right)\mathrm{d}\omega$$

把(3)、(4)两式代入,得

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{3}mr^2(\Omega - \omega)\mathrm{d}\omega$$

或

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\omega} = \frac{1}{3}mr^2(\Omega - \omega)$$

能量达到稳定值的条件是

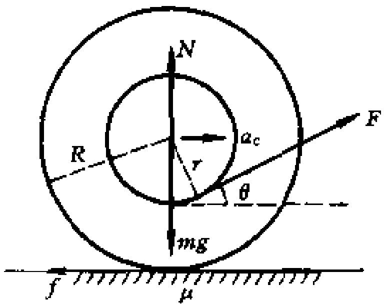
$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\omega}=0$$

即

$$\Omega=\omega$$

这就是说，当卫星的旋转角速度 ω 与行星自转角速度 Ω 相同时，系统的能量 E 达到稳定．事实上，当 $\Omega=\omega$ 时，由卫星引起的行星上的潮涨潮落现象不再出现，潮汐摩擦不再存在，因而系统的机械能没有损耗．

【题 9】 如图，一线轴质量为 m，绕质心轴的转动惯量为 I，大小半径分别为 R 和 r，轴上绕线，以力 F 拉线，拉力方向与水平面的夹角用 θ 表示．线轴放置在水平桌面上，与桌面之间的摩擦系数为 μ，试讨论线轴的运动情况．



力图 6－9－1

【分析】 如图，当以作用力 F 向右拉线轴时，线轴将受到向左的摩擦力 f，在 F 和 f 的共同作用下，线轴质心产生加速度，同时产生角加速度．根据质心运动定理和转动定理可求得质心加速度和角加速度，从而线轴的运动情形可知．

但必须区分如下两种情况．当 μ 足够大时，线轴将作纯滚运动，此时摩擦力为静摩擦力，线轴质心的平动与线轴的转动之间有确定的关系．当 μ 较小时，线轴既滚又滑，此时摩擦力为恒定的滑动摩擦力，线轴质心的平动与线轴的转动之间没有确定的关系．

先假定线轴作纯滚运动，求解支持力 N，静摩擦力 f，以及质心加速度和角加速度．纯滚的动力学条件为 $f\leqslant\mu N$，据此可得出实现纯滚时 μ 的取值范围，并得出 μ 的下限值．当 μ 小于该下限值时，线轴作既滚又滑的运动，必须重新列方程求解质心加速度和角加速度．

【解】 1．纯滚情形．摩擦力 f 为静摩擦力，设方向如图．由质心运动定理，有

$$N+F\sin\theta-mg=0$$
$$F\cos\theta-f=ma_C$$

由转动定理，有

$$fR-Fr=I\beta$$

由纯滚条件，有

$$\beta=\frac{a_C}{R}$$

由以上四式，解出静摩擦力 f，支持力 N，质心加速度 a_C，角加速度 β 为

$$a_C=\frac{R(R\cos\theta-r)}{I+mR^2}F$$

$$\beta=\frac{R\cos\theta-r}{I+mR^2}F$$

$$f=\frac{mRr+I\cos\theta}{I+mR^2}F,\quad N=mg-F\sin\theta$$

根据以上四个物理量的表达式，可以得出如下的结论．(1)$f>0$，即静摩擦力 f 的方向始终与所设方向一致，在图中水平向左．(2)为使线轴保持在桌面上运动，即不被提离桌面，必须满足 $N>0$，即要求 $F<\frac{mg}{\sin\theta}$．(3)当 $\cos\theta>\frac{r}{R}$时，$a_C>0$，线轴质心向右运动，同时 $\beta>0$，线轴顺时针转动．(4)当 $\cos\theta<\frac{r}{R}$时，$a_C<0$，$\beta<0$，线轴质心向左运动，同时线轴逆时针转动．(5)为了实现上述纯滚运动，必须满足

$$f\leqslant\mu N$$

即

$$\frac{mRr+I\cos\theta}{I+mR^2}F\leqslant\mu(mg-F\sin\theta)$$

亦即要求摩擦系数 μ 满足条件

$$\mu\geqslant\frac{(mRr+I\cos\theta)F}{(I+mR^2)(mg-F\sin\theta)}=\mu_{\min}$$

2．既滚又滑情形．当 $\mu<\mu_{\min}$时，线轴既滚又滑，此时摩擦力 f 为滑动摩擦力，为

$$f=\mu N$$

重新列出方程(质心运动定理，转动定理)如下

$$N+F\sin\theta-mg=0$$
$$F\cos\theta-\mu N=ma_C$$
$$\mu NR-Fr=I\beta$$

解出

$$a_C=\frac{1}{m}[F(\cos\theta+\mu\sin\theta)-\mu mg]$$

$$\beta=\frac{1}{I}[\mu Rmg-F(\mu R\sin\theta-r)]$$

当 $\mu<\mu_{\min}$时，$a_c>0$，即线轴质心总是向右运动．但线轴的转动方向即 β 的方向却由 θ 角决定．当

$$\sin\theta<\frac{mg}{I}+\frac{r}{\mu R}\text{时，}\quad\beta>0$$

线轴顺时针转动．当

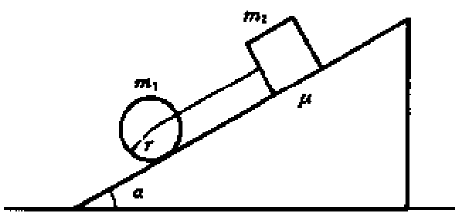
$$\sin\theta>\frac{mg}{I}+\frac{r}{\mu R}\text{时，}\quad\beta<0$$

线轴逆时针转动．

【题10】 如力图6－10－1，在 $\alpha=30°$的斜面上，质量 $m_2=4$ kg 的木块经轻绳与质量 $m_1=8$ kg、半径 $r=5$ cm 的实圆柱体的转轴相连．已知斜面的摩擦系数 $\mu=0.2$，圆柱体轴承中的摩擦可以忽略．试求物体的加速度 a，并讨论加速度 a、张力 T、圆柱体所受摩擦力 f_1 随斜面倾角 α 的变化．

【分析】 隔离木块和圆柱体，分析所受作用力，列方程时需要确定一些问题，如绳是否拉紧，即张力 T 是否为零；加速度 a 是否为零，即静止还是运动；圆柱体的运动是纯滚还是又滚又滑；等

等．显然，答案都与斜面倾角 α 的大小有关，需要细加分析．



力图 6－10－1

不难设想，当 $\alpha\neq0$ 但很小时，圆柱体有向下滚动的趋势，因受木块牵制，均静止不动，于是 $a=0, T\neq0$，当 α 增加到某个 $\alpha=\alpha_1$ 时，开始运动，$a\neq0, T\neq0$，圆柱体纯滚，木块滑动．随着 α 的继续增大，木块的运动逐渐赶上圆柱体，T 逐渐减小，当 α 增大到某个 $\alpha=\alpha_2$ 时，圆柱体开始又滚又滑，此时 $T=0$.

本题给定 $\alpha=30°$，究竟属于上述何种情况，计算后才能确定，不妨假设 $T\neq0, a\neq0$，圆柱体纯滚，并通过计算确定 α_1 和 α_2.

【解】 设绳张力 $T\neq0$，设圆柱体与木块以共同的平动加速度 $a\neq0$ 运动，设圆柱体纯滚动．

木块受重力 m_2g，张力 T，支持力 $m_2g\cos\alpha$，滑动摩擦力 $f_2=\mu m_2g\cos\alpha$．圆柱体受重力 m_1g，张力 T，支持力 $m_1g\cos\alpha$，静摩擦力 f_1．把圆柱体转动的角加速度表为 β，则运动方程为

$$\begin{cases} m_2g\sin\alpha+T-\mu m_2g\cos\alpha=m_2a \\ m_1g\sin\alpha-T-f_1=m_1a \\ f_1r=I\beta=\dfrac{1}{2}m_1r^2\beta \\ a=r\beta \end{cases}$$

解出

$$a=\frac{(m_1+m_2)g\sin\alpha-\mu m_2g\cos\alpha}{\dfrac{3}{2}m_1+m_2}$$

$$=\frac{3\sin\alpha-\mu\cos\alpha}{4}g=3.25\ \mathrm{m/s^2} \tag{1}$$

$$T=\frac{m_2g\left(\dfrac{3}{2}m_1\mu\cos\alpha-\dfrac{1}{2}m_1\sin\alpha\right)}{\dfrac{3}{2}m_1+m_2}$$

$$=\frac{m_1m_2}{3m_1+2m_2}(3\mu\cos\alpha-\sin\alpha)g$$

$$=(3\mu\cos\alpha-\sin\alpha)g=0.196\ \mathrm{N} \tag{2}$$

$$f_1=\frac{\dfrac{1}{2}m_1g[(m_1+m_2)\sin\alpha-\mu m_2\cos\alpha]}{\dfrac{3}{2}m_1+m_2}$$

$$=\frac{m_1}{3m_1+2m_2}[(m_1+m_2)\sin\alpha-\mu m_2\cos\alpha]g$$

$$=(3\sin\alpha-\mu\cos\alpha)g=13.01\ \mathrm{N} \tag{3}$$

由(1)式，加速度 $a>0$ 的条件是

$$\tan\alpha>\frac{\mu m_2}{m_1+m_2}=\frac{\mu}{3}$$

$$\alpha > \alpha_1 = \arctan\frac{\mu}{3} = 3°49'$$

α_1 就是圆柱体与斜面开始运动的斜面倾角．

由(2)式，张力 $T>0$ 的条件是

$$\frac{3}{2}m_1\mu\cos\alpha - \frac{1}{2}m_1\sin\alpha > 0$$

即

$$\tan\alpha < 3\mu$$

$$\alpha < \alpha_2 = \arctan 3\mu = 30°58'$$

α_2 是圆柱体从纯滚过渡到又滚又滑的斜面倾角．

由(3)式，圆柱体纯滚的条件是

$$f_1 = (3\sin\alpha - \mu\cos\alpha)g \leqslant \mu m_1 g\cos\alpha$$

即

$$\tan\alpha \leqslant 3\mu$$

$$\alpha \leqslant \alpha_2 = \arctan 3\mu = 30°58'$$

与由(2)式得出的结论相同．

本题给出的 $\alpha = 30°$，满足 $\alpha_2 > \alpha > \alpha_1$ 的要求，因此，求解时附加的三条假设是合理的．

若 $0 < \alpha < \alpha_1$，则木块与圆柱体均静止不动，加速度 $a=0$，绳拉紧，张力 $T \neq 0$，当 α 从 0 增大到 α_1 时，张力 T 从 0 逐渐增大．

若 $\alpha_2 < \alpha < 90°$，则圆柱体又滚又滑，绳张力 $T=0$，圆柱体受滑动摩擦力 $f_1 = \mu m_1 g\cos\alpha$，于是圆柱体与木块遵循同样的运动方程

$$mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma$$

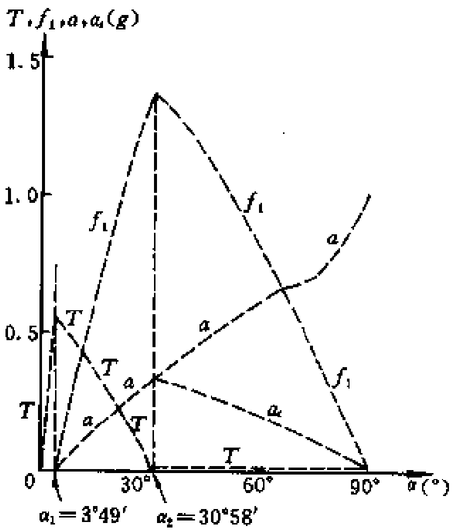
式中的 m 可取 m_1、m_2 或 (m_1+m_2)．圆柱体与木块共同的平动加速度为

$$a = (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)g$$

这时圆柱体的滚动加速度为

$$a_t = r\beta = r\left(\frac{f_1 r}{\frac{1}{2}m_1 r^2}\right)$$

$$= \frac{\mu m_1 g\cos\alpha}{\frac{m_1}{2}} = 2\mu g\cos\alpha \qquad (4)$$



力图 6-10-2

若 $\alpha = 90°$，则 $a = g$，摩擦力 $f_1 = f_2 = 0$，张力 $T = 0$.

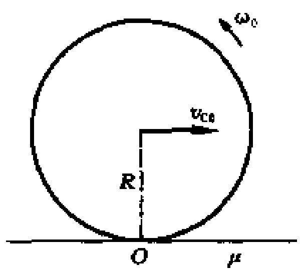
以上(1)、(2)、(3)、(4)式的结果如下述数据表及力图 6-10-2 所示．

数据表(以 g 为单位)

α	a	f_1	T	a_t
$3°49'(\alpha_1)$	0	0	0.53	0
$10°$	0.08	0.32	0.43	0.08
$20°$	0.21	0.84	0.26	0.21
$30°$	0.33	1.32	0.02	0.33
$30°58'(\alpha_2)$	0.34	1.37	0	0.34
$45°$	0.49	1.12	0	0.28
$60°$	0.62	0.8	0	0.20
$75°$	0.71	0.4	0	0.10
$90°$	1	0	0	0

【本题是 1968 年第 2 届 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)试题.】

【题 11】 如图,半径为 R 的乒乓球,绕质心轴的转动惯量 $I=\frac{2}{3}mR^2$,m 为乒乓球的质量,以一定的初始条件在粗糙的水平面上运动.开始时球的质心速度为 v_{C0},初角速度为 ω_0,两者的方向如图所示.已知乒乓球与地面之间的摩擦系数为 μ.试求乒乓球开始作纯滚运动所需的时间及纯滚时的质心速度.



力图 6-11-1

【分析】 如图,开始时乒乓球质心向右运动同时逆时针转动,表明作又滚又滑运动,所受地面摩擦力为滑动摩擦力,其大小为 μmg,是定值.滑动摩擦力既阻滞质心的运动,也阻滞绕质心的转动,使质心速度 v_C 和转动角速度 ω 越来越小.

若质心初速度较大,使得转动角速度减为零时,质心速度尚未减为零,则球将继续向前(即向右)运动.在滑动摩擦力的作用下,乒乓球将反转(顺时针转动)并加速(角加速度不为零),在转动角速度较小与质心速度仍不匹配(即仍未达到纯滚条件 $v_C=R\omega$ 相应的 ω 值)时,球仍是又滚又滑.此后,由于滑动摩擦力的作用,质心速度继续减小,同时反向角速度(即顺时针转动的角速度)不断增大,直到满足 $v_C=R\omega$ 条件时,乒乓球开始作纯滚运动(顺时针转动).

若质心初速度较小,使得质心速度首先减小为零,而转动(逆时针)角速度尚未减为零,则在静摩擦力的作用下,质心将从静止反向(即向左)作加速运动,同时按原方向(即逆时针)转动的角速度继续减小,直到满足 $v_C=R\omega$ 条件时,乒乓球开始作纯滚运动(逆时针转动).

利用质心运动定理和转动定理可以求出又滚又滑阶段所需的时间,以及达到纯滚时的质心速度.也可以根据角动量守恒(选择适当的参考点),先求出纯滚时的质心速度,然后求出达到纯滚所需的时间.

【解】 规定如图的水平向右为质心速度的正方向,规定如图的逆时针转动为角速度的正方向.在球又滚又滑阶段,滑动摩擦力为定值.由质心运动定理,有

$$m\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}=-\mu mg$$

积分，并利用初条件为

$$t=0\text{ 时}, v_C=v_{C0}$$

得

$$v_C=v_{C0}-\mu gt \tag{1}$$

由转动定理

$$I\frac{d\omega}{dt}=-\mu mgR$$

积分，并利用初条件为

$$t=0\text{ 时}, \omega=\omega_0$$

得

$$\omega=\omega_0-\frac{\mu mgR}{I}t \tag{2}$$

由分析，纯滚条件为

$$v_C=-R\omega, \text{或} -v_C=R\omega \tag{3}$$

设达到纯滚的时间为 t_1(即又滚又滑阶段的时间为 t_1)，把(1)、(2)式，代入(3)式，得

$$v_{C0}-\mu gt_1=-R\left(\omega_0-\frac{\mu mgR}{I}t_1\right)$$

解出

$$t_1=\frac{v_{C0}+R\omega_0}{\mu g\left(1+\frac{mR^2}{I}\right)}=\frac{2(v_{C0}+R\omega_0)}{5\mu g}$$

把 t_1 代入(1)式，得出开始纯滚时质心速度为

$$\begin{aligned} v_C(t_1)&=v_{C0}-\mu gt_1\\ &=v_{C0}-\frac{2}{5}(v_{C0}+R\omega_0)=\frac{3}{5}v_{C0}-\frac{2}{5}R\omega_0 \end{aligned}$$

本题的另一解法是利用角动量守恒定律．如图，取开始时乒乓球与地面的接触点 O 为参考点，规定角动量的正方向为垂直图面向里，因乒乓球不受外力矩，故角动量守恒．球对参考点 O 的角动量等于质心角动量(对 O 点)与绕质心轴的角动量的矢量和．开始时(又滚又滑时)的角动量为$(mRv_{C0}-I\omega_0)$，开始纯滚时(即 t_1 时刻)的角动量为$(mRv_C+I\omega)$[其中 v_C 即为 $v_C(t_1)$]，两者相等，有

$$mRv_{C0}-I\omega_0=mRv_C+I\omega$$

或

$$v_C-v_{C0}=-\frac{I}{mR^2}(R\omega_0+R\omega)=-\frac{2}{3}(R\omega_0+R\omega)$$

因纯滚时满足条件

$$v_C=R\omega$$

故纯滚时的质心速度 v_C 满足

$$\left(1+\frac{2}{3}\right)v_C=v_{C0}-\frac{2}{3}R\omega_0$$

即

$$v_C=\frac{3}{5}v_{C0}-\frac{2}{5}R\omega_0$$

设达到纯滚所需时间为 t_1，则因

$$v_C=v_{C0}-\mu g t_1$$

即

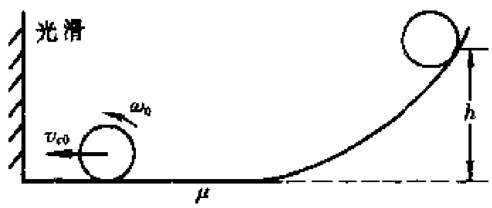
$$\frac{3}{5}v_{C0}-\frac{2}{5}R\omega_0=v_{C0}-\mu g t_1$$

故

$$t_1=\frac{2(v_{C0}+R\omega_0)}{5\mu g}$$

讨论：当$\left(\frac{3}{5}v_{C0}-\frac{2}{5}R\omega_0\right)>0$，即 $v_{C0}>\frac{2}{3}R\omega_0$ 时，$v_C>0$，即球达到纯滚后质心继续向右运动，顺时针转动．当 $v_{C0}<\frac{2}{3}R\omega_0$ 时，$v_C<0$，即球达到纯滚后质心向左运动，逆时针转动．

【题 12】 如图，实心圆柱体从高度为 h 的斜坡上从静止纯滚动地到达水平地面上，继续纯滚动，与光滑竖直墙作完全弹性碰撞后返回，经足够长的水平距离后重新作纯滚动，并纯滚动地爬上斜坡．设地面与圆柱体之间的摩擦系数为 μ，试求圆柱体爬坡所能达到的高度 h'．



力图 6-12-1

【分析】 碰撞前，圆柱体纯滚动，质心速度与角速度满足 $v_{C0}=R\omega_0$，因摩擦力不作功，机械能守恒．碰撞是完全弹性的，且墙光滑无摩擦，故碰后，ω_0 的大小方向都不变，v_{C0}的大小不变但反向．因此，碰后不再满足纯滚条件，圆柱体将又滚又滑．在摩擦力作用下，v_C 及 ω 均逐渐减小，经过一段时间后(因题设水平距离足够长，故仍在水平地面上)，以 v_{C1}和 ω_1 再次作纯滚动(参看本章题 11)．尔后纯滚动地爬坡，机械能守恒．

也可由整个过程中圆柱体机械能的改变 $mg(h'-h)$，应等于摩擦力在碰后又滚又滑阶段所作的功来计算．

【解】 如图，碰墙前，圆柱体作纯滚动，设质心速度为 v_{C0}，转动角速度为 ω_0，半径为 R，则

$$v_{C0}=R\omega_0$$

圆柱体从高 h 处静止下滚到碰墙前，机械能守恒，故有

$$mgh=\frac{1}{2}mv_{C0}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\omega_0^2$$

式中

$$I=\frac{1}{2}mR^2$$

是圆柱体绕中心轴的转动惯量．由以上三式，解出

$$v_{C0}=2\sqrt{\frac{gh}{3}},\quad \omega_0=\frac{2}{R}\sqrt{\frac{gh}{3}}$$

圆柱体与墙碰撞后，因墙光滑，碰后圆柱体角速度的大小方向均不变，仍为碰前的 ω_0，因作完全弹性碰撞，碰后圆柱体的质心速度的大小仍为碰前的 v_{C0}，但方向与碰前相反（即如力图 6-12-1 向右）.

碰后圆柱体又滚又滑，取碰后瞬间为计时零点，设圆柱体开始作纯滚动的时刻为 t_1，相应的质心速度为 v_{C1}，转动角速度为 ω_1，则由本章题 11，有

$$t_1=\frac{v_{C0}+R\omega_0}{\mu g\left(1+\frac{mR^2}{I}\right)}=\frac{2v_{C0}}{3\mu g}$$

$$v_{C1}=v_{C0}-\mu g t_1=\frac{1}{3}v_{C0}$$

$$\omega_1=\frac{v_{C1}}{R}=\frac{v_{C0}}{3R}$$

从 t_1 时刻后，圆柱体作纯滚动并爬坡，机械能守恒，最后爬到高 h' 处静止，故有

$$mgh'=\frac{1}{2}mv_{C1}^2+\frac{1}{2}I\omega_1^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{v_{C0}}{3}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{v_{C0}}{3R}\right)^2$$

$$=\frac{1}{12}mv_{C0}^2=\frac{m}{12}\left[2\sqrt{\frac{gh}{3}}\right]^2=\frac{1}{9}mgh$$

故

$$h'=\frac{h}{9}$$

方法二．圆柱体从 h 高度静止下滚（初态）到滚上 h' 的高度并静止（终态），整个过程机械能的增量为 $mg(h'-h)$，它应等于摩擦力的功．摩擦力只在又滚又滑阶段作功，即从碰后的零时刻到 t_1 时刻作功，它包括平动和转动两部分．

平动时摩擦力作功为

$$dW_1=-\mu mg v_C dt=-\mu mg(v_{C0}-\mu g t)dt$$

积分，得

$$W_1=-\mu mg\int_0^{t_1}(v_{C0}-\mu g t)dt$$

$$=-\mu mg v_{C0}t_1+\frac{1}{2}(\mu g)^2 m t_1^2=-\frac{4}{9}m v_{C0}^2$$

转动时摩擦力作功为

$$dW_2=-Md\theta=-\mu mgRd\theta=-\mu mgR\omega dt$$

式中 ω 随时间 t 的变化可利用本章题 11 中的(2)式，为

$$\omega=\omega_0-\frac{\mu mgR}{I}t$$

代入，得

$$dW_2=-\mu mgR\left(\omega_0-\frac{\mu mgR}{I}t\right)dt=-\mu mg(v_{C0}-2\mu g t)dt$$

积分，得

$$W_2=-\mu mg\int_0^{t_1}(v_{C0}-2\mu g t)dt$$

$$= -\mu mg\, v_{C0}\, t_1 + (\mu g)^2 m t_1^2 = -\frac{2}{9} m\, v_{C0}^2$$

摩擦力所作总功为

$$W = W_1 + W_2 = -\frac{2}{3} m\, v_{C0}^2$$

圆柱在又滚又滑阶段损失的动能为

$$\left(\frac{1}{2} m\, v_{C0}^2 + \frac{1}{2} I\omega_0^2\right) - \left(\frac{1}{2} m v_{C1}^2 + \frac{1}{2} I\omega_1^2\right) = \frac{3}{4} m (v_{C0}^2 - v_{C1}^2) = \frac{2}{3} m v_{C0}^2$$

以上两式符合动能定理．

因此，

$$W = mg(h' - h)$$

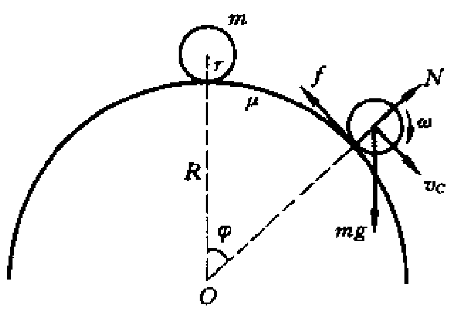
即

$$h' - h = \frac{W}{mg} = -\frac{2}{3}\frac{v_{C0}^2}{g} = -\frac{2}{3g}\cdot\frac{4}{3}gh = -\frac{8}{9}h$$

故

$$h' = \frac{h}{9}$$

【题 13】 如图，实心均匀小球自圆柱面的顶端从静止下滚．1. 为了保证在 $\varphi \leqslant 45°$ 的范围内小球作纯滚动，试问摩擦系数 μ 至少应为多少．2. 设 $\mu = 0.7$，试求纯滚结束时小球的质心速度 v_1．3. 试求小球从圆柱面脱离时小球的位置（用 φ 角表示）所满足的方程（不必求解）．



力图 6－13－1

【分析】 由小球质心的运动及转动所遵循的规律，以及纯滚时质心速度 v_C 与角速度 ω 的关系，可以确定小球下滚时的角速度 ω 以及所受支持力 N、摩擦力 f 等物理量随位置 φ 的变化．又，纯滚要求摩擦力为静摩擦力，即 $f \leqslant \mu N$．据此，在 $\varphi \leqslant 45°$ 范围内作纯滚动所需之 μ 可求．

纯滚结束时，小球所受摩擦力应刚好等于最大静摩擦力，即 $f = \mu N$，把解出的 f 和 N 代入，可以得出纯滚结束时小球所在的位置 φ_1 角．再利用小球质心运动定理的法向表示式，可求出此时小球的质心速度 v_1．

当 $\varphi > \varphi_1$ 时，小球进入又滚又滑阶段．重新列出小球质心运动遵守的动力方程，解出支持力 N 与 φ 角的关系．小球脱离圆柱面时，支持力 $N = 0$，由此条件可求出小球脱离圆柱面时其位置 φ_2 所满足的方程．

【解】 1. 如图，设圆柱面的半径为 R，小球半径为 r，小球质量为 m，小球受重力 mg，支持力 N 及摩擦力 f，各力的方向如图．由质心运动定理，有

$$\begin{cases} mg\sin\varphi - f = m\dfrac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} & (1) \\ mg\cos\varphi - N = \dfrac{mv_C^2}{R + r} & (2) \end{cases}$$

由转动定理，有

$$fr = I\beta = I\frac{d\omega}{dt} \tag{3}$$

纯滚条件为

$$v_C = r\omega \tag{4}$$

由(1)、(3)、(4)式，得

$$\left(\frac{I}{r} + mr\right)\frac{d\omega}{dt} = mg\sin\varphi \tag{5}$$

因

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\frac{d\omega}{d\varphi} \tag{6}$$

由(4)式 $v_C = r\omega$，又 $v_C = (R+r)\dot{\varphi}$，其中 $\dot{\varphi}$ 是小球质心绕圆柱面中心 O 点的角速度，ω 则是小球绕自身质心轴转动的角速度，故有

$$\dot{\varphi} = \frac{v_C}{R+r} = \frac{r}{R+r}\omega \tag{7}$$

由(6)、(7)式，得

$$\frac{d\omega}{dt} = \dot{\varphi}\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{r}{R+r}\omega\frac{d\omega}{d\varphi} \tag{8}$$

由(5)、(8)式，得

$$\omega d\omega = \frac{(R+r)mg\sin\varphi}{r\left(\frac{I}{r} + mr\right)}d\varphi = \frac{mg(R+r)}{I+mr^2}\sin\varphi\, d\varphi$$

积分，得

$$\frac{1}{2}\omega^2 = -\frac{mg(R+r)}{I+mr^2}\cos\varphi + C$$

初条件为

$$t=0 \text{ 时}, \varphi=0, \omega=0$$

故积分常量 C 为

$$C = \frac{mg(R+r)}{I+mr^2}$$

代入，得

$$\omega^2 = \frac{2mg(R+r)}{I+mr^2}(1-\cos\varphi)$$

其中

$$I = \frac{2}{5}mr^2$$

代入，得

$$\omega^2 = \frac{10(R+r)}{7r^2}g(1-\cos\varphi) \tag{9}$$

把(4)、(9)式代入(2)式，得出支持力 N 为

$$N = mg\cos\varphi - \frac{mr^2}{R+r}\omega^2 = mg\cos\varphi - \frac{mr^2}{R+r}\cdot\frac{10(R+r)}{7r^2}g(1-\cos\varphi)$$

$$= mg\left[\cos\varphi - \frac{10}{7}(1-\cos\varphi)\right] = mg\left(\frac{17}{7}\cos\varphi - \frac{10}{7}\right) \tag{10}$$

把(9)式对 φ 求导，得

$$2\omega\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{10(R+r)}{7r^2}g\sin\varphi$$

即

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{5(R+r)}{7r^2\omega}g\sin\varphi$$

代入(8)式，得

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{r\omega}{R+r}\cdot\frac{5(R+r)}{7r^2\omega}g\sin\varphi = \frac{5}{7r}g\sin\varphi$$

把上式代入(3)式，得摩擦力 f 为

$$f = \frac{I}{r}\frac{d\omega}{dt} = \frac{2}{7}mg\sin\varphi \tag{11}$$

这样，我们就由 ω 随 φ 的变化，得出了小球作纯滚动时所受支持力 N 及摩擦力 f 随 φ 的变化．即由(9)式的 $\omega(\varphi)$ 得出了(10)式的 $N(\varphi)$ 和(11)式的 $f(\varphi)$．

纯滚要求

$$f \leqslant \mu N$$

由(10)、(11)式，即要求

$$\frac{2}{7}mg\sin\varphi \leqslant \mu mg\left(\frac{17}{7}\cos\varphi - \frac{10}{7}\right)$$

因此，对摩擦系数 μ 的要求是

$$\mu \geqslant \frac{2\sin\varphi}{17\cos\varphi - 10}$$

当 $\varphi = 45°$ 时，要求

$$\mu \geqslant 0.7$$

请注意以下两点．

第一，可利用机械能守恒简单地得到(9)式．取小球和地球为物体系，在小球沿圆柱面从顶端自静止开始往下滚动的过程中，因静摩擦力 f 不作功，机械能守恒，故有

$$mg(R+r)(1-\cos\varphi) = \frac{1}{2}m v_C^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}mr^2\omega^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(I+mr^2)\omega^2$$

即

$$\omega^2 = \frac{2mg(R+r)}{I+mr^2}(1-\cos\varphi)$$

$$= \frac{10(R+r)}{7r^2}g(1-\cos\varphi)$$

第二，若假设小球在离开圆柱面之前，始终作纯滚动，则由(10)式脱离圆柱面时(即 $N=0$)

相应的 φ 角应满足

$$\cos\varphi=\frac{10}{17}$$

即

$$\varphi=54^\circ$$

应该指出，这种计算是错误的．因为小球在离开圆柱面之前，已经从纯滚动进入又滚又滑状态．认为小球在脱离前始终作纯滚动的假定是不现实的(除非 μ 为无穷大)，因而(10)式不能用来决定小球离开圆柱面的角度．

2．由第 1 问可知，当纯滚结束时，小球的位置 φ_1 角满足

$$\mu=\frac{2\sin\varphi_1}{17\cos\varphi_1-10} \tag{12}$$

现已知 $\mu=0.7$，故可解出

$$\varphi_1=45^\circ$$

由(10)式，在 φ_1 位置，支持力为

$$N_1=\frac{mg}{7}(17\cos\varphi_1-10)$$

由(2)式，在 φ_1 位置小球的质心速度 v_1 满足

$$\begin{aligned}\frac{v_1^2}{R+r}&=g\cos\varphi_1-\frac{N_1}{m}\\&=g\cos\varphi_1-\frac{g}{7}(17\cos\varphi_1-10)=\frac{10}{7}g(1-\cos\varphi_1)\end{aligned} \tag{13}$$

故小球结束纯滚时的质心速度 v_1 为

$$v_1=\sqrt{\frac{10}{7}(R+r)g(1-\cos\varphi_1)}=\sqrt{\frac{5}{7}(2-\sqrt{2})(R+r)g}$$

3．在又滚又滑阶段，小球所受摩擦力为滑动摩擦力，即

$$f=\mu N$$

又滚又滑时，小球质心运动的方程为

$$\begin{cases}mg\sin\varphi-\mu N=ma_C & (14)\\ mg\cos\varphi-N=\dfrac{mv_0^2}{R+r} & (15)\end{cases}$$

其中质心加速度 a_C 为

$$a_C=\frac{dv_C}{dt}=\frac{dv_C}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}=\frac{dv_C}{d\varphi}\cdot\frac{v_C}{R+r}=\frac{1}{2(R+r)}\frac{dv_C^2}{d\varphi}$$

代入(14)式，得

$$mg\sin\varphi-\mu N=\frac{m}{2(R+r)}\frac{dv_C^2}{d\varphi} \tag{16}$$

由(15)、(16)式，消去 N，得

$$mg\cos\varphi-\frac{mg}{\mu}\sin\varphi+\frac{m}{2\mu(R+r)}\frac{dv_C^2}{d\varphi}=\frac{mv_C^2}{R+r}$$

化简后得，

$$\frac{dv_C^2}{d\varphi}-2\mu v_C^2+2(R+r)g(\mu\cos\varphi-\sin\varphi)=0 \tag{17}$$

(17)式相应的齐次方程为

$$\frac{dv_C^2}{d\varphi}-2\mu v_C^2=0$$

其通解为

$$v_{C1}^2=Ae^{2\mu\varphi}$$

式中 A 为任意常量．非齐次方程(17)式的特解的形式为

$$v_{C2}^2=B\cos\varphi+C\sin\varphi$$

式中 B 和 C 为任意常量．代入方程(17)式，得

$$-B\sin\varphi+C\cos\varphi-2\mu(B\cos\varphi+C\sin\varphi)+2(R+r)g(\mu\cos\varphi-\sin\varphi)=0$$

即

$$[B+2\mu C+2(R+r)g]\sin\varphi=[C-2\mu B+2\mu(R+r)g]\cos\varphi$$

因上式对任意 φ 角都成立，必有

$$\begin{cases}B+2\mu C+2(R+r)g=0\\ C-2\mu B+2\mu(R+r)g=0\end{cases}$$

解出

$$B=\frac{2(R+r)(2\mu^2-1)g}{1+4\mu^2},\quad C=-\frac{6\mu(R+r)g}{1+4\mu^2}$$

故特解为

$$\begin{aligned}v_{C2}^2&=\frac{2(R+r)(2\mu^2-1)g}{1+4\mu^2}\cos\varphi-\frac{6\mu(R+r)g}{1+4\mu^2}\sin\varphi\\&=\frac{(R+r)g}{1+4\mu^2}[2(2\mu^2-1)\cos\varphi-6\mu\sin\varphi]\end{aligned}$$

因此方程(1)式的通解为

$$v_C^2=v_{C1}^2+v_{C2}^2=\frac{(R+r)g}{1+4\mu^2}[2(2\mu^2-1)\cos\varphi-6\mu\sin\varphi]+A'e^{2\mu\varphi} \tag{18}$$

式中 A' 为另一常量，可由又滚又滑开始时的初条件确定．初条件为

$$\varphi=\varphi_1 \text{ 时，}\quad v_C=v_1$$

由(13)、(18)式，得

$$\frac{10}{7}(R+r)g(1-\cos\varphi_1)=\frac{(R+r)g}{1+4\mu^2}[2(2\mu^2-1)\cos\varphi_1-6\mu\sin\varphi_1]+A'e^{2\mu\varphi_1}$$

即

$$\frac{10}{7}(1+4\mu^2)(1-\cos\varphi_1)=[2(2\mu^2-1)\cos\varphi_1-6\mu\sin\varphi_1]+\frac{A'e^{2\mu\varphi_1}}{(R+r)g}$$

故

$$A'=\left[\frac{10}{7}(1+4\mu^2)(1-\cos\varphi_1)-2(2\mu^2-1)\cos\varphi_1+6\mu\sin\varphi_1\right](R+1)ge^{-2\mu\varphi_1} \tag{19}$$

设 $\varphi=\varphi_2$ 时小球脱离圆柱面，此时 $N=0$，由方程(15)式，得

$$mg\cos\varphi_2=\frac{mv_2^2}{R+r}$$

式中 v_2 是 $\varphi=\varphi_2$ 时的质心速度，可由(18)式确定，故有

$$\cos\varphi_2=\frac{1}{1+4\mu^2}[2(2\mu^2-1)\cos\varphi_2-6\mu\sin\varphi_2]+\frac{A'}{(R+r)g}e^{2\mu\varphi_2}$$

把(19)式的 A' 代入，得出

$$\cos\varphi_2=\frac{1}{1+4\mu^2}[2(2\mu^2-1)\cos\varphi_2-6\mu\sin\varphi_2]+\left[\frac{10}{7}(1+4\mu^2)(1-\cos\varphi_1)-2(2\mu^2-1)\cos\varphi_1+6\mu\sin\varphi_1\right]e^{-2\mu\varphi_1} \quad (20)$$

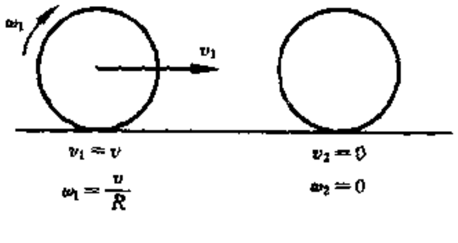
这就是确定小球脱离圆柱面时所在位置 φ_2 的方程．

作为一个特例，设 $\mu=0$，则由(12)式 $\varphi_1=0$，于是(20)式化为 $\cos\varphi_2=-2\cos\varphi_2+2$，即 $\cos\varphi_2=\frac{2}{3}$．

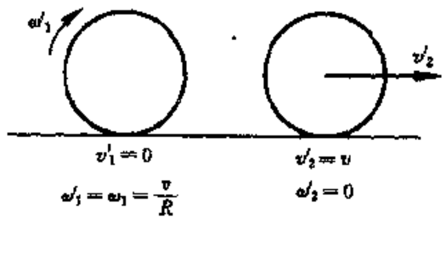
【题 14】 在水平地面上有两个完全相同的均匀实心球，其一作纯滚动，质心速度为 v，另一静止不动．两球作完全弹性碰撞，因碰撞时间很短，碰撞过程中摩擦力的影响可以忽略不计．

试求：1．碰后两球达到纯滚时的质心速度．2．全部过程中损失的机械能的百分数．

【分析】 两球运动情况的演变如各图所示，用下标 1，2 分别表示球 1 和球 2．如力图 6－14－1，碰前，球 1 纯滚，$v_1=v$，$\omega_1=\frac{v}{R}$；球 2 静止，$v_2=0$，$\omega_2=0$．由于碰撞是完全弹性的，且忽略其间摩擦力的影响，所以碰撞过程中能量守恒，动量守恒，又因两球完全相同，故刚碰后两球交换质心速度，$v_1'=0$，$v_2'=v$，如力图 6－14－2．因碰撞过程中，球 1 与球 2 均不受外力矩（摩擦力忽略），故碰前和刚碰后两球各自的角速度不变，$\omega_1'=\omega_1=\frac{v}{R}$，$\omega_2'=\omega_2=0$，如力图 6－14－2．如力图 6－14－3，碰后两球均又滚又滑，地面摩擦力作负功，消耗机械能．如力图 6－14－4，最后两球各自达到纯滚动的运动状态，$\omega_1''=\frac{v_1''}{R}$，$\omega_2''=\frac{v_2''}{R}$．



力图 6－14－1　碰前

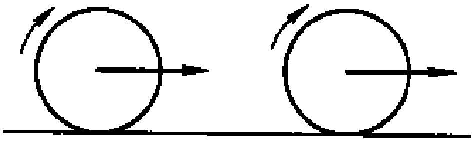


力图 6－14－2　刚碰后

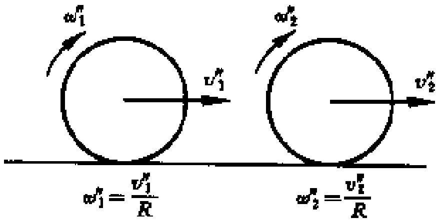
选地面上一点为参考点，则对此参考点，两球所受的摩擦力矩均为零，故碰后两球各自的角动量守恒，由此即可确定达到纯滚时两球质心速度 v_1'' 及 v_2'' 与 v 的关系，并求出损失的机械能．

另一方法．取刚碰后为 $t=0$ 时刻，取两球分别达到纯滚为 t_1 和 t_2 时刻，从 $t=0$ 到 t_1 和 t_2 两球又滚又滑，消耗能量．其间，质心速度的变化取决于摩擦力，转动角速度的变化取决于摩擦

力矩．加上纯滚条件，即可确定 t_1 和 t_2，再得出 v_1'' 及 v_2''．值得注意的是，对于球 1，刚碰后 $v_1'=0$，$\omega_1'=\dfrac{v}{R}$，所受摩擦力指向前方；对于球 2，刚碰后 $v_2'=v$，$\omega_2'=0$，所受摩擦力指向后方（即水平向左）．



力图 6－14－3， 又滚又滑



力图 6－14－4， 最后，两球均纯滚

【解】 1．选地面一点为参考点，则此两球所受摩擦力矩为零，碰后各自的角动量守恒．

球 1 刚碰后的角动量 L_1' 为

$$L_1'=I\omega_1'+mRv_1'=I\omega_1'=I\frac{v}{R}$$

球 1 达到纯滚时的角动量 L_1'' 为

$$L_1''=I\omega_1''+mRv_1''=I\frac{v_1''}{R}+mRv_1''$$

$$=v_1''\left(\frac{I}{R}+mR\right)$$

因

$$L_1'=L_1''$$

又

$$I=\frac{2}{5}mR^2$$

由以上四式，解出

$$v_1''=\frac{I}{I+mR^2}v=\frac{2}{7}v$$

球 2 刚碰后及达到纯滚时的角动量 L_2' 和 L_2'' 分别为

$$L_2'=I\omega_2'+mRv_2'=mRv_2'=mRv$$

$$L_2''=I\omega_2''+mRv_2''=I\frac{v_2''}{R}+mRv_2''=v_2''\left(\frac{I}{R}+mR\right)$$

因

$$L_2'=L_2''$$

故

$$v_2''=\frac{mR^2}{I+mR^2}v=\frac{5}{7}v$$

2．损失机械能的百分数为

$$\frac{\Delta E_K}{E_K}=\frac{\left[\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mR^2\left(\frac{v}{R}\right)^2\right]-\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{5}mR^2(\omega_1''^2+\omega_2''^2)\right]}{\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mR^2\left(\frac{v}{R}\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{7}{10}mv^2-\frac{7}{10}mv^2\cdot\frac{29}{49}}{\frac{7}{10}mv^2}=\frac{20}{49}=41\%$$

方法二．对于球1,刚碰后($t=0$ 时刻)的质心速度 $v_1'=0$,转动角速度 $\omega_1'=\frac{v}{R}$,又滚又滑．设在 t_1 时刻开始纯滚,质心速度为 v_1'',转动角速度为 ω_1''($v_1''=R\omega_1''$)．在这段时间内,球1受到的摩擦力指向前方(水平向右)．由

$$f=\mu mg=ma_C$$

得

$$a_C=\mu g$$

于是

$$v_1''=v_1'+\mu gt_1=\mu gt_1$$

由转动定理,

$$-\mu mgR=I\beta$$

得

$$\beta=-\frac{\mu mgR}{I}$$

故

$$\omega_1''=\omega_1'+\beta t_1=\frac{v}{R}-\frac{\mu mgR}{I}t_1$$

由纯滚条件

$$v_1''=\omega_1''R$$

由以上几式,解出

$$t_1=\frac{v}{\mu g\left(1+\frac{mR^2}{I}\right)}$$

故

$$v_1''=\frac{v}{1+\frac{mg^2}{I}}=\frac{2}{7}v$$

球2类似,只是 f 指向后方(水平向左),故

$$a_C=-\mu g,\quad \beta=\frac{\mu mgR}{I}$$

于是,有

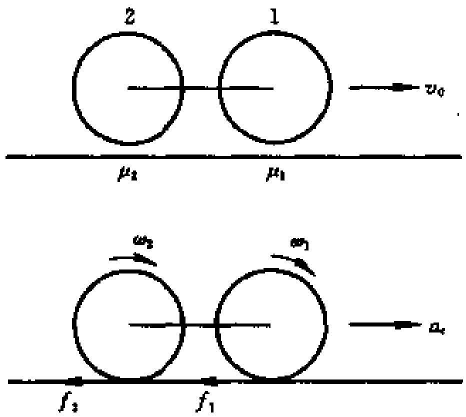
$$\begin{cases} v_2'' = v_2' - \mu g t_2 = v - \mu g t_2 \\ \omega_2'' = \omega_2' + \beta t_2 = 0 + \dfrac{\mu mgR}{I} t_2 \\ v_2'' = R\omega_2'' \end{cases}$$

解出

$$t_2 = \frac{v}{\mu g\left(1 + \dfrac{mR^2}{I}\right)}$$

$$v_2'' = v - \frac{v}{1 + \dfrac{mR^2}{I}} = v\left(1 - \frac{1}{1 + \dfrac{5}{2}}\right) = \frac{5}{7} v$$

【题 15】 如图,两个质量和半径均相同的实心圆柱轮,它们的质心轴互相平行,并用一轻杆相连,轴与轴承间的摩擦忽略不计．两轮先以共同的初速 v_0 沿水平方向运动,两轮的初角速度为零(如上图)．然后同时轻轻与地面相接触(如下图)．设两轮与地面之间的摩擦系数分别为 μ_1 和 $\mu_2(\mu_1 > \mu_2)$．试求两轮均变为纯滚动所需的时间及纯滚后的平动速度．



力图 6-15-1

【分析】 取两轮触地为计时零点．触地后两轮由于受摩擦力作用,质心速度将减慢,而角速度则从零开始增加．开始阶段质心速度较大,而角速度较小,纯滚条件 $v_C = \omega R$(v_C 为质心速度,ω 为角速度,R 为轮半径)不满足,两轮均又滚又滑,所受摩擦力为滑动摩擦力．因 $\mu_1 > \mu_2$,轮 1 的角速度增加快,首先达到纯滚．此时,轮 2 的角速度尚未达到纯滚所需的值,仍为又滚又滑,其角速度继续增加,直到轮也达到纯滚,只有在这时两轮才同时作纯滚运动．

整个运动可分为三个阶段．第一阶段,从 0 到 t_1,两轮均又滚又滑．第二阶段,从 t_1 到 t_2 轮 1 纯滚,轮 2 又滚又滑．第三阶段,t_2 以后,两轮均为纯滚．

解本题有两种方法．方法一是运用质心运动定理和质心系中的转动定理,仔细讨论上述三阶段的运动情况,求出各阶段所需的时间．此法较繁,但对运动变化的全过程描述清晰．方法二是选择合适的参考点,运用角动量守恒定律,取两轮接触地面为初态,取两轮均纯滚为终态,可直接求出从初态到终态所需时间．此法无需考虑两轮运动的演化过程,因而计算极为简单．

【解】 方法一．

第一阶段,从 0 到 t_1,两轮又滚又滑．

设每轮的质量为 m,半径为 R,任意时刻的角速度分别为 ω_1 和 ω_2,共同的质心加速度为 a_C．两轮均受滑动摩擦力的作用．由质心运动定理,有

$$2ma_C = -(\mu_1 + \mu_2)mg$$

故质心加速度 a_C 及质心速度 v_C 为

$$a_C = -\frac{\mu_1+\mu_2}{2}g, \quad v_C = v_0 - \frac{\mu_1+\mu_2}{2}gt$$

把质心系中的转动定理分别应用于两轮．对于轮 1,有

$$\mu_1 Rmg = \frac{1}{2}mR^2\beta_1$$

得出角加速度 β_1 和角速度 ω_1 为

$$\beta_1 = \frac{2\mu_1 g}{R}, \quad \omega_1 = \frac{2\mu_1 g}{R}t$$

同理,对于轮 2 有

$$\omega_2 = \frac{2\mu_2 g}{R}t$$

由此可见,因在同一时刻 $\omega_1 > \omega_2$(因 $\mu_1 > \mu_2$),故轮 1 首先满足纯滚条件

$$v_C = \omega_1 R$$

设轮 1 在 t_1 时刻达到纯滚,则有

$$v_0 - \frac{\mu_1+\mu_2}{2}gt_1 = 2\mu_1 g t_1$$

即

$$t_1 = \frac{2v_0}{(5\mu_1+\mu_2)g}$$

在 t_1 时刻,质心速度为

$$v_{C1} = v_0 - \frac{\mu_1+\mu_2}{2}gt_1 = \frac{4\mu_1}{5\mu_1+\mu_2}v_0$$

第二阶段,从 t_1 到 t_2,轮 1 纯滚,轮 2 又滚又滑．

轮 1 纯滚,f_1 为静摩擦力．轮 2 又滚又滑,f_2 为滑动摩擦力

$$f_2 = \mu_2 mg$$

由质心运动定理,设 f_1 和 f_2 方向如图,则

$$2ma_C = -f_1 - f_2 = -f_1 - \mu_2 mg$$

对于轮 1,由转动定理

$$f_1 R = \frac{1}{2}mR^2\beta_1$$

由纯滚条件

$$a_C = R\beta_1$$

由以上四式,解出

$$a_C = -\frac{2}{5}\mu_2 g$$

$$f_1 = -\frac{1}{5}\mu_2 mg$$

a_C 与 f_1 均为负值,表明 a_C 和 f_1 的实际方向与图中假设的方向相反．此阶段的质心速度为

$$v_C = -\frac{2}{5}\mu_2 gt + C$$

积分常量由此阶段的初条件确定

$$\text{当 } t=t_1 \text{ 时}, v_C=v_{C1}$$

故

$$C=v_{C1}+\frac{2}{5}\mu_2 g t_1$$

把 t_1 和 v_{C1}代入,得

$$C=\frac{4\mu_1}{5\mu_1+\mu_2}v_0+\frac{2}{5}\mu_2 g\cdot\frac{2v_0}{(5\mu_1+\mu_2)g}=\frac{4}{5}v_0$$

于是,得

$$v_C=-\frac{2}{5}\mu_2 g t+\frac{4}{5}v_0$$

轮 2 在 t_2 时刻达到纯滚,纯滚条件为

$$v_C=\omega_2 R$$

把 t_2 时刻的 ω_2 和 v_C 代入,得

$$-\frac{2}{5}\mu_2 g t_2+\frac{4}{5}v_0=\frac{2\mu_2 g}{R}Rt_2$$

解出

$$t_2=\frac{v_0}{3\mu_2 g}$$

第三阶段,t_2 时刻以后,两轮均纯滚．在 t_2 时刻质心平动速度为

$$v_{C2}=-\frac{2}{5}\mu_2 g t_2+\frac{4}{5}v_0=\frac{2}{3}v_0$$

方法二．

取地面上一点作为参考点,两轮所受摩擦力均通过该参考点,摩擦力矩均为零,故两轮系统对所选参考点的角动量守恒．取两轮刚与地面接触时为初态,初态的质心速度为 v_0,两轮的角速度均为零．取两轮均达纯滚时为终态,终态质心速度为 v_{C2},终态两轮有共同的角速度 ω. 由角动量守恒,有

$$2mv_0R=2mv_{C2}R+2\cdot\frac{1}{2}mR^2\omega$$

又

$$v_{C2}=\omega R$$

解出

$$v_{C2}=\frac{2}{3}v_0,\quad \omega=\frac{2v_0}{3R}$$

因 $\mu_1>\mu_2$,轮 1 首先达到纯滚,故轮 2 达到纯滚所需时间 t_2 即为两轮均达纯滚所需时间．故有

$$t_2=\frac{\omega}{\beta_2}=\frac{2v_0}{3R}\cdot\frac{R}{2\mu_2 g}=\frac{v_0}{3\mu_2 g}$$

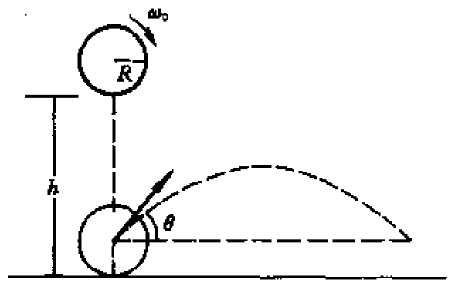
【题 16】 如力图6－16－1,一半径为 R 的实心均匀球,开始时质心静止,但绕通过质心的水平轴

以角速度 ω_0 旋转，在重力作用下垂直下落到地面，球上最低点离地面的高度为 h．球与地面碰撞的恢复系数为 e，球与地面之间的摩擦系数为 μ，忽略空气阻力及碰撞时产生的形变．

1．试求碰地后球的质心速度和自转角速度．

2．试求第一次落地点与第二次落地点之间的水平距离．

3．试画出碰后球的质心速度与地面夹角 θ 的正切与初始角速度 ω_0 的关系曲线．



力图 6－16－1

【分析】 球下落时，其质心作自由落体运动，碰地前的速度竖直向下，大小为 $v_0=\sqrt{2gh}$．碰地后，速度的竖直分量可由恢复系数 e 的定义求得，水平分量则取决于摩擦力的作用．由于球的自转，球受向右的摩擦力作用，该摩擦力一方面使球的质心获得向右的水平速度，另一方面使自转角速度变小．原则上，将动量定理应用于质心运动，将角动量定理应用于绕质心轴的转动，可求出碰后质心的水平速度和自转角速度．碰后质心速度的竖直分量和水平分量求得后，θ 角就可求出．故碰后球的质心作抛物运动，抛射角为 θ，于是射程可求．

然而，为了对摩擦力的作用作定量计算，必须仔细分析摩擦力的作用时间，设在球与地面碰撞过程中支持力 N 的作用时间(即球与地面相接触的时间)为 Δt_N，摩擦力 f 的作用时间为 Δt_f．球刚与地面接触时，质心的水平速度为零，但球以角速度 ω_0 旋转，故在碰撞的开始阶段必定存在球与地面之间的相对滑动，因而摩擦力是滑动摩擦力，其大小与正压力 N 成正比．在接触时间内摩擦力对质心起加速作用，而对转动起减速作用，当质心速度 v 与转动角速度 ω 满足纯滚条件 $v=\omega R$ 时，球与地面之间不再有相对滑动，球在地面上作纯滚运动，摩擦力等于零．因而在碰撞过程中，摩擦力的作用时间 Δt_f 一般不等于支持力的作用时间 Δt_N．在回答本题第 1 问和第 2 问时，必须就以下两种情形分别加以讨论：

Ⅰ．初始角速度 ω_0 较大，在碰撞全过程中始终有相对滑动，即摩擦力的作用时间等于支持力的作用时间，$\Delta t_f=\Delta t_N$．

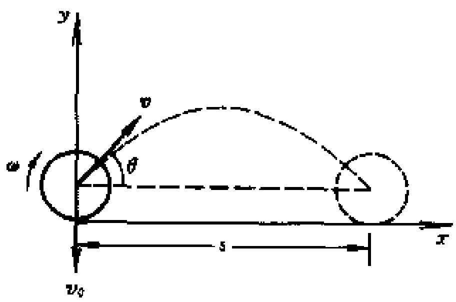
Ⅱ．初始角速度 ω_0 较小，在碰撞尚未结束前，旋转角速度已经减小到满足纯滚条件，摩擦力在碰撞结束之前就已消失，即 $\Delta t_f<\Delta t_N$．

【解】 1．球碰地前的质心速度为

$$v_0=\sqrt{2gh}$$

如力图 6－16－2，$\boldsymbol{v}_0$ 的方向指向 $-y$ 方向，碰地前球旋转的角速度为 ω_0(顺时针旋转)．设碰后质心速度为 $\boldsymbol{v}$，两个分量为 v_x 和 v_y，设碰后球旋转角速度为 ω．由分析，应分两种情形讨论．

情形Ⅰ．$\Delta t_f=\Delta t_N=\Delta t$，即在碰撞时间内球与地始终有相对滑动，摩擦力 f 与支持力 N 同时开始作用，同时结束．摩擦力的大小为 $f=\mu N$．由恢复系数 e 的定义，有



力图 6－16－2

$$e=\frac{v_y}{v_0},\quad 即\quad v_y=ev_0 \tag{1}$$

分别在 x 和 y 方向应用动量定理，有

$$\int_{\Delta t}\mu N\,\mathrm{d}t=mv_x \tag{2}$$

$$\int_{\Delta t}N\,\mathrm{d}t=m(v_0+v_y)=m(1+e)v_0 \tag{3}$$

式中 m 为球的质量，两个积分均在碰撞时间 Δt 内进行，前者是摩擦力的冲量，后者是支持力的冲量．把(3)式代入(2)式，得

$$v_x=\mu(1+e)v_0 \tag{4}$$

故碰后质心速度的大小 v 满足

$$v^2=v_x^2+v_y^2=[\mu^2(1+e)^2+e^2]v_0^2 \tag{5}$$

即

$$v=v_0\sqrt{\mu^2(1+e)^2+e^2}$$

$\boldsymbol{v}$ 的方向与 x 轴的夹角 θ 由下式决定，

$$\tan\theta=\frac{v_y}{v_x}=\frac{e}{\mu(1+e)} \tag{6}$$

可见，在情形 I，$\tan\theta$ 与球的初始角速度 ω_0 无关．

再考虑摩擦力对转动的减速作用．由角动量定理，有

$$\int_{\Delta t}\mu NR\,\mathrm{d}t=I(\omega_0-\omega)$$

式中左边的积分是摩擦力的冲量矩，右边的 I 是球对质心轴的转动惯量，$I=\frac{2}{5}mR^2$．把(3)式代入上式，有

$$\mu mR(1+e)v_0=I\omega_0-I\omega$$

故

$$\omega=\omega_0-\frac{\mu mR(1+e)v_0}{I}=\omega_0-\frac{5\mu(1+e)}{2R}\sqrt{2gh} \tag{7}$$

为了使情形 I 得以实现，要求碰撞结束时仍有相对滑动，即要求

$$\omega R\geqslant v_x$$

把(4)、(7)两式代入，有

$$\omega_0-\frac{\mu mR(1+e)v_0}{I}\geqslant\frac{\mu(1+e)v_0}{R}$$

即

$$\omega_0\geqslant\left(\frac{1}{R}+\frac{mR}{I}\right)\mu(1+e)v_0=\frac{\mu(1+e)v_0}{R}\left(1+\frac{mR^2}{I}\right)$$

把 I 和 v_0 的值代入，得

$$\omega_0\geqslant\frac{7\mu(1+e)}{2R}\sqrt{2gh}$$

因此，为了实现情形 I，球初始角速度的最小值为

$$\omega_{0\min}=\frac{7\mu(1+e)}{2R}\sqrt{2gh}$$

情形Ⅱ. $\Delta t_f<\Delta t_N$，摩擦力的作用时间小于碰撞时间，即在碰撞结束前球已达到纯滚，摩擦力变为零，这要求 $\omega_0<\omega_{0\min}$. 在情形Ⅱ，(1)式仍成立．在 x 方向应用动量定理，有

$$\int_{\Delta t_f}\mu N\,\mathrm{d}t=mv_x$$

由角动量定理，有

$$\int_{\Delta t_f}\mu NR\,\mathrm{d}t=I(\omega_0-\omega)$$

上述两积分均在相对滑动阶段进行，该阶段结束时，球的角速度已从开始的 ω_0 减为 ω，球开始作纯滚动．在球纯滚阶段，摩擦力为零，故 v_x 和 ω 均保持不变，并有

$$\omega=\frac{v_x}{R}$$

这些结果一直持续到碰撞结束．由以上三式，得

$$mRv_x=I(\omega_0-\omega)=I\omega_0-\frac{I}{R}v_x$$

即

$$\left(mR+\frac{I}{R}\right)v_x=I\omega_0$$

故

$$v_x=\frac{IR}{mR^2+I}\omega_0=\frac{2}{7}\omega_0R$$

所以，在情形Ⅱ，碰后的质心速度 v 满足

$$v^2=v_x^2+v_y^2=\left(\frac{2}{7}\omega_0R\right)^2+(e\,v_0)^2 \tag{8}$$

即

$$v=\sqrt{\left(\frac{2}{7}\omega_0R\right)^2+(e\,v_0)^2}$$

碰后质心速度 $\boldsymbol{v}$ 与 x 轴的夹角 θ 满足

$$\tan\theta=\frac{v_y}{v_x}=\frac{e\,v_0}{\frac{2}{7}\omega_0R} \tag{9}$$

碰后球的角速度为

$$\omega=\frac{v_x}{R}=\frac{2}{7}\omega_0$$

2. 如力图 6－16－2，碰后球的质心作抛物运动，所求第一、第二次落地点的水平间距 s 即为斜抛运动的射程．由射程公式，有

$$s=\frac{2v^2\sin\theta\cos\theta}{g} \tag{10}$$

对于情形Ⅰ，v^2 由(5)式决定，θ 由(6)式决定，故有

$$\sin\theta=\frac{e}{\sqrt{e^2+\mu^2(1+e)^2}}$$

$$\cos\theta=\frac{\mu(1+e)}{\sqrt{e^2+\mu^2(1+e)^2}}$$

把(5)式的 v^2 及以上两式代入(10)式，得出水平距离 s 为

$$s=\frac{2}{g}[e^2+\mu^2(1+e)^2]v_0^2\left[\frac{\mu e(1+e)}{e^2+\mu^2(1+e)^2}\right]$$

$$=\frac{2}{g}\cdot 2gh\mu e(1+e)=4\mu(1+e)h$$

对于情形Ⅱ，v^2 由(8)式决定，θ 由(9)式决定，故有

$$\sin\theta=\frac{e\,v_0}{\sqrt{\left(\frac{2}{7}\omega_0 R\right)^2+(e\,v_0)^2}}$$

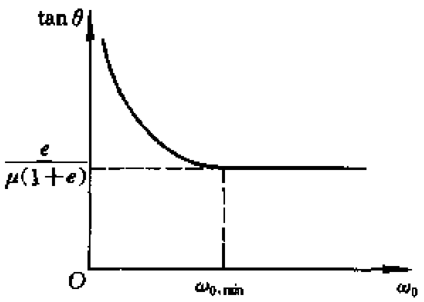
$$\cos\theta=\frac{\frac{2}{7}\omega_0 R}{\sqrt{\left(\frac{2}{7}\omega_0 R\right)^2+(ev_0)^2}}$$

把(8)式的 v^2 以及以上两式代入(10)式，得水平距离为

$$s=\frac{2}{g}\left[\left(\frac{2}{7}\omega_0 R\right)^2+(ev_0)^2\right]\left[\frac{\frac{2}{7}\omega_0 Rev_0}{\left(\frac{2}{7}\omega_0 R\right)A^2+(ev_0)^2}\right]$$

$$=\frac{4}{7g}\omega_0 Re\sqrt{2gh}=\frac{4}{7}e\,\omega_0 R\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

3. $\tan\theta$ 随初始角速度 ω_0 变化的关系由(6)、(9)两式给出．当 $\omega_0>\omega_{0\,\min}$时，属情形Ⅰ，$\tan\theta$ 由(6)式给定，为$\frac{e}{\mu(1+e)}$，与 ω_0 无关，在力图 6－16－3 中是直线．当 $\omega_0<\omega_{0\,\min}$时，属情形Ⅱ，$\tan\theta$ 由(9)式给出，与 ω_0 成反比关系，如力图 6－16－3 中的曲线所示．



力图 6－16－3

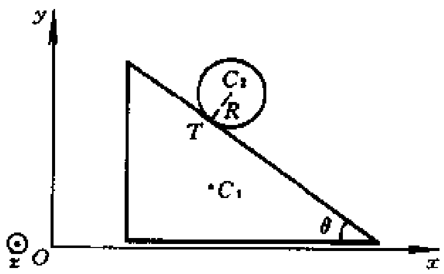
【本题是 1991 年第 22 届 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)的试题．】

【题 17】 如图，斜面体放置在光滑水平面上，斜面倾角为 θ，一半径为 R 的圆柱体在斜面上无滑动地下滚．设斜面体和圆柱体具有相同的质量 m，试求斜面体的加速度．

【分析】 如图，取固定的直角坐标系 $Oxyz$，z 轴垂直于图面，圆柱体在 xy 平面内运动．原则可用传统方法，即隔离圆柱和斜面体，分析力，根据质心运动定理和转动定理列出方程，再考虑两者之间的约束关系和相对运动，当可解出斜面体的加速度．但由于涉及的因素较多，计算比较麻烦，不妨从另一角度出发来求解本题．

取斜面体、圆柱体和地球为物体系．由于斜面体所受地面支持力不作功，斜面体与圆柱体之

间的摩擦力是静摩擦力，不会造成机械能的损失，故系统机械能守恒．系统的机械能包括斜面体的动能和重力势能，以及圆柱体的动能和重力势能．显然，机械能表达式中包括速度、角速度和位置等变量，对时间求导后，表达式中将包括加速度、角加速度和角速度等量．另外，由于斜面体和圆柱体的运动是相互关联的，有关各量均应与斜面体的加速度有关．于是可以得出斜面体加速度应满足的关系式．



力图 6－17－1

【解】 如图，设斜面体的质心为 C_1，其坐标为 x_{C_1}, y_{C_1}；设圆柱体的质心为 C_2，其坐标为 x_{C_2}, y_{C_2}．斜面体与圆柱体在 x 方向不受外力，由质心运动定理，两者的质心动量在 x 方向守恒，即

$$m\dot{x}_{C_1} + m\dot{x}_{C_1} = \text{常数}$$

对时间求导，得

$$\ddot{x}_{C_1} + \ddot{x}_{C_2} = 0 \qquad (1)$$

这是两者的运动相互关联的第一个式子．

由题设，圆柱体在斜面体上作纯滚动，接触点 T 相对斜面无滑动，故有

$$\boldsymbol{v}_{C_1} = \boldsymbol{v}_T$$

由相对运动的速度叠加法则，有

$$\boldsymbol{v}_T = \boldsymbol{v}_{C_2} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

式中 $\boldsymbol{v}_{C_2}$是圆柱体质心的速度；$\boldsymbol{\omega}$ 是圆柱体绕质心转动的角速度，其方向垂直于图面，其大小为 $\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$；$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{C_2 T}$是接触点相对质心$C$ 的径矢．由以上两式，得出斜面体质心 C_1 的速度为

$$\boldsymbol{v}_{C_1} = \boldsymbol{v}_{C_2} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \qquad (2)$$

为了把(2)式写成分量形式，将有关各矢量写成分量形式如下．

$$\boldsymbol{v}_{C_1} = (\dot{x}_{C_1}, 0, 0)$$
$$\boldsymbol{v}_{C_2} = (\dot{x}_{C_2}, \dot{y}_{C}, 0)$$
$$\boldsymbol{\omega} = (0, 0, -\dot{\varphi})$$
$$\boldsymbol{r} = (-R\sin\theta, -R\cos\theta, 0)$$

于是，(2)式的分量形式为

$$\dot{x}_{C_1} = \dot{x}_{C_2} - (R\cos\theta)\dot{\varphi} \qquad (3)$$

$$0 = \dot{y}_{C_2} + (R\sin\theta)\dot{\varphi} \qquad (4)$$

以上(1)、(3)、(4)式具体表示了斜面体与圆柱体的运动之间的关联，它们为简化能量表达式提供了依据．

系统的机械能包括斜面体的动能，圆柱体质心的动能、绕质心的转动动能，以及两者的重力势能，即

$$E = \frac{1}{2}mv_{C_1}^2 + \frac{1}{2}mv_{C_2}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgy_{C_2} + mgy_{C_1}$$

$$=\frac{1}{2}m\dot{x}_{C_1}^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_{C_2}^2+\frac{1}{2}m\dot{y}_{C_2}^2+\frac{1}{4}mR^2\dot{\varphi}^2+mgy_{C_2}+mgy_{C_1}$$

把上式对时间求导，因机械能守恒，E 为常量，故有

$$0=\dot{x}_{C_1}\ddot{x}_{C_1}+\dot{x}_{C_2}\ddot{x}_{C_2}+\dot{y}_{C_2}\ddot{y}_{C_2}+\frac{1}{2}R^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}+g\dot{y}_{C_2} \tag{5}$$

由(1)式

$$\ddot{x}_{C_2}=-\ddot{x}_{C_1}$$

由(3)式

$$\dot{x}_{C_1}-\dot{x}_{C_2}=-(R\cos\theta)\dot{\varphi}$$

即

$$-(R\cos\theta)\ddot{\varphi}=\ddot{x}_{C_1}-\ddot{x}_{C_2}=2\ddot{x}_{C_1}$$

把以上两式相乘，得

$$(R^2\cos^2\theta)\dot{\varphi}\ddot{\varphi}=2(\dot{x}_{C_1}-\dot{x}_{C_2})\ddot{x}_{C_1}$$

由(4)式

$$\dot{y}_{C_2}=-(R\sin\theta)\dot{\varphi},\quad \ddot{y}_{C_2}=-(R\sin\theta)\ddot{\varphi}$$

把以上由(1)、(3)、(4)式得到的关系代入(5)式，得

$$0=(\dot{x}_{C_1}-\dot{x}_{C_2})\ddot{x}_{C_1}+R^2\sin^2\theta\dot{\varphi}\ddot{\varphi}+\frac{R^2}{2}\dot{\varphi}\ddot{\varphi}-Rg\sin\theta\dot{\varphi}$$

$$0=(\dot{x}_{C_1}-\dot{x}_{C_2})\ddot{x}_{C_1}+R^2\left(\sin^2\theta+\frac{1}{2}\right)\frac{2(\dot{x}_{C_1}-\dot{x}_{C_2})}{R^2\cos^2\theta}\ddot{x}_{C_1}-Rg\sin\theta\dot{\varphi}$$

$$0=\left(1+2\tan^2\theta+\frac{1}{\cos^2\theta}\right)(\dot{x}_{C_1}-\dot{x}_{C_2})\ddot{x}_{C_1}-Rg\sin\theta\dot{\varphi}$$

$$0=(2+3\tan^2\theta)(-R\cos\theta)\dot{\varphi}\ddot{x}_{C_1}-Rg\sin\theta\dot{\varphi}$$

$$0=(2+3\tan^2\theta)\ddot{x}_{C_1}+g\tan\theta$$

故

$$\ddot{x}_{C_1}=-\frac{g\tan\theta}{2+3\tan\theta}$$

负号表示斜面体加速度的方向指向 $-x$.

【题 18】 如图，实心球在水平面内运动，质心的初始速度为 $\boldsymbol{v}_0$，绕质心 C 转动的初始角速度为 $\boldsymbol{\omega}_0$，球与水平面之间的摩擦系数为 μ. 试分析球在水平面内的运动.

【分析】 一般情形下，球在开始阶段作又滚又滑的运动，此时球所受摩擦力 f 的大小恒等于 μmg，摩擦力的方向则与接触点相对水平面滑动的速度 $\boldsymbol{v}_s$ 相反. 球在水平面内只受摩擦力的作用，其运动情况完全决定于摩擦力，故解本题的关键是决定摩擦力的方向，亦即决定滑动速度 $\boldsymbol{v}_s$ 的方向.

【解】 如图，设球的质量为 m，半径为 r，设在任意时刻球的质心速度为 $\boldsymbol{v}_C$(其方向平行于水平面)，角速度为 $\boldsymbol{\omega}$(任意方向). 球上与水平面接触的 M 点相对质心的速度 $\boldsymbol{v}'$ 为

$$\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

其中 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{CM}$. 接触点 M 相对水平面的滑动速度 $\boldsymbol{v}_s$ 为

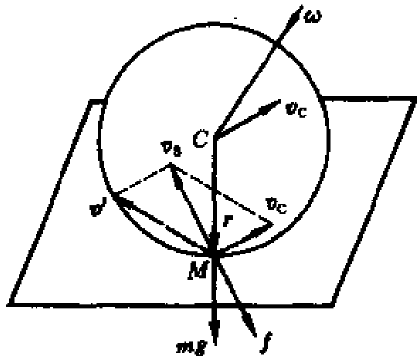
$$\boldsymbol{v}_s=\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{1}$$

在开始阶段，一般 $\boldsymbol{v}_s\neq 0$，即存在滑动，球受摩擦力 $\boldsymbol{f}$ 的作用，其方向与 $\boldsymbol{v}_s$ 相反，其大小保持不变，为

$$f=\mu mg$$

将(1)式对时间求导，注意 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{CM}$ 是恒矢量，得出接触点的加速度为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_s}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_C}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r} \tag{2}$$



力图 6-18-1

式中$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_C}{\mathrm{d}t}$为质心加速度．由质心运动定理，得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_C}{\mathrm{d}t}=\frac{\boldsymbol{f}}{m} \tag{3}$$

另外，球对质心轴的转动惯量 I 为

$$I=\frac{2}{5}mr^2$$

球相对质心轴的角动量 $\boldsymbol{L}$ 为

$$\boldsymbol{L}=I\boldsymbol{\omega}=\frac{2}{5}mr^2\boldsymbol{\omega}$$

由角动量定理，力矩等于角动量的时间变化率，即

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{5}mr^2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=\frac{5}{2mr^2}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}$$

把上式和(3)式代入(2)式，得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_s}{\mathrm{d}t}=\frac{\boldsymbol{f}}{m}-\frac{5}{2mr^2}\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f})$$

由矢量公式

$$\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f})=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{f})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})=-r^2\boldsymbol{f}$$

故

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_s}{\mathrm{d}t}=\frac{\boldsymbol{f}}{m}+\frac{5}{2m}\boldsymbol{f}=\frac{7}{2m}\boldsymbol{f}$$

上式表明，接触点相对水平面的滑动加速度$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_s}{\mathrm{d}t}$与摩擦力 $\boldsymbol{f}$ 共线，而 $\boldsymbol{f}$ 与滑动速度 $\boldsymbol{v}_s$ 共线，故$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_s}{\mathrm{d}t}$与 $\boldsymbol{v}_s$ 共线．结论是，$\boldsymbol{v}_s$ 的方向始终不变，因而摩擦力 $\boldsymbol{f}$ 的方向始终不变．

总之，在运动的开始阶段，球在水平面内受恒力 $\boldsymbol{f}$ 的作用，类似于抛物体受恒定的重力作用．由质心运动定理，球的质心将在水平面内沿抛物线运动，抛物线的轴与摩擦力 $\boldsymbol{f}$ 的方向即与 $\boldsymbol{v}_s$ 的方向一致．既然 $\boldsymbol{v}_s$ 的方向不变，抛物线的轴就与开始时的 $\boldsymbol{v}_{s0}$一致．由(1)式

$$\boldsymbol{v}_{s0}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{\omega}_0\times\boldsymbol{r}$$

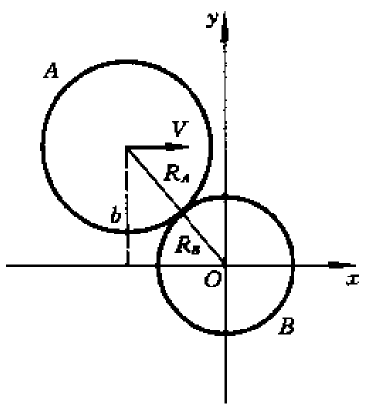
经一定时间后，当 $v_s=0$ 时，球停止相对滑动，同时摩擦力 $f=0$，球将作纯滚动，质心则作匀速直线运动．

【题 19】 如力图6－19－1，一个质量为 m，半径为 R_A 的均匀圆盘 A 在光滑水平面 Oxy 内以速度 V 沿 x 方向平动，圆盘中心至 x 轴的垂直距离为 b．圆盘 A 与另一静止的、其中心位于坐标原点 O 的均匀圆盘 B 相碰．圆盘 B 的质量与 A 相同，半径为 R_B．假定碰撞后两圆盘接触处的切向速度分量（垂直于连心线方向的速度）相等，并假定碰撞前、后两盘沿连心线方向的相对速度大小不变．在发生碰撞的情况下，试求：

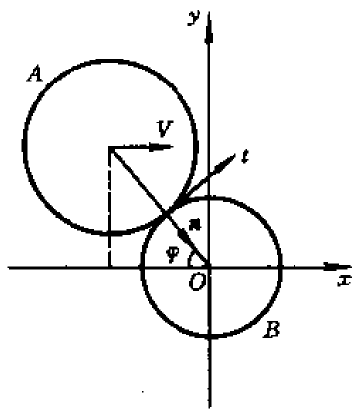
1．碰后两圆盘质心速度的 x 分量和 y 分量 V'_{Ax}，V'_{Ay}，V'_{Bx}，V'_{By}．结果要以给定的参数 m，R_A，R_B，V 和 b 表示．

2．碰后两圆盘的动能 E'_A 和 E'_B，结果要以给定的参数 m，R_A，R_B，V 和 b 表示．

【分析】 题目并未说明两盘接触时是否有摩擦力，但指出碰后两盘接触处具有相等的切向速度，这只有当两盘之间存在摩擦力才有可能．由于碰撞时存在摩擦力的相互作用，两盘系统的机械能不守恒．但两盘的质心动量守恒，对 O 点的角动量守恒．



力图 6－19－1



力图 6－19－2

为方便起见，如图 6－19－2，在两盘接触处引进切向单位矢量 $\boldsymbol{t}$ 和法向（连心线方向）单位矢量 $\boldsymbol{n}$．A、B 两盘沿切向受摩擦力的作用，在法向受碰撞力作用，使两盘的质心速度和转动角速度发生改变，这些变量可用动量守恒和角动量守恒定律联系起来．

仅用上述两条规律还不足以解出未知数，还需利用题目给出的条件（接触处的切向速度相等以及碰撞前、后法向相对速度相等）列出补充方程．注意到这两个附加条件分别适用于切向 $\boldsymbol{t}$ 和法向 $\boldsymbol{n}$，所以两盘碰后的质心速度用 $\boldsymbol{t}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 方向的分量来表示是适宜的，即 A 盘碰后的质心速度为（V'_{At}，V'_{An}），B 盘碰后的质心速度为（V'_{Bt}，V'_{Bn}），最后再过渡到（V'_{Ax}，V'_{Ay}）和（V'_{Bx}，V'_{By}）．

【解】 1．设碰撞时两盘连心线与 x 轴的夹角为 φ（见力图 6－19－2），由几何关系

$$b=(R_A+R_B)\sin\varphi \tag{1}$$

把动量守恒定律分别应用于 $\boldsymbol{t}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 方向，有

$$mV\sin\varphi=mV'_{At}+mV'_{Bt} \tag{2}$$

$$mV\cos\varphi = mV'_{An} + mV'_{Bn} \tag{3}$$

又,对 O 点的角动量守恒,有

$$mVb = mV'_{At}(R_A + R_B) + I_A\omega_A + I_B\omega_B \tag{4}$$

式中

$$I_A = \frac{1}{2}mR_A^2, \quad I_B = \frac{1}{2}mR_B^2$$

为两盘对质心轴的转动惯量,ω_A 和 ω_B 为两盘碰后的角速度.

碰撞过程中作用于 B 盘的摩擦力沿 t 方向,它一方面使 B 盘获得 t 方向的动量 mV'_{Bt},同时使 B 盘获得角动量 $I_B\omega_B$,故应有

$$mV'_{Bt}R_B = I_B\omega_B \tag{5}$$

已知两盘接触点的切向速度相等,即有

$$V'_{At} - \omega_A R_A = V'_{Bt} + \omega_B R_B \tag{6}$$

又知碰撞前、后法向相对速度不变,即有

$$V\cos\varphi = V'_{Bn} - V'_{An} \tag{7}$$

由(2)、(6)两式,得

$$V'_{At} + V'_{Bt} = V\sin\varphi \tag{8}$$

$$V'_{At} - V'_{Bt} = \omega_A R_A + \omega_B R_B \tag{9}$$

由(5)式,

$$V'_{Bt} = \frac{1}{2}\omega_B R_B$$

把以上三式与(4)式结合,消去 V'_{At}和 V'_{Bt},并利用(1)式,得出 ω_A 和 ω_B 的方程为,

$$(2R_A^2 + R_AR_B)\omega_A + (2R_B^2 + R_AR_B)\omega_B = (R_A + R_B)V\sin\varphi$$

$$R_A\omega_A + 2R_B\omega_B = V\sin\varphi$$

由以上两方程,解出

$$\omega_A = \frac{V\sin\varphi}{3R_A}, \quad \omega_B = \frac{V\sin\varphi}{3R_B}$$

把 ω_A 和 ω_B 代回(8)、(9)两式,解出

$$V'_{At} = \frac{5}{6}V\sin\varphi, \quad V'_{Bt} = \frac{1}{6}V\sin\varphi$$

再由(3)、(7)两式,解出

$$V'_{An} = 0, \quad V'_{Bn} = V\sin\varphi$$

因而碰后两盘的质心速度的 x,y 分量为

$$V'_{Ax} = V'_{At}\sin\varphi + V'_{An}\cos\varphi = \frac{5}{6}V\sin^2\varphi$$

$$= \frac{5Vb^2}{6(R_A + R_B)^2}$$

$$V'_{Ay}=V'_{At}\cos\varphi-V'_{An}\sin\varphi=\frac{5}{6}V\cos\varphi\sin\varphi$$

$$=\frac{5Vb\sqrt{(R_A+R_B)^2-b^2}}{6(R_A+R_B)^2}$$

$$V'_{Bx}=V'_{Bt}\sin\varphi+V'_{Bn}\cos\varphi=\frac{1}{6}V\sin^2\varphi+V\cos^2\varphi$$

$$=V\left(1-\frac{5}{6}\sin^2\varphi\right)=V\left[1-\frac{5b^2}{6(R_A+R_B)^2}\right]$$

$$V'_{By}=V'_{Bt}\cos\varphi-V'_{Bn}\sin\varphi=-\frac{5}{6}V\cos\varphi\sin\varphi$$

$$=-\frac{5Vb\sqrt{(R_A+R_B)^2-b^2}}{6(R_A+R_B)^2}$$

2. 碰后 A、B 两盘的动能包括平动动能和转动动能，故

$$E'_A=\frac{1}{2}m(V'^2_{An}+V'^2_{At})+\frac{1}{2}I_A\omega_A^2$$

$$=\frac{3}{8}mV^2\sin^2\varphi=\frac{3mV^2b^2}{8(R_A+R_B)^2}$$

$$E'_B=\frac{1}{2}m(V'^2_{Bn}+V'^2_{Bt})+\frac{1}{2}I_B\omega_B{}^2$$

$$=\frac{1}{2}mV^2\left(1-\frac{11}{12}\sin^2\varphi\right)$$

$$=\frac{1}{2}mV^2\left[1-\frac{11b^2}{12(R_A+R_B)^2}\right]$$

碰后系统的总动能为

$$E'=E'_A+E'_B=\frac{1}{2}mV^2\left(1-\frac{1}{6}\sin^2\varphi\right)$$

系统动能损失为

$$\frac{1}{2}mV^2-\frac{1}{2}mV^2\left(1-\frac{1}{6}\sin^2\varphi\right)=\frac{1}{12}mV^2\sin^2\varphi=\frac{mV^2b^2}{12(R_A+R_B)^2}$$

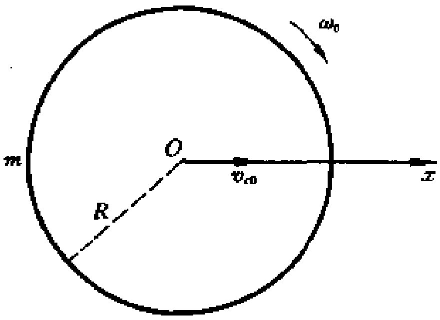
【本题是 1994 年第 24 届 IPhO(国际中学物理奥林匹克竞赛)试题 .】

【题 20】 如力图6－20－1，均匀细圆环半径为 R，质量为 m，平放在水平桌面上，与桌面之间的摩擦系数为 μ. 圆环质心 O 沿 x 轴以初速 v_{C0}运动，同时圆环绕质心以初角速度 ω_0 顺时针转动，v_{C0}与 ω_0 满足 $v_{C0}=R\omega_0$.

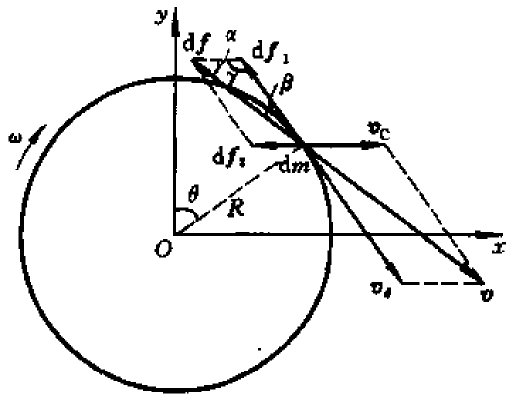
试求：1. 圆环所受摩擦力及摩擦力对质心的力矩 . 2. 从开始到圆环停止运动所需时间 .

【分析】 圆环受到的摩擦力 $\boldsymbol{f}$ 以及摩擦力矩 $\boldsymbol{M}$ 是圆环各质元所受到的摩擦力 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ 之和以及摩擦力矩 $\mathrm{d}\boldsymbol{M}$ 之和 . 由于圆环既有质心运动，又有绕质心的转动，所以各质元的速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向不同，与 $\boldsymbol{v}$ 反向的 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ 的方向也不同，应给出 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ 的分量 $\mathrm{d}f_x$ 和 $\mathrm{d}f_y$，以便积分求出 f_x 和 f_y，进而得出 $\boldsymbol{f}$ 的大小和方向 . 给出 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ 沿圆环切线的分量，以便积分求出力矩 $\boldsymbol{M}$. 计算时应考虑到问题的对称性 .

摩擦力 f 改变了圆环质心的运动，摩擦力矩 M 改变了圆环绕质心的转动，由此，圆环从开始到停止运动所需时间可求．



力图 6－20－1



力图 6－20－2

【解】 如力图6－20－2，设在任意时刻 t，圆环的质心速度为 v_C，角速度为 ω．圆环上任一质元 dm，它的位置用 θ 表示，则

$$\mathrm{d}m=\lambda R\mathrm{d}\theta$$

式中

$$\lambda=\frac{m}{2\pi R}$$

是圆环的质量线密度．在 t 时刻，dm 的速度为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{v}_\theta$$

式中

$$v_\theta=R\omega$$

是 dm 相对质心的线速度．质元 dm 所受摩擦力 d$\boldsymbol{f}$ 的方向与其速度 $\boldsymbol{v}$ 反向，其大小为

$$\mathrm{d}f=\mu(\mathrm{d}m)g=\mu\lambda Rg\mathrm{d}\theta$$

d$\boldsymbol{f}$ 可以分解为 df_1 和 df_2 两个分量（df_1 与 $\boldsymbol{v}_\theta$ 反向，df_2 与 $\boldsymbol{v}_C$ 反向），或 df_x 和 df_y 两个分量，或 df_θ 和 df_r 两个分量，df_θ 为 df 在圆环切线方向的投影，对力矩 $\boldsymbol{M}$ 有贡献，df_r 为 df 在圆环径向的投影，对 $\boldsymbol{M}$ 无贡献．

如力图 6－20－2 所示，有

$$\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}f_2}=\frac{v_\theta}{v_C}=\frac{R\omega}{v_C}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f_x&=-\mathrm{d}f_1\cos\theta-\mathrm{d}f_2=-\mathrm{d}f_2\left(\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}f_2}\cos\theta+1\right)\\&=-\mathrm{d}f_2\left(\frac{R\omega}{v_C}\cos\theta+1\right)\end{aligned}\tag{1}$$

$$\mathrm{d}f_y=\mathrm{d}f_1\sin\theta=\mathrm{d}f_2\frac{R\omega}{v_C}\sin\theta\tag{2}$$

$$\mathrm{d}f_\theta=-\mathrm{d}f_1-\mathrm{d}f_2\cos(\alpha+\beta)=-(\mathrm{d}f_1+\mathrm{d}f_2\cos\theta)$$

$$= -\mathrm{d}f_2\left(\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}f_2}+\cos\theta\right) = -\mathrm{d}f_2\left(\frac{R\omega}{v_C}+\cos\theta\right) \tag{3}$$

由正弦定理

$$\frac{\mathrm{d}f_1}{\sin\alpha}=\frac{\mathrm{d}f_2}{\sin\beta}=\frac{\mathrm{d}f}{\sin\gamma} \tag{4}$$

因 $\sin\gamma=\sin\theta$，故

$$\mathrm{d}f_2=\frac{\sin\beta}{\sin\theta}\mathrm{d}f \tag{5}$$

将 $\sin\beta$ 用 θ 角表示，如力图 6－20－2，$\alpha+\beta=\theta$，故

$$\sin\alpha=\sin(\theta-\beta)=\sin\theta\cos\beta-\cos\theta\sin\beta$$

由(4)式，得

$$\sin\alpha=\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}f_2}\sin\beta=\frac{R\omega}{v_C}\sin\beta$$

由以上两式，得

$$\frac{R\omega}{v_C}\sin\beta=\sin\theta\cos\beta-\cos\theta\sin\beta$$

将上式两边除以 $\sin\theta\sin\beta$，得

$$\frac{R\omega}{v_C\sin\theta}=\cot\beta-\cot\theta$$

或

$$\cot\beta=\frac{R\omega}{v_C\sin\theta}+\cot\theta=\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{R\omega}{v_C}+\cos\theta\right)$$

故

$$\sin\beta=\frac{\sin\theta}{\sqrt{\left(\frac{R\omega}{v_C}+\cos\theta\right)^2+\sin^2\theta}}$$

代入(5)、(1)、(2)、(3)式，得出

$$\mathrm{d}f_2=\frac{\mathrm{d}f}{\sqrt{\left(\frac{R\omega}{v_C}+\cos\theta\right)^2+\sin^2\theta}}$$

$$\mathrm{d}f_x=-\frac{\left(\frac{R\omega}{v_C}\cos\theta+1\right)\mu\lambda Rg\ \mathrm{d}\theta}{\sqrt{\left(\frac{R\omega}{v_C}+\cos\theta\right)^2+\sin^2\theta}} \tag{6}$$

$$\mathrm{d}f_y=\frac{\mu\lambda\omega R^2g\ \sin\theta\ \mathrm{d}\theta}{v_C\sqrt{\left(\frac{R\omega}{v_C}+\cos\theta\right)^2+\sin^2\theta}} \tag{7}$$

$$df_\theta=-\frac{\mu\lambda Rg\left(\frac{R\omega}{v_C}+\cos\theta\right)d\theta}{\sqrt{\left(\frac{R\omega}{v_C}+\cos\theta\right)^2+\sin^2\theta}}$$

质元 dm 所受摩擦力对质心的力矩为

$$dM=Rdf_\theta=-\frac{\mu\lambda R^2g\left(\frac{R\omega}{v_C}+\cos\theta\right)d\theta}{\sqrt{\left(\frac{R\omega}{v_C}+\cos\theta\right)^2+\sin^2\theta}} \tag{8}$$

把(6)、(7)式对 θ 角积分可得出 f_x 和 f_y，从而得到圆环所受总摩擦力 f. 容易判断，与 y 轴对称的质元所受的 df_y 互相抵消，所以(7)式积分后必为零．即 $f_y=0$，故 $f=f_x$. 把(8)式对 θ 角积分，可得出圆环所受总摩擦力矩 M.

取(6)、(8)式中的 $v_C=v_{C0}$，$\omega=\omega_0$，即取 $t=0$ 的值(关于这种做法的合理性，在下面讨论)，因 $v_{C0}=\omega_0R$，代入(6)、(8)式，得

$$df_x=-\frac{\mu\lambda Rg(1+\cos\theta)d\theta}{\sqrt{2(1+\cos\theta)}}$$

$$=-\mu\lambda Rg\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}d\theta=-\mu\lambda Rg\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta \tag{9}$$

$$dM=-\mu\lambda R^2g\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}d\theta=-\mu\lambda R^2g\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta \tag{10}$$

积分，得

$$f=f_x=-2\mu\lambda Rg\int_0^\pi\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=-4\mu\lambda Rg=-\frac{2}{\pi}\mu mg \tag{11}$$

$$M=-2\mu\lambda R^2g\int_0^\pi\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=-4\mu\lambda R^2g=-\frac{2}{\pi}\mu mgR \tag{12}$$

由于 f 和 M 均为恒量，在任意时刻 t，圆环的质心速度 v_C 和绕质心转动的角速度 ω 为，

$$v_C=v_{C0}-\frac{2}{\pi}\mu gt$$

$$\omega=\omega_0-\frac{\frac{2}{\pi}\mu mRg}{I_C}t=\omega_0-\frac{\frac{2}{\pi}\mu mgR}{mR^2}t=\frac{v_{C0}}{R}-\frac{2\mu g}{\pi R}t$$

上两式表明，在任意时刻 t，$v_C=\omega R$，因此取(6)、(8)式中的$\frac{\omega R}{v_C}=1$，得出(9)、(10)式，再积分的做法是合理的．换言之，在 $t=0$ 时刻，$v_{C0}=\omega_0R$ 或$\frac{\omega_0R}{v_{C0}}=1$ 的关系，在圆环运动过程中的任何时刻都成立．圆环在整个运动过程中，受到恒定的与质心运动方向反向的摩擦力 f，以及恒定的与绕质心转动方向反向的摩擦力矩 M 的作用，f 和 M 的作用使圆环的平动速度 v_C 和转动角速度 ω 同步地减小，直到平动与转动同时停止．设圆环从开始经 t_1 时间后停止运动，则

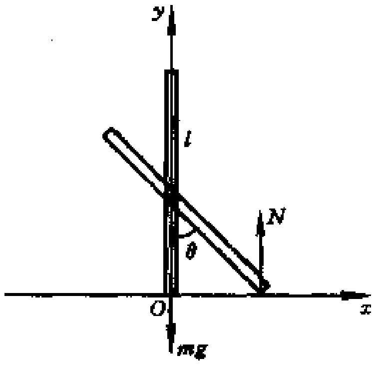
$$v_{C1}=0=v_{C0}-\frac{2}{\pi}\mu gt_1$$

故

$$t_1=\frac{\pi v_{C0}}{2\mu g}$$

【题 21】 长为 l 的均匀细杆竖直地放置在光滑地面上，从静止倒下．试求落到地面时的质心速度．

【分析】 如图，杆受重力 mg 及支持力 N，均沿竖直方向，故杆倒下过程中质心速度的水平分量始终不变，为零，质心将沿竖直方向笔直下落，同时杆绕质心转动．取杆与地球为物体系，倒下过程中外力 N 不作功，机械能守恒．由此可得出 ω 及 v_C 随杆位置 θ 的变化，于是落地时杆的质心速度 v_C 可求．



力图 6－21－1

【解】 如图，取直角坐标 Oxy，由质心运动定理，

$$m\frac{d\boldsymbol{v}_C}{dt}=\boldsymbol{F}$$

因 $F_x=0$，故 $\frac{dv_{Cx}}{dt}=0$，$v_{Cx}=$ 常量 $=0$．质心沿 y 轴下降，

$$v_{Cy}=v_C$$

杆倒下过程中，质心的坐标和速度为

$$\begin{cases}x_C=0\\ y_C=\frac{1}{2}l\cos\theta\end{cases}$$

$$\begin{cases}v_{Cx}=0\\ v_{Cy}=\dot{y}_C=-\frac{l}{2}\sin\theta\frac{d\theta}{dt}=-\frac{l}{2}\omega\sin\theta\end{cases}\tag{1}$$

杆倒下过程中，杆与地球系统的机械能守恒，故有

$$mg\cdot\frac{l}{2}=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^2\right)\omega^2+mg\frac{l}{2}\cos\theta$$

即

$$\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{24}ml^2\omega^2=mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta)$$

式中 $I=\frac{1}{12}ml^2$ 是杆绕质心的转动惯量．把(1)式代入，得

$$\omega=\sqrt{\frac{12g(1-\cos\theta)}{l(1+3\sin^2\theta)}}$$

$$v_C=-\sqrt{\frac{3gl(1-\cos\theta)\sin^2\theta}{1+3\sin^2\theta}}$$

杆落地时

$$\theta=\frac{\pi}{2}$$

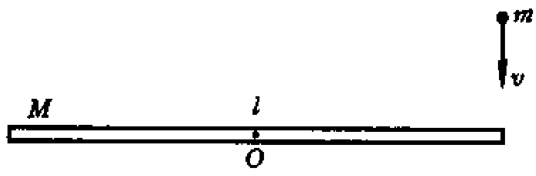
相应的质心速度为

$$v_C=-\frac{1}{2}\sqrt{3gl}$$

负号表示速度方向指向 $-y$ 轴．

【题 22】 如力图16－22－1，光滑水平地面上静止地放着质量为 M、长为 l 的均匀细杆．质量为 m 的质点以垂直于杆的水平初速 v_0 与杆的一端作完全非弹性碰撞．

试求：1．碰后系统质心的速度及绕质心的角速度．2．实际的转轴(即静止点)位于何处．



力图 6－22－1

【分析】 取 m 和 M 为物体系，因在水平方向不受外力，碰撞前后系统总动量守恒，由此碰后系统的质心速度可求．取质心系，因系统不受外力矩，碰撞前后角动量守恒，由此碰后系统绕质心转动的角速度可求．由质心速度及绕质心转动的角速度，碰后静止点的位置可求．

【解】 取 m 和 M 为物体系，碰前后动量守恒，有

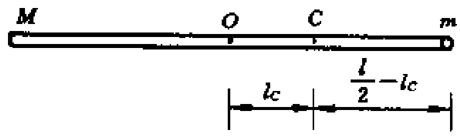
$$mv_0=(M+m)v_C$$

故碰后系统的质心速度 v_C 保持不变，为

$$v_C=\frac{m}{m+M}v_0$$

如力图 6－22－2，在质心系中，碰撞前后物体系的角动量守恒．设物体系质心位于 C 点，C 点与杆中心 O 点相距 l_C，则

$$l_C=\frac{m}{M+m}\cdot\frac{l}{2}$$



力图 6－22－2

质心 C 点与杆端质点 m 的距离为

$$\frac{l}{2}-l_C=\frac{M}{M+m}\cdot\frac{l}{2}$$

质点 m 及杆绕质心的转动惯量分别为

$$I_1=m\left(\frac{l}{2}-l_C\right)^2=m\left(\frac{M}{M+m}\right)^2\cdot\frac{l^2}{4}$$

$$I_2=\frac{1}{12}Ml^2+Ml_C^2=\frac{1}{12}Ml^2+M\left(\frac{m}{M+m}\right)^2\cdot\frac{l^2}{4}$$

在质心系中，碰前瞬间，m 的速度和杆 M 的平移速度分别为

$$v_1'=v_0-v_C=\left(1-\frac{m}{M+m}\right)v_0=\frac{M}{M+m}v_0$$

$$v_2'=-v_C=-\frac{m}{M+m}v_0$$

碰前瞬间，m 及杆 M 对质心 C 的角动量分别为

$$L_m=mv_1'\left(\frac{l}{2}-l_C\right)=m\frac{M}{M+m}v_0\cdot\frac{M}{M+m}\cdot\frac{l}{2}$$

$$=m\left(\frac{M}{M+m}\right)^2v_0\frac{l}{2}$$

$$L_M=Mv_2'l_C=M\left(\frac{m}{M+m}\right)^2v_0\frac{l}{2}$$

因此，碰前物体系对 C 点的总角动量为

$$L=L_m+L_M=\frac{v_0 l}{2}\left[m\left(\frac{M}{M+m}\right)^2+M\left(\frac{m}{M+m}\right)^2\right]=\frac{mMv_0 l}{2(M+m)}$$

碰后瞬间，物体系对质心 C 点的角动量为

$$\begin{aligned}L'&=(I_1+I_2)\omega\\&=\left[\frac{ml^2}{4}\left(\frac{M}{M+m}\right)^2+\frac{1}{12}Ml^2+\frac{Ml^2}{4}\left(\frac{m}{M+m}\right)^2\right]\omega=\frac{\omega l^2}{4}\left(\frac{mM}{M+m}+\frac{M}{3}\right)\end{aligned}$$

因碰前后物体系角动量守恒，故 $L=L'$，即

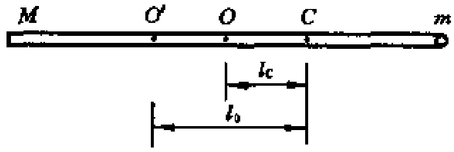
$$\frac{mMv_0 l}{2(M+m)}=\frac{l^2}{4}\left(\frac{mM}{M+m}+\frac{M}{3}\right)\omega$$

故碰后物体系绕质心转动的角速度为

$$\omega=\frac{6mv_0}{(M+4m)l}$$

如力图 6-22-3，设碰后静止点 O' 在 C 点左方，与质心 C 点的距离为 l_0，则

$$v_C=l_0\omega$$



力图 6-22-3

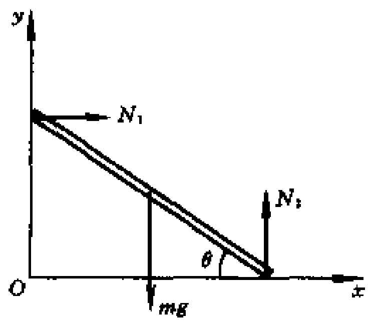
把上面求出的 v_C 和 ω 代入，得

$$\begin{aligned}l_0&=\frac{v_C}{\omega}=\frac{mv_0}{M+m}\cdot\frac{(M+4m)l}{6mv_0}\\&=\frac{M+4m}{6(M+m)}l\end{aligned}$$

故静止点 O' 与杆中心 O 点的距离为

$$l_0-l_C=\frac{(M+4m)l}{6(M+m)}-\left(\frac{m}{M+m}\right)\frac{l}{2}=\frac{l}{6}$$

【题 23】 如图，长为 $2l$ 的均匀细杆，下端支在地面上，上端靠在竖直墙上，从静止下滑，开始时杆与地面的夹角为 θ_0. 设杆与地和墙之间的摩擦可略．试问质心下降到初始高度的几分之几时，杆的上端与墙脱离．



力图 6-23-1

【分析】 杆受重力 mg，墙支持力 N_1，地支持力 N_2，合力决定了质心的运动，合力矩决定了杆绕质心的转动．杆上端未脱离墙时，对质心位置的要求(即质心的 x,y 坐标要满足一定的关系)就是约束条件．由此可确定杆在下降过程中是如何运动的．杆脱离墙的条件是墙的支持力 $N_1=0$，即质心在水平方向的加速度为零．于是杆脱离墙时的位置可求．

又，因无摩擦，杆下滑过程中机械能守恒，由此亦可求解．

【解】 如图，取直角坐标 Oxy. 由质心运动定理，有

$$m\ddot{x}_C=N_1 \tag{1}$$

$$m\ddot{y}_C=N_2-mg \tag{2}$$

由转动定理，有

$$I\ddot{\theta}=N_1\,l\,\sin\theta-N_2\,l\,\cos\theta \tag{3}$$

杆未脱离墙时，质心位置(x_C, y_C)应满足的约束条件是，

$$\begin{cases} x_C = l\cos\theta \\ y_C = l\sin\theta \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \dot{x}_C = -(l\sin\theta)\dot{\theta} \\ \dot{y}_C = (l\cos\theta)\dot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_C = -(l\cos\theta)\dot{\theta}^2 - (l\sin\theta)\ddot{\theta} \\ \ddot{y}_C = -(l\sin\theta)\dot{\theta}^2 + (l\cos\theta)\ddot{\theta} \end{cases} \tag{4}$$

把(4)式代入(1)、(2)式，得出N_1和N_2，再代入(3)式，得出$\ddot{\theta}$的方程为

$$I\ddot{\theta} = -ml^2\left(\frac{g}{l}\cos\theta + \ddot{\theta}\right)$$

式中

$$I = \frac{1}{12}m(2l)^2$$

是杆绕质心的转动惯量，代入，得

$$\ddot{\theta} = -\frac{3g}{4l}\cos\theta \tag{5}$$

利用

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$$

得

$$\dot{\theta}\,d\dot{\theta} = -\frac{3g}{4l}\cos\theta\,d\theta$$

积分，利用初条件为

$$t=0\text{ 时},\quad \theta=\theta_0,\quad \dot{\theta}=0$$

得

$$\dot{\theta}^2 = -\frac{3g}{2l}(\sin\theta - \sin\theta_0) \tag{6}$$

把(5)、(6)式代回(4)式，得

$$\ddot{x}_C = \frac{3}{2}g(\sin\theta - \sin\theta_0)\cos\theta + \frac{3}{4}g\cos\theta\sin\theta \tag{7}$$

杆脱离墙的条件为

$$N_1 = 0$$

由(1)式，即为

$$\ddot{x}_C = 0$$

代入(7)式，得出杆脱离墙时的θ应满足，

$$\frac{9}{4}\sin\theta\cos\theta-\frac{3}{2}\sin\theta_0\cos\theta=0$$

即

$$\sin\theta=\frac{2}{3}\sin\theta_0$$

质心开始时的高度为

$$y_{C0}=l\sin\theta_0$$

所以杆脱离墙时,质心的高度为

$$y_C=l\sin\theta=\frac{2}{3}l\sin\theta_0=\frac{2}{3}y_{C0}$$

又,利用杆下滑过程中机械能守恒,得

$$mgl\sin\theta_0=\frac{1}{2}m(\dot{x}_C^2+\dot{y}_C^2)+\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2+mgl\sin\theta$$

把 $\dot{x}_C$ 和 $\dot{y}_C$ 代入,得

$$\frac{l^2}{2}(\sin^2\theta\cdot\dot{\theta}^2+\cos^2\theta\cdot\dot{\theta}^2)+\frac{l^2}{6}\dot{\theta}^2=gl(\sin\theta_0-\sin\theta)$$

即

$$\dot{\theta}^2=-\frac{3g}{2l}(\sin\theta-\sin\theta_0)$$

对时间 t 求导,得

$$2\dot{\theta}\ddot{\theta}=-\frac{3g}{2l}\cos\theta\cdot\dot{\theta}$$

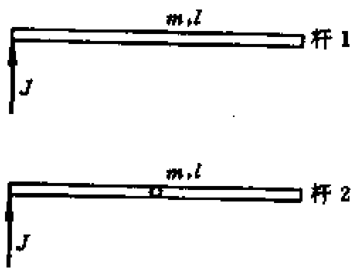
即

$$\ddot{\theta}=-\frac{3g}{4l}\cos\theta$$

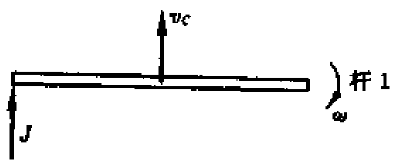
这就是(5)式.

【题 24】 如力图6-24-1,在光滑地面上静止地放置着两根质量均为 m,长度均为 l 的均匀细杆.其中一杆由相等的两段构成,中间用光滑的铰链连接起来(意即两段在连接点可以弯折但不能分离).在两杆的一端,各施以相同的垂直于杆的水平冲量 J.试求两杆所获动能之比.

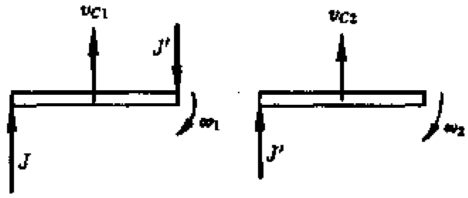
【分析】 如力图6-24-2,杆1在冲量 J 的作用下,质心的动量(速度)及绕质心的角动量(角速度)可由质心运动定理及质心系中的角动量定理求得,于是所获动能可知.



力图 6-24-1



力图 6-24-2



力图 6－24－3

如力图 6－24－3，杆 2 由彼此连接的两段组成，应分别讨论．左段在受冲量 J 作用的同时，还受到右段所施冲量 J' 的作用．由牛顿第三定律，右段同时受到左段所施冲量 J' 的作用．两个 J' 的方向相反，设如力图 6－24－3 所示．于是左段和右段的运动可知．左段和右段的运动是有联系的，即连接点（左段右端，右段左端）的速度相等，两段不分离，这就是连接条件．

【解】 对杆 1，由质心运动定理和质心系中的角动量定理，得

$$J = mv_C$$

$$J\cdot\frac{l}{2} = I\omega = \frac{1}{12}ml^2\omega$$

杆 1 所获动能为

$$E_K = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{J}{m}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}ml^2\left(\frac{6J}{ml}\right)^2 = \frac{2J^2}{m}$$

对杆 2 左段，有

$$\begin{cases} J - J' = \dfrac{m}{2}v_{C1} & (1) \\ (J + J')\dfrac{l}{4} = \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{m}{2}\right)\left(\dfrac{l}{2}\right)^2\omega_1 = \dfrac{ml^2}{96}\omega_1 & (2) \end{cases}$$

对杆 2 右段，有

$$\begin{cases} J' = \dfrac{m}{2}v_{C2} & (3) \\ J'\cdot\dfrac{l}{4} = \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{m}{2}\right)\left(\dfrac{l}{2}\right)^2\omega_2 = \dfrac{ml^2}{96}\omega_2 & (4) \end{cases}$$

连接条件为

$$v_{C1} - \frac{l}{4}\omega_1 = v_{C2} + \frac{l}{4}\omega_2 \qquad (5)$$

(1)、(2)、(3)、(4)、(5)式联立，解出

$$v_{C1} = \frac{5}{2m}J$$

$$v_{C2} = -\frac{1}{2m}J$$

$$\omega_1 = \frac{18}{ml}J$$

$$\omega_2=-\frac{6}{ml}J$$

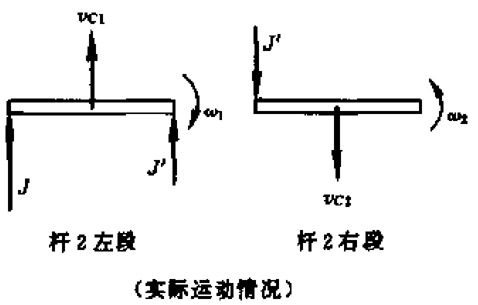
其中 v_{C2}与 ω_2 为负号表明，它们实际的方向与力图 6－24－3 的假设相反，即实际情况应如力图 6－24－4所示．

杆 2 所获动能应为，

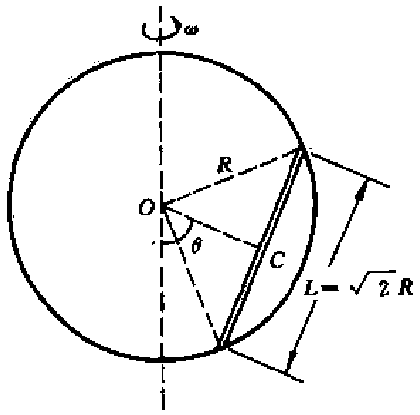
$$E'_{\mathrm{K}}=\frac{m}{4}\ v_{C1}^2+\frac{m}{4}v_{C2}^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}\left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{l}{2}\right)^2(\omega_1^2+\omega_2^2)=\frac{7}{2m}J^2$$

故两杆所获动能之比为

$$\frac{E_{\mathrm{K}}}{E'_{\mathrm{K}}}=\frac{\dfrac{2J^2}{m}}{\dfrac{7J^2}{2m}}=\frac{4}{7}$$



力图 6－24－4



力图 6－25－1

【题 25】 如力图6－25－1，半径为 R 的圆环绕铅垂的直径轴以角速度ω 匀角速旋转．一细杆长 $L=\sqrt{2}R$，其两端约束在圆环上可作无摩擦滑动，细杆的位置用 OC 与铅垂轴的夹角 θ 表示，C 为细杆的质心．试求细杆在圆环上的平衡位置，并讨论平衡的稳定性．

【分析】 取圆环为参考系进行讨论较为方便．在以角速度 ω 旋转的非惯性系中，细杆所受的重力和惯性离心力均属保守力，可以引进重力势能和离心势能，两者之和为有效势能，用 E_{eff}表示，E_{eff}由细杆的位置θ 角决定．只要写出 E_{eff}与 θ 的函数关系 $E_{eff}(\theta)$，就可由$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}E_{eff}=0$ 的条件求得平衡位置，再由$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}E_{eff}$的值来判定平衡的稳定性．

【解】 取圆环为参考系．设细杆质量为 m，取细杆质心 C 位于转轴所在位置时(与圆环中心的距离为$\frac{R}{\sqrt{2}}$)为重力势能的零点，则当细杆在任意位置 θ 时(如力图 6－25－2)，其重力势能为

$$E_{重}=mg\frac{R}{\sqrt{2}}(1-\cos\theta)$$

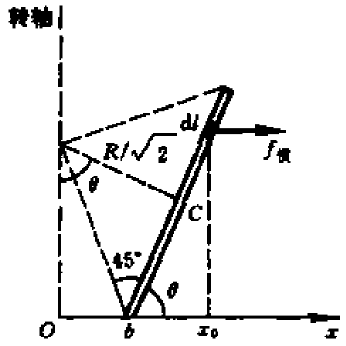
为求细杆的离心势能，如力图 6－25－2，取 x 轴沿水平方向，细杆下端刚好在 x 轴上与原点O 相距为b．在细杆上任取一线元 $\mathrm{d}l$($\mathrm{d}l$ 两端与细杆下端的距离为 l 和 $l+\mathrm{d}l$)，其 x 坐标为

$$x_0 = b + l\cos\theta$$

线元 dl 所受的惯性离心力为

$$f_{惯} = \left(\frac{m}{L}dl\right)x_0\omega^2$$

设想将该线元从轴线处(即 $\theta=0$ 处)移到如力图 6-25-2 所示的任意 θ 角位置,则惯性离心力作功为



力图 6-25-2

$$dW_{惯} = \left(\frac{m}{L}dl\right)\omega^2\int_0^{b+l\cos\theta} x\,dx = \frac{m\omega^2}{2L}(b + l\cos\theta)^2 dl$$

如力图 6-25-2,规定 $x=0$ 处为离心势能的零点,则相应的离心势能为

$$dE_{离} = -\frac{m\omega^2}{2L}(b + l\cos\theta)^2 dl$$

整个细杆在任意 θ 角位置的离心势能为

$$E_{离} = -\frac{m\omega^2}{2L}\int_0^L (b + l\cos\theta)^2 dl = -\frac{m\omega^2}{2L}\left(b^2L + bL^2\cos\theta + \frac{1}{3}L^3\cos^2\theta\right)$$

如力图 6-25-2,有几何关系

$$b = R\sin(\theta - 45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}R(\sin\theta - \cos\theta)$$

$$b^2 = \frac{R^2}{2}(1 - 2\sin\theta\cos\theta)$$

又已知,

$$L = \sqrt{2}R$$

代入 $E_{离}$ 表达式,得

$$E_{离} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{mR^2}{2}\left(1 - \frac{2}{3}\cos^2\theta\right)\omega^2 = -\frac{1}{2}I_{轴}\omega^2$$

式中 $I_{轴}$ 是细杆绕竖直转轴的转动惯量.

细杆在任意 θ 角位置的总的有效势能为

$$E_{p,eff} = E_{重} + E_{离} = \frac{1}{\sqrt{2}}Rmg(1 - \cos\theta) - \frac{1}{4}mR^2\omega^2\left(1 - \frac{2}{3}\cos^2\theta\right)$$

对 θ 求导,得

$$\frac{d}{d\theta}E_{p,eff} = mR\sin\theta\left[\frac{g}{\sqrt{2}} - \frac{R\omega^2}{3}\cos\theta\right]$$

平衡位置应满足

$$\frac{d}{d\theta}E_{p,eff} = 0$$

故细杆有三个平衡位置,为

$$\theta = 0, \pi, \arccos\left(\frac{3g}{\sqrt{2}\omega^2 R}\right)$$

为了讨论以上三个平衡位置的稳定性,求 $E_{p,eff}$ 对 θ 的二阶导数,得

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}E_{\mathrm{p,eff}}=\frac{1}{\sqrt{2}}mgR\ \cos\theta-\frac{1}{3}mR^2\omega^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

1. 对于平衡位置 $\theta=0$，有

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}E_{\mathrm{p,eff}}=mR\left[\frac{g}{\sqrt{2}}-\frac{1}{3}R\omega^2\right]$$

当 $\omega^2<\frac{3g}{\sqrt{2}R}$时，$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}E_{\mathrm{p,eff}}>0$，$E_{\mathrm{p,eff}}$为极小值，属稳定平衡．当 $\omega^2>\frac{3g}{\sqrt{2}R}$时，$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}E_{\mathrm{p,eff}}<0$，$E_{\mathrm{p,eff}}$为极大值，属不稳定平衡．可见，只有在角速度 ω 较小时，$\theta=0$ 才是稳定的平衡位置．

2. 对于平衡位置 $\theta=\pi$，有

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}E_{\mathrm{p,eff}}=-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}mgR+\frac{1}{3}mR^2\omega^2\right)<0$$

即 $E_{\mathrm{p,eff}}$总是极大值．所以 $\theta=\pi$ 总是不稳定的平衡位置．

3. 对于平衡位置 $\theta=\arccos\left(\frac{3g}{\sqrt{2}\omega^2R}\right)$，有

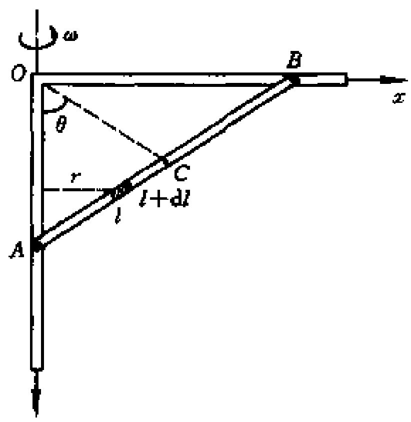
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}E_{\mathrm{p,eff}}=\frac{m}{\omega^2}\left(\frac{\omega^4R^2}{3}-\frac{3}{2}g^2\right)$$

因 $\cos\theta<1$，即 $3g<\sqrt{2}\omega^2R$，即$\frac{\omega^4R^2}{3}>\frac{3}{2}g^2$，故

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}E_{\mathrm{p,eff}}>0$$

$E_{\mathrm{p,eff}}$总是极小值．因此 $\theta=\arccos\left(\frac{3g}{\sqrt{2}\omega^2R}\right)$总是稳定的平衡位置．

【题 26】 如图，Ox 和 Oy 分别是支架的水平臂和铅垂臂，Ox 臂绕铅垂臂作匀角速转动，角速度为 ω．一均匀细杆的两端 A 和 B 被分别约束在两臂上运动．假定约束是理想的(即不计摩擦力)，细杆的质量为 m，长为 $2L$，细杆位置用图中 θ 角表示，θ 角是 OC 与 Oy 之间的夹角，C 为细杆质心．以支架为参考系考察细杆的运动．1. 试写出细杆的能量表达式．2. 试求细杆的平衡位置，并讨论平衡的稳定性．



力图 6－26－1

【分析】 在 Oxy 参考系中，细杆受两端的约束力、重力、惯性离心力以及科里奥利力的共同作用．因约束是理想的，无摩擦力，两个约束力分别与端点 A、B 的运动方向垂直，故对细杆不作功．重力作功表现为细杆具有重力势能．惯性离心力作功表现为细杆具有离心势能．杆上每个质元所受科里奥利力的方向总是与质元的速度垂直(即 $-\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$ 的方向)，故科里奥利力也不作功．总之，细杆的总机械能包括动能，重力势能和离心势能，后两项之和为有效势能，系统的机械能守恒．利用有效势能的表达式可以求得细杆的平衡位置，并讨论平衡的稳定性．

【解】 1. 设细杆位于任意 θ 角位置处，取 O 点为重力势能零点，细杆的重力势能为

$$E_{重} = -mgL\cos\theta$$

为求细杆的离心势能，在杆上任取与 A 端距离为 l 的质元 $\mathrm{d}m=\lambda\mathrm{d}l$，其中 $\lambda=\frac{m}{2L}$ 是细杆的质量线密度．该质元 $\mathrm{d}m$ 所受的惯性离心力为

$$\mathrm{d}F = r\omega^2\mathrm{d}m$$

式中

$$r = l\sin\theta$$

r 是质元 $\mathrm{d}m$ 到 Oy 轴的垂直距离．设想把质元 $\mathrm{d}m$ 从 $r=0$ 处移到 r 处，则惯性离心力作功为

$$\mathrm{d}W = \omega^2\mathrm{d}m\int_0^r r\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\omega^2r^2\,\mathrm{d}m$$

取转轴 Oy 处的离心势能为零，则在 r 处的质元 $\mathrm{d}m$ 的离心势能为

$$\mathrm{d}E_{离} = -\frac{1}{2}\omega^2r^2\mathrm{d}m = -\frac{1}{2}\omega^2l^2\lambda\,\sin^2\theta\,\mathrm{d}l$$

整个细杆在任意 θ 角位置的离心势能为

$$E_{离} = -\frac{1}{2}\omega^2\lambda\sin^2\theta\int_0^{2L} l^2\,\mathrm{d}l$$

$$= -\frac{8}{6}\omega^2\lambda L^3\sin^2\theta = -\frac{2}{3}\omega^2mL^2\sin^2\theta$$

细杆总能量包括绕 O 点的转动动能，重力势能和离心势能，即

$$E = E_k + E_{重} + E_{离} = E_k - mgL\cos\theta - \frac{2}{3}m\omega^2L^2\sin^2\theta$$

式中 E_k 为细杆的动能，包括质心的动能和绕质心的转动动能，即

$$E_k = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

式中 v_C 为质心速度，$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ 为绕质心的角速度，$I_C=\frac{1}{3}mL^2$ 为细杆绕质心的转动惯量．为求 v_C，写出质心的径矢为

$$\overrightarrow{OC} = L\sin\theta\,\boldsymbol{i} + L\cos\theta\boldsymbol{j}$$

故质心速度为

$$\boldsymbol{v}_C = L\cos\theta\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} - L\sin\theta\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}$$

$$v_C = L\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

于是

$$E_k = \frac{1}{2}mL^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{6}mL^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{2}{3}mL^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

最后得出细杆总能量为

$$E = \frac{2}{3}mL^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 - mgL\cos\theta - \frac{2}{3}m\omega^2L^2\sin^2\theta$$

2．细杆的有效势能为

$$E_{\text{eff}}=E-E_K=-mgL\cos\theta-\frac{2}{3}m\omega^2L^2\sin^2\theta$$

上式对 θ 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}E_{\text{eff}}=mL\sin\theta\left(g-\frac{4}{3}\omega^2L\cos\theta\right)$$

平衡位置满足的条件是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}E_{\text{eff}}=0$$

即

$$\sin\theta\left(g-\frac{4}{3}\omega^2L\cos\theta\right)=0$$

一般情形下，满足上式的 θ 角有两个，即有两个平衡位置，为

$$\theta=0,\text{和}\cos\theta_0=\frac{3g}{4\omega^2L}\tag{1}$$

因 $\cos\theta_0\leqslant1$，故只有当 $\omega^2\geqslant\frac{3g}{4L}$ 时才存在 θ_0 这个平衡位置．

为了讨论平衡的稳定性，求 E_{eff} 对 θ 的二阶导数，得

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}E_{\text{eff}}=mL\left[\cos\theta\left(g-\frac{4}{3}\omega^2L\cos\theta\right)+\frac{4}{3}\omega^2L\sin^2\theta\right]\tag{2}$$

1．当 $\omega^2<\frac{3g}{4L}$ 时，只有 $\theta=0$ 一个平衡位置．将 $\theta=0$ 代入(2)式，得

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}E_{\text{eff}}=mL\left(g-\frac{4}{3}\omega^2L\right)>0$$

因 $\theta=0$ 时 E_{eff} 有极小值，故 $\theta=0$ 属稳定平衡．

2．当 $\omega^2>\frac{3g}{4L}$ 时，有两个平衡位置，如(1)式．先将 $\theta=0$ 代入(2)式，并注意 $\omega^2>\frac{3g}{4L}$，有

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}E_{\text{eff}}<0$$

即平衡位置 $\theta=0$ 处 E_{eff} 有极大值，属不稳定平衡．

再将 $\cos\theta=\frac{3g}{4\omega^2L}$ 代入(2)式，有

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}E_{\text{eff}}=mL\cdot\frac{4}{3}\omega^2L\left[1-\left(\frac{3g}{4\omega^2L}\right)^2\right]>0$$

即在平衡位置 $\theta_0=\arccos\frac{3g}{4\omega^2L}$ 处 E_{eff} 有极小值，属稳定平衡．

【题 27】 1．如力图 6－27－1，质量为 m 的陀螺绕对称轴高速旋转，角速度为 ω，绕对称轴的转动惯量为 I，质心到转轴下端的距离为 l_C，在重力矩的作用下，陀螺将绕竖直轴作缓慢进动．试求进动角速度的近似值．

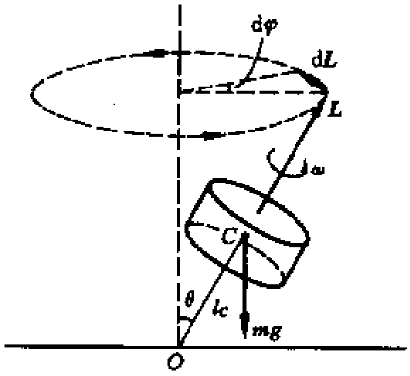
2．若转轴下端与桌面是面接触，并受摩擦力的作用．试解释在摩擦的作用下，转轴将产生趋向于竖直轴的附加运动，并计算从倾斜 θ 角到竖直位置所需的时间．

【分析】 由角动量定理，

$$\boldsymbol{M}\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

陀螺在重力矩的作用下，角动量在 $\mathrm{d}t$ 时间内将改变 $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$．因陀螺高速旋转，自转角动量 $\boldsymbol{L}$ 很大，其他角动量(进动、章动等)可忽略，故 $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ 是 $\boldsymbol{L}$ 在力矩方向偏转的量．于是 $\boldsymbol{L}$ 将绕竖直轴进动，进动角速度可求．

若转轴下端与桌面是面接触，由于转轴不停地旋转，端点将受滑动摩擦力的作用，摩擦力矩的存在将使陀螺产生第二种进动，正是这第二种进动产生转轴趋向于竖直轴的附加运动．



力图 6－27－1

【解】 1．如力图 6－27－1，取转轴下端 O 点为参考点，陀螺受到的重力矩为

$$M=mg\,l_{\mathrm{C}}\sin\theta$$

设 $\mathrm{d}t$ 时间内角动量 $\boldsymbol{L}$ 的改变量为 $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$，其方向与力矩方向相同，大小为(见力图 6－27－1)

$$\mathrm{d}L=L\,\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

由角动量定理，

$$M\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}L$$

由以上三式，得

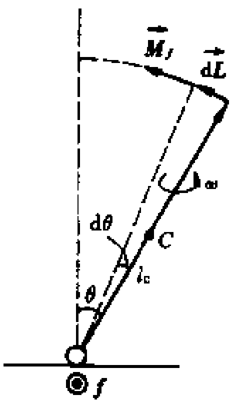
$$mg\,l_{\mathrm{C}}\sin\theta\,\mathrm{d}t=L\,\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

故进动角速度为

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\frac{mg\,l_{\mathrm{C}}}{L}=\frac{mg\,l_{\mathrm{C}}}{I\omega}$$

可见，自转角速度 ω 越大，进动角速度$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$越小，随着 ω 的越来越小，进动角速度$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$就会越来越快．

2．如力图 6－27－2，设转轴右倾，转轴下端的右侧部分与桌面接触，所受滑动摩擦力 f 的方向与相对运动方向相反，即垂直图面向外，为⊙．对质心 C 的摩擦力矩 $\boldsymbol{M}_f$ 的方向如力图 6－27－2 所示，其大小为



力图 6－27－2

$$M_f=\mu mg\,l_{\mathrm{C}}$$

由角动量定理，$\boldsymbol{M}_f$ 的方向也就是 $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ 的方向．故以质心为参考系时，$\boldsymbol{L}$ 将向竖直轴方向(即 θ 角减小的方向)作第二种进动，所以转轴产生趋向于竖直轴位置的附加运动．与第 1 问中的计算相仿，有

$$\mathrm{d}L=-L\,\mathrm{d}\theta=M_f\,\mathrm{d}t$$

即

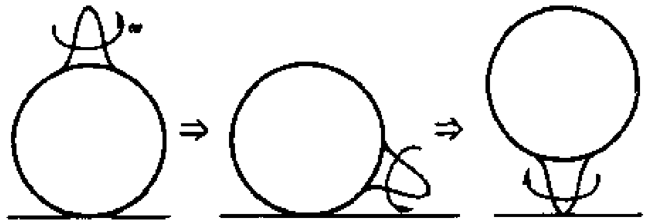
$$-L\,\mathrm{d}\theta=\mu mg\,l_{\mathrm{C}}\,\mathrm{d}t$$

故进动角速度为

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu mg\,l_{\mathrm{C}}}{L}=-\frac{\mu mg\,l_{\mathrm{C}}}{I\omega}$$

从倾角为 θ 到竖直位置所需时间为

$$t=-\frac{I\omega}{\mu mg\,l_C}\int_{\theta}^{0}\mathrm{d}\theta=\frac{I\omega}{\mu mg\,l_C}\theta$$



力图 6－27－3　翻转陀螺

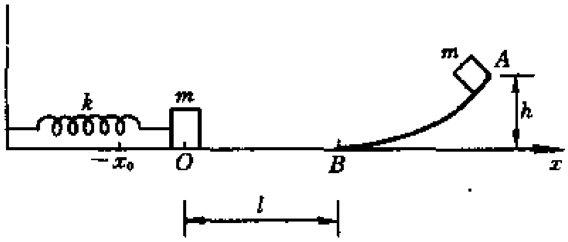
翻转陀螺是一种有趣的玩具，力图 6－27－3 中所示的是翻转陀螺运动过程的几个画面．翻转陀螺之所以能翻转，主要是上面讨论的由摩擦力矩所产生的第二种进动造成的．

第七章　振动与波动

【题1】 如力图7－1－1，质量为 m、劲度系数为 k 的弹簧振子放在光滑的水平面上，其平衡位置在 O 点，其圆频率 $\omega=0.5\pi\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$. 另一质量亦为 m 的质点放在光滑曲面的A 点，AB 间高度差 $h=0.20$ m，质点由 A 点滑到B 点所需时间 $t_{AB}=1.5$ s，OB 之间的距离 $l=6.0$ m. 现将弹簧振子向左压缩到 $x_0=2.0$ m 处自由释放，同时释放 A 处的质点 m，两个质点相遇作完全非弹性碰撞后粘在一起，发生碰撞时弹簧作用力可略．若从碰撞开始计时，试求系统振动的数学表达式．(取 $g=10\ \mathrm{m/s^2}$).

【分析】 首先，应注意到本题涉及两个不同的弹簧振子．其一是由 m 和k 构成的弹簧振子，它的振动方程是

$$x=x_0\cos(\omega t+\varphi_0)$$



力图 7－1－1

其中 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$已知，又由 $t=0$ 时已知的 $x=-x_0$ 可确定 φ_0. 另一是两质点碰撞相粘后由 $2m$ 和k 构成的弹簧振子，它的振动方程即为所求，形式应为

$$x'=A\cos(\omega' t+\varphi_0')$$

其中 $\omega'=\sqrt{\dfrac{k}{2m}}$可知，关键在于确定 A 和φ_0'. 显然，A 和 φ_0' 应由弹簧振子($2m$ 和k 组成)的初条件(即 $t=0$)时的位置 x_0' 和速度 v_0' 求出．值得注意的是，弹簧振子($2m$，k)的 $t=0$ 时刻是两质点碰撞相粘的时刻；而弹簧振子(m，k)的 $t=0$ 时刻，则是 m 向左压缩后释放，而且同时释放 A 处质点 m 的时刻，切勿混淆．

质点 m 从A 点运动到B 点，因曲面光滑，机械能守恒，不难求出它到达 B 点的速度 v_B，尔后以 v_B 向左作匀速直线运动，直至与弹簧振子 m 相碰．弹簧振子 m 从初位置 $-x_0$ 自由释放(初速为零)后作简谐振动．根据两个 m 的运动情况，求出碰撞时刻，再求出碰撞的位置，此即弹簧振子 $2m$ 的初位置x'_0. 由于两个 m 作完全非弹性碰撞，遵循动量守恒定律，由此可求出碰后粘在一起的 $2m$ 的速度，此即弹簧振了 $2m$ 的初速度 v_0'.

【解】 如力图 7－1－1，取弹簧振子 m 的平衡位置O 点为坐标原点，取从 $-x_0$ 处自由释放弹簧振子 m，同时释放 A 处质点m 的时刻为$t=0$ 时刻．

A 处质点m 经 t_{AB}时间到达B 点，它在 B 点的速度为

$$v_B=\sqrt{2gh}$$

再从 B 点以v_B 作匀速直线运动，经 t_1 时间与弹簧振子 m 相碰，相碰的位置在

$$x_1=l-v_Bt_1=l-\sqrt{2gh}\ t_1=(6.0-2.0t_1)\ \mathrm{m} \tag{1}$$

弹簧振子 m 的振动方程为

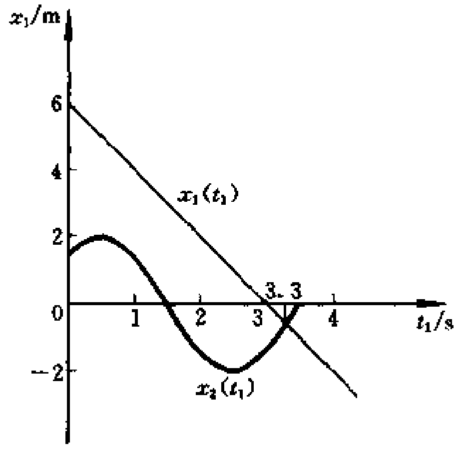
$$x = x_0\cos(\omega t + \varphi_0)$$

因 $t=0$ 时 $x=-x_0$，得出 $\cos\varphi_0=-1$，$\varphi_0=\pi$，又其中 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$，即

$$x = x_0\cos(\omega t + \pi)$$

弹簧振子 m 从初始状态经 $(t_{AB}+t_1)$ 时间后与质点 m 相碰，相碰时弹簧振子 m 的位置为

$$\begin{aligned} x_2 &= x_0\cos[\omega(t_{AB}+t_1)+\pi] \\ &= 2.0\cos[0.5\pi(1.5+t_1)+\pi] \\ &= 2.0\cos\left(0.5\pi t_1+\frac{7}{4}\pi\right)\ \text{m} \qquad (2) \end{aligned}$$



力图 7-1-2

相碰时，

$$x_1 = x_2$$

把(1)、(2)式代入，得

$$6.0-2.0t_1=2.0\cos\left(0.5\pi t_1+\frac{7}{4}\pi\right) \qquad (3)$$

由(3)式难以求出 t_1 的解析解，但可用作图法求解，即根据 $x_1(t_1)$ 和 $x_2(t_1)$ 的数据画出 $x_1(t_1)$ 和 $x_2(t_1)$ 曲线，其交点即为 t_1. 数据表如下，曲线如力图 7-1-2 所示．

数　据　表

t_1/s	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5
$x_1=6.0-2.0t_1$/m	6.0	5.0	4.0	3.0	2.0	1.0	0	−1.0
$x_2=2.0\cos\left(0.5\pi t_1+\frac{7}{4}\pi\right)$/m	1.4	2.0	1.4	0	−1.4	−2.0	−1.4	0

由力图 7-1-2 得出

$$t_1=3.3\ \text{s}$$

于是

$$x_1=x_2=-0.6\ \text{m}$$

这就是在 $(t_{AB}+t_1)$ 时刻两质点相碰的位置．由(2)式得出，在 $(t_{AB}+t_1)$ 时刻弹簧振子 m 的速度为

$$v_1=-x_0\omega\sin\left(\omega t_1+\frac{7}{4}\pi\right)=3.0\ \text{m/s}$$

$v_1>0$ 表示弹簧振子 m 的速度方向向右．

两个 m 作完全非弹性碰撞，设碰后速度为 v_0'，由动量守恒，得

$$2mv_0'=mv_1-mv_B$$

故

$$v_0'=\frac{1}{2}(v_1-v_B)=0.5\ \text{m/s}$$

碰撞相粘后构成新的弹簧振子 $2m$，其圆频率为

$$\omega'=\sqrt{\frac{k}{2m}}=\frac{\omega}{\sqrt{2}}=1.11\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

取$(t_{AB}+t_1)$时刻为弹簧振子 $2m$ 的初始时刻 $t=0$，在此时刻它的位置和速度为

$$\begin{cases}x'_0=x_1=x_2=-0.6\ \text{m}\\ v'_0=0.5\ \text{m/s}\end{cases}$$

因此，弹簧振子 $2m$ 的振幅和初相位为

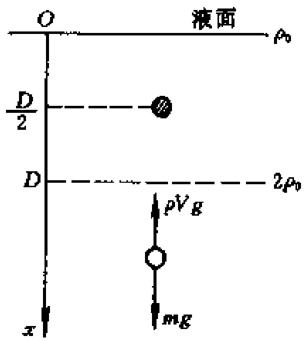
$$\begin{cases}A=\sqrt{x'^2_0+\dfrac{v'^2_0}{\omega'^2}}=0.75\ \text{m}\\ \tan\varphi'_0=-\dfrac{v'_0}{\omega'x'_0}=0.7508,\quad 即\ \varphi'_0=37°\end{cases}$$

弹簧振子 $2m$ 的振动方程为

$$x'(t)=A\cos(\omega't+\varphi'_0)=0.75\cos(1.11t+37°)\,\text{m}$$

【题 2】 如图，某液体的密度随深度线性地增加，液体表面的密度为 ρ_0，深度为 D 处的密度为 $2\rho_0$，一密度为 $2\rho_0$ 的小球在深度为 $\frac{D}{2}$ 处从静止释放．忽略液体的阻力．试求小球的振动表达式．

【分析】 小球受重力和浮力的作用，当小球在不同深度时，体积不变，但液体密度的变化导致浮力的不同，使浮力起着准弹性力的作用．不计阻力时小球将作简谐振动．



力图 7－2－1

【解】 取坐标如图．设小球体积为 V，因液体密度线性变化，可表为

$$\rho=\rho_0+kx$$

当 $x=D$ 时，$\rho=2\rho_0$，故

$$k=\frac{\rho_0}{D}$$

由以上两式，得

$$\rho=\rho_0+\frac{\rho_0}{D}x=\rho_0\left(1+\frac{x}{D}\right)\qquad(1)$$

小球在任意位置 x 处，受重力 mg，浮力 ρVg，由牛顿第二定律，其运动方程为

$$m\ddot{x}=mg-\rho Vg$$

把(1)式及 $m=2\rho_0V$ 代入上式，得

$$2\rho_0V\ddot{x}=2\rho_0Vg-\rho_0\left(1+\frac{x}{D}\right)Vg$$

即

$$\ddot{x}+\frac{g}{2D}(x-D)=0$$

解出

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

式中

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{2D}}$$

初条件为

$$t = 0 \text{ 时}, x_0 = -\frac{D}{2}, v_0 = 0$$

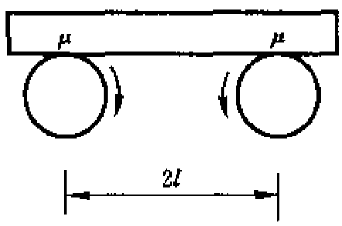
得出

$$\begin{cases} A\cos\varphi = -\dfrac{\rho}{2} \\ -A\omega\sin\varphi = 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \varphi = \pi \\ A = \dfrac{D}{2} \end{cases}$$

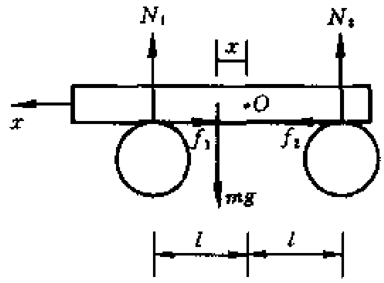
故小球的振动表达式为

$$x = \frac{D}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{2D}}t + \pi\right)$$

【题3】 如图1,两个完全相同的圆柱状滚轮在水平面内平行放置,各绕自身的轴线按图示方向等角速转动,两轴线之间的距离为 $2l$. 在两滚轮上平放一块重量为 G 的均匀木板,木板与滚轮之间的摩擦系数为 μ. 若木板重心偏离两轴中心位置一个微小的距离,试描述木板的运动 .



力图 7－3－1



力图 7－3－2

【分析】 如力图 7－3－2 所示,滚轮与木板之间有相对滑动,因两轮滚动方向不同,木板受到方向相反的两个摩擦力 f_1(向右)和 f_2(向左)的作用,两个摩擦力的大小与相应的正压力(即图中两滚轮对木板支持力 N_1 和 N_2 的反作用力)成正比,比例系数即为摩擦系数 μ. 当木板重心位于两滚轮轴连线的中垂面上时,木板对两滚轮的正压力相等,即 $N_1 = N_2$,故 $f_1 = f_2$,两摩擦力相等反向,于是木板在水平方向合力为零,木板静止不动 . 当木板重心从中垂面偏离微小距离 x 时,木板对两轮的正压力不相等,即 $N_1 \neq N_2$,故 $f_1 \neq f_2$,木板在水平方向受到的合力不为零 . 可以证明此合力为线性恢复力,因而木板将在两滚轮上沿水平方向作简谐振动 .

【解】 设木板质量为 m,因木板在竖直方向无运动,故

$$N_1 + N_2 = mg = G$$

因木板始终在水平面内运动,无转动,故所受合力矩应为零 . 为方便起见,取木板重心为计算力矩的参考点,则当木板重心从两滚轮轴的中垂面(力图 7－3－2 中通过 O 点)左移 x 的距离时,应有

$$N_1(l - x) = N_2(l + x)$$

由以上两式，解出

$$N_1 = \frac{l + x}{2l}mg$$

$$N_2 = \frac{l - x}{2l}mg$$

于是木板在 x 方向受到的两个方向相反的摩擦力的合力为

$$F = f_2 - f_1 = \mu(N_1 - N_2) = -\frac{\mu mg}{l}x$$

可见，水平合力 F 是线性恢复力，故木板将沿 x 方向作简谐振动．由牛顿第二定律，

$$m\ddot{x} = -\frac{\mu mg}{l}x$$

即

$$\ddot{x} + \frac{\mu g}{l}x = 0$$

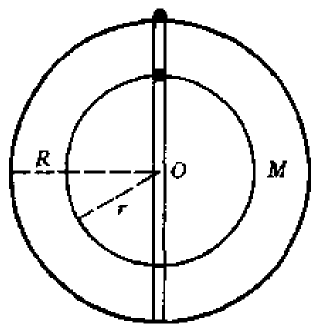
故木板简谐振动的圆频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu g}{l}}$$

周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\mu g}}$$

【题 4】 牛顿曾证明：一个均匀球壳，对球壳内物质的万有引力为零，而对球壳外物质的万有引力不为零，并且其作用就相当于球壳的质量都集中到球心那样(参看力学第三章题 11)．如图所示，设想沿地球直径开凿一条贯通地球的隧道，将一小球从洞口由静止释放，试求小球到达隧道另一洞口所用的时间．已知地球的半径为 R，质量为 M，设地球的质量均匀分布．



力图 7－4－1

【分析】 如图，设小球在隧道中落到任意位置处，该处与地球球心 O 的距离为 r．根据牛顿证明的结果，小球只受到半径为 r 的球体内物质的引力作用，而小球所在位置以外的球壳(即分别以 r、R 为内、外半径的球壳)则对小球无引力作用．容易证明，小球在 r 处所受的引力与 r 成正比，其方向总是指向地球球心 O，即小球在隧道中所受合力是线性恢复力，故小球将在贯通地球直径的隧道中作简谐振动．因小球是从地面洞口静止释放的，地球半径即为其简谐振动的振幅，故小球穿越整个地球直径所用时间，即为所作简谐振动的半个周期．

【解】 当小球沿隧道到达与地球球心 O 的距离为 r 处时，取 O 为坐标原点，则小球的位置矢量为 $\boldsymbol{r}$，所受万有引力为

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{M'm}{r^3}\boldsymbol{r}$$

式中 m 为小球质量，M' 是半径为 r 的球体的质量，即

$$M' = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = M\frac{r^3}{R^3}$$

故

$$\boldsymbol{F} = -\frac{GmM}{R^3}\boldsymbol{r}$$

式中 M 为地球质量，R 为地球半径．上式表明，小球所受引力与它偏离地球球心的距离 r 成正比，引力的方向总是与 $\boldsymbol{r}$ 反向，即总是指向地球球心 O，因此小球在隧道中所受引力是线性恢复力，它使小球在隧道中作简谐振动．把上式写成标量式，为

$$F = -\frac{GmM}{R^3}r$$

由牛顿第二定律

$$m\ddot{r} = -\frac{GmM}{R^3}r$$

或

$$\ddot{r} + \frac{GM}{R^3}r = 0$$

故小球所作简谐振动的圆频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$$

周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

小球穿越隧道所用时间为

$$t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

有趣的是，若小球从一个隧道口以第一宇宙速度沿地球表面作匀速圆周运动，则也将用同样多的时间到达与之相对的另一隧道口．因第一宇宙速度为

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

绕地球半圈所需时间为

$$t = \frac{\pi R}{v} = \pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

这一结果并非巧合，事实上小球沿地球表面的圆周运动在直径轴(即隧道)上的投影，正是小球在隧道中所作的简谐振动．

【题 5】 如力图7－5－1，在倾角为 θ 的斜面上有一劲度系数为 k 的弹簧，一端固定，另一端与质量为 m 的实心圆柱体的轴连接，圆柱体在斜面上作纯滚动．忽略轴承的摩擦．试求振动周期．

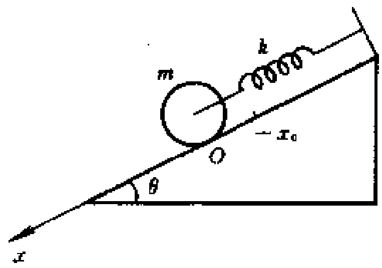
【分析】 由质心运动定理及转动定理列出运动方程，加上纯滚条件即可求解．

【解】 如力图 7－5－1，取 x 轴沿斜面，取圆柱体的平衡位置为坐标原点 O. 设弹簧为原长时，圆柱体位于 $-x_0$，则平衡时

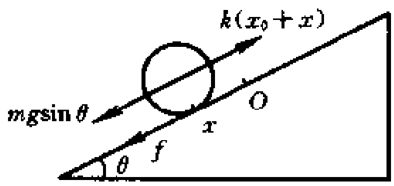
$$mg\sin\theta - kx_0 = 0$$

即

$$x_0 = \frac{mg\sin\theta}{k} \tag{1}$$



力图 7－5－1



力图 7－5－2

如力图 7－5－2，当圆柱体在任意位置 x 时，沿斜面方向受弹簧拉力 $k(x_0+x)$ 向上，摩擦力 f 向下，重力沿斜面的分力 $mg\sin\theta$ 向下，沿斜面方向应用质心运动定理，得

$$mg\sin\theta + f - k(x_0 + x) = m\ddot{x} \tag{2}$$

由转动定理，得

$$fR = I\beta \tag{3}$$

式中 R 是圆柱体的半径，I 是圆柱体绕中心轴的转动惯量，β 是圆柱体的角加速度．由纯滚条件，得

$$\beta = -\frac{a_C}{R} = -\frac{\ddot{x}}{R} \tag{4}$$

式中 $a_C = \ddot{x}$ 是圆柱体质心的加速度．

(1)、(2)、(3)、(4)式联立，并利用

$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

消去 x_0，f，β，得

$$\ddot{x} + \frac{2k}{3m}x = 0$$

因此，圆柱体沿斜面作简谐振动(同时作纯滚动)，振动的圆频率 ω 和周期 T 为

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{2k}}$$

【题 6】 如图，直角形均匀细杆的水平杆长为 l、质量为 m，竖直杆长为 $2l$、质量为 $2m$，细杆可绕拐角处的固定轴 O 无摩擦地转动．水平杆的一端与劲度系数为 k 的弹簧相连，平衡时水平杆呈

水平状态，竖直杆竖直下垂．试求微小摆动的周期．

【分析】 细杆绕固定轴 O 转动，在任意 θ 角位置时，水平杆受重力矩和弹簧力矩，竖直杆受重力矩，由转动定理可列出运动方程．再利用微小摆动条件及弹簧平衡时的伸长即可求解．

【解】 如图，设平衡时弹簧伸长为 x_0，则有

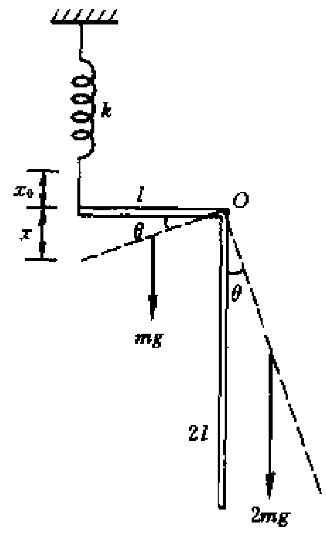
$$kx_0 l = mg\cdot\frac{l}{2} \tag{1}$$

当细杆摆动到任意角度 θ 时，细杆所受力矩为

$$M = mg\frac{l}{2}\cos\theta - k(x_0+x)l\cos\theta - 2mgl\sin\theta \tag{2}$$

式中 (x_0+x) 是细杆在 θ 角位置时弹簧的伸长．因微小摆动，有

$$\begin{cases}\cos\theta\approx 1\\ \sin\theta\approx 0\\ x\approx l\theta\end{cases} \tag{3}$$



力图 7－6－1

把(1)、(3)式代入(2)式，得

$$M = -(kl^2+2mgl)\theta$$

由转动定理，得

$$I\ddot{\theta} = -(kl^2+2mgl)\theta$$

即

$$\ddot{\theta} + \frac{kl^2+2mgl}{I}\theta = 0 \tag{4}$$

式中 I 是细杆绕固定轴 O 的转动惯量，为

$$I = \frac{1}{3}[ml^2+(2m)(2l)^2] = 3ml^2$$

代入(4)式，得

$$\ddot{\theta} + \frac{kl+2mg}{3ml}\theta = 0$$

因此，细杆绕 O 轴的微小摆动是简谐振动，振动的圆频率 ω 和周期 T 为

$$\omega = \sqrt{\frac{kl+2mg}{3ml}},\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{3ml}{kl+2mg}}$$

【题 7】 如力图7－7－1，弹簧振子中的小球质量为 M，弹簧的劲度系数为 k，弹簧的质量不可忽略，设为 m，假定弹簧的质量分布均匀，忽略摩擦力．试求振动周期．



力图 7－7－1

【分析】 当弹簧质量可以忽略时，振动周期为 $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$．现在弹簧质量不可忽略，则严格说来是弹性波在弹簧振子中的传播问题．由于通常弹性波的波长比振子的长度要长得多，在此条件下，弹簧上的各部分和小球实际上以相同的相位作简谐振动．

由于不计摩擦力，弹簧振子的总机械能守恒．现在总机械能中除小球动能及弹性势能外，必

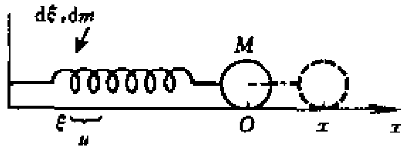
须计及弹簧本身的动能．弹簧的弹性势能只决定于形变，而与质量无关．写出弹簧振子总能量的表达式后，对时间求导，可得出小球运动所遵从的微分方程，由此即可得出振动的圆频率和周期．

【解】 如力图7-7-2，弹簧为原长时，在ξ处任取一小段$d\xi$，其质量dm为

$$dm=\frac{m}{l_0}d\xi$$

其中l_0是弹簧原长．当小球M从平衡位置O产生位移x时，该质元dm的相应位移设为u，则有

$$\frac{x}{l_0}=\frac{u}{\xi}$$



力图7-7-2

即

$$u=\frac{\xi}{l_0}x$$

对时间t求导，得出质元dm的速度为

$$\frac{du}{dt}=\frac{\xi}{l_0}\frac{dx}{dt}=\frac{\xi}{l_0}v$$

其中$v=\frac{dx}{dt}$是小球的速度．上式是把质元dm的速度$\frac{du}{dt}$与小球M的速度$\frac{dx}{dt}$相关连的式子．由上式，质元dm的动能为

$$dE_k=\frac{1}{2}dm\left(\frac{du}{dt}\right)^2=\frac{1}{2}\frac{m}{l_0}d\xi\frac{\xi^2}{l_0^2}v^2=\frac{mv^2}{2l_0^3}\xi^2d\xi$$

整个弹簧的动能为

$$E_{k1}=\frac{mv^2}{2l_0^3}\int_0^{l_0}\xi^2d\xi=\frac{1}{6}mv^2$$

小球的动能为

$$E_{k2}=\frac{1}{2}Mv^2$$

故弹簧振子的总动能为

$$E_k=E_{k1}+E_{k2}=\frac{1}{2}\left(M+\frac{m}{3}\right)v^2=\frac{1}{2}\left(M+\frac{m}{3}\right)\dot{x}^2$$

弹簧振子的总机械能为

$$E=\frac{1}{2}\left(M+\frac{m}{3}\right)\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2$$

由于弹簧振子的总机械能守恒，$E=$恒量．上式对时间t求导，得

$$\frac{dE}{dt}=0=\left(M+\frac{m}{3}\right)\dot{x}\ddot{x}+kx\dot{x}$$

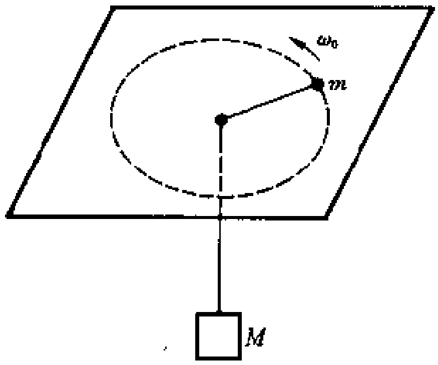
即

$$\ddot{x}+\frac{k}{M+\frac{m}{3}}x=0$$

故弹簧振子作简谐振动，其圆频率ω和周期T为

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{M+\frac{m}{3}}},\quad T=2\pi\sqrt{\frac{M+\frac{m}{3}}{k}}$$

【题 8】 如图,一不可伸长的细线穿过光滑桌面上的小孔,一端系质量为 m 的小球,另一端系质量为 M 的重物．小球在桌面上以角速度 ω_0 作匀速圆周运动,重物静止不动．若重物受到竖直向上或向下的扰动．试证明,重物将作上、下的简谐振动,并求振动圆频率．



力图 7-8-1

【分析】 当重物 M 静止,小球 m 在桌面作匀速圆周运动时,线中张力 T_0 等于 Mg,并提供 m 所需之向心力．

受扰动后,线中张力 T 及小球的轨道半径 r 均将随时间变化．重物 M 上、下作直线运动,其加速度由 Mg 及变化的张力 T 之和决定．扰动后,小球 m 除圆周运动外还有径向运动,其加速度是法向加速度与径向加速度之和,由张力 T 提供．

因小球不受外力矩,扰动前、后的角动量守恒．

由以上结果可得出小球轨道半径 r 随时间变化所遵循的方程,进而给出扰动量(重物在竖直方向的微小位移)的运动方程,确定重物受扰动后的运动特征,证明作简谐振动并求出振动圆频率．

也可由重物、小球、地球构成的系统的机械能守恒得出 r 的方程．

【解】 当重物 M 静止,小球 m 以 ω_0 作圆周运动时,设线中张力为 T_0,设小球圆周运动的半径为 r_0,则有

$$T_0=Mg=mr_0\omega_0^2$$

故

$$r_0=\frac{Mg}{m\omega_0^2}\tag{1}$$

受扰动后,设在任意时刻 t,线中张力为 T,小球的轨道半径为 r,T 和 r 都将随时间 t 变化．重物 M 的运动方程为

$$Mg-T=M\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(l-r)=-M\ddot{r}\tag{2}$$

式中 l 是细线的全长,l 是常数．小球 m 的运动可看成圆周运动与径向运动的叠加,其加速度为法向加速度 $r\omega^2$ 与径向加速度 $-\ddot{r}$ 之和,故小球的运动方程为

$$T=mr\omega^2-m\ddot{r}\tag{3}$$

由(2)、(3)式消去 T,得

$$Mg-mr\omega^2+m\ddot{r}=-M\ddot{r}$$

即

$$(M+m)\ddot{r}-mr\omega^2+Mg=0\tag{4}$$

由于小球在扰动前、后不受外力矩(扰动在竖直方向)其角动量守恒,故

$$L = mr^2\omega = mr_0^2\omega_0 = 常量 \tag{5}$$

把(5)式代入(4)式，得

$$(M+m)\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} + Mg = 0 \tag{6}$$

由于扰动是微小的，可将随时间 t 变化的小球轨道半径 $r(t)$ 写成

$$r(t) = r_0 + \delta(t)$$

式中 $\delta(t)$ 是小球轨道半径的微小改变量，因细线不可伸长，$\delta(t)$ 也是重物在竖直方向的微小位移量．因

$$\ddot{r}(t) = \ddot{\delta}(t)$$

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{r_0^3}\left(1+\frac{\delta}{r_0}\right)^{-3} = \frac{1}{r_0^3}\left(1-\frac{3\delta}{r_0}\right)$$

代入(6)式，得

$$(M+m)\ddot{\delta} - \frac{L^2}{mr_0^3}\left(1-\frac{3\delta}{r_0}\right) + Mg = 0 \tag{7}$$

由(1)、(5)式，有

$$Mg = mr_0\omega_0^2 = \frac{L^2}{mr_0^3}$$

代入(7)式，得

$$(M+m)\ddot{\delta} + \frac{3Mg}{r_0}\delta = 0$$

或

$$\ddot{\delta} + \frac{3Mg}{(M+m)r_0}\delta = 0$$

这就是扰动量 δ 的运动方程，是典型的简谐振动的运动方程．它表明重物 M 沿竖直方向上、下作简谐振动，振动圆频率为

$$\omega_\delta = \sqrt{\frac{3Mg}{(M+m)r_0}} = \sqrt{\frac{3m}{M+m}}\omega_0$$

上式最后一步用到了(1)式．

方法二．因小球、重物、地球系统的机械能守恒，有

$$E = \frac{1}{2}(M+m)\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - Mg(l-r) = 常量$$

式中右端第一项是重物 M 的动能与小球 m 的径向运动动能，第二项是小球 m 作圆运动的动能，第三项是重力势能(取桌面势能为零)．上式对时间 t 求导，得

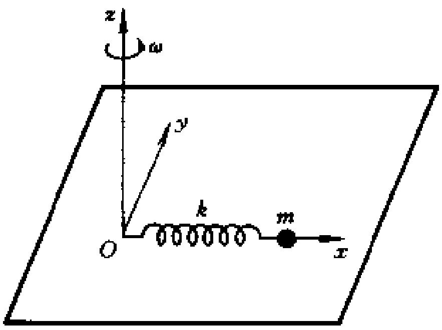
$$(M+m)\dot{r}\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3}\dot{r} + Mg\dot{r} = 0$$

即

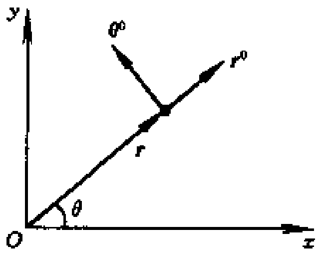
$$(M+m)\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} + Mg = 0$$

此即(6)式，以下同上．

【题 9】 如力图7-9-1,光滑的水平平板绕铅垂轴 Oz 逆时针作匀角速转动,角速度为 ω. 在板面上,一质量可略、原长为 l、劲度系数为 k 的弹簧一端固定在 O 点,另一端系一质量为 m 的小球 .开始时小球位于$(x_0,0)$,初速度为$(v_0,0)$. 试求小球相对平板的运动方程 $x=x(t)$,$y=y(t)$.



力图 7-9-1



力图 7-9-2

【分析】 设小球在任意时刻 t 的位置矢量为 $\boldsymbol{r}$,速度为 $\boldsymbol{v}$. 平板是一个转动系统,以平板为参考系,水平方向小球受弹性力 $k(r-l)$和惯性离心力 $m\omega^2 r$ 以及科里奥利力 $-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$. 注意,因弹簧无惯性,弹性力总是与小球的径矢一致 . 直观地看,一方面小球在径向力的作用下将作简谐振动,振动方向沿径矢 . 另一方面,由于平板光滑,小球以角速度 $-\boldsymbol{\omega}$ 绕 O 点运动 . 小球相对平板的运动就是上述两种运动的合成 .

根据牛顿第二定律列出径矢 r 所遵守的微分方程,解出 r 随时间 t 变化的规律 . 在任意时刻 t,径矢 r 与 x 轴的夹角为 $-\omega t$,将所得径矢投影到 x,y 轴,即可求得小球的运动方程 .

【解】 由牛顿第二定律,径矢 $\boldsymbol{r}$ 遵守的微分方程为

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=-k(r-l)\boldsymbol{r}^0+m\omega^2 r\boldsymbol{r}^0-2m\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}} \tag{1}$$

如力图 7-9-2,式中 $\boldsymbol{r}^0$ 是径矢方向的单位矢量,$\dot{\boldsymbol{r}}$ 是小球相对平板的速度 . 上式右端第一项为弹性力,第二项为惯性离心力,第三项为科里奥利力 . 在平面极坐标中,速度 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 可表示为

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{r}\boldsymbol{r}^0+r\dot{\theta}\boldsymbol{\theta}^0$$

式中 $\boldsymbol{\theta}^0$ 是与 $\boldsymbol{r}$ 垂直的单位矢量,如力图 7-9-2 所示 . 在平板参考系中,$\boldsymbol{r}$ 将顺时针绕 O 点转动,故有

$$\theta=-\omega t$$

$$\dot{\theta}=-\omega$$

因而

$$\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{\omega}\times(\dot{r}\boldsymbol{r}^0-r\omega\boldsymbol{\theta}^0)$$

注意到 $\boldsymbol{\omega}\perp\boldsymbol{r}^0$,$\boldsymbol{\omega}\perp\boldsymbol{\theta}^0$,故

$$\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}=\omega\dot{r}\boldsymbol{\theta}^0+\omega^2 r\boldsymbol{r}^0$$

把(1)式投影到 $\boldsymbol{r}^0$ 方向,有

$$ma_r=-k(r-l)-m\omega^2 r$$

注意，平面极坐标中径向加速度为

$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=\ddot{r}-\omega^2 r$$

由以上两式，有

$$m(\ddot{r}-\omega^2 r)=-k(r-l)-m\omega^2 r$$

即

$$\ddot{r}+\frac{k}{m}(r-l)=0$$

令

$$\xi=r-l$$

则有

$$\ddot{\xi}\frac{k}{m}\xi=0$$

这是简谐振动的微分方程，通解为

$$\xi=A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi\right)$$

于是

$$r=l+\xi=l+A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi\right)$$

式中振幅 A 和初相位 φ 由初条件决定．初条件是

$$t=0\text{ 时}, r=x_0, \dot{r}=v_0$$

故有

$$\begin{cases}x_0=l+A\cos\varphi\\ v_0=-A\sqrt{\dfrac{k}{m}}\sin\varphi\end{cases}$$

解出

$$A=\sqrt{(x_0-l)^2+\frac{m}{k}v_0^2}$$

$$\varphi=\arctan\left(-\frac{v_0\sqrt{\dfrac{m}{k}}}{x_0-l}\right)$$

由力图 7－9－2，

$$x=r\cos\theta=r\cos\omega t$$

$$y=r\sin\theta=-r\sin\omega t$$

最后得

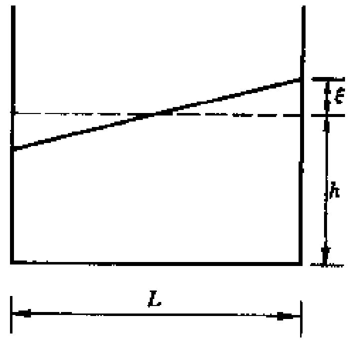
$$x=\left[l+A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi\right)\right]\cos\omega t$$

$$y=-\left[l+A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi\right)\right]\sin\omega t$$

【题 10】 在有些湖中，有时可观察到一种奇妙的湖震现象（水振荡）. 通常是在一个浅的，长而比较窄的湖里可以看到．好像水的整体在运动，像你拿着一杯咖啡送到客人那里去时那样．不能把这种现象当作湖面上的水波．

我们用一只矩形容器作模型．容器的长度为 L，水高为 h. 假定水面开始时与水平面成一小角度．水面开始振荡，振荡时水面仍保持平面，只是绕位于容器长度一半处的水平轴作振荡．

1. 试建立水运动的模型，并求出振荡周期 T 的表达式．初始条件在力图 7－10－1 中给出．假定 $\xi \ll h$.



力图 7－10－1

2. 下面两个表显示在两种不同长度的容器中，不同深度的水的振荡时间．以适当的方法检查你得出的公式，看它是否与实验数据很好吻合，并说明你对这种物理模型的适用性的意见．

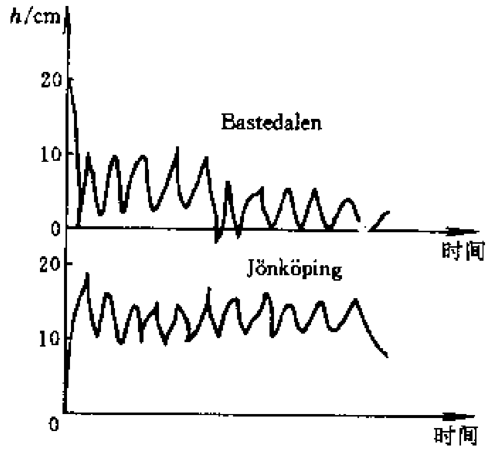
表 1 $L=479$ mm

h/mm	T/s
30	1.78
50	1.40
69	1.18
88	1.08
107	1.00
124	0.91
142	0.82

表 2 $L=143$ mm

h/mm	T/s
31	0.52
38	0.48
58	0.43
67	0.35
124	0.28

3. 力图 7－10－2 所示是在瑞典的 Vättern 湖上测量的结果，两条曲线分别代表在湖的北端 Bastedalen 和南端 Jönköping 的测量．该湖长度为 123 km，平均深度为 50 m. 在此情况下，时间标度应是什么？



力图 7－10－2

【分析】 初次接触这类题目时，解题者可能感到很不适应，不知如何着手．的确，与常见的题目不同，不是给出已知条件去计算什么．本题介绍了一种"湖震"的现象，提供了实现这种现象的实验装置——宽而浅的矩形容器，其中有水或咖啡，给出了相应的实验数据——表 1 和表 2. 要求根据这些，为"湖震"这样一种特殊的水的运动，建立适当的理论模型，给出振荡周期的定量公式，并把所得结果与实验数据比较，以便对理论模型和公式作出评价或修正，最后还要求用于 Vättern 湖的实际情况．总之，本题要求为实际问题建立理论模型并求解讨论，这是一类重要的基本训练，也更接近于实际的科学研究．

为了建立湖震的理论模型，求出振荡周期，需要撇开次要因素，把握住湖震的主要特征．湖

震并非湖面的波浪，即并非湖面质点振动的传播，而是湖水在保持水面仍为平面的条件下，绕位于容器长度一半处的水平轴所作的往复振荡(如力图 7-10-1)．换言之，涉及的不只是水面质点的运动，而是大块液体的运动．然而研究水的运动，例如力图 7-10-1 中三角形液块的运动是有困难的，因为它的形状、体积、质量都在变化，所受的作用力也在变化．但是，不难发现，伴随着水的振荡，水平轴一侧三角形液块的质心将绕轴同步地振荡，所以为了确定湖震的周期，只需分析质心的运动即可．注意到题目给定的重要条件 $\xi \ll h$，以及湖是狭长的，它表明质心的振荡主要在横向，纵向(即上下)的振荡可以忽略．换言之，质心的振荡近似是一维的，这就使问题大为单纯化了．

为了研究三角形液块质心的振荡，可建立坐标，写出质心位置和速度的定量表达式．但为了求出质心振荡的周期，则需确定质心作的是什么运动．为此，利用质心位置和速度的公式，写出它的机械能表达式，对时间求导后，得出质心横向位移随时间变化所遵从的微分方程正是熟知的简谐振动的微分方程，于是质心在横向所作简谐振动的周期即可求出，这也就是所求的湖震周期．

当我们把上述理论模型的结果与实验数据相比较时，发现两者符合得较好，但有一定的系统误差(约 15%)，这表明理论模型抓住了湖震的主要特征，但未能反映湖震的各种复杂因素．可根据实验数据对振荡周期公式作出相应的修正．

把修正后的周期公式应用于 Vättern 湖，即可得出 Vättern 湖作湖震的周期．

【解】 取直角坐标 Oxy 如力图 7-10-3，原点 O 在中央，即离两侧$\frac{L}{2}$，离底部$\frac{h}{2}$．

当水面如力图 7-10-3 倾斜时，先计算右上方三角形液块 1 的质心位置．三角形液块 1 的斜面液面的方程为

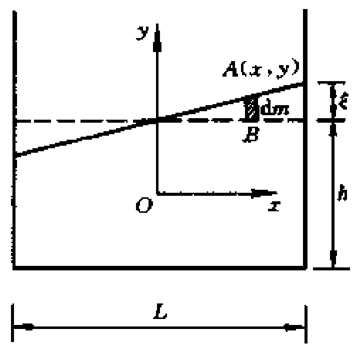
$$y=\frac{h}{2}+\frac{2\xi}{L}x$$

设液体密度为 ρ，则力图 7-10-3 中画阴影的小块的质量 $\mathrm{d}m$ 为

$$\mathrm{d}m=\rho\left(y-\frac{h}{2}\right)\mathrm{d}x$$

由以上两式，得

$$\mathrm{d}m=\rho\frac{2\xi}{L}x\mathrm{d}x$$



力图 7-10-3

三角形液块 1(力图 7-10-3 右上方，设其质量为 m_1)的质心坐标为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{\int x\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}=\dfrac{\int_0^{\frac{L}{2}}\rho\frac{2\xi}{L}x^2\mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{L}{2}}\rho\frac{2\xi}{L}x\mathrm{d}x}=\dfrac{L}{3} \\ y_1=\dfrac{\int y'\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}=\dfrac{\int_0^{\frac{L}{2}}\left(\frac{h}{2}+\frac{\xi}{L}x\right)\rho\frac{2\xi}{L}x\mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{L}{2}}\rho\frac{2\xi}{L}x\mathrm{d}x}=\dfrac{h}{2}+\dfrac{\xi}{3} \end{cases}$$

注意,上述 $y=\frac{h}{2}+\frac{2\xi}{L}x$ 是力图 7－10－3 中 A 点的 y 坐标(A 点在小块 dm 的上方),而 $y_1=\int y'dm\Big/\int dm$ 中的 y' 是小块 dm(即 AB) 中点的 y 坐标,有

$$y'=\frac{h}{2}+\frac{1}{2}\frac{2\xi}{L}x=\frac{h}{2}+\frac{\xi}{L}x$$

上式已在计算 y_1 时用到．

同理,力图 7－10－3 中左方三角形液块 2(质量为 m_2)的质心位置为

$$\begin{cases}x_2=-\dfrac{L}{3}\\ y_2=\dfrac{h}{2}-\dfrac{\xi}{3}\end{cases}$$

矩形液块(长 L,高 h,质量 m_3)的质心位置在原点 O,即

$$\begin{cases}x_3=0\\ y_3=0\end{cases}$$

当液面倾斜如力图 7－10－3,右端最高在 ξ 处时,液体的质心位置为

$$\begin{cases}x_C=\dfrac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}=\dfrac{m_3x_3+m_1x_1-m_2x_2}{m_3+m_1-m_2}\\ \quad=\dfrac{0+\frac{1}{2}\frac{L}{2}\xi\rho\frac{L}{3}-\frac{1}{2}\frac{L}{2}\xi\rho\left(-\frac{L}{3}\right)}{\rho L h}=\dfrac{\xi L}{6h}\\ y_C=\dfrac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}=\dfrac{m_3y_3+m_1y_1-m_2y_2}{m_3+m_1-m_2}\\ \quad=\dfrac{0+\frac{1}{2}\frac{L}{2}\xi\rho\left(\frac{h}{2}+\frac{\xi}{3}\right)-\frac{1}{2}\frac{L}{2}\xi\rho\left(\frac{h}{2}-\frac{\xi}{3}\right)}{\rho L h}=\dfrac{\xi^2}{6h}\end{cases}$$

其中用到 $m_1=m_2$,因题设 $\xi\ll h$,故

$$x_C\gg y_C$$

表明液体振荡时,质心在 y 方向上的偏离远小于在 x 方向上的偏离．换言之,质心的振荡主要发生在 x 方向,即是一维振荡．

由于 $\xi=\xi(t)$,质心速度为

$$\begin{cases}v_x=\dfrac{dx_C}{dt}=\dfrac{L}{6h}\dot{\xi}\\ v_y=\dfrac{dy_C}{dt}=\dfrac{1}{3h}\xi\dot{\xi}\end{cases}$$

可见,

$$v_x\gg v_y$$

质心的速度主要在 x 方向,y 方向的速度(以及动能)可以忽略．

液体的重力势能 $E\mathrm{p}$(取力图 7－10－3 原点 O 为重力势能零点),动能 E_k,以及总机械能 E 为

$$E_p = m_3 g y_C = \frac{m_3 g}{6h}\xi^2$$

$$E_k = \frac{1}{2}m_3 v^2 = \frac{1}{2}m_3 v_x^2 + \frac{1}{2}m_3 v_y^2$$

$$\approx \frac{1}{2}m_3 v_x^2 = \frac{m_3}{2}\left(\frac{L}{6h}\dot{\xi}\right)^2$$

$$E = E_p + E_k = \frac{m_3 g}{6h}\xi^2 + \frac{m_3}{2}\left(\frac{L}{6h}\dot{\xi}\right)^2$$

$$= \frac{m_3 g}{6h}\xi^2 + \frac{m_3 L^2}{72h^2}(\dot{\xi})^2$$

因机械能 E 守恒，E 为常量，上式可简化为

$$g\xi^2 + \frac{L^2}{12h}(\dot{\xi})^2 = 常量$$

对时间 t 求导，得

$$2g\xi\dot{\xi} + \frac{2L^2}{12h}\dot{\xi}\ddot{\xi} = 0$$

即

$$\ddot{\xi} + \frac{12gh}{L^2}\xi = 0$$

这是典型的简谐振动的微分方程，简谐振动的圆频率 ω 为

$$\omega = \sqrt{\frac{12gh}{L^2}}$$

简谐振动的周期 T 为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi L}{\sqrt{3gh}} = T_{理论}$$

把上述理论模型的结果 $T_{理论} = \dfrac{\pi L}{\sqrt{3gh}}$ 用于容器中的水，所得结果如表 3 和表 4 所示．

表 3　$L = 479$ mm

h/mm	$T_{实测}$/s	$T_{理论}$/s	$T_{实测}/T_{理论}$
30	1.78	1.60	1.21
50	1.40	1.24	1.13
69	1.18	1.06	1.12
88	1.08	0.94	1.15
107	1.00	0.85	1.18
124	0.91	0.79	1.15
142	0.82	0.74	1.11

表 4　$L = 143$ mm

h/mm	$T_{实测}$/s	$T_{理论}$/s	$T_{实测}/T_{理论}$
31	0.52	0.47	1.11
38	0.48	0.43	1.13
58	0.43	0.34	1.25
67	0.35	0.32	1.09
124	0.28	0.24	1.19

从表 3 和表 4 可以看出，理论结果与实测数据符合得较好(特别是随 h 变化的趋势相同)，但也大约有 15% 的系统误差，即

$$T_{实测} \approx 1.15\ T_{理论}$$

因此使用下述经过相应修正后的理论公式是合适的，即

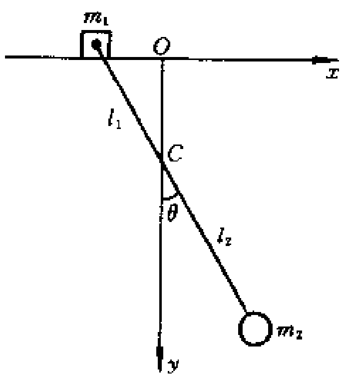
$$T_{理论(修正)} = 1.15\frac{\pi L}{\sqrt{3gh}}$$

最后，将修正后的理论公式应用于 Vättern 湖，因 $L = 123\times10^3$ m，$h = 50$ m，得出

$$T_{\text{Vättern}} = 3.2\ \text{h}$$

【本题是 1984 年第 15 届 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)试题．】

【题 11】 如图，质量为 m_1 的滑块可在光滑水平直导轨上滑动．滑块经长为 l 质量可略的细杆与质量为 m_2 的重锤相连，细杆与重锤可绕滑块无摩擦地自由转动．设 $t=0$ 时，细杆与导轨构成铅垂面，细杆与铅锤线夹角 θ_0，从静止释放开始摆动．试求：1．重锤 m_2 的运动轨迹．2．系统作小角摆动时，滑块位置随时间的变化．



力图 7－11－1

【分析】 如图，滑块与重锤系统的质心位于细杆上某一点 C，C 点与滑块和重锤的距离是一定的．由于 $t=0$ 时系统静止，加上摆动后系统在水平方向不受外力，所以质心的水平位置不变．由此，写出重锤坐标随 θ 的变化，即可确定其运动轨迹．

在摆动过程中系统的机械能 E 守恒．取 θ 为变量，写出 E 的表达式，由 $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=0$ 及微小摆动条件，即可得出其运动方程并求解．

或取相对于滑块静止的非惯性系，则重锤受重力、张力及惯性力，作圆周运动．列出运动方程，并利用惯性系中动量守恒及相对运动公式，加上微小摆动条件即可求解．

或取质心系，在微小摆动条件下，质心 C 可看作固定不动．滑块在拉力 $T(\approx m_2 g)$ 作用下近似作圆周运动，由此列出方程亦可求解．

【解】 1．如图，设滑块和重锤系统的质心位于 C 点，设 C 点与滑块和重锤的距离分别为 l_1 和 l_2，则由质心定义，

$$m_1 l_1 = m_2 l_2 = m_2(l - l_1)$$

即

$$\begin{cases} l_1 = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} l \\ l_2 = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} l \end{cases} \tag{1}$$

如图,取导轨为 x 轴,取通过质心 C 点的铅垂线为 y 轴,两轴交点 O 为原点．当重锤位于任意摆角 θ 时,滑块 m_1 的坐标与速度为

$$\begin{cases} x_1 = -l_1 \sin\theta \\ y_1 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(l_1 \cos\theta)\dot{\theta} \\ \dot{y}_1 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

重锤 m_2 的坐标与速度为

$$\begin{cases} x_2 = l_2 \sin\theta \\ y_2 = l \cos\theta \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = (l_2 \cos\theta)\dot{\theta} \\ \dot{y}_2 = -(l \sin\theta)\dot{\theta} \end{cases} \tag{5}$$

由(4)式,重锤 m_2 的轨迹方程为

$$\frac{x_2^2}{l_2^2} + \frac{y_2^2}{l^2} = 1$$

即轨迹为椭圆,椭圆的半长轴为 l,半短轴为 l_2.

2．有三种解法．

方法一．在摆动过程中,滑块与重锤系统的机械能 E 守恒．取 O 点为重力势能零点,系统的机械能 E 为

$$E = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 - m_2 g y_2$$

把(3)、(4)、(5)式代入,得

$$E = \left[\frac{1}{2}(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\cos^2\theta + \frac{1}{2} m_2 l^2 \sin\theta \right]\dot{\theta}^2 - m_2 g l \cos\theta$$

对 t 求导,得

$$\frac{dE}{dt} = [-(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\cos\theta\sin\theta + m_2 l^2 \sin\theta\cos\theta]\dot{\theta}^3 + [(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\cos^2\theta + m_2 l^2 \sin^2\theta]\dot{\theta}\ddot{\theta} + (m_2 g l \sin\theta)\dot{\theta}$$

因摆角 θ 很小,有

$$\sin\theta \approx \theta, \quad \cos\theta \approx 1$$

忽略 θ 和 $\dot{\theta}$ 的高次项,得

$$\frac{dE}{dt} = (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\dot{\theta}\ddot{\theta} + (m_2 g l \theta)\dot{\theta}$$

因总能量不变,

$$\frac{dE}{dt}=0$$

故有

$$\ddot{\theta}+\frac{m_2gl}{m_1l_1^2+m_2l_2^2}\theta=0$$

解出

$$\theta=A\cos(\omega t+\varphi)$$

为简谐振动,其圆频率 ω 为

$$\omega^2=\frac{m_2gl}{m_1l_1^2+m_2l_2^2}$$

把(1)式代入,得

$$\omega^2=\frac{(m_1+m_2)g}{m_1l}$$

初条件为

$$t=0\text{ 时},\theta=\theta_0>0,\dot{\theta}=0$$

即

$$\begin{cases}A\cos\varphi=\theta_0>0\\-A\omega\sin\varphi=0\end{cases}$$

解出

$$\begin{cases}\varphi=0\\A=\theta_0\end{cases}$$

由(2)式,滑块位置 x_1 随时间 t 的变化为

$$\begin{aligned}x_1&=-l_1\sin\theta\approx-l_1\theta\\&=-\frac{m_2}{m_1+m_2}l\theta_0\cos\omega t=\frac{m_2}{m_1+m_2}l\theta_0\cos(\omega t+\pi)\end{aligned}$$

方法二．取 m_1 静止的非惯性系．在其中,m_2 受重力 m_2g,细杆拉力 T,以及惯性力 $-m_2\ddot{x}_1$,m_2在切向的运动方程为

$$m_2\ddot{x}_1\cos\theta+m_2g\sin\theta=-m_2l\ddot{\theta}\tag{6}$$

式中 $\ddot{\theta}$是在非惯性系中m_2 的角加速度

$$\ddot{\theta}=\frac{1}{l}\ddot{x}'_2$$

x'_2 是 m_2 在非惯性系中的 x 坐标．

在惯性系中,m_1 和 m_2 系统在水平方向动量守恒,即

$$m_1\dot{x}_1+m_2\dot{x}_2=0$$

或

$$m_1\ddot{x}_1+m_2\ddot{x}_2=0$$

或

$$\ddot{x}_2=-\frac{m_1}{m_2}\ddot{x}_1$$

由相对运动公式，并将上式代入，有

$$\ddot{x}'_2=\ddot{x}_2-\ddot{x}_1=-\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\ddot{x}_1$$

把 $\ddot{x}'_2=l\ddot{\theta}$ 代入，得

$$\ddot{x}_1=-\frac{m_2 l}{m_1+m_2}\ddot{\theta}$$

把上式代入(6)式，得

$$-\frac{m_2^2 l}{m_1+m_2}\cos\theta\cdot\ddot{\theta}+m_2 g\sin\theta=-m_2 l\ddot{\theta}$$

因小角摆动，$\sin\theta\approx\theta$，$\cos\theta\approx1$，上式化为

$$-\frac{m_2^2 l}{m_1+m_2}\ddot{\theta}+m_2 g\theta=-m_2 l\ddot{\theta}$$

即

$$\ddot{\theta}+\frac{(m_1+m_2)g}{m_1 l}\theta=0$$

以下与方法一相同．

方法三．因小角摆动，系统的质心 C 可看作固定．在质心系中

$$m_1\ddot{x}_1=T\sin\theta\approx T\theta$$

因 θ 很小，故有

$$\theta\approx\frac{-x_1}{l_1},\quad T\approx m_2 g$$

由以上三式，得

$$m_1\ddot{x}_1+\frac{m_2 g}{l_1}x_1=0$$

把(1)式代入，得

$$m_1\ddot{x}_1+\frac{m_2(m_1+m_2)g}{m_2 l}x_1=0$$

即

$$\ddot{x}_1+\frac{(m_1+m_2)g}{m_1 l}x_1=0$$

解出

$$x_1=A\cos(\omega t+\varphi)$$

其中圆频率 ω 为

$$\omega=\sqrt{\frac{(m_1+m_2)g}{m_1 l}}$$

初条件为 $t=0$ 时

$$x_1 = A\cos\varphi = -l_1\theta_0 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}l\theta_0 < 0$$

$$\dot{x}_1 = -A\omega\sin\varphi = 0$$

由此得出

$$\begin{cases}\varphi = \pi \\ A = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}l\theta_0\end{cases}$$

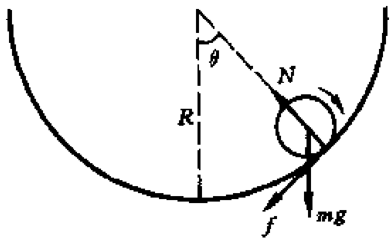
故

$$x_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}l\theta_0\cos(\omega t+\pi)$$

【题 12】 如图,质量为 m,半径为 r 的均匀实心小球在半径为 R 的球形碗底作纯滚动．试求微小振动的周期．

【分析】 小球受重力 mg,支持力 N,以及摩擦力 f 的作用．由质心运动定理可列出小球质心沿切向的运动方程．由转动定理及纯滚条件可给出小球滚动的运动方程．把两者联立,再加上微小振动条件,即可求解．

又,因纯滚,摩擦力不作功,机械能守恒．加上微小振动条件,亦可求解．



力图 7-12-1

【解】 由质心运动定理,切向方程为

$$mg\sin\theta + f = -m(R-r)\ddot{\theta} \tag{1}$$

式中的 θ 角如图所示．

由转动定理,

$$fr = I\ddot{\varphi} \tag{2}$$

式中 φ 是小球滚动的转角,$\ddot{\varphi}$ 是小球转动的角加速度,I 是小球的转动惯量,为

$$I = \frac{2}{5}mr^2$$

纯滚条件为

$$r\mathrm{d}\varphi = (R-r)\mathrm{d}\theta$$

即

$$\ddot{\varphi} = \frac{R-r}{r}\ddot{\theta} \tag{3}$$

(1)、(2)、(3)联立,消去 $\ddot{\varphi}$ 和 f,并利用 I 的公式,得

$$mg\sin\theta + \frac{2}{5}m(R-r)\ddot{\theta} = -m(R-r)\ddot{\theta}$$

即

$$\ddot{\theta} + \frac{5g}{7(R-r)}\sin\theta = 0$$

因微小振动,$\sin\theta \approx \theta$,故

$$\ddot{\theta}+\frac{5g}{7(R-r)}\theta=0$$

小球微小振动的圆频率 ω 和周期 T 为

$$\omega=\sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}},\quad T=2\pi\sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}$$

方法二．因纯滚,摩擦力不作功,机械能守恒．当小球在 θ 处时,小球与地球系统的机械能为

$$E=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}I\omega^2+mg(R-r)(1-\cos\theta)=\text{常量} \tag{4}$$

式中 I、v_C、ω 分别是小球的转动惯量、质心速度和转动角速度,为

$$I=\frac{2}{5}mr^2,\quad v_C=(R-r)\dot{\theta},\quad \omega=\frac{d\varphi}{dt}=\dot{\varphi}$$

纯滚条件为

$$v_C=r\omega=(R-r)\dot{\theta}$$

或

$$\omega=\dot{\varphi}=\frac{R-r}{r}\dot{\theta}$$

此即(3)式．把以上结果代入(4)式,得

$$E=\frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\left(\frac{R-r}{r}\right)^2\dot{\theta}^2+ mg(R-r)(1-\cos\theta)=\text{常量}$$

因微小振动

$$\cos\theta\approx1-\frac{\theta^2}{2}$$

代入 E 表达式,得

$$\frac{7}{5}(R-r)^2\dot{\theta}^2+g(R-r)\theta^2=\text{常量}$$

对 t 求导,

$$\frac{7}{5}(R-r)^2\dot{\theta}\,\ddot{\theta}+g(R-r)\theta\dot{\theta}=0$$

即

$$\ddot{\theta}+\frac{5g}{7(R-r)}\theta=0$$

故微小振动的圆频率 ω 为(勿与角速度 ω 混淆)

$$\omega=\sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}$$

【题 13】 如力图7－13－1,质量为 M 的物体放置在两个完全相同的质量均为 m 的薄壁中空圆筒上．物体两侧系着两个完全相同的劲度系数均为 k 的弹簧,两弹簧的另一端固定,开始时两弹簧均为原长．设物体在两薄圆筒上作纯滚动．试求振动圆频率．

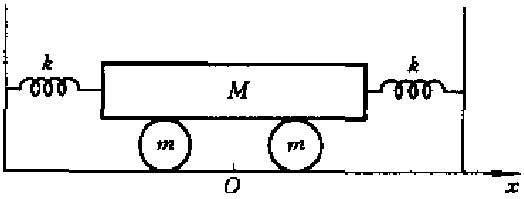
【分析】 物体受弹性力及摩擦力，由牛顿第二定律可列出其运动方程．由转动定理可列出两薄壁中空圆筒在摩擦力矩作用下滚动的运动方程．纯滚条件给出了圆筒质心加速度与转动角加速度的关系．再找出物体运动与圆筒质心运动的关系，即可求解．

因纯滚动，摩擦力不作功，物体与圆筒及弹簧系统的机械能守恒，由此亦可求解．

【解】 取 x 轴如力图 7－13－1，原点 O 是平衡位置．如力图 7－13－2，当 M 偏离平衡位置 x 时，受弹性力 $2kx$ 及摩擦力 $2f$，由牛顿第二定律，得

$$2kx+2f=-M\ddot{x} \tag{1}$$

式中 f 是 M 与圆筒之间的摩擦力．



力图 7－13－1



力图 7－13－2

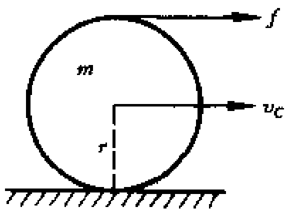
如力图 7－13－3，圆筒在摩擦力矩的作用下转动，以瞬时转轴为轴，由转动定理，得

$$2fr=I\ddot{\varphi} \tag{2}$$

式中 φ 是圆筒的转角，$\ddot{\varphi}$ 是圆筒的角加速度，$I=2mr^2$ 是薄壁中空圆筒对瞬时轴的转动惯量，r 是圆筒的半径．

因圆筒纯滚动，质心加速度 $\dot{v}_C$ 与 $\ddot{\varphi}$ 的关系为

$$\dot{v}_C=r\ddot{\varphi} \tag{3}$$



力图 7－13－3

因物体 M 相对圆筒的速度为 $r\cdot\dfrac{v_C}{r}=v_C$，故 M 的速度 $\dot{x}$ 与圆筒质心速度的关系为

$$\dot{x}=v_C+r\frac{v_C}{r}=2v_C$$

或

$$\ddot{x}=2\dot{v}_C \tag{4}$$

(1)、(2)、(3)、(4)式联立，得

$$2kx+m\ddot{x}+M\ddot{x}=0$$

即

$$\ddot{x}+\frac{2k}{M+m}x=0$$

故物体 M 作简谐振动，振动圆频率 ω 为

$$\omega=\sqrt{\frac{2k}{M+m}}$$

方法二．物体与圆筒及弹簧系统的机械能守恒．物体 M 的动能为

$$E_{k,M}=\frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

两弹簧的弹性势能为

$$E_{p,k}=2\cdot\frac{1}{2}kx^2=kx^2$$

两圆筒的动能为

$$E_{k,m}=2\left[\frac{1}{2}I\left(\frac{v_C}{r}\right)^2\right]+2\left(\frac{1}{2}mv_C^2\right)=mr^2\left(\frac{v_C^2}{r^2}\right)+mv_C^2$$

$$=2mv_C^2=2m\left(\frac{\dot{x}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

其中用到(4)式 $\dot{x}=2v_C$,故系统总机械能 E 为

$$E=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+kx^2+\frac{1}{2}m\dot{x}^2=kx^2+\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2=\text{常量}$$

对 t 求导,得

$$2kx\dot{x}+(M+m)\dot{x}\ddot{x}=0$$

即

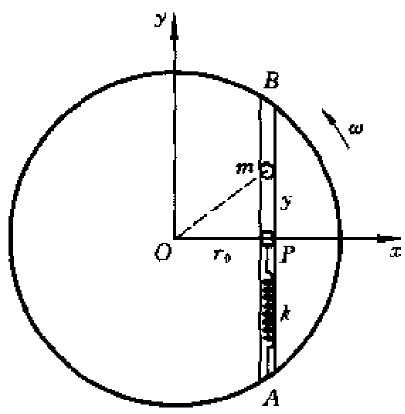
$$\ddot{x}+\frac{2k}{M+m}x=0$$

振动圆频率 ω 为

$$\omega=\sqrt{\frac{2k}{M+m}}$$

【题 14】 如图,圆盘绕通过中心 O 点的竖直轴在水平面内匀速转动,角速度为 ω,质量为 m 的小球被约束在圆盘上的光滑导轨 AB 内运动．小球与一劲度系数为 k 的弹簧相连($k>m\omega^2$),弹簧另一端固定在圆盘 A 点．弹簧为原长时,小球位于 P 点,$OP=r_0$,且 $OP\perp AB$,将小球从 P 点沿导轨拉开距离 a 后从静止释放．在圆盘参考系中考察小球的运动．

1．试求小球的平衡位置．2．试证明小球作简谐振动,并求圆频率．3．试求导轨施予小球的水平力随时间的变化规律．4．试问当 $k<m\omega^2$ 时小球怎样运动．



力图 7－14－1

【分析】 如图,在圆盘参考系中设置直角坐标系 $Oxyz$,坐标原点 O 位于盘中心,x 轴与导轨垂直,xy 平面为盘面,z 轴垂直盘面,以 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 表示 x,y,z 方向的单位矢量．设小球在任意位置($r_0,y,0$)时的速度为 $\boldsymbol{v}$．小球所受作用力为:重力 $-mg\boldsymbol{k}$,导轨作用力 $\boldsymbol{R}=N_1\boldsymbol{i}+N_2\boldsymbol{k}$($N_1$ 为侧向水平力,N_2 为支持力),弹性力 $-ky\boldsymbol{j}$,惯性离心力 $m\omega^2(r_0\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})$,科里奥利力 $-2m(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v})=-2m\omega\dot{y}(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})=2m\omega\dot{y}\boldsymbol{i}$．

根据牛顿第二定律列出三个分量方程．从方程的 y 分量可求出小球的平衡位置,并解出小球的运动规律．从方程的 x 分量可求得导轨施予小球的侧向水平力．小球的运动方式与弹簧的劲度系数 k 和圆盘角速度 ω 的取值有关,应作讨论．

【解】 根据牛顿第二定律,小球的动力方程为

$$m\ddot{y}\boldsymbol{j}=\boldsymbol{R}-mg\boldsymbol{k}+m\,\omega^2(r_0\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})+2m\,\omega\,\dot{y}\boldsymbol{i}-ky\,\boldsymbol{j}$$

分解成三个分量方程，为

$$\begin{cases} N_1+m\omega^2r_0+2m\,\omega\dot{y}=0 & (1)\\ N_2-mg=0 & \\ m\ddot{y}=-(k-m\,\omega^2)y & (2)\end{cases}$$

1. 小球在平衡位置的加速度 $\ddot{y}=0$. 由(2)式得 $y=0$. 故小球的平衡位置为(r_0,o,o)，即为 P 点.

2. 由(2)式

$$\ddot{y}+\frac{k-m\,\omega^2}{m}y=0$$

在 $k>m\omega^2$ 的条件下，上述微分方程的解为简谐振动，圆频率为

$$\Omega=\sqrt{\frac{k}{m}-\omega^2}=\sqrt{\omega_0^2-\omega^2}$$

式中 ω_0 为弹簧振子的固有频率. 小球的运动规律为

$$y=A\cos(\Omega t+\varphi)$$

A 和 φ 由初条件决定. 初条件为

$$t=0\text{ 时},y=A\cos\varphi=a,\dot{y}=-A\Omega\sin\varphi=0$$

解出

$$\begin{cases}A=a\\ \varphi=0\end{cases}$$

故得

$$y=a\cos\Omega t$$
$$\dot{y}=-a\Omega\sin\Omega t$$

3. 由(1)式，导轨施予小球的水平力为

$$N_1=2am\,\Omega\,\omega\sin\Omega t-m\,\omega^2r_0$$

4. 对较大的 ω 和较小的 k，在 $k<m\,\omega^2$ 的条件下，(2)式可写成

$$m\ddot{y}=(m\,\omega^2-k)y$$

因 $\ddot{y}=\dfrac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}y}\dot{y}$，上式可写成

$$\dot{y}\mathrm{d}\dot{y}=(\omega^2-\omega_0^2)y\mathrm{d}y$$

积分，得

$$\dot{y}^2=(\omega^2-\omega_0^2)y^2+C$$

初条件为

$$t=0\text{ 时},y=a,\dot{y}=0$$

故积分常量为

$$C=-(\omega^2-\omega_0^2)a^2$$

代入，得

$$\dot{y}^2=(\omega^2-\omega_0^2)(y^2-a^2)$$

即

$$\dot{y}=\sqrt{\omega^2-\omega_0^2}\sqrt{y^2-a^2}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2-a^2}}=\sqrt{\omega^2-\omega_0^2}\,\mathrm{d}t$$

积分，得

$$\mathrm{Ar}\cosh\frac{y}{a}=\sqrt{\omega^2-\omega_0^2}\,t+C$$

初条件为

$$t=0\text{ 时},y=a$$

故积分常量为

$$C=\mathrm{Ar}\cosh 1=0$$

代人，小球的运动规律为

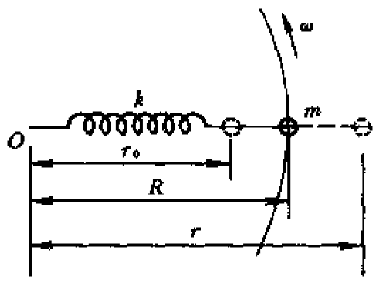
$$y=a\cosh(\sqrt{\omega^2-\omega_0^2}\,t)$$

这是双曲余弦函数，表明小球不再作简谐振动，y 坐标随时间的增加而单调地增大．

【题 15】 如图，质量为 m 的小球在光滑水平桌面上以角速度 ω 作匀速圆周运动．所需的向心力由与小球相连的弹簧提供，弹簧的劲度系数为 k，另一端固定．今沿径向轻击小球．试求小球径向振动的频率．

【分析】 如图，设弹簧原长为 r_0，小球作稳定圆周运动的半径为 R，轻击后小球与中心 O 点（弹簧另一端）相距为 r．r_0，R，r 三者应予区分．

在小球运动平面内取平面极坐标，当小球位于任意位置 (r,θ) 时，径向加速度为 $(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)$，径向受弹性力 $-k(r-r_0)$ 的作用，在径向运用牛顿第二定律列出方程．因弹性力与轻击冲量均沿径向，故轻击前、后小球的角动量守恒．利用上述关系可列出小球运动所遵从的运动方程，振动频率即可求得．



力图 7－15－1

【解】 小球以 ω 作稳定圆周运动时

$$mR\omega^2=k(R-r_0) \tag{1}$$

轻击后，当小球与中心 O 为任意距离 r 时，取平面极坐标 (r,θ)，沿径向应用牛顿第二定律，得

$$m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=-k(r-r_0)$$

令

$$r'=r-R$$

上式变为

$$m\ddot{r}'-m(r'+R)\dot{\theta}^2=-k(r'+R-r_0) \tag{2}$$

因弹性力和轻击冲量均沿径向，故小球在轻击前、后角动量守恒，有

$$mR^2\omega = mr^2\dot{\theta}$$

式中 $\dot{\theta}$ 是小球半径为 r 时的角速度．即

$$R^2\omega = (r' + R)^2\dot{\theta} \tag{3}$$

把(1)、(3)式代入(2)式，得

$$m\ddot{r}' - m(r' + R)\left[\frac{R^2\omega}{(r' + R)^2}\right]^2 = -kr' - mR\omega^2$$

因轻击，故 $r' \ll R$，从而

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{r'}{R}\right)^3} \approx 1 - \frac{3r'}{R}$$

代入，得

$$m\ddot{r}' - \frac{mR\omega^2}{\left(1 + \frac{r'}{R}\right)^3} \approx m\ddot{r}' - mR\omega^2\left(1 - \frac{3r'}{R}\right) = -kr' - mR\omega^2$$

即

$$\ddot{r}' + \left(3\omega^2 + \frac{k}{m}\right)r' = 0$$

可见，沿径向轻击后，小球在 R 附近沿径向作简谐振动，其圆频率 Ω 为

$$\Omega = \sqrt{3\omega^2 + \frac{k}{m}}$$

【题 16】 计算单摆周期时，若摆幅 θ_0 较小，可采用一级近似 $\sin\theta \approx \theta$，算出的周期为 $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，其中 l 为摆长．若 θ_0 不算小，就应取二级近似．试导出单摆周期 T 与摆幅 θ_0 的关系．

【分析】 不论摆幅多大，单摆摆动过程中机械能守恒，于是可从能量表达式求出角速度 $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ 的表达式．在 $\frac{T}{4}$ 内积分，采用二级近似后，可得出 $\frac{T}{T_0}$ 与 θ_0 的关系．

【解】 由机械能守恒，单摆在任意摆角 θ 时的总能量应等于最大摆角 θ_0 时的总能量，故有

$$\frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + mgl(1 - \cos\theta) = mgl(1 - \cos\theta_0)$$

或

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0) = 2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega_0\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

式中 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$，上式改写为

$$\sqrt{2}\omega_0 \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}$$

或

$$\frac{4\pi}{T_0}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin^2\dfrac{\theta_0}{2}-\sin^2\dfrac{\theta}{2}}}$$

在$\frac{T}{4}$时间内，摆球从 $\theta=0$ 运动到最大摆角 θ_0，积分，得

$$\frac{4\pi}{T_0}\int_0^{\frac{T}{4}}\mathrm{d}t=\int_0^{\theta_0}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin^2\dfrac{\theta_0}{2}-\sin^2\dfrac{\theta}{2}}}=\frac{\pi T}{T_0}\tag{1}$$

由于 $\theta<\theta_0$，引进变量 φ，令

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sin\frac{\theta_0}{2}\sin\varphi\tag{2}$$

上式两端取微分，注意 θ_0 为定值，得

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta=\sin\frac{\theta_0}{2}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

即

$$\mathrm{d}\theta=\frac{2\sin\dfrac{\theta_0}{2}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{\cos\dfrac{\theta}{2}}\tag{3}$$

把(2)、(3)式代入(1)式，得

$$\begin{aligned}\frac{\pi T}{T_0}&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin\dfrac{\theta_0}{2}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{\cos\dfrac{\theta}{2}\sqrt{\sin^2\dfrac{\theta_0}{2}(1-\sin^2\varphi)}}\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos\dfrac{\theta}{2}}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\dfrac{\theta_0}{2}\sin^2\varphi}}\end{aligned}$$

因 θ_0 较小，被积函数可简化为(保留二级小量)

$$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\dfrac{\theta_0}{2}\sin^2\varphi}}\approx\left(1+\frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\varphi\right)\approx1+\frac{1}{8}\theta_0^2\sin^2\varphi$$

故有

$$\frac{\pi T}{T_0}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{\theta_0^2}{8}\sin^2\varphi\right)\mathrm{d}\varphi=2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{32}\theta_0^2\right)=\pi\left(1+\frac{\theta_0^2}{16}\right)$$

即

$$T=T_0\left(1+\frac{\theta_0^2}{16}\right)\tag{4}$$

可见,保留 $\sin\theta$(或 $\sin\varphi$)的二级小量后,周期 T 大于 T_0,相对改变量为

$$\frac{\Delta T}{T_0}=\frac{\theta_0^2}{16}$$

例如,若 $\theta_0=2.5°$,则相对改变量$\frac{\Delta T}{T_0}$仅为 10^{-4}. 注意,当 θ_0 更大时,应考虑更高级近似,(4)式须作修正 .

【题 17】 对于谐振子,若广义动量为 p,广义坐标为 q,则有 $\oint p\mathrm{d}q=\frac{E}{\nu}$,其中 E 为谐振子的能量,ν 为振动频率.积分在振动的一个周期内进行 . 试就弹簧振子和单摆的情况证明此式 .

【分析】 对于弹簧振子,取广义动量为振子动量 p,取广义坐标为振子坐标 x,把弹簧振子的能量 E 用 p 和 x 表示,会发现 $p\sim x$ 曲线为椭圆,积分 $\oint p\mathrm{d}x$ 就是椭圆的面积 .

对于单摆(小振动),取广义动量为角动量 p_θ,取广义坐标为 θ,把单摆振动的能量 E 用 p_θ 和 θ 表示,会发现 $p_\theta\sim\theta$ 曲线为椭圆,积分 $\oint p_\theta\mathrm{d}\theta$ 就是椭圆面积 .

由此可见,$\oint p\mathrm{d}q=\frac{E}{\nu}$ 揭示了各种谐振子共同的特征 .

【解】 对于弹簧振子,机械能为

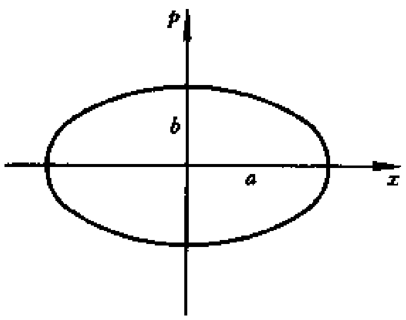
$$\begin{aligned}E&=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2\\&=\frac{(m\dot{x})^2}{2m}+\frac{x^2}{\frac{2}{k}}=\frac{p^2}{2m}+\frac{x^2}{\frac{2}{k}}\end{aligned}$$

或

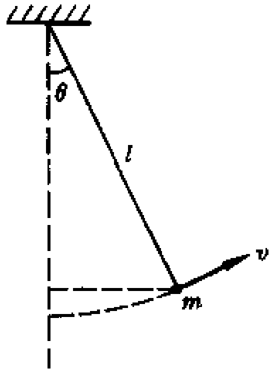
$$\frac{p^2}{2mE}+\frac{x^2}{\frac{2E}{k}}=1$$

式中 $p=m\dot{x}$ 是振子动量,x 是振子坐标 . 因 E 为常数,上式表明 $p(x)$关系为一椭圆,即在一个周期内(p,x)点绕椭圆一周,如力图 7－17－1 所示 . 椭圆的长、短半轴分别为

$$a=\sqrt{2mE},\quad b=\sqrt{\frac{2E}{k}}$$



力图 7－17－1



力图 7－17－2

椭圆面积为

$$\oint p\mathrm{d}x = \pi ab = \pi\sqrt{2mE}\sqrt{\frac{2E}{k}} = 2\pi E\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi E}{\omega} = \frac{E}{\nu}$$

式中

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

是弹簧振子的振动频率．

对于单摆，如力图 7－17－2，在任意摆角 θ 时的速度为 v，单摆的机械能 E 为

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + mgl(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2 \\ &= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2 = \frac{(ml^2\dot{\theta})^2}{2ml^2} + \frac{\theta^2}{\frac{2}{mgl}} \\ &= \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + \frac{\theta^2}{\frac{2}{mgl}} \end{aligned}$$

式中 $p_\theta = ml\dot{\theta}$ 是角动量，θ 是摆角，上面的计算中利用了小角摆动的条件 $(1-\cos\theta)\approx\frac{1}{2}\theta^2$．上式可改写为

$$\frac{p_\theta^2}{2ml^2E} + \frac{\theta^2}{\frac{2E}{mgl}} = 1$$

因 E 为常量，上式表明 $p_\theta \sim \theta$ 的关系为一椭圆，椭圆的长、短半轴分别为

$$a = \sqrt{2ml^2E}, \quad b = \sqrt{\frac{2E}{mgl}}$$

椭圆面积为

$$\begin{aligned} \oint p_\theta \mathrm{d}\theta &= \pi ab = \pi\sqrt{2ml^2E}\sqrt{\frac{2E}{mgl}} \\ &= 2\pi E\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{2\pi E}{\omega} = \frac{E}{\nu} \end{aligned}$$

式中 $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$ 是单摆小振动的频率．

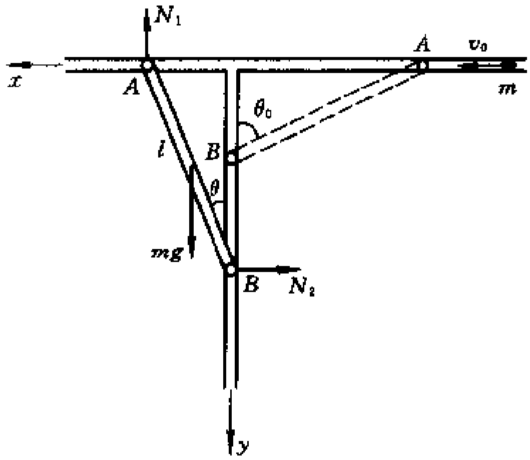
【题 18】 如力图7－18－1，T 形导轨固定在铅垂面内，质量为 m、全长为 l 的刚性均匀细杆两端约束在 T 形导轨中，可沿导轨作无摩擦的滑动．1．试求细杆作小振幅摆动时的振动周期．2．当细杆摆至右方适当角度刚好达到静止时（如力图 7－18－1 中虚线所示），一质量也为 m 的小球以速度 v_0 沿水平方向经导轨与细杆上端相碰．设碰撞无机械能损失，碰后小球速度变为零，细杆则回摆到左方与水平导轨平行时刚好静止．试问 v_0 应为多大?

【分析】 如力图 7－18－1，细杆受重力 mg，约束力 N_1 和 N_2（$\boldsymbol{N}_1$ 和 $\boldsymbol{N}_2$ 均与导轨垂直，可假定其方向如力图 7－18－1，由解出的正负确定是否反向）．杆质心的运动及绕质心的转动遵循质心运动定理及转动定理．杆限制在导轨内运动的约束条件确定了质心运动与绕质心转动的联系，

由此可得出杆的运动方程(以角度 θ 表示为宜). 在小幅摆动条件下可简化为简谐振动方程,于是振动周期 T 可求得 .

也可由杆在摆动过程中机械能守恒得出其运动方程 .

第 2 问涉及两个过程,即球杆碰撞以及杆的摆动 . 因碰撞无机械能损失且碰前杆静止、碰后球静止,故碰前小球动能全部转化为碰后瞬间杆的动能 .因碰后杆摆动过程中机械能守恒,故碰后瞬间杆的动能全部转化为杆摆到左方与水平导轨平行且静止时增加的势能 . 因此关键在于求出碰前杆静止时的角度 θ_0(因碰后小球静止,为保证这点,只有特殊的 θ_0 才有可能). 如力图 7－18－2,由于杆两端只能在导轨内滑动,所以碰后瞬间杆将绕瞬时转轴 O'转动,$O'A$ 与 $O'B$ 分别垂直导轨,即碰后瞬间杆的动能是转动能 . 又,在碰撞过程中,约束力 N_1 和 N_2 对瞬时转轴 O'的力矩为零,重力矩可略,故球与杆系统的角动量守恒 . 因此,碰前杆的角度 θ_0 可求 .



力图 7－18－1

【解】 1. 如力图 7－18－1,取直角坐标 xy,设杆在任意位置时与竖直导轨的夹角为 θ,杆所受 mg、N_1、N_2 的方向标示如力图 7－18－1. 由质心运动定理

$$m\ddot{x}_C = -N_2 \tag{1}$$

$$m\ddot{y}_C = mg - N_1 \tag{2}$$

由转动定理,

$$I_C\ddot{\theta} = N_2\left(\frac{l}{2}\right)\cos\theta - N_1\left(\frac{l}{2}\right)\sin\theta \tag{3}$$

约束条件为

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{l}{2}\sin\theta \\ y_C = \dfrac{l}{2}\cos\theta \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \dot{x}_C = \dfrac{l}{2}\cos\theta \cdot \dot{\theta} \\ \dot{y}_C = -\dfrac{l}{2}\sin\theta \cdot \dot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_C = \dfrac{l}{2}(-\sin\theta \cdot \dot{\theta}^2 + \cos\theta \cdot \ddot{\theta}) \\ \ddot{y}_C = -\dfrac{l}{2}(\cos\theta \cdot \dot{\theta}^2 + \sin\theta \cdot \ddot{\theta}) \end{cases}$$

代入(1)、(2)式,得

$$N_1 = mg - m\ddot{y}_C = m\left[g + \frac{l}{2}(\cos\theta \cdot \dot{\theta}^2 + \sin\theta \cdot \ddot{\theta})\right]$$

$$N_2=-m\ddot{x}_C=-m\frac{l}{2}(-\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2+\cos\theta\cdot\ddot{\theta})$$

把 N_1 和 N_2 代入(3)式，得

$$I_C\ddot{\theta}=-\frac{ml^2}{4}\ddot{\theta}-\frac{ml}{2}g\sin\theta$$

式中

$$I_C=\frac{1}{12}ml^2$$

是杆绕质心的转动惯量．代入，化简，得出杆的运动方程为

$$\ddot{\theta}+\frac{3g}{2l}\sin\theta=0$$

对于小幅摆动

$$\sin\theta\approx\theta$$

故运动方程为

$$\ddot{\theta}+\frac{3g}{2l}\theta=0$$

这是简谐振动的方程，其圆频率 ω 和周期 T 为

$$\omega=\sqrt{\frac{3g}{2l}},\quad T=2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}$$

方法二．细杆在摆动过程中机械能守恒．设杆的最大摆幅为 θ_0 角，则

$$mg\frac{l}{2}(\cos\theta-\cos\theta_0)=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}I_C\dot{\theta}^2$$

式中 v_C 为杆质心速度，I_C 为杆绕质心轴的转动惯量，$\dot{\theta}$是杆绕质心轴的角速度．因

$$v_C=\frac{l}{2}\dot{\theta},\quad I_C=\frac{1}{12}ml^2$$

代入，得

$$3g(\cos\theta-\cos\theta_0)=l\dot{\theta}^2$$

对 t 求导，得

$$-3g\sin\theta\cdot\dot{\theta}=2l\dot{\theta}\ddot{\theta}$$

即

$$\ddot{\theta}+\frac{3g}{2l}\sin\theta=0$$

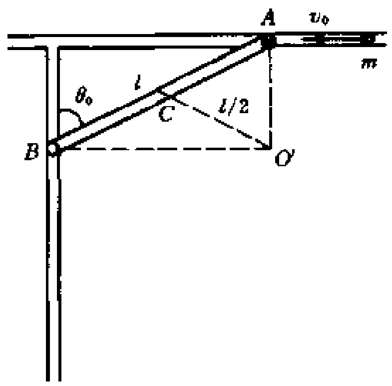
余同上．

2．设碰前，杆与竖直导轨夹角为 θ_0，因碰撞无机械能损失，故

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}I\omega_0^2 \tag{4}$$

式中 I 是杆绕瞬时转轴 O' 的转动惯量，ω_0 是碰后瞬间杆绕 O' 轴的角速度，$O'A$ 与 $O'B$ 分别与导轨垂直(见力图 7－18－2)．

因碰撞过程中，球与杆系统相对 O' 轴不受外力矩(重力矩忽略)，故角动量守恒，有



力图 7－18－2

$$mv_0l\ \cos\theta_0 = I\omega_0 \tag{5}$$

由转动惯量的平行轴定理

$$I = I_C + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2 \tag{6}$$

由(4)、(5)式消去 ω_0，得

$$I = ml^2\cos^2\theta_0 \tag{7}$$

由(6)、(7)式，得

$$\cos\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

当细杆摆到左方水平位置时，由机械能守恒，得

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{l}{2}mg\ \cos\theta_0$$

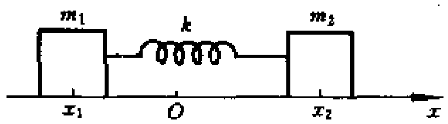
把 $\cos\theta_0$ 代入

$$v_0^2 = gl\ \cos\theta_0 = \frac{gl}{\sqrt{3}}$$

故

$$v_0 = \sqrt{\frac{gl}{\sqrt{3}}} = 0.76\sqrt{gl}$$

【题 19】 如图，在光滑水平面上，质量为 m_1 和 m_2 的两物体用劲度系数为 k 的弹簧相连．当弹簧为原长时，m_1 与 m_2 相距 l_0，把弹簧压缩距离 a 后从静止释放．试求 m_1 和 m_2 的振动表达式．



力图 7－19－1

【分析】 如图，取 x 轴沿 m_1 与 m_2 以及 k 的连线，原点 O 取在系统的质心．系统在水平方向不受外力，总动量守恒，因开始时静止，总动量为零，故系统的质心始终在 O 点静止不动．

当 m_1 和 m_2 分别在任意位置 x_1 和 x_2 时，由质心定义可确定 x_1 与 x_2 的关系．$[(x_1-x_2)-l_0]$是相应的弹簧伸长量或压缩量，它决定了 m_1 或 m_2 所受的弹性力．由牛顿第二定律列出 m_1 或 m_2 的运动方程，即可解出 m_1 或 m_2 的振动表达式．其中的待定常数则由初条件确定．

【解】 取 x 轴如图，原点 O 为系统质心，质心始终静止不动．由质心定义，当 m_1 和 m_2 分别在任意位置 x_1 和 x_2 时，有

$$\frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} = 0$$

即

$$m_1x_1 + m_2x_2 = 0 \tag{1}$$

由(1)式

$$x_1 = -\frac{m_2}{m_1}x_2 \quad 或 \quad x_2 = -\frac{m_1}{m_2}x_1$$

因弹簧原长为 l_0，当 m_1 和 m_2 分别位于 x_1 和 x_2 时，弹簧长度的改变量为

$$(x_2-x_1)-l_0=-\frac{m_1+m_2}{m_2}x_1-l_0=\frac{m_1+m_2}{m_1}x_2-l_0 \tag{2}$$

由牛顿第二定律，m_1 的运动方程为

$$m_1\ddot{x}_1=k[(x_2-x_1)-l_0]=-k\left(\frac{m_1+m_2}{m_2}x_1+l_0\right)$$

即

$$\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\ddot{x}_1=-k\left(x_1+\frac{m_2}{m_1+m_2}l_0\right)$$

令 $\mu=\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$，　$X_1=x_1+\dfrac{m_2}{m_1+m_2}l_0$，得

$$\ddot{X}_1+\frac{k}{\mu}X_1=0 \tag{3}$$

解出

$$X_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$$

式中

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

再由初条件定 A_1 和 φ_1. 初条件为

$$t=0\text{ 时},x_{20}-x_{10}=l_0-a,\dot{x}_{10}=0$$

由(2)式，得

$$x_{10}=-\frac{m_2}{m_1+m_2}(l_0-a)$$

故

$$\begin{cases}X_{10}=A_1\cos\varphi_1=x_{10}+\dfrac{m_2}{m_1+m_2}l_0\\ \quad=-\dfrac{m_2}{m_1+m_2}(l_0-a)+\dfrac{m_2}{m_1+m_2}l_0=\dfrac{m_2}{m_1+m_2}\ a>0\\ \dot{X}_{10}=-A_1\omega\sin\varphi_1=0\end{cases}$$

即

$$\varphi_1=0\quad\text{或}\quad\pi$$

当 $\varphi_1=0$ 时，由

$$A_1\cos\varphi_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}a$$

得

$$A_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}a$$

于是

$$X_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}a\ \cos\sqrt{\frac{k}{\mu}}t$$

或

$$x_1=X_1-\frac{m_2}{m_1+m_2}l_0=\frac{m_2}{m_1+m_2}\left(a\ \cos\sqrt{\frac{k}{\mu}}t-l_0\right)$$

同样，由牛顿第二定律，m_2 的运动方程为

$$m_2\ddot{x}_2=-k[(x_2-x_1)-l_0]=-k\left(\frac{m_1+m_2}{m_1}x_2-l_0\right)$$

或

$$\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\ddot{x}_2=-k\left(x_2-\frac{m_1}{m_1+m_2}l_0\right)$$

令

$$X_2=x_2-\frac{m_1}{m_1+m_2}l_0$$

得

$$\ddot{X}_2+\frac{k}{\mu}X_2=0$$

解出

$$X_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

式中

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

再由初条件定 A_2 和 φ_2，初条件为

$$t=0\text{ 时},x_{20}-x_{10}=l_0-a,\dot{x}_{20}=0$$

由(2)式，得

$$x_{20}=\frac{m_1}{m_1+m_2}(l_0-a)$$

故

$$\begin{cases}X_{20}=A_2\cos\varphi_2=x_{20}-\dfrac{m_1}{m_1+m_2}l_0=-\dfrac{m_1}{m_1+m_2}a<0\\ \dot{X}_{20}=-A_2\ \omega\sin\varphi_2=0\end{cases}$$

即

$$\varphi_2=\pi$$

当 $\varphi_2=\pi$ 时，由

$$A_2\cos\varphi_2=-\frac{m_1}{m_1+m_2}a$$

得

$$A_2=\frac{m_1}{m_1+m_2}a$$

于是

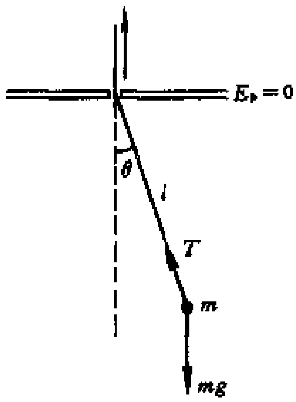
$$X_2=\frac{m_1}{m_1+m_2}\ a\ \cos\left(\sqrt{\frac{k}{\mu}}t+\pi\right)$$

或

$$x_2=X_2+\frac{m_1}{m_1+m_2}l_0=\frac{m_1}{m_1+m_2}\left[a\ \cos\left(\sqrt{\frac{k}{\mu}}t+\pi\right)+l_0\right]$$

可见，m_1 和 m_2 都作简谐振动，振动的圆频率均为 $\omega=\sqrt{\frac{k}{\mu}}$，其中 $\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ 为折合质量；振幅之比为 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{m_2}{m_1}$，即振幅与质量成反比；振动的相位差为 π，即 m_1 和 m_2 的振动相位相反；m_1 和 m_2 振动的平衡位置分别为 $-\frac{m_2}{m_1+m_2}l_0$ 与 $\frac{m_1}{m_1+m_2}l_0$，其间的距离 l_0 正是弹簧的原长．

【题 20】 如图，单摆的原长为 l_0，在摆动过程中缓慢上拉，悬点位置不变而摆长逐渐缩短．试求当摆长缩短为原长之半，即 $l=\frac{l_0}{2}$ 时的振幅与原振幅之比．



力图 7-20-1

【分析】 在上拉过程中，单摆的运动比较复杂，但由于上拉是"缓慢"的，可以认为在每一短时间内单摆仍作简谐振动，其振幅 θ_0 和摆长 l 也都可看作不变，其能量确定并等于摆锤处于相应的最高位置时的重力势能．

随着上拉，摆长 l 逐渐缩短，振幅 θ_0 相应变化，张力对单摆作功，使其能量变化．根据功能关系，由张力的功及相应的能量变化，可以确定摆长 l 与相应的振幅 θ_0 之间的关系，于是问题可解．

值得注意的是，当单摆以某一确定的振幅 θ_0 和摆长 l 作简谐振动时，张力 T 是随着角度 θ（或随着时间 t）变化的，因此计算上拉过程中张力的功时，应取在一个周期时间内的平均张力 $\bar{T}$.

【解】 因缓慢上拉，在每一短时间内单摆仍作简谐振动，其表达式为

$$\theta=\theta_0\cos(\omega t+\varphi)$$

从而

$$\dot{\theta}=-\theta_0\ \omega\ \sin(\omega t+\varphi)$$

式中 θ_0 为振幅，$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$ 为圆频率，l 为摆长．在该短时间内，θ_0 与 l 均可看作不变．如图，取单摆的悬点为重力势能零点，则当摆长为 l，振幅为 θ_0 时，单摆的能量 E 为

$$E=-mgl\ \cos\theta_0\approx-mgl\left(1-\frac{\theta_0^2}{2}\right)=\frac{1}{2}mgl\theta_0^2-mgl \tag{1}$$

当以振幅 θ_0 和摆长 l 作简谐振动的摆球位于任意位置 θ 时，受张力 T 和重力 mg 的作用，摆球在法向的运动方程为

$$T-mg\ \cos\theta=ml\dot{\theta}^2$$

上式表明张力 T 随 θ 或随时间 t 变化．在一个周期内的平均张力 $\overline{T}$ 为

$$\overline{T}=mg\,\overline{\cos\theta}+ml\,\overline{\dot{\theta}^2}\approx mg\left(1-\frac{\overline{\theta^2}}{2}\right)+ml\,\overline{\dot{\theta}^2}$$

式中

$$\overline{\theta^2}=\frac{1}{T}\int_0^T\theta^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T\theta_0^2\cos^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\theta_0^2}{T}\int_0^T\frac{1+\cos2(\omega t+\varphi)}{2}\mathrm{d}t=\frac{\theta_0^2}{2}$$

$$\overline{\dot{\theta}^2}=\frac{1}{T}\int_0^T\dot{\theta}^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T\theta_0^2\,\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\theta_0^2\omega^2}{T}\int_0^T\sin^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t=\frac{\theta_0^2\omega^2}{2}$$

代入，平均张力 $\overline{T}$ 为（注意，张力和振动周期用了同一个符号 T，请予区分，切勿混淆）

$$\overline{T}=mg\left(1-\frac{\overline{\theta^2}}{2}\right)+ml\,\overline{\dot{\theta}^2}=mg\left(1-\frac{\theta_0^2}{4}\right)+\frac{1}{2}ml\theta_0^2\omega^2$$

$$=mg\left(1-\frac{\theta_0^2}{4}\right)+\frac{1}{2}ml\theta_0^2\,\frac{g}{l}=mg\left(1+\frac{\theta_0^2}{4}\right)$$

当缓慢上拉，使摆长缩短 $\mathrm{d}l$ 时，平均张力 $\overline{T}$ 作功为

$$-\overline{T}\,\mathrm{d}l=-mg\left(1+\frac{\theta_0^2}{4}\right)\mathrm{d}l \tag{2}$$

由功能关系，$\overline{T}$ 作功等于单摆能量的变化，即

$$-\overline{T}\,\mathrm{d}l=\mathrm{d}E$$

把(1)、(2)式代入，得

$$-mg\left(1+\frac{\theta_0^2}{4}\right)\mathrm{d}l=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mgl\theta_0^2-mgl\right)=mgl\theta_0\,\mathrm{d}\theta_0+\frac{1}{2}mg\theta_0^2\,\mathrm{d}l-mg\mathrm{d}l$$

即

$$\frac{3}{4}\theta_0^2\,\mathrm{d}l+\theta_0\,l\,\mathrm{d}\theta_0=0$$

或

$$\frac{3}{4}\frac{\mathrm{d}l}{l}+\frac{\mathrm{d}\theta_0}{\theta_0}=0$$

积分，得

$$\frac{3}{4}\ln l+\ln\theta_0=\text{常量}$$

即

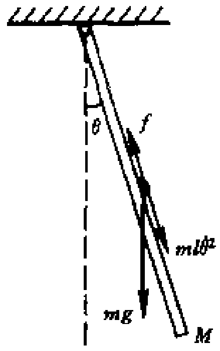
$$\theta_0\,l^{3/4}=\text{常量}$$

因此，摆长为 l_0 时的振幅 $\theta_0(l_0)$ 与摆长为 $\frac{l_0}{2}$ 时的振幅 $\theta_0\left(\frac{l_0}{2}\right)$ 之比为

$$\frac{\theta_0\left(\frac{l_0}{2}\right)}{\theta_0(l_0)}=\frac{l_0^{3/4}}{\left(\frac{l_0}{2}\right)^{3/4}}=2^{3/4}=1.68$$

【题21】 如图,质量为 M、长为 L 的均匀刚性细杆的一端悬挂,可在铅垂面内绕悬点无摩擦地摆动．质量为 $m=\frac{M}{3}$ 的小虫相对杆以速度 v_r 缓慢地沿杆向下爬行．开始时,杆静止并与竖直线夹 θ_0 角(设 θ_0 很小);小虫位于杆上端的悬点．放开后,杆开始摆动,小虫开始爬行．

试求:1. 小虫沿杆爬行 l 距离时,杆摆动的圆频率．2. 小虫爬到杆下端时,杆摆动的幅度．



力图 7－21－1

【分析】 杆和虫系统在重力矩作用下绕悬点在铅垂面内转动．因虫爬行,系统的转动惯量与虫的位置 l 有关,而系统所受的重力矩则与虫的位置 l 以及杆的摆角 θ 都有关．角动量定理给出了当虫爬行到 l 处时系统的运动方程(以 θ 为变量)．由此,加上虫缓慢爬行的条件以及摆角小的条件,即可确定摆动的圆频率．

若虫附杆不动,则系统在摆动过程中机械能守恒,摆幅恒定．当虫沿杆向下爬行时,因所受摩擦力作负功,系统的能量应减小,它的一部分表现为小虫势能的降低,另一部分则导致振动能量的减小,使摆幅减小．

取杆为参考系,如图,小虫受重力 mg,摩擦力 f,惯性离心力 $ml\dot{\theta}^2$,以及科里奥利力(因小虫爬行缓慢,此力可略),还有因杆非匀角速运动引起的惯性力 $-m\dot{\omega}\times r'$(此力不作功)．因虫相对杆匀速爬行,合力为零．于是给出了摩擦力 f 的表达式,f 不仅与虫的位置 l 有关还与 θ 及 $\dot{\theta}$ 有关．由于虫爬行缓慢,在虫移动 dl 期间,杆已摆动多次,所以应取一个周期内的平均摩擦力 $\bar{f}$,计算它作的功 $-\bar{f}dl$．其中,引起振动能量变化的那部分决定了振动能量变化的规律,于是虫爬行到杆下端时杆摆动的幅度可求．

【解】 1. 当小虫沿杆爬行到任意位置 l 处时,杆和虫系统的转动惯量为

$$I=\frac{1}{3}ML^2+ml^2=\frac{1}{3}ML^2+\frac{1}{3}Ml^2$$

$$=\frac{M}{3}(L^2+l^2)$$

当虫在 l 处且杆的摆角为任意的 θ 时,杆和虫系统受到的重力矩 $M_{重}$ 为

$$M_{重}=-Mg\frac{L}{2}\sin\theta-mgl\sin\theta$$

由角动量定理,得

$$\frac{d}{dt}(I\dot{\theta})=-Mg\frac{L}{2}\sin\theta-mgl\sin\theta$$

把 I 代入,得

$$\frac{M}{3}\frac{d}{dt}[(L^2+l^2)\dot{\theta}]=-Mg\sin\theta\left(\frac{L}{2}+\frac{l}{3}\right)$$

即

$$\frac{M}{3}(L^2+l^2)\ddot{\theta}+\frac{2}{3}Ml\dot{l}\dot{\theta}=-\frac{3L+2l}{6}Mg\sin\theta$$

因小虫爬行缓慢，$v=\dot{l}$ 很小，上式左边第二项可略．因摆角 θ 很小，$\sin\theta=\theta$．得

$$\ddot{\theta}+\frac{l+\frac{3}{2}L}{L^2+l^2}g\theta=0$$

这就是虫爬行到 l 处时，杆和虫系统的运动方程，它表明杆、虫的摆动是简谐振动，其圆频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{l+\frac{3}{2}L}{L^2+l^2}g}$$

2. 取杆为参考系，如图，小虫受重力 mg，摩擦力 f，惯性离心力 $ml\dot{\theta}^2$（因 $v=\dot{l}$ 很小，科里奥利力忽略；因杆非匀角速运动引起的惯性力不作功，不计入，不影响下面的讨论），因小虫匀速爬行，合力为零，故有

$$f=mg\cos\theta+ml\dot{\theta}^2$$

因 θ 很小，$\cos\theta\approx1-\frac{\theta^2}{2}$；又 $m=\frac{M}{3}$，代入，得

$$f=\frac{M}{3}g\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)+\frac{M}{3}l\dot{\theta}^2=\frac{M}{3}g-\frac{M}{6}g\theta^2+\frac{M}{3}l\dot{\theta}^2$$

因小虫爬行缓慢，在小虫移动 $\mathrm{d}l$ 期间，杆已摆动多次，需计算在一个周期内摩擦力的平均值 $\bar{f}$，为

$$\bar{f}=\frac{M}{3}g-\frac{M}{b}g\,\overline{\theta^2}+\frac{M}{3}l\,\overline{\dot{\theta}^2}$$

在虫移动 $\mathrm{d}l$ 期间，摩擦平均值 $\bar{f}$ 作功为

$$-\bar{f}\,\mathrm{d}l=-\frac{M}{3}g\,\mathrm{d}l+\frac{M}{6}g\,\overline{\theta^2}\,\mathrm{d}l-\frac{M}{3}l\,\overline{\dot{\theta}^2}\,\mathrm{d}l$$

上式右边第一项代表小虫重力势能的减小，右边第二、三项与 $\overline{\theta^2}$、$\overline{\dot{\theta}^2}$ 有关，代表振动能量改变了 $\mathrm{d}E$，即

$$\mathrm{d}E=\left(\frac{M}{6}g\,\overline{\theta^2}-\frac{M}{3}l\,\overline{\dot{\theta}^2}\right)\mathrm{d}l$$

振动系统的动能、势能及它们的平均值为

$$E_k=\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

$$\overline{E_k}=\frac{1}{2}I\,\overline{\dot{\theta}^2}=\frac{E}{2}$$

$$E_p=\left(\frac{1}{2}MgL+mgl\right)(1-\cos\theta)$$

$$\approx\left(\frac{L}{2}+\frac{l}{3}\right)Mg\,\frac{\theta^2}{2}=\frac{3L+2l}{6}Mg\,\frac{\theta^2}{2}$$

$$\overline{E_p}=\frac{3L+2l}{6}Mg\,\frac{\overline{\theta^2}}{2}=\frac{E}{2}$$

故

$$\overline{\dot{\theta}^2}=\frac{E}{I}=\frac{3E}{M(L^2+l^2)}$$

$$\overline{\theta^2}=\frac{6E}{Mg(3L+2l)}$$

代入 dE 的表达式，得

$$dE=E\left(\frac{1}{3L+2l}-\frac{l}{L^2+l^2}\right)dl$$

即

$$\frac{dE}{E}=\left(\frac{1}{3L+2l}-\frac{l}{L^2+l^2}\right)dl$$

积分，得

$$\int_{E_0}^{E_L}\frac{dE}{E}=\int_0^L\left(\frac{1}{3L+2l}-\frac{l}{L^2+l^2}\right)dl$$

即

$$\ln\frac{E_L}{E_0}=\frac{1}{2}\ln(3L+2l)\Big|_0^L-\frac{1}{2}\ln(L^2+l^2)\Big|_0^L$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{5L}{3L}-\frac{1}{2}\ln\frac{2L^2}{L^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{6}$$

故

$$\frac{E_L}{E_0}=\sqrt{\frac{5}{6}}$$

当 $l=0$ 时，杆的摆幅为 θ_0，振动能量 E_0 为(小虫在悬点，未参与振动)，

$$E_0=\frac{M}{2}gL(1-\cos\theta_0)\approx\frac{1}{4}MgL\theta_0^2$$

当 $l=L$ 时，设杆的摆幅为 θ_L，振动能量 E_L 为(小虫参与振动)，

$$E_L=\frac{M}{2}gL(1-\cos\theta_L)+mgL(1-\cos\theta_L)$$

$$=\frac{M}{2}gL\frac{\theta_L^2}{2}+\frac{M}{3}gL\frac{\theta_L^2}{2}=\frac{5}{12}MgL\theta_L^2$$

故

$$\frac{E_L}{E_0}=\frac{5}{3}\frac{\theta_L^2}{\theta_0^2}=\sqrt{\frac{5}{6}}$$

因此，当小虫爬到杆的下端时，杆的摆幅为

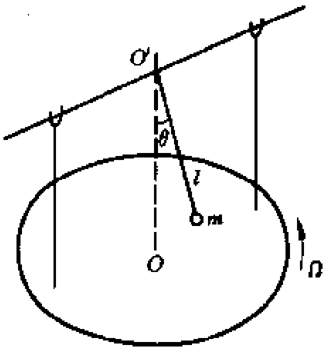
$$\theta_L=\sqrt[4]{\frac{3}{10}}\theta_0$$

【题 22】 如力图7-22-1，圆盘在水平面内以匀角速 Ω 绕竖直轴 OO' 旋转，盘上固连着两根同样高度的竖直支架．质量为 m 的小球与质量可忽略不计的 T 字形细杆相连，水平杆由支架支承，与小球相连的杆长为 l，悬点 O' 在转轴上，整个系统可在支架上无摩擦地摆动．

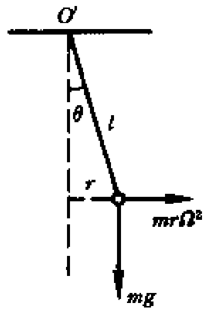
试求：1．小球的平衡位置．2．小球作小幅摆动时的圆频率．

【分析】 取圆盘参考系，如力图7-22-2，小球受重力 mg，杆拉力 T(此力不作功)，惯性离心力 $mr\Omega^2$，科里奥利力 $-2m\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}$(方向垂直于图面，对摆动无影响)．小球的平衡位置是有效势能

$E_{eff}(\theta)$为极值的位置，即使$\frac{d}{d\theta}E_{eff}=0$的位置，再由$\frac{d^2}{d\theta^2}E_{eff}$的正负便可判断平衡位置是否稳定．



力图 7－22－1



力图 7－22－2

有效势能 $E_{eff}(\theta)$包括重力势能和离心势能．重力作功等于重力势能的减少，惯性离心力作功等于离心势能的减少，重力势能的零点可以任意选定，离心势能的零点在轴上，于是第 1 问可解．

小幅摆动只在稳定的平衡位置附近才能维持，由牛顿第二定律列出相应的运动方程，加上小振动条件即可求解第 2 问．

【解】 1. 取圆盘参考系，如力图 7－22－2，当小球的摆角为任意的 θ 角时，小球与转轴的垂直距离为

$$r=l\ \sin\theta$$

取悬点 O'为重力势能零点，则小球在 θ 位置的重力势能为

$$E_{重}=-mgl\ \cos\theta$$

惯性离心力作功等于离心势能的减少．当小球从 θ 位置到达$(\theta+d\theta)$处时，惯性离心力作功为

$$dW=mr\Omega^2\cos\theta\cdot l d\theta=mr\Omega^2 dr$$

其中用到 $r=l\ \sin\theta, dr=l\cos\theta d\theta$. 当小球从 $\theta=0$ 到达 θ 时，惯性离心力所作总功为

$$W=\int_0^r mr\Omega^2 dr=\frac{1}{2}m\Omega^2 r^2=\frac{1}{2}m\Omega^2 l^2\sin^2\theta$$

取 $\theta=0$ 即 $r=0$ 处为离心势能零点，则在 θ 处的离心势能为

$$E_{离}=-\frac{1}{2}m\Omega^2 l^2\sin^2\theta$$

总势能，即有效势能为

$$E_{eff}(\theta)=E_{重}+E_{离}=-mgl\cos\theta-\frac{1}{2}m\Omega^2 l^2\sin^2\theta$$

平衡位置由$\frac{d}{d\theta}E_{eff}=0$确定，即由

$$\frac{d}{d\theta}E_{eff}(\theta)=mgl\sin\theta-m\Omega^2 l^2\sin\theta\ \cos\theta=ml^2\left(\frac{g}{l}-\Omega^2\cos\theta\right)\sin\theta=0$$

确定．因此，小球的平衡位置为

$$\theta_0=0,\pi,\arccos\frac{g}{l\Omega^2}$$

平衡是否稳定由$\frac{d^2}{d\theta^2}E_{eff}$的正负决定．

$$\frac{d^2}{d\theta^2}E_{eff}(\theta)=ml^2\left(\frac{g}{l}-\Omega^2\cos\theta\right)\cos\theta+ml^2\Omega^2\sin^2\theta$$

$$=ml^2\left[\frac{g}{l}\cos\theta+\Omega^2(\sin^2\theta-\cos^2\theta)\right]$$

对于平衡位置 $\theta_0=0$，因

$$\frac{d^2}{d\theta^2}E_{eff}(\theta)=ml^2\left(\frac{g}{l}-\Omega^2\right)$$

当 $\Omega<\sqrt{\frac{g}{l}}$时，$\frac{d^2}{d\theta^2}E_{eff}(\theta)>0$，为稳定平衡．当 $\Omega>\sqrt{\frac{g}{l}}$时，$\frac{d^2}{d\theta^2}E_{eff}(\theta)<0$，为不稳定平衡．

对于平衡位置 $\theta_0=\pi$，因

$$\frac{d^2}{d\theta^2}E_{eff}(\theta)=-ml^2\left(\frac{g}{l}+\Omega^2\right)<0$$

为不稳定平衡．

对于平衡位置 $\theta_0=\arccos\frac{g}{l\Omega^2}$，因

$$\frac{d^2}{d\theta^2}E_{eff}(\theta)=ml^2\left(\frac{g^2}{l^2\Omega^2}-\Omega^2\frac{g^2}{l^2\Omega^4}+\Omega^2\sin^2\theta\right)=ml^2\Omega^2\sin^2\theta>0$$

为稳定平衡．

总之，存在着两个稳定平衡位置，其一是 $\Omega<\sqrt{\frac{g}{l}}$ 条件下的 $\theta_0=0$ 位置，其二是 $\theta_0=\arccos\frac{g}{l\Omega^2}$，小球在这两个平衡位置附近可能作简谐振动．

2．对于 $\Omega<\sqrt{\frac{g}{l}}$条件下在 $\theta_0=0$ 附近的小幅摆动，小球的运动方程为

$$I\ddot{\theta}=-mgl\sin\theta+ml^2\Omega^2\sin\theta\cos\theta$$

把 $I=ml^2$ 代入，得

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta-\Omega^2\sin\theta\cos\theta=0$$

因小幅摆动，$\sin\theta\approx\theta$，$\cos\theta\approx1$，代入，得

$$\ddot{\theta}+\left(\frac{g}{l}-\Omega^2\right)\theta=0$$

可见，小球作简谐振动，圆频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}-\Omega^2}$$

对于在 $\theta_0=\arccos\frac{g}{l\Omega^2}$附近的小幅摆动，运动方程类似．设

$$\theta=\theta_0+\theta_1$$

得

$$\ddot{\theta}_1+\frac{g}{l}\sin(\theta_0+\theta_1)-\Omega^2\sin(\theta_0+\theta_1)\cos(\theta_0+\theta_1)=0$$

因小幅摆动，

$$\sin\theta_1\approx\theta_1,\cos\theta_1\approx 1$$

代入，得

$$\ddot{\theta}_1+(\Omega^2\sin^2\theta_0)\theta_1-\left(\frac{g}{l}-\Omega^2\cos\theta_0\right)\sin\theta_0-\left(\frac{g}{l}-\Omega^2\cos\theta_0\right)\cos\theta_0=0$$

把 $\cos\theta_0=\frac{g}{l\Omega^2}$代入，得

$$\ddot{\theta}_1+(\Omega^2\sin^2\theta_0)\theta_1=0$$

可见，小球在 $\theta_0=\arccos\frac{g}{l\Omega^2}$附近作简谐振动，圆频率为

$$\omega=\Omega\sin\theta_0=\Omega\sqrt{1-\frac{g^2}{l^2\Omega^4}}$$

【题 23】 如图，在光滑水平面上有三质点 A、B、C，质量分别为 m_1、m_2 和 m_3，三质点位于同一直线上，开始时 B 和 C 静止，用劲度系数为 k 的弹簧（质量忽略）相连．质点 A 以初速 v_0 沿连线方向与 B 作完全弹性碰撞．



力图 7-23-1

1. 以 A 和 B 的碰撞点为坐标原点，连线为 x 轴，试求碰后质点 B 的运动规律．2. 设 $m_2=m_3=m$，为使质点 A 和 B 在碰后重新相遇，但不相碰（即相遇时速度相同），试问比值$\frac{m_1}{m}$应为多少？

【分析】 A 和 B 作完全弹性碰撞，碰撞时弹簧未及压缩仍维持为原长，质点 B 不受弹性力，故 A 和 B 系统动量守恒，机械能守恒，碰后 A 和 B 的速度可求．于是 B 和 C 系统的质心速度可求．在 B 和 C 的质心系中（注意，因碰后质心速度不变，故质心系是惯性系），应用牛顿第二定律列出质点 B 的动力方程，求解后得出质点 B 相对质心系的运动规律．再利用相对运动公式，可得出质点 B 相对实验室参考系的运动规律．质点 A 碰后的速度已求得，以后就以该速度作匀速直线运动．

碰后，要求 A 和 B 再次相遇，即要求在相遇时刻 t^*，A 和 B 具有相同的坐标；相遇而不相碰，要求在 t^* 时刻两者的相对速度为零，即具有相同的速度．根据以上两个条件可求出质量比$\frac{m_1}{m}$.

【解】 1.A 和 B 相碰后，A 的速度从 v_0 变为 v_1，B 的速度从 0 变为 v_2，由动量守恒和机械能守恒，有

$$m_1v_0=m_1v_1+m_2v_2$$

$$\frac{1}{2}m_1v_0^2=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2$$

解出

$$\begin{cases} v_1=\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_0 \\ v_2=\dfrac{2m_1}{m_1+m_2}v_0 \end{cases} \tag{1}$$

取 B 和 C 以及弹簧为物体系，设 B 和 C 的坐标分别为 x_2 和 x_3，速度分别为 v_2 和 v_3，则物体系质心的坐标 x_C 和速度 v_C 为

$$x_C=\frac{m_2x_2+m_3x_3}{m_2+m_3}$$

$$v_C=\frac{m_2}{m_2+m_3}v_2+\frac{m_3}{m_2+m_3}v_3$$

因刚碰后 $v_3=0$，v_2 如(1)式，故刚碰后的质心速度为

$$v_C=\frac{m_2}{m_2+m_3}v_2=\frac{2m_1m_2}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)}v_0 \tag{2}$$

因系统在水平方向不受外力，上述质心速度在碰后始终保持不变．取刚碰后作为计时起点，取 A 和 B 碰撞点为坐标原点，即刚碰后 B 的坐标 $x_2(0)=0$，则在 $t=0$ 时刻，质心的位置为

$$x_C(0)=\frac{m_3}{m_2+m_3}x_3=\frac{m_3}{m_2+m_3}l_0 \tag{3}$$

式中 $x_3(0)=l_0$ 为弹簧原长，即刚碰后弹簧仍为原长．

取 B 和 C 系统的质心为参考系，在质心系中考察 B 点的运动(因碰后质心速度不变，质心系为惯性系)．设 B 和 C 在质心系的坐标分别为 x'_2 和 x'_3，则有

$$m_2x'_2+m_3x'_3=0 \tag{4}$$

在 $t=0$ 时刻(刚碰后)，B 和 C 均位于平衡位置，其坐标分别为 $x'_2(0)$ 和 $x'_3(0)$，则有

$$m_2x'_2(0)+m_3x'_3(0)=0$$

$$x'_3(0)-x'_2(0)=l_0$$

由以上两式，解出

$$\begin{cases} x'_2(0)=-\dfrac{m_3}{m_2+m_3}l_0 \\ x'_3(0)=\dfrac{m_2}{m_2+m_3}l_0 \end{cases} \tag{5}$$

$t=0$ 时刻，B 在质心系的初速度为

$$v'_2(0)=v_2-v_C=\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_0-\frac{2m_1m_2}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)}v_0$$

$$=\frac{2m_1m_3}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)}v_0 \tag{6}$$

质点 B 所受弹性力与弹簧的伸长量 Δx 成正比，由(4)式

$$m_2\Delta x_2'+m_3\Delta x_3'=0$$

$$\Delta x=\Delta x_3'-\Delta x_2'$$

其中，先后取(4)式的 x_2' 和 x_3' 为 $x_2'(0)$和 $x_3'(0)$以及 $x_2'(t)$和 $x_3'(t)$，则 $\Delta x_2'$ 和 $\Delta x_3'$ 为质点 B 和 C 各自偏离平衡位置的位移，因 $x_3'(0)-x_2'(0)=l_0$，故 Δx 为弹簧伸长量．由以上两式，解出

$$\Delta x_2'=-\frac{m_3}{m_2+m_3}\Delta x$$

或

$$\Delta x=-\frac{m_2+m_3}{m_3}\Delta x_2'=-\frac{m_2+m_3}{m_3}[x_2'-x_2'(0)]$$

由牛顿第二定律，质点 B 的动力方程为

$$m_2\ddot{x}_2'=k\Delta x=-\frac{k(m_2+m_3)}{m_3}[x_2'-x_2'(0)]$$

或

$$\ddot{x}_2'+\frac{k(m_2+m_3)}{m_2m_3}[x_2'-x_2'(0)]=0$$

令

$$\begin{cases}\mu=\dfrac{m_2m_3}{m_2+m_3}\\ \omega=\sqrt{\dfrac{k}{\mu}}=\sqrt{\dfrac{k(m_2+m_3)}{m_2m_3}}\\ X_2=x_2'-x_2'(0)\end{cases} \tag{7}$$

方向简化为

$$\ddot{X}_2+\omega^2X_2=0$$

解出

$$X_2=A\cos(\omega t+\varphi)$$

故

$$\begin{cases}x_2'=x_2'(0)+A\cos(\omega t+\varphi)\\ \dot{x}_2'=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)\end{cases} \tag{8}$$

把初条件(5)、(6)式代入，得

$$A\cos\varphi=0$$

$$-A\omega\sin\varphi=\frac{2m_1m_3}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)}v_0$$

解出

$$\begin{cases}\varphi=-\dfrac{\pi}{2}\\ A=\dfrac{2m_1m_3}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)}\dfrac{v_0}{\omega}=\dfrac{2m_1m_3}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)}\sqrt{\dfrac{m_2m_3}{k(m_2+m_3)}}v_0\end{cases}$$

把 φ 和 A 以及(5)式代入(8)式，得出质点 B 碰后在质心系中的运动规律为

$$x'_2(t)=-\frac{m_3}{m_2+m_3}l_0+\frac{2m_1m_3v_0}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)}\sqrt{\frac{m_2m_3}{k(m_2+m_3)}}\sin\omega t \tag{9}$$

取 A 和 B 的碰撞点为实验室坐标系的原点，则质点 B 在实验室参考系中的坐标为

$$x_2(t)=x_C+x'_2(t)=x_C(0)+v_Ct+x'_2(t)$$

把(3)、(2)、(9)式代入，得

$$x_2(t)=\frac{2m_1v_0}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)}\left[m_2t+m_3\sqrt{\frac{m_2m_3}{k(m_2+m_3)}}\sin\omega t\right] \tag{10}$$

式中 ω 见(7)式．

2．对于质点 A，碰后速度为 v_1，碰后 t 时刻 A 在实验室坐标系中的位置为

$$x_1(t)=v_1t=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_0t \tag{11}$$

当 $m_2=m_3=m$ 时，(10)、(11)式简化为

$$x_2(t)=\frac{m_1v_0}{m_1+m}\left[t+\sqrt{\frac{m}{2k}}\sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right)\right] \tag{12}$$

$$x_1(t)=\frac{m_1-m}{m_1+m}v_0t \tag{13}$$

若要使 A 和 B 再次相遇而不相碰，就要求在相遇时刻 t^* 满足

$$\begin{cases}x_1(t^*)=x_2(t^*)\\ \dot{x}_1(t^*)=\dot{x}_2(t^*)\end{cases} \tag{14}$$

即由(12)、(13)两式确定的两条曲线只能相切而不能相交．把(12)、(13)式代入(14)式，化简后，得

$$\sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t^*\right)=-\frac{\sqrt{2km}}{m_1}\ t^* \tag{15}$$

$$\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t^*\right)=-\frac{m}{m_1} \tag{16}$$

平方相加，得出 A 和 B 再次相遇的时刻 t^* 为

$$t^*=\sqrt{\frac{m_1^2-m^2}{2km}}$$

可见，为使 A 和 B 再次相遇成为可能，必须有

$$m_1>m$$

(15)、(16)两式相除，得

$$\tan\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t^*\right)=\sqrt{\frac{2k}{m}}t^*$$

因 $\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t^*\right)$ 和 $\sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t^*\right)$ 均为负值，上式圆括号内的角度应在第三象限取值．把 t^* 代入，得

$$\tan\left[\sqrt{\left(\frac{m_1}{m}\right)^2-1}\right]=\sqrt{\left(\frac{m_1}{m}\right)^2-1}$$

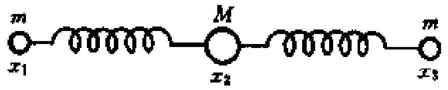
上述超越方程在第三象限的解为

$$\sqrt{\left(\frac{m_1}{m}\right)^2-1}=4.492$$

故

$$\frac{m_1}{m}=4.602$$

【题 24】 如力图7－24－1，质量为 M 的小球两侧分别用劲度系数均为 k 的弹簧与两个质量均为 m 的小球连成一直线，水平放置，忽略一切阻力和摩擦力．试求特征频率和振动模式．



力图 7－24－1

【分析】 N 个自由度的系统可由 N 个独立变数描述其运动，每个独立变数的谐振动频率称为振动系统的特征频率或简正频率．当系统以特征频率振动时，它各部分(本题为各小球)的具体振动方式就是系统的振动模式．

设三小球处于任意位置，由所受弹性力可列出其运动方程．设三小球均以特征频率 ω 作简谐振动，代入运动方程，得出代数方程，由三振幅有非零解的条件即可确定可能的 ω，进而确定相应的振动模式．

【解】 如力图 7－24－1，取三球连线为 x 轴，设某时刻 t 三球偏离各自的平衡位置的位移依次为 x_1,x_2,x_3，则三球的运动方程为

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = k(x_2-x_1) \\ M\ddot{x}_2 = -k(x_2-x_1)+k(x_3-x_2) \\ \qquad = k(x_1-2x_2+x_3) \\ m\ddot{x}_3 = -k(x_3-x_2) \end{cases} \tag{1}$$

为求三球系统的特征频率，设

$$\begin{cases} x_1=A_1\cos\omega t \\ x_2=A_2\cos\omega t \\ x_3=A_3\cos\omega t \end{cases}$$

故有

$$\begin{cases} \ddot{x}_1=-A_1\omega^2\cos\omega t \\ \ddot{x}_2=-A_2\omega^2\cos\omega t \\ \ddot{x}_3=-A_3\omega^2\cos\omega t \end{cases}$$

代入(1)式，得出三振幅 A_1,A_2,A_3 满足的代数方程为

$$\begin{cases}(k-m\omega^2)A_1-kA_2=0\\-kA_1+(2k-M\omega^2)A_2-kA_3=0\\-kA_2+(k-m\omega^2)A_3=0\end{cases}\tag{2}$$

三振幅有非零解的条件是(2)式的系数行列式为零：

$$\begin{vmatrix}k-m\omega^2 & -k & 0\\ -k & 2k-M\omega^2 & -k\\ 0 & -k & k-m\omega^2\end{vmatrix}=0$$

即

$$\omega^2[Mm^2\omega^4-2km(M+m)\omega^2+k^2(2m+M)]=0$$

解出3小球振动系统的特征圆频率为

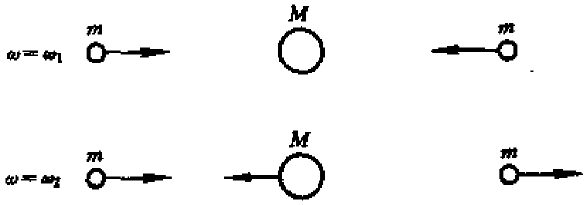
$$\omega=0,\sqrt{\frac{k}{m}},\sqrt{\frac{M+2m}{Mm}k}$$

$\omega=0$ 的解代表系统整体平移，这是非振动解，弃去．

当 $\omega=\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}}$ 时，由(2)式，得

$$A_2=0,\ A_1=-A_3$$

即中间的 M 球静止不动，两侧的 m 球的振动相位相反．



力图 7－24－2

当 $\omega=\omega_2=\sqrt{\frac{M+2m}{Mm}k}$ 时，由(2)式，得

$$\begin{cases}\left(1-\frac{M+2m}{M}\right)A_1-A_2=0\\-A_1+\left(2-\frac{M+2m}{m}\right)A_2-A_3=0\\-A_2+\left(1-\frac{M+2m}{M}\right)A_3=0\end{cases}$$

解出

$$A_1=A_3,\ A_2=-\frac{2m}{M}A_3$$

即两 m 球的振幅相同，同相位(振动方向相同)，M 球的振幅是两 m 球振幅的 $\frac{2m}{M}$ 倍，反相位(振动方向相反)．

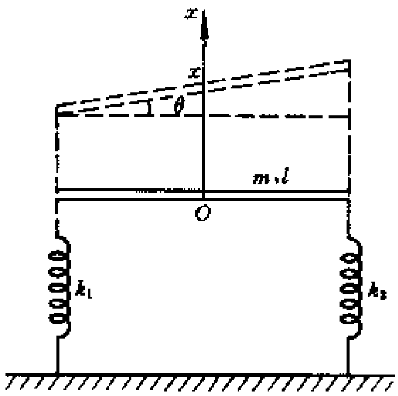
以上两种振动模式($\omega=\omega_1$ 和 $\omega=\omega_2$)如力图 7－24－2 所示．

【题 25】 如图,质量为 m、长为 l 的均匀长方形木板由劲度系数分别为 k_1 和 k_2 的两竖直弹簧在两端支撑,平衡时木板位于水平面．试求木板作小幅振动时的特征频率．

【分析】 与上题类似．如图,取 x 轴竖直向上,取平衡时木板的质心为坐标原点 O．当木板处于任意状态时,其质心坐标为 x,与水平面夹角为 θ(θ 很小)．根据质心运动定理和转动定理,由左、右端所受弹性力及弹性力矩,可列出木板的运动方程．再把木板以特征频率 ω 作简谐振动的表达式代入运动方程,得出代数方程,由振幅为非零解的条件即可确定 ω 及相应的振动模式．

【解】 平衡时木板处于水平位置,所受重力与弹性力抵消．当木板处于任意状态(x,θ)时,左端和右端所受弹性力为(扣除与重力抵消部分)$-k_1\left(x-\frac{l}{2}\theta\right)$和$-k_2\left(x+\frac{l}{2}\theta\right)$,所受弹性力矩为 $k_1\left(x-\frac{l}{2}\theta\right)\frac{l}{2}$和$-k_2\left(x+\frac{l}{2}\theta\right)\frac{l}{2}$(注意,$\theta$ 角很小)．由质心运动定理及转动定理,木板的运动方程为

$$\begin{cases} m\ddot{x}=-k_1\left(x-\frac{l}{2}\theta\right)-k_2\left(x+\frac{l}{2}\theta\right) \\ \quad =-(k_1+k_2)x-\frac{l}{2}(k_2-k_1)\theta \\ I\ddot{\theta}=k_1\left(x-\frac{l}{2}\theta\right)\frac{l}{2}-k_2\left(x+\frac{l}{2}\theta\right)\frac{l}{2} \\ \quad =-\frac{l}{2}(k_2-k_1)x-\frac{l^2}{4}(k_1+k_2)\theta \end{cases}$$



力图 7－25－1

即

$$\begin{cases} \ddot{x}+\frac{k_1+k_2}{m}x+\frac{k_2-k_1}{2m}l\theta=0 \\ \ddot{\theta}+\frac{k_2-k_1}{2I}lx+\frac{k_1+k_2}{4I}l^2\theta=0 \end{cases} \qquad (1)$$

设木板小幅振动的特征圆频率为 ω,将下述试探解

$$\begin{cases} x=A\cos\omega t \\ \theta=B\cos\omega t \end{cases}$$

代入(1)式,得出 A 和 B 应满足的代数方程为

$$\begin{cases} \left(\frac{k_1+k_2}{m}-\omega^2\right)A+\frac{k_2-k_1}{2m}lB=0 \\ \frac{k_2-k_1}{2I}lA+\left(\frac{k_1+k_2}{4I}l^2-\omega^2\right)B=0 \end{cases}$$

A 和 B 有非零解的条件是系数行列式为零,即

$$\begin{vmatrix} \frac{k_1+k_2}{m}-\omega^2 & \frac{k_2-k_1}{2m}l \\ \frac{k_2-k_1}{2I}l & \frac{k_1+k_2}{4I}l^2-\omega^2 \end{vmatrix}=0$$

其中

$$I=\frac{1}{12}ml^2$$

代入,得

$$\left(\frac{k_1+k_2}{m}-\omega^2\right)\left[\frac{3(k_1+k_2)}{m}-\omega^2\right]-\frac{3(k_2-k_1)^2}{m^2}=0$$

即

$$\omega^4-\frac{4(k_1+k_2)}{m}\omega^2+\frac{12k_1k_2}{m^2}=0$$

解出

$$\omega^2=\frac{2}{m}\left[(k_1+k_2)\pm\sqrt{k_1^2-k_1k_2+k_2^2}\right]$$

可见,木板有上述两个特征频率,对应两种振动模式.

特别是,当 $k_1=k_2=k$ 时,有

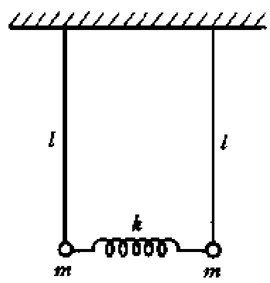
$$\omega_1^2=\frac{2k}{m},\omega_2^2=\frac{6k}{m}$$

这时运动方程为(由(1)式)

$$\begin{cases}\ddot{x}+\dfrac{2k}{m}x=0\\ \ddot{\theta}+\dfrac{6k}{m}\theta=0\end{cases}$$

这是两个独立的微分方程,分别描述木板的两种振动模式:木板上下振动(即质心振动),圆频率为 $\omega_1=\sqrt{\dfrac{2k}{m}}$;以及木板的倾斜振动,圆频率为 $\omega_2=\sqrt{\dfrac{6k}{m}}$.

【题 26】 如力图7-26-1,两个完全相同的单摆并排悬挂,摆球质量均为 m,摆长均为 l,两摆球用劲度系数为 k 的轻质弹簧连接,弹簧原长等于两悬点之间的距离.忽略空气阻力.上述振动系统称为耦合摆.在小角摆动的条件下,1. 试求耦合摆的特征频率,并写出两摆球运动方程的一般表达式.2. 试讨论耦合摆在不同初始条件下的几种典型运动情况.



力图 7-26-1

【分析】 本题是两套振动系统互相耦合的典型例子,可具有不同的振动模式,相应地有不同的特征频率.

先根据两摆球的受力情况分别列出它们的动力学方程,引进新的振动变量后可简化该两方程,并立刻从微分方程得到特征频率.解微分方程后可得出两摆球的运动方程.规定几个特殊的初始条件,从一般的运动方程即可得出几种典型的振动模式.

【解】 1. 对于单摆,如力图 7-26-2,摆球所受切向力为 $-mg\sin\theta$,切向加速度为 $l\ddot{\theta}$,由牛顿第二定律,

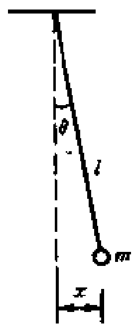
$$ml\ddot{\theta}=-mg\sin\theta$$

小角摆动时,$\sin\theta\approx\theta$,上式为

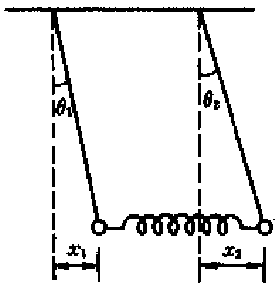
$$\ddot{\theta}- -\frac{g}{l}\theta$$

如力图 7－26－2，若摆球的偏角改用相对平衡位置的水平偏移量 x，则有

$$\ddot{x}=-\frac{g}{l}x=-\omega_0^2 x$$



力图 7－26－2



力图 7－26－3

如力图 7－26－3，在耦合摆中每个单摆还要受弹性力的作用．设两个摆球的偏移量分别为 x_1 和 x_2，则两摆球的动力方程为

$$m\ddot{x}_1=-m\omega_0^2 x_1+k(x_2-x_1)$$
$$m\ddot{x}_2=-m\omega_0^2 x_2-k(x_2-x_1)$$

以上两方程相加和相减，得出

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1+x_2)=-\omega_0^2(x_1+x_2)$$
$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1-x_2)=-\left(\omega_0^2+\frac{2k}{m}\right)(x_1-x_2)$$

引进新变量，

$$\begin{cases}q_1=x_1+x_2\\q_2=x_1-x_2\end{cases}\tag{1}$$

则以上两方程简化为

$$\ddot{q}_1+\omega_0^2 q_1=0$$
$$\ddot{q}_2+\left(\omega_0^2+\frac{2k}{m}\right)q_2=0$$

这是两个标准的简谐振动动力方程，它们的通解为

$$q_1=A'_1\cos(\omega_0 t+\varphi_1)$$
$$q_2=A'_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

式中 ω_0 和 ω 是耦合摆的两个特征频率，为

$$\omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}}$$
$$\omega=\sqrt{\omega_0^2+\frac{2k}{m}}$$

由(1)式，并将解出的 q_1 和 q_2 代入，得

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}(q_1 + q_2) = \dfrac{1}{2}[A'_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1) + A'_2\cos(\omega t + \varphi_2)] \\ \quad = A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \\ x_2 = \dfrac{1}{2}(q_1 - q_2) = A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1) - A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases} \tag{2}$$

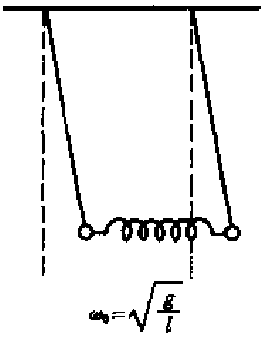
(2)式就是两摆球的运动方程．

2．由运动方程(2)式，$t=0$ 时的初始位置和初速度为

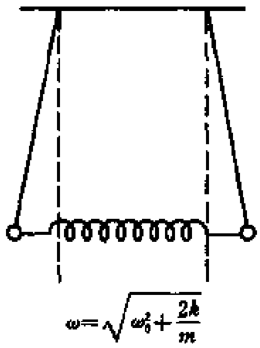
$$摆1 \quad \begin{cases} x_{10} = A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2 \\ v_{10} = -A_1\omega_0\sin\varphi_1 - A_2\omega\sin\varphi_2 \end{cases} \tag{3}$$

$$摆2 \quad \begin{cases} x_{20} = A_1\cos\varphi_1 - A_2\cos\varphi_2 \\ v_{20} = -A_1\omega_0\sin\varphi_1 + A_2\omega\cos\varphi_2 \end{cases} \tag{4}$$

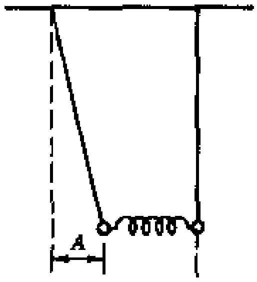
下面规定几个特殊的初始条件，讨论耦合摆的运动特征．



力图 7－26－4



力图 7－26－5



力图 7－26－6

(a)$x_{10}=x_{20}>0$，$v_{10}=v_{20}=0$，即如力图 7－26－4，两个摆球向右偏离相同角度，从静止释放．比较(3)、(4)式中的第一式，得 $A_2=0$．于是运动方程(2)式变为

$$x_1 = A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1)$$
$$x_2 = A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1)$$

可见，两摆球以相同的振幅、相同的特征圆频率 $\omega_0\left(\omega_0=\sqrt{\dfrac{g}{l}}\right)$、相同的相位同步地摆动．

(b)$x_{10}<0$，$v_{10}=0$，$x_{20}=-x_{10}$，$v_{20}=0$，如力图 7－26－5 所示．比较(3)、(4)两式中的第一式，得 $A_1=0$．于是运动方程(2)式变为

$$x_1 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$
$$x_2 = -A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

可见，两摆球以相同的振幅、相同的另一特征圆频率 $\omega\left(\omega=\sqrt{\omega_0^2+\dfrac{2k}{m}}\right)$、反相位摆动．

(c)$x_{10}=A$，$v_{10}=0$，$x_{20}=0$，$v_{20}=0$，如力图 7－26－6 所示．由(3)、(4)式，得

$$x_{10} = A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2 = A$$
$$x_{20} = A_1\cos\varphi_1 - A_2\cos\varphi_2 = 0$$

两式相加、相减，得

$$\begin{cases}2A_1\cos\varphi_1=A, & \cos\varphi_1>0\\ 2A_2\cos\varphi_2=A, & \cos\varphi_2>0\end{cases} \tag{5}$$

又有

$$v_{10}=-A_1\omega_0\sin\varphi_1-A_2\omega\sin\varphi_2=0$$

$$v_{20}=-A_1\omega_0\sin\varphi_1+A_2\omega\sin\varphi_2=0$$

两式相加、相减，得

$$2A_1\omega_0\sin\varphi_1=0$$

$$2A_2\omega\sin\varphi_2=0$$

即

$$\varphi_1=\varphi_2=0\text{ 或 }\pi \tag{6}$$

结合(5)、(6)式，得

$$\varphi_1=\varphi_2=0$$

$$A_1=A_2=\frac{A}{2}$$

于是运动方程(2)式变为

$$x_1=\frac{A}{2}(\cos\omega_0t+\cos\omega t)$$

$$x_2=\frac{A}{2}(\cos\omega_0t-\cos\omega t)$$

利用三角公式，可进一步写成

$$x_1=\left[A\cos\left(\frac{\omega-\omega_0}{2}t\right)\right]\cos\left(\frac{\omega+\omega_0}{2}t\right)$$

$$x_2=\left[A\sin\left(\frac{\omega-\omega_0}{2}t\right)\right]\sin\left(\frac{\omega+\omega_0}{2}t\right)$$

结论是：(i)两摆均以相同的较高圆频率$\frac{\omega+\omega_0}{2}$摆动，两摆振动的相位差为$\frac{\pi}{2}$.($ii$)两摆的振幅以较慢的频率$\frac{\omega-\omega_0}{2}$作缓慢的周期性变化．注意到振幅变化规律一个是余弦函数，另一是正弦函数，故当一摆振幅最大时，另一摆的振幅最小，反之亦然．亦即振动能量周期性地从一摆转移到另一摆．

【题 27】 如图，6 个质量均为 m 的小球串在光滑圆环上，彼此间用劲度系数均为 k 的 6 个弹簧相连，整个系统在水平面内．当各小球处在平衡位置时，弹簧均为原长．试求特征频率．

【分析】 与以上三题类似．

【解】 把各小球依次编号，设各小球偏离平衡位置的位移为 u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6，统一表为 u_n ($n=1,2,3,4,5,6$)，则各小球的动力方程为

$$\begin{aligned}m\ddot{u}_n&=k(u_{n+1}-u_n)-k(u_n-u_{n-1})\\&=k(u_{n-1}+u_{n+1}-2u_n),\ n=1,2,\cdots,6\end{aligned} \tag{1}$$

设各小球的振动为

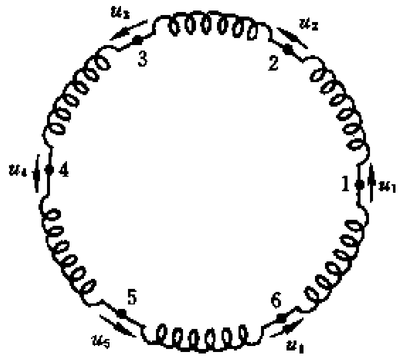
$$u_n = A_n\cos\omega t \qquad n=1,2,\cdots,6$$

将上式代入微分方程组(1)式，得出各小球振幅 A_n 的代数方程组为，

$$-m\omega^2 A_n = k(A_{n-1}+A_{n+1}-2A_n)$$

即

$$A_{n-1}+\left(\frac{m\omega^2}{k}-2\right)A_n + A_{n+1}=0, n=1,2,\cdots,6 \qquad (2)$$



力图 7-27-1

各 A_n 有非零解的条件是(2)式的系数行列式为零，即

$$\begin{vmatrix} \varepsilon & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \varepsilon & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \varepsilon & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \varepsilon & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

式中

$$\varepsilon = \frac{m\omega^2}{k}-2$$

把行列式展开，得

$$\varepsilon^6 - 6\varepsilon^4 + 9\varepsilon^2 - 4 = 0$$

即

$$(\varepsilon+1)^2(\varepsilon-1)^2(\varepsilon+2)(\varepsilon-2)=0$$

解出

$$\varepsilon_1 = 2, \quad 即 \quad \omega_1^2 = \frac{4k}{m}$$

$$\varepsilon_2 = -2, 即 \quad \omega_2^2 = 0$$

$$\varepsilon_3 = 1 \quad 即 \quad \omega_3^2 = \frac{3k}{m}$$

$$\varepsilon_4 = 1, \quad 即 \quad \omega_4^2 = \frac{3k}{m}$$

$$\varepsilon_5 = -1, 即 \quad \omega_5^2 = \frac{k}{m}$$

$$\varepsilon_6 = -1, 即 \quad \omega_6^2 = \frac{k}{m}$$

其中 $\omega_3=\omega_4, \omega_5=\omega_6$ 是简并的．

把每种特征频率代入振幅方程组(2)式，可求出各小球的振幅关系，从而确定每一种振动模式中各小球的具体振动方式．

【题 28】 三个质量各为 m 的质点由未伸长的无质量弹簧连接在一起达到平衡．每个弹簧的劲度系数为 k，它们被限制在圆周上运动，如力图 7-28-1 所示．

1. 若每一质点 m 分别有偏离平衡位置的小位移 u_1, u_2 和 u_3，试写出每一质点的运动方程

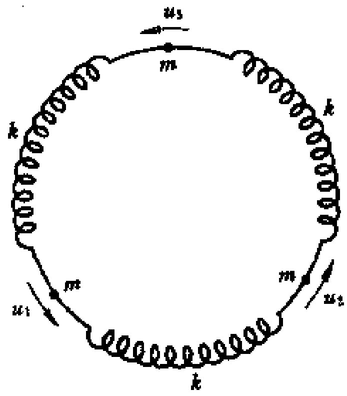
2. 试验证此系统有下列简谐式解

$$u_n = a_n \cos\omega t$$

其加速度为 $-\omega^2 u_n$，此处 $a_n(n=1,2,3)$是恒振幅，角频率 ω 有下列三个可能的取值，即

$$\sqrt{3}\omega_0,\sqrt{3}\omega_0,0$$

其中 $\omega_0^2=\dfrac{k}{m}$.



力图 7－28－1

3. 将这由弹簧与质点交替连接的系统扩充到 N 个质点，每一质点 m 由弹簧与相邻质点连接．起初弹簧未伸长，处于平衡，当质点偏离平衡时，用第 n 个质点的位移和相邻质点的位移表示出第 n 个质点($n=1,2,\cdots,N$)的运动方程．试验证

$$u_n(t)=a_s\sin\left(\frac{2ns\pi}{N}+\varphi\right)\cos\omega_s t$$

是振荡解，式中 $s=1,2,\cdots,N,n=1,2,\cdots,N,\varphi$ 为一任意相位，角频率 ω_s 由下式给出

$$\omega_s=2\omega_0\sin\left(\frac{s\pi}{N}\right)$$

而 $a_s(s=1,2,\cdots,N)$是与 n 无关的恒振幅．

试叙述对于一个含有无穷多个质点的链条，频率的可能范围．

4. 试确定$\dfrac{u_n}{u_{n+1}}$的比值．

当 N 很大时，对于下列(a)，(b)两种情况，试画出说明时刻 t 质点的位移与该质点在链上编号之间关系的草图．

(a)低频解．

(b)$\omega_s=\omega_{max}$，其中 ω_{max}是最大的频率解．

5. 若质点之一用质量 $m'\ll m$ 的质点代替，试估计角频率分布将发生怎样的主要变化．

试在上面结果的基础上定性地描述，由质量为 m 和 m'交替联接的双原子链会有怎样形式的频谱．

提示：

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$2\sin^2 A=1-\cos 2A$$

【分析】 质点和弹簧交叉联接，呈圆形，构成一个振动系统．质点近似地作直线运动，弹簧也近似看作是“直的”．本题首先要求给出质点的运动方程，其次给出了振荡解要求验证(不要求解微分方程)，再次要求根据振荡解讨论振动系统的频率分布，以及对于不同频率在同一时刻各质点位移的分布．通过这些讨论，将使解题者对这类振动系统的运动情况有具体的了解．

题目的安排由浅入深，先是三个同样的质点和三个同样的弹簧，尔后推广到 N 个，以至无穷多个．再将某一个质点 m 换成 m'($m'\ll m$)，进而讨论由 m'和 m 交替联成的双原子链的频谱．

为了叙述的方便，把对各个问题的具体分析与求解结合在一起．

【解】 1. 如力图 7-28-1，三个同样的质点 m，三个相同的弹簧 k，任一质点的运动方程由牛顿第二定律给出，为

$$F=m\frac{d^2u}{dt^2}$$

式中 u 是质点 m 的位移，F 是它受的力．对于质点 1，它受到的两侧弹簧的作用力遵循胡克定律．设任一时刻质点 1,2,3 的位移分别为 u_1,u_2,u_3，由于原先各弹簧均无伸长、各质点均达到平衡，故质点 1 的运动方程为

$$m\frac{d^2u_1}{dt^2}=-k(u_1-u_2)-k(u_1-u_3)$$

$$=k(u_2-u_1)+k(u_3-u_1) \tag{1}$$

同理，质点 2 和 3 的运动方程为

$$m\frac{d^2u_2}{dt^2}=k(u_3-u_2)+k(u_1-u_2) \tag{2}$$

$$m\frac{d^2u_3}{dt^2}=k(u_1-u_3)+k(u_2-u_3) \tag{3}$$

(1)、(2)、(3)式表明，三个质点的运动是相互制约的，这是一个联立方程．

2. 题设此振动系统有简谐式的振荡解，为

$$u_n=a_n\cos\omega t,\qquad n=1,2,3 \tag{4}$$

即

$$u_1=a_1\cos\omega t$$

$$u_2=a_2\cos\omega t$$

$$u_3=a_3\cos\omega t$$

把它们代人(1)、(2)、(3)式，并令

$$\omega_0^2=\frac{k}{m}$$

经整理后，得

$$\begin{cases}a_1(2\omega_0^2-\omega^2)-a_2\omega_0^2-a_3\omega_0^2=0\\-a_1\omega_0^2+a_2(2\omega_0^2-\omega^2)-a_3\omega_0^2=0\\-a_1\omega_0^2-a_2\omega_0^2+a_3(2\omega_0^2-\omega^2)=0\end{cases}$$

a_1,a_2,a_3 不为零的条件是系数行列式为零，即

$$(3\omega_0^2-\omega^2)^2\omega^2=0$$

故

$$\omega^2=3\omega_0^2,3\omega_0^2,0$$

即

$$\omega=\sqrt{3}\omega_0,\sqrt{3}\omega_0,0 \tag{5}$$

上述运算表明，(4)式确是运动方程(1)、(2)、(3)的解．简谐式振荡解的 ω 只能取(5)式的三个值，这是振动系统内禀的性质．

3. 推广为由 N 个同样的质点 m 和 N 个相同的弹簧 k 交替联接构成的振动系统．与第 1 问相同，对于任意的第 n 个质点，可由牛顿第二定律和胡克定律得出其运动方程，为

$$m\frac{d^2u_n}{dt^2}=k(u_{n+1}-u_n)+k(u_{n-1}-u_n),n=1,2,\cdots,N$$

令 $\omega_0^2=\frac{k}{m}$，上式为

$$\frac{d^2u_n}{dt^2}=\omega_0^2(u_{n+1}+u_{n-1}-2u_n),n=1,2,\cdots,N \tag{6}$$

题设上述运动方程的振荡解为

$$u_n(t)=a_s\sin\left(\frac{2ns\pi}{N}+\varphi\right)\cos\omega_s t,s=1,2,\cdots,N;n=1,2,\cdots,N \tag{7}$$

把(7)式代入(6)式，得

$$\begin{aligned}-\omega_s^2\sin\left(\frac{2ns\pi}{N}+\varphi\right)&=\omega_0^2\left[\sin\left(\frac{2(n+1)s\pi}{N}+\varphi\right)+\sin\left(\frac{2(n-1)s\pi}{N}+\varphi\right)-2\sin\left(\frac{2ns\pi}{N}+\varphi\right)\right]\\&=2\omega_0^2\left[\sin\left(\frac{2ns\pi}{N}+\varphi\right)\cos\frac{2s\pi}{N}-\sin\left(\frac{2ns\pi}{N}+\varphi\right)\right]\end{aligned}$$

即

$$\omega_s^2=2\omega_0^2\left(1-\cos\frac{2s\pi}{N}\right)=\left(2\omega_0\sin\frac{s\pi}{N}\right)^2$$

或

$$\omega_s=2\omega_0\sin\frac{s\pi}{N},s=1,2,\cdots,N \tag{8}$$

上述运算表明，振荡解(7)式确是运动方程(6)式的解．(7)式表明，任意第 n 个质点以 ω_s 为角频率作简谐振动．(8)式指出，ω_s 可取 N 个值，相应的 $s=1,2,\cdots,N$，即振动系统共有 N 种振动模式，对于每一种振动模式，各质点均以相同的角频率 ω_s 振动．上述运算与 a_s 和 φ 无关，a_s 和 φ 是与 n 无关的常量．

具体地说，当 s 取 $1,2,3,\cdots,\frac{N}{2},\cdots,N-1,N$ 时，$\sin\frac{s\pi}{N}$ 取 $\sin\frac{\pi}{N},\sin\frac{2\pi}{N},\sin\frac{3\pi}{N},\cdots,\sin\frac{\frac{N}{2}\pi}{N}=\sin\frac{\pi}{2}=1,\cdots,\sin\frac{(N-1)\pi}{N},\sin\frac{N\pi}{N}=\sin\pi=0$. 相应的 ω_s 取 $2\omega_0\sin\frac{\pi}{N},2\omega_0\sin\frac{2\pi}{N},2\omega_0\sin\frac{3\pi}{N},\cdots,2\omega_0,\cdots,2\omega_0\sin\frac{(N-1)\pi}{N},0$.

当 $N\to\infty$ 时，ω_s 可取无穷多个值，其值在 0 和 $2\omega_0$ 之间，构成从 0 到 $2\omega_0$ 的连续谱．

4. 对于由 N 个相同质点 m 和 N 个相同弹簧 k 交替联接构成的振动系统的第 s 种模式，振动角频率为 ω_s，由(7)式，第 n 个质点和第 $(n+1)$ 个质点的位移分别为

$$u_n(t)=a_s\sin\left(\frac{2ns\pi}{N}+\varphi\right)\cos\omega_s t$$

和

$$u_{n+1}(t)=a_s\sin\left(\frac{2(n+1)s\pi}{N}+\varphi\right)\cos\omega_s t$$

两者之比为

$$\frac{u_n(t)}{u_{n+1}(t)}=\frac{a_s\sin\left(\frac{2ns\pi}{N}+\varphi\right)\cos\omega_s t}{a_s\sin\left(\frac{2(n+1)s\pi}{N}+\varphi\right)\cos\omega_s t}$$

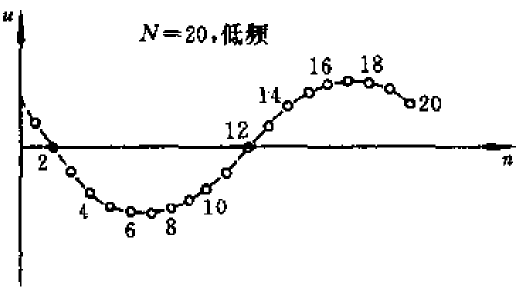
$$=\frac{\sin\left(\frac{2ns\pi}{N}+\varphi\right)}{\sin\left(\frac{2ns\pi}{N}+\varphi\right)\cos\frac{2s\pi}{N}+\cos\left(\frac{2ns\pi}{N}+\varphi\right)\sin\frac{2s\pi}{N}} \tag{9}$$

(a)低频解．

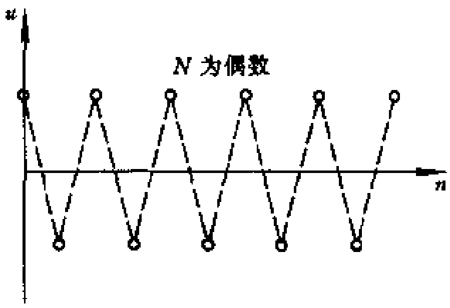
当 N 很大，$\frac{S}{N}\approx0$ 时，$\omega_s=2\omega_0\sin\frac{\pi}{N}\approx0$，为低频解．这样，$\cos\frac{2s\pi}{N}\approx1$，$\sin\frac{2s\pi}{N}\approx0$，代入(9)式，得

$$\frac{u_n(t)}{u_{n+1}(t)}\approx\frac{\sin\left(\frac{2ns\pi}{N}+\varphi\right)}{\sin\left(\frac{2ns\pi}{N}+\varphi\right)}=1$$

上式表明，在 N 很大和低频解的情况，相邻两质点在同一时刻的位移大致相同．但由(7)式，第 n 个质点位移的振幅中有 $\sin\left(\frac{2ns\pi}{N}+\varphi\right)$ 因子，对于 n 相差较大的两个质点，此因子有较大差别．因此，在同一时刻 t，各质点的位移与该质点在链条编号之间的关系如力图 7-28-2 所示，不同质点的位移要受到 $\sin\left(\frac{2ns\pi}{N}+\varphi\right)$ 因子的调制．



力图 7-28-2



力图 7-28-3

(b)最大频率解 $\omega_s=\omega_{max}$

当 N 很大且 N 为偶数时，$s=\frac{N}{2}$ 为整数，最大频率解为

$$\omega_s=\omega_{max}=2\omega_0=2\sqrt{\frac{k}{m}}$$

此时，(9)式中的 $\cos\frac{2s\pi}{N}=\cos\pi=-1$，$\sin\frac{2s\pi}{N}=\sin\pi=0$，故

$$\frac{u_n(t)}{u_{n+1}(t)}=-1$$

由(7)式，当 N 为偶数时，各质点的振幅均为

$$a_s\sin\left(\frac{2ns\pi}{N}+\varphi\right)=a_s\sin(n\pi+\varphi)=a_s\sin\varphi$$

总之，当 N 为偶数，$\omega_s=\omega_{max}=2\omega_0$ 时，各质点振幅相同，同一时刻相邻质点的位移大小相同而反向．在同一时刻各质点的位移与该质点在链上编号之间的关系如力图 7－28－3 所示．

当 N 很大且 N 为奇数时，$s=\dfrac{N+1}{2}$ 相应的最大频率解为

$$\omega_s=\omega_{max}=2\omega_0\sin\frac{s\pi}{N}$$

$$=2\omega_0\sin\left(\frac{N+1}{N}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\approx2\omega_0$$

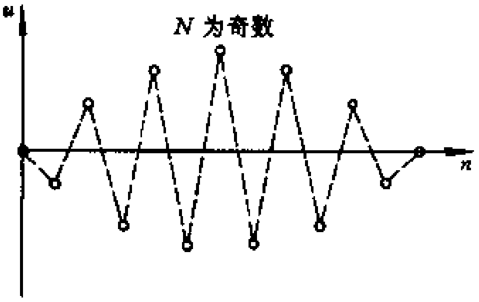
此时，(9)式中的 $\cos\dfrac{2s\pi}{N}=\cos\left(\dfrac{N+1}{N}\pi\right)\approx-1,\sin\dfrac{2s\pi}{N}=\sin\left(\dfrac{N+1}{N}\pi\right)=0$，故

$$\frac{u_n(t)}{u_{n+1}(t)}=-1$$

即同一时刻相邻质点位移大小几乎相等而反向．由(7)式，当 N 为奇数时，各质点的振幅为

$$a_s\sin\left(\frac{2ns\pi}{N}+\varphi\right)=a_s\sin\left(\frac{N+1}{N}n\pi+\varphi\right)$$

因编号 n 的不同，各质点振幅仍稍有差别，所以在同一时刻各质点的位移与该质点在链条上编号之间的关系仍受到 $\sin\left(\dfrac{2ns\pi}{N}+\varphi\right)$ 因子的调制，如力图 7－28－4 所示．



力图 7－28－4



力图 7－28－5

5. 如力图 7－28－5，当质点之一用 m' 代替时（$m'\ll m$），由于 m' 两侧的 m 很大，可近似看作 m 相对静止，即 m' 两端固定．于是在两个弹簧 k 之间的 m' 的运动方程为

$$\frac{d^2u_n}{dt^2}=-\frac{2k}{m'}u_n$$

m' 作简谐振动，角频率为

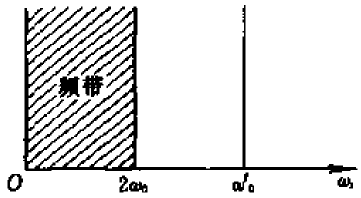
$$\omega_0'=\sqrt{\frac{2k}{m'}}$$

因 $m'\ll m$，故

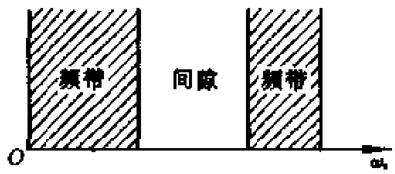
$$\omega_0'\gg\omega_{max}=2\omega_0=2\sqrt{\frac{k}{m}}$$

ω_0' 也是振动系统的一种振动模式．因此，系统的频谱除原有的 0 到 $2\omega_0$ 的连续谱外，还有 ω_0'，如力图 7－28－6 所示．至于实际上以什么频率振动，由初始条件决定．以 ω_0' 振动时，不仅 m'，各 m 也以 ω_0' 振动，只是 m' 的振幅要大于 m 的振幅．当各 m 以某个低频（在 0 与 $2\omega_0$ 之

间)振动时,m'也随之振动.



力图 7-28-6



力图 7-28-7

当大质量 m 和小质量 m' 交替构成双原子链时,若近似看作 m 都不动,则 m' 以 ω'_0 振动.实际上,通过弹簧的作用各 m 也会以相同的 ω'_0 作微小振动,并传递给其他小质量 m'.由于各小质量 m' 通过大质量 m 使彼此之间存在着耦合作用,可以形成多种振动模式,因此高频振动模式将不只是 ω'_0 一种,而是在 ω'_0 附近展宽为高频的频带.另一方面,各大质量 m 也通过小质量 m' 使彼此之间存在着耦合作用,因而振动系统在低频部分仍存在展宽的频带.这样,对于 m 和 m' 交替构成的双原子链,就存在一个低频频带和一个高频频带,其间有一段间隙,如力图 7-28-7 所示.

显然,上述定性解释是非常粗疏的.作为补充,详细讨论双原子链的频谱如下.

对于由 m 和 m' 交替构成的双原子链,设质点总数为 N 个,则 m 和 m' 各有 $\frac{N}{2}$ 个.将它们依次编号,假定各 m 位于偶数编号位置,各 m' 位于奇数编号位置,则各 m 和各 m' 的运动方程为

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2 u_n}{\mathrm{d}t^2} = -k(2u_n - u_{n-1} - u_{n+1}), (n \text{ 为偶数}) \\ m'\dfrac{\mathrm{d}^2 u_n}{\mathrm{d}t^2} = -k(2u_n - u_{n-1} - u_{n+1}), (n \text{ 为奇数}) \end{cases}$$

令

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega'_0 = \sqrt{\frac{k}{m'}}$$

上述方程改写为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 u_n}{\mathrm{d}t^2} = -\omega_0^2(2u_n - u_{n-1} - u_{n+1}), (n \text{ 为偶数}) & (10) \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 u_n}{\mathrm{d}t^2} = -\omega'^2_0(2u_n - u_{n-1} - u_{n+1}), (n \text{ 为奇数}) & (11) \end{cases}$$

对比(6)、(7)式,可把由 $\frac{N}{2}$ 个 m 和 $\frac{N}{2}$ 个 m' 共 N 个质点构成的线性振动系统的振荡解写成

$$\begin{cases} u_n(t) = a_s \sin\left(\dfrac{2ns\pi}{N} + \varphi\right)\cos\omega_s t \quad \left(s = 1,2,\cdots,\dfrac{N}{2}, n \text{ 为偶数}\right) & (12) \\ u_n(t) = a'_s \sin\left(\dfrac{2ns\pi}{N} + \varphi\right)\cos\omega_s t \quad \left(s = 1,2,\cdots,\dfrac{N}{2}, n \text{ 为奇数}\right) & (13) \end{cases}$$

把(12)式代入(10)式，把(13)式代入(11)式，整理后得

$$\begin{cases}(\omega_s^2-2\omega_0^2)a_s+2\omega_0^2\left(\cos\frac{2s\pi}{N}\right)a_s=0\\(\omega_s^2-2\omega_0'^2)a_s'+2\omega_0'^2\left(\cos\frac{2s\pi}{N}\right)a_s'=0\end{cases}\tag{14}$$

在上述代数方程组中，振幅 a_s 和 a_s' 不为零的条件是系数行列式为零，即

$$(\omega_s^2-2\omega_0^2)(\omega_s^2-2\omega_0'^2)-4\omega_0^2\omega_0'^2\cos^2\frac{2s\pi}{N}=0$$

即

$$\omega_s^4-2(\omega_0^2+\omega_0'^2)\omega_s^2+4\omega_0^2\omega_0'^2\sin^2\frac{2s\pi}{N}=0$$

令

$$x=\left(\frac{\omega_s}{\omega_0'}\right)^2,\quad \varepsilon=\left(\frac{\omega_0}{\omega_0'}\right)^2=\frac{m'}{m}\ll1$$

把上式改写为

$$x^2-2(1+\varepsilon)x+4\varepsilon\sin^2\frac{2s\pi}{N}=0$$

解出

$$\begin{aligned}x&=(1+\varepsilon)\pm\sqrt{(1+\varepsilon)^2-4\varepsilon\sin^2\frac{2s\pi}{N}}\\&=(1+\varepsilon)\pm(1+\varepsilon)\sqrt{1-\frac{4\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}\sin^2\frac{2s\pi}{N}}\\&\approx(1+\varepsilon)\pm(1+\varepsilon)\left[1-\frac{2\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}\sin^2\frac{2s\pi}{N}\right]\\&=(1+\varepsilon)\pm\left[(1+\varepsilon)-\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}\sin^2\frac{2s\pi}{N}\right]\end{aligned}$$

故 x 的两个解为

$$\begin{cases}x_1=2(1+\varepsilon)-\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}\sin^2\frac{2s\pi}{N}\\x_2=\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}\sin^2\frac{2s\pi}{N}\end{cases}$$

因 $x=\left(\frac{\omega_s}{\omega_0'}\right)^2$，故有

$$\begin{cases}\omega_s=\omega_0'\sqrt{2(1+\varepsilon)-\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}\sin^2\frac{2s\pi}{N}} & (15)\\\omega_s=\omega_0'\sqrt{\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}\sin^2\frac{2s\pi}{N}} & (16)\end{cases}$$

先讨论(15)式的 ω_s，由于 $\varepsilon=\frac{m'}{m}\ll1$，若忽略(15)式中的 ε 项，则

$$\omega_s=\sqrt{2}\omega'_0$$

这就是将大质量 m 都看作不动时，各小质量 m' 均以角频率 $\sqrt{2}\omega'_0$ 振动的高频解．实际上，ε 项正反映了各小质量 m' 通过大质量 m 有耦合作用．不忽略 ε 项，把(15)式改写为

$$\omega_s=\omega'_0\sqrt{2(1+\varepsilon)-\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}\sin^2\frac{2s\pi}{N}}\approx\omega'_0\sqrt{2+2\varepsilon\left(1-\sin^2\frac{2s\pi}{N}\right)}$$

$$=\sqrt{2}\omega'_0\sqrt{1+\varepsilon\cos^2\frac{2s\pi}{N}}\approx\sqrt{2}\omega'_0\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\cos^2\frac{2s\pi}{N}\right)$$

因 $s=1,2,\cdots,\frac{N}{2}$，故有 $\frac{N}{2}$ 个 ω_s．因 N 很大，ε 很小，$\frac{\varepsilon}{2}\cos^2\frac{2s\pi}{N}$ 与 1 相比是小量，所以 $\frac{N}{2}$ 个 ω_s 的取值在 $\sqrt{2}\omega'_0$ 附近构成连续谱，其最小值就是 $\sqrt{2}\omega'_0$．

把(15)式代回(14)式，有

$$\frac{a'_s}{a_s}=\frac{2\omega_0^2-\omega_s^2}{2\omega_0^2\cos\frac{2s\pi}{N}}$$

$$=\frac{2\omega_0^2-2(1+\varepsilon)\omega_0'^2+\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}\omega_0'^2\sin^2\frac{2s\pi}{N}}{2\omega_0^2\cos^2\frac{2s\pi}{N}}\approx\frac{\omega_0^2-\omega_0'^2}{\omega_0^2\cos\frac{2s\pi}{N}}$$

因 $\omega'_0\gg\omega_0$，故 $\frac{a'_s}{a_s}<0$，且 $|a'_s|\gg|a_s|$，这说明，对于高频振荡，相邻两质点 m 与 m' 的相位相反，m' 的振幅 a'_s 远大于 m 的振幅 a_s．

再讨论(16)式的 ω_s．把它写成

$$\omega_s=\omega'_0\sqrt{\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}\sin^2\frac{2s\pi}{N}}\approx\sqrt{2\varepsilon}\omega'_0\sin\frac{2s\pi}{N}$$

$$=\sqrt{2}\frac{\omega_0}{\omega'_0}\omega'_0\sin\frac{2s\pi}{N}=\sqrt{2}\omega_0\sin\frac{2s\pi}{N}$$

这就是低频解．因 $s=1,2,\cdots,\frac{N}{2}$，故有 $\frac{N}{2}$ 个 ω_s．由于 $\sin\frac{2s\pi}{N}$ 在 0 和 1 之间，故 ω_s 的取值在 0 到 $\sqrt{2}\omega_0$ 之间，构成连续谱，其最大值为 $\sqrt{2}\omega_0$．它表明各大质量 m 通过小质量 m' 有耦合作用．

把(16)式代回(14)式，有

$$\frac{a'_s}{a_s}=\frac{2\omega_0^2-\omega_s^2}{2\omega_0^2\cos\frac{2s\pi}{N}}$$

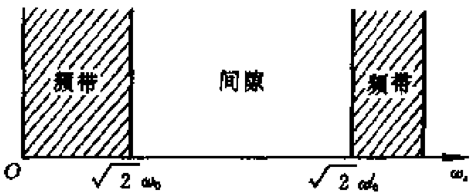
$$=\frac{2\omega_0^2-2\omega_0^2\sin^2\frac{2s\pi}{N}}{2\omega_0^2\cos\frac{2s\pi}{N}}=\cos\frac{2s\pi}{N}$$

上式表明，以低频振荡时，相邻两质量 m 和 m' 的振动相位相同，振幅之比为常数 $\cos\frac{2s\pi}{N}$，对于不同的低频模式，s 取值不同，振幅之比也有所不同．

总之，(15)式的解是以 $\sqrt{2}\omega'_0$ 为最小值的高频频带，(16)式的解是以 $\sqrt{2}\omega_0$ 为最大值的低频频带，由于 $\sqrt{2}\omega_0\ll\sqrt{2}\omega'_0$，在两个频带之间应有一很宽的间隙．双原子链振动系统的频谱图如力图

7－28－8 所示．

【本题是 1986 年第 17 届 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)试题．】

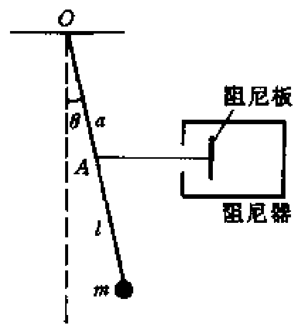


力图 7－28－8

【题 29】 如图，细杆长 l，上端 O 悬挂，下端与质量为 m 的摆球相连，摆球可绕 O 轴无摩擦地摆动．今在细杆的 A 点经连杆接一阻尼器，阻尼力 f 沿水平方向，其大小与阻尼板的速度 v 成正比，即 $f=\gamma v$，γ 为阻力系数．设 $OA=a$，细杆、连杆、阻尼板等的质量均远小于 m，可忽略不计，阻尼较弱．试求小幅阻尼振动的对数减缩，以及一周期内损失能量的百分比．

【分析】 在重力矩和阻尼力矩的作用下，摆球 m 绕悬点 O 转动，由转动定理加上小摆动条件可列出运动方程，它的解描述了摆球的小幅阻尼振动．所谓对数减缩是指经一个周期后振幅之比的对数．求出总能量 E 与时间的关系后，能量损失即可求出．

【解】 对于小幅摆动，$\cos\theta\approx1$，$\sin\theta\approx0$，由转动定理



力图 7－29－1

$$I\ddot{\theta}=-mgl\theta-\gamma a v_A$$

式中

$$I=ml^2,\quad v_A=a\dot{\theta}$$

代入，得

$$ml^2\ddot{\theta}=-mgl\theta-\gamma a^2\dot{\theta}$$

即

$$\ddot{\theta}+\frac{\gamma a^2}{ml^2}\dot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0$$

令

$$2\beta=\frac{\gamma a^2}{ml^2},\quad \omega_0^2=\frac{g}{l}$$

则

$$\ddot{\theta}+2\beta\dot{\theta}+\omega_0^2\theta=0$$

这是阻尼振动的运动方程，它的解为

$$\theta=A\,e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi)\tag{1}$$

式中 β 为阻尼系数，ω 是振动圆频率，为

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$$

(1)式表明，在 t 时刻和 $(t+T)$ 时刻的振幅分别为 $Ae^{-\beta t}$ 和 $Ae^{-\beta(t+T)}$，其中 $T=\frac{2\pi}{\omega}$ 是周期．因此，阻尼振动的对数减缩为

$$\delta=\ln\left[\frac{e^{-\beta t}}{e^{-\beta(t+T)}}\right]=\ln e^{\beta T}=\beta T=\beta\frac{2\pi}{\omega}$$

$$= \frac{2\pi\beta}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\beta}\right)^2 - 1}} = \frac{2\pi\gamma a^2}{\sqrt{4m^2l^3g - \gamma^2a^4}}$$

由(1)式,

$$\dot{\theta} = -A\ e^{-\beta t}[\beta\cos(\omega t + \varphi) + \omega\sin(\omega t + \varphi)] \tag{2}$$

任意时刻 t,振动系统的机械能 E 为

$$E = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + mgl(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2$$

把(1)、(2)式代入,并注意到 $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ 和 $\omega_0^2 = \omega^2 + \beta^2$,得

$$E = \frac{1}{2}ml^2A^2e^{-2\beta t}[\omega^2 + 2\beta^2\cos^2(\omega t + \varphi) + \beta\omega\sin2(\omega t + \varphi)]$$

在 β 很小时可简化为

$$E \approx \frac{1}{2}ml^2A^2\omega^2e^{-2\beta t}$$

一周期 T 内的能量损失为

$$|\Delta E| = \frac{1}{2}ml^2A^2\omega^2[e^{-2\beta t} - e^{-2\beta(t+T)}]$$

$$= \frac{1}{2}ml^2A^2\omega^2e^{-2\beta t}(1 - e^{-2\beta T}) \approx \frac{1}{2}ml^2A^2\omega^2e^{-2\beta T}\cdot 2\beta T$$

故能量损失百分比为

$$\frac{|\Delta E|}{E} = 2\beta T = 2\delta = \frac{4\pi\gamma a^2}{\sqrt{4m^2l^3g - \gamma^2a^4}}$$

【题 30】 质量为 m 的质点在弹性力和阻尼力的作用下沿 x 轴运动．取平衡位置为坐标原点,弹性力为 $-kx$,阻尼力为 $-\gamma\dot{x}$．试问,是否在临界阻尼情况下,质点回到平衡位置一定最快?

【分析】 如所周知,质量为 m 的质点在弹性力 $-kx$ 和阻尼力 $-\gamma\dot{x}$ 的作用下作阻尼运动,其运动方程为

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2x = 0$$

式中 $2\beta = \frac{\gamma}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

当阻尼较小,即 $\omega_0^2 > \beta^2$ 时,为阻尼振动,质点将围绕平衡位置振动,其振幅不断衰减,如上题．

当阻尼较大,即 $\beta = \omega_0$ 或 $\beta > \omega_0$ 时,为临界阻尼或过阻尼,质点将单调地趋向平衡位置,不再往复振动,如本题．

在这三种不同情况下,运动方程的形式相同而解的形式不同．通常,临界阻尼比过阻尼情况使质点更快地到达平衡位置．但在某些特殊情形下,过阻尼比临界阻尼使质点更快地到达平衡位置,这就是本题试图提醒读者注意之处．

【解】 质点的运动方程为

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0$$

令

$$\beta=\frac{\gamma}{2m},\quad \omega_0^2=\frac{k}{m}$$

则上式化为

$$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=0 \tag{1}$$

通解为

$$x=C_1\mathrm{e}^{-(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}+C_2\mathrm{e}^{-(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t} \tag{2}$$

当 $\beta=\omega_0$ 时为临界阻尼，方程(1)式的特征方程有重根，此时的通解为

$$x=\mathrm{e}^{-\beta t}(C_1'+C_2't) \tag{3}$$

式中常量 C_1' 和 C_2' 由初条件决定．

当 $\beta>\omega_0$ 时为过阻尼，通解由(2)式给定．在适当的初条件下可使(2)式中的常数 $C_1=0$，于是有

$$x=C_2\mathrm{e}^{-(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t} \tag{4}$$

比较(3)、(4)两式可知，在此特殊的初条件下，过阻尼比临界阻尼可使质点更快地回到平衡位置．

现在讨论，在 $\beta>\omega_0$ 的过阻尼情况下，使(2)式中的 $C_1=0$ 的特殊初条件是什么．设此初条件为

$$t=0\text{ 时},x=x_0,\dot{x}=\dot{x}_0$$

则由(2)式，得

$$\begin{cases}x_0=C_1+C_2\\ \dot{x}_0=-C_1(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})-C_2(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})\end{cases}$$

由以上两式解出

$$C_1=\frac{\dot{x}_0+(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})x_0}{2\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})}$$

为使

$$C_1=0$$

要求

$$\dot{x}_0=-(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})x_0$$

即

$$\frac{\dot{x}_0}{x_0}=-(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})$$

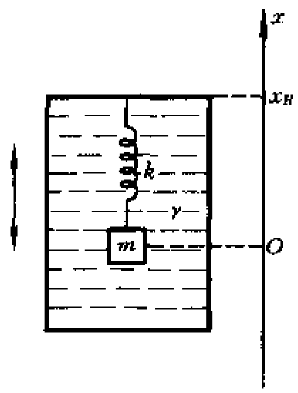
【题 31】 如力图7－31－1，充满液体的容器在竖直方向上下振动，质量为 m 的重物由劲度系数为 k 的弹簧悬挂，浸没在液体之中．设悬点随容器振动的规律为 $x_H=A\cos\omega t$，设液体的阻尼系数为 γ（弱阻尼），并假定液体的浮力恒定．

1. 若 $\omega=\omega_0$，试求稳定后重物的振动表达式，其中 $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ 为弹簧振子的固有圆频率．

2. 若 $\omega\gg\omega_0$，试求稳定后重物的振动表达式．

3. 若 $\omega\gg\omega_0$，且当容器达到最高点时突然停止不动，试求此后重物的振动表达式．

4. 试画出容器突然停止以前和以后的振动曲线．



力图 7－31－1

【分析】 如力图 7－31－1，取 x 轴竖直向上．重物平衡不动时所受重力，弹性力，浮力的合力为零．重物运动到任意位置时，受重力，弹性力，阻尼力和浮力．取重物的平衡位置为坐标原点 O，则重物受弹性力（已扣除与恒定的重力和浮力抵消的那部分）和阻尼力．由于容器（即悬点）也在运动，决定弹性力大小的弹簧的伸长或缩短，是由重物偏离平衡位置及悬点移动两个因素造成的，后者相当于一个周期性的强迫力．阻尼力则与重物相对液体的速度成正比．于是给出重物的运动方程，它应是典型的受迫振动的运动方程．在 $\omega=\omega_0$ 和 $\omega\gg\omega_0$ 这两种情况的稳定解不难求出．

题目指出"容器达到最高点时突然停止不动"，这既给出了初条件，又表明撤去了周期性外力，此后重物应作阻尼振动．把第 2 问和第 3 问的解一并作图，即为第 4 问．

【解】 如力图 7－31－1，在实验室参考系中，取 x 轴竖直向上，取重物 m 的平衡位置为坐标原点 O，设重物的位置和速度为 x 和 $\dot{x}$，容器（即悬点）的位置和速度为 x_H 和 $\dot{x}_H$，则重物 m 的运动方程为（注意，因取平衡位置为原点，重物 m 所受恒定的重力和浮力已扣除，不在方程中出现）

$$m\ddot{x}=-k(x-x_H)-\gamma(\dot{x}-\dot{x}_H)$$

即

$$\ddot{x}+\frac{\gamma}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=\frac{\gamma}{m}\dot{x}_H+\frac{k}{m}x_H$$

令

$$2\beta=\frac{\gamma}{m},\quad \omega_0^2=\frac{k}{m}$$

又因

$$x_H=A\cos\omega t$$

得

$$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=\omega_0^2A\cos\omega t-2\beta\omega A\sin\omega t$$

令

$$\omega_0^2A=h\cos\varphi_1,\quad 2\beta\omega A=h\sin\varphi_1$$

得

$$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=h\cos\varphi_1\cos\omega t-h\sin\varphi_1\sin\omega t=h\cos(\omega t+\varphi_1)$$

这是典型的受迫振动运动方程，式中常量 h 和 φ_1 为

$$\begin{cases}h=\sqrt{\omega_0^4+4\beta^2\omega^2}A\\ \tan\varphi_1=\dfrac{2\beta\omega}{\omega_0^2}\end{cases}\tag{1}$$

运动方程的稳定解为

$$x = B\cos(\omega t + \varphi_1 + \varphi_2)$$

式中

$$B = \frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} = \frac{\sqrt{\omega_0^4 + 4\beta^2\omega^2}A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \tag{2}$$

$$\tan\varphi_2 = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{3}$$

稳定解也可写成

$$x = B\cos(\omega t + \varphi)$$

式中 $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$，$\varphi_1$ 和 φ_2 如(1)式和(3)式．

1. 当 $\omega = \omega_0$ 时，由(2)式，得

$$B = \sqrt{\frac{\omega_0^4 + 2\beta^2\omega_0^2}{4\beta^2\omega_0^2}}A = \left[1 + \left(\frac{\omega_0}{2\beta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}A$$

$$= \left[1 + \frac{\frac{k}{m}}{\left(\frac{\gamma}{m}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}}A = \left(1 + \frac{km}{\gamma^2}\right)^{\frac{1}{2}}A$$

由(1)、(3)式，得

$$\varphi_1 = \arctan\frac{2\beta}{\omega_0}, \quad \varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$$

故 $\omega = \omega_0$ 时的稳定解为

$$x = B\cos(\omega t + \varphi_1 + \varphi_2) = \left(1 + \frac{km}{\gamma^2}\right)^{\frac{1}{2}}A\cos\left(\omega_0 t + \arctan\frac{2\beta}{\omega_0} - \frac{\pi}{2}\right)$$

2. 当 $\omega \gg \omega_0$ 时，由(1)、(2)、(3)式，得

$$B \approx \frac{\sqrt{\omega_0^4 + 4\beta^2\omega^2}}{\omega^2\sqrt{1 + \frac{4\beta^2}{\omega^2}}}A \approx \frac{2\beta\omega}{\omega^2}\sqrt{1 + \frac{\omega_0^4}{4\beta\omega}}A$$

$$\approx \frac{2\beta}{\omega}A = \frac{\gamma}{m\omega}A$$

$$\varphi_1 = \arctan\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2} \approx \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_2 = \arctan\frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \approx -\pi$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$$

故 $\omega \gg \omega_0$ 时的稳定解为

$$x = \frac{\gamma}{m\omega}A\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \tag{4}$$

可见重物 m 的振动相位比悬点落后 $\frac{\pi}{2}$．

3. 设 $t=0$ 时刻容器突然停止，悬点位于最高点．设悬点平衡位置的坐标为 a，则 $t=0$ 时悬点的坐标为

$$x_H=a+A$$

由(4)式，$t=0$ 时，重物 m 的位置和速度为

$$\begin{cases}x_0=0\\ \dot{x}_0=\dfrac{\gamma A}{m}\end{cases}\tag{5}$$

此后，因悬点停止不动，重物在任意位置的受阻尼力 $-\gamma\dot{x}$ 及弹性力 $-k(x-A)$（由于悬点达到最高时停止，重物 m 的平衡位置升高了 A），作阻尼振动，其运动方程为

$$m\ddot{x}=-\gamma\dot{x}-k(x-A)$$

即

$$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2(x-A)=0$$

解出

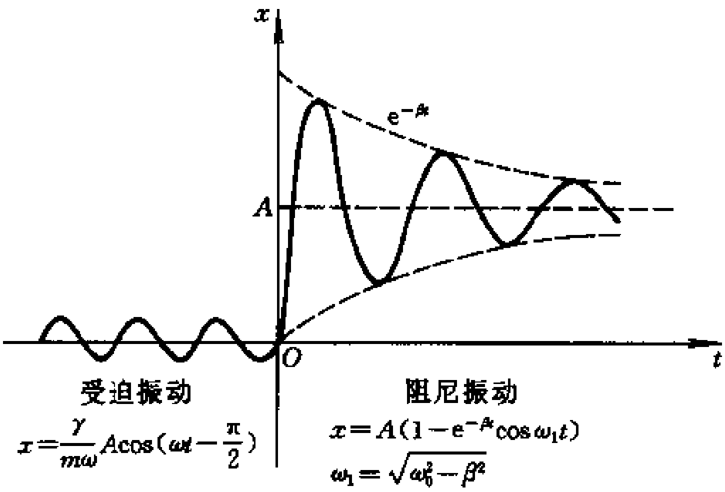
$$x-A=A_1\mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega_1 t+\varphi)$$

式中 ω_1 是阻尼振动的圆频率，为

$$\omega_1=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$$

式中的常量 A_1 和 φ 由初条件（即由(5)式）确定，即

$$\begin{cases}x_0=A_1\cos\varphi_1+A=0\\ \dot{x}_0=A_1(-\omega\sin\varphi-\beta\cos\varphi)=\dfrac{\gamma A}{m}\end{cases}$$



力图 7-31-2

故

$$A_1=\sqrt{1+\left(\frac{\beta}{\omega}\right)^2}A\approx A$$

$$\tan\varphi=\frac{\beta}{\omega_1}=\frac{\beta}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}\approx 0$$

即 $\varphi=0,\pi$,因 $\cos\varphi=-\dfrac{A}{A_1}<0$,故

$$\varphi=\pi$$

因此,悬点在最高点停止不动后,重物阻尼振动的表达式为

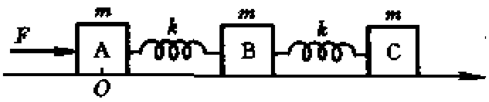
$$x-A=A\ \mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega_1 t+\pi)=-A\ \mathrm{e}^{-\beta t}\cos\omega_1 t$$

即

$$x=A(1-\mathrm{e}^{-\beta t}\cos\omega_1 t)$$

4. 容器突然停止以前和以后,重物 m 的振动曲线可由 2.3. 的解画出,如力图 7-31-2 所示.

【题 32】 如图,质量均为 m 的三个滑块放置在光滑水平桌面上,彼此以原长为 x_0、劲度系数为 k 的二个相同弹簧连接起来.开始时三滑块静止,滑块 A 位于原点 O,两弹簧均为原长.对滑块 A 施以周期性外力 F,已知 $F=F_0\cos\omega t$,在水平方向并沿三滑块连线.试求振动系统的特征频率,并写出滑块 C 的运动方程.



力图 7-32-1

【分析】 根据牛顿第二定律分别写出三滑块的动力学方程.引进简正坐标后,可得出三个独立的受迫振动方程,于是特征频率可得.解方程,并回到原来的坐标,可得滑块 C 的运动方程.

【解】 设在任意时刻 t,A、B、C 的坐标分别为 x_A、x_B、x_C,由牛顿第二定律,三滑块遵守的动力学方程为

$$\text{滑块 A}\quad m\ddot{x}_A=F_0\cos\omega t+k(x_B-x_A-x_0)\tag{1}$$

$$\text{滑块 B}\quad m\ddot{x}_B=k(x_C-x_B-x_0)-k(x_B-x_A-x_0)\tag{2}$$

$$\text{滑块 C}\quad m\ddot{x}_C=-k(x_C-x_B-x_0)\tag{3}$$

三式相加,得

$$m(\ddot{x}_A+\ddot{x}_B+\ddot{x}_C)=F_0\cos\omega t\tag{4}$$

(1)式减(3)式,得

$$m(\ddot{x}_A-\ddot{x}_C)+k(x_A-x_C)=F_0\cos\omega t-2kx_0\tag{5}$$

(1)式减 2 乘(2)式加(3)式,得

$$m(\ddot{x}_A-2\ddot{x}_B+\ddot{x}_C)+3k(x_A-2x_B+x_C)=F_0\cos\omega t\tag{6}$$

引进如下简正坐标

$$\begin{cases}q_1=x_A+x_B+x_C\\q_2=x_A-x_C\\q_3=x_A-2x_B+x_C\end{cases}\tag{7}$$

方程(4)、(5)、(6)式变为

$$m\ddot{q}_1=F_0\cos\omega t$$
$$m\ddot{q}_2+kq_2=F_0\cos\omega t-2kx_0$$
$$m\ddot{q}_3+3kq_3=F_0\cos\omega t$$

或

$$\begin{cases}\ddot{q}_1=\dfrac{F_0}{m}\cos\omega t\\ \ddot{q}_2+\dfrac{k}{m}q_2=\dfrac{F_0}{m}\cos\omega t-2\dfrac{k}{m}x_0\\ \ddot{q}_3+3\dfrac{k}{m}q_3=\dfrac{F_0}{m}\cos\omega t\end{cases}\tag{8}$$

从上述可知,系统的振动频率除周期性力的圆频率 ω 外,还有下述系统的特征圆频率

$$\omega_2=\sqrt{\frac{k}{m}},\ \omega_3=\sqrt{\frac{3k}{m}}$$

方程(8)式可改写为

$$\ddot{q}_1=\frac{F_0}{m}\cos\omega t\tag{9}$$

$$\ddot{q}_2+\omega_2^2q_2=\frac{F_0}{m}\cos\omega t-2\omega_2^2x_0\tag{10}$$

$$\ddot{q}_3+\omega_3^2q_3=\frac{F_0}{m}\cos\omega t\tag{11}$$

(i)解方程(9)式,(9)式经两次积分后,得

$$q_1=-\frac{F_0}{m\omega^2}\cos\omega t+C_1t+C_2$$

C_1 和 C_2 为积分常量,由初条件决定．初条件为

$$t=0\text{ 时},x_A=0,x_B=x_C,x_C=2x_0$$

$$\dot{x}_A=\dot{x}_B=\dot{x}_C=0$$

利用定义(7)式,关于简正坐标的初条件为

$$t=0\text{ 时},\begin{cases}q_1=3x_0,q_2=-2x_0,q_3=0\\ \dot{q}_1=\dot{q}_2=\dot{q}_3=0\end{cases}\tag{12}$$

由上述初条件,得出

$$C_1=0$$

$$C_2=3x_0+\frac{F_0}{m\omega^2}$$

于是,得

$$q_1=\frac{F_0}{m\omega^2}(1-\cos\omega t)+3x_0\tag{13}$$

(ii)解方程(10)式,(10)式可改写为

$$\ddot{q}_2+\omega_2^2(q_2+2x_0)=\frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

引入

$$Q=q_2+2x_0$$

上式简化为

$$\ddot{Q}+\omega_2^2 Q=\frac{F_0}{m}\cos\omega t \tag{14}$$

这是无阻尼的受迫振动方程，设其特解为

$$Q_1=A\cos\omega t$$

代入方程(14)式，比较系数，得

$$A=\frac{F_0}{m(\omega_2^2-\omega^2)}$$

于是特解为

$$Q_1=\frac{F_0}{m(\omega_2^2-\omega^2)}\cos\omega t$$

方程(14)式对应的齐次方程的通解为

$$Q_2=C_1\cos\omega_2 t+C_2\sin\omega_2 t$$

故方程(14)式的通解为

$$Q=\frac{F_0}{m(\omega_2^2-\omega^2)}\cos\omega t+C_1\cos\omega_2 t+C_2\sin\omega_2 t$$

于是得

$$q_2=Q-2x_0=\frac{F_0}{m(\omega_2^2-\omega^2)}\cos\omega t+C_1\cos\omega_2 t+C_2\sin\omega_2 t-2x_0$$

积分常量 C_1 和 C_2 由初条件(12)式确定，为

$$C_1=-\frac{F_0}{m(\omega_2^2-\omega^2)},\quad C_2=\frac{2x_0}{\omega_2}$$

最后得

$$q_2=\frac{F_0}{m(\omega_2^2-\omega^2)}(\cos\omega t-\cos\omega_2 t)+\frac{2x_0}{\omega_2}\sin\omega_2 t-2x_0 \tag{15}$$

(*iii*)解方程(11)式，同理，通解为

$$q_3=\frac{F_0}{m(\omega_3^2-\omega^2)}\cos\omega t+C_1'\cos\omega_3 t+C_2'\sin\omega_3 t$$

由初条件(12)式，得

$$C_1'=-\frac{F_0}{m(\omega_3^2-\omega^2)},\qquad C_2'=0$$

故

$$q_3=\frac{F_0}{m(\omega_3^2-\omega^2)}(\cos\omega t-\cos\omega_3 t) \tag{16}$$

由(7)式，可解得

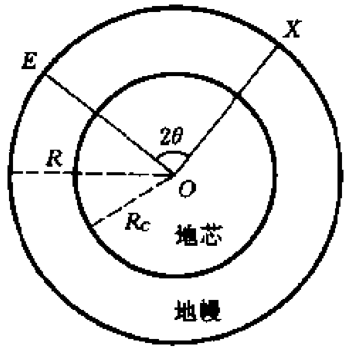
$$x_C=\frac{q_1}{3}-\frac{q_2}{2}+\frac{q_3}{6}$$

把(13)、(15)、(16)式代入，最后得滑块 C 的运动方程为

$$x_C=2x_0+\frac{F_0}{3m\omega^2}(1-\cos\omega t)-\frac{F_0}{2m(\omega_2^2-\omega^2)}(\cos\omega t-\cos\omega_2 t)-$$
$$\frac{x_0}{\omega_2}\sin\omega_2 t+\frac{F_0}{6m(\omega_3^2-\omega^2)}(\cos\omega t-\cos\omega_3 t)$$

式中 ω_2 和 ω_3 是系统的特征频率．

【题 33】 本世纪初曾提出一种地球模型，认为它是一个半径为 R 的球体，从地球表面向内到半径 R_C 处为均匀各向同性的固态地幔，R_C 以内的地芯为液态，如力图 7－33－1 所示．



力图 7－33－1

在地幔内，地震纵波 p 和横波 s 的速度分别为常量 v_p 和 v_s；在地芯内，纵波的速度为常量 v_{Cp}，且 $v_{Cp}<v_p$，而横波不传播．

在地球表面 E 处发生了一次地震，产生的地震波在地球内传播，且被地球表面 X 处设置有地震仪的观察者观察到．E 点和 X 点的角间隔 $2\theta=\angle EOX$，其中 O 为地球中心．

1．试证明，对于 $\theta\leqslant\arccos\frac{R_C}{R}$ 的那些 X 点，从 E 点发出的地震波沿直线穿过地幔传播到 X 点的时间为 $t=\frac{2R\sin\theta}{v}$，对于 p 波，$v=v_p$，对于 s 波 $v=v_s$．

2．对于 $\theta>\arccos\frac{R_C}{R}$ 的那些 X 点，地震 p 波在地幔和地芯的界面上经过两次折射后到达 X 点．画出这种地震 p 波的传播路径，并求出对于 p 波，θ 和 i 之间的关系式，这里 i 是 p 波在地幔和地芯界面上的入射角．

3．利用下列数据和第 2 问中所得结果，画出 $\theta\sim i$ 图形．$R=6\,370$ km，$R_C=3\,470$ km，$v_p=10.85$ km/s，$v_s=6.31$ km/s，$v_{Cp}=9.02$ km/s．试评论，对于地球表面不同地点的观察者，从上述 $\theta\sim i$ 图形可得出什么物理结论．

4．在一次地震后，某观察者测出 s 波相对 p 波的时间延迟为 2 分 11 秒，试用第 3 问中给出的数据确定地震地点与观察者之间的角间隔．

5．在上述测量中，观察者注意到某次 p 波和 s 波到达后，地震仪上还有两个相间 6 分 37 秒的记录．试解释这一结果，并验证这与第 4 问所得的角间隔确实相符．

【分析】 初阅此题，千万不要被地震波、地幔、地芯等生疏的名词迷惑．细审题意可知，地震波无非是某种波，不过有纵、横之分，地幔与地芯无非是两种媒质，不过地幔可传播纵、横波，地芯内只能传播纵波而已．

本题讨论的是地震波的传播．从震源 E 发出的地震波到达在 X 点的观察者有两种方式．一是由 E 点经地幔沿直线传播到 X 点以及在地幔内传播经地芯表面反射后到达 X 点，这种方式只在地幔内传播，相应的 θ 较小．另一是由 E 点经地幔、地芯、地幔作两次折射后到达 X 点，相应的 θ 较大．

在地幔内经直线传播可到达的最远点由直线 EX 与地芯球相切确定，相应的 $\theta_{max}=\arccos\frac{R_C}{R}$，此即第 1 问．

经两次折射才能到达的那些 X 点相应的 θ 均大于上述 θ_{max}(直线传播)，由折射定律和几何关系，可得出 θ 随 i 变化的函数 $\theta(i)$，i 是 p 波在地幔与地芯界面上的入射角(因地芯内不传播横波，只有纵波 p 可到达)，此即第 2 问．把第 3 问的数据代入可画出 $\theta(i)$ 曲线，发现它有一极小值 θ_{min}(两次折射)．由于

$$\theta_{min}(\text{两次折射}) > \theta_{max}(\text{直线传播})$$

因此，在其间的观察者将无法接收到地震波．这就是第 3 问要求作出的物理评论．上述结果也会从 $t(\theta)$ 曲线反映出来，t 是地震波从 E 点到 X 点的传播时间．

第 4 问的时间延迟 Δt 是指，某次地震的纵波和横波在地幔内沿直线传播到同一 X 点的时间差．第 5 问的另一个时间延迟 $\Delta t'$ 是同一次地震的纵、横波在地幔内传播经地芯表面反射后到达 X 点的时间差．Δt 和 $\Delta t'$ 都是由于纵波和横波的传播速度不同引起的，Δt 和 $\Delta t'$ 都是对于同一观察地点而言的，前者传播距离短，后者长，故 $\Delta t'$ 应大于 Δt．

【解】 1. 如力图 7－33－2，地震波从震源 E 经地幔沿直线到达 X 点，传播时间

$$t = \frac{EX}{v} = \frac{2R\sin\theta}{v}$$

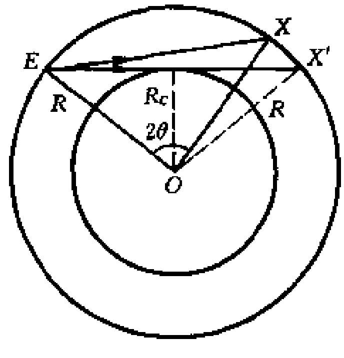
对 p 波取 $v = v_p$，对 s 波取 $v = v_s$．直线传播的最远点是力图 7－33－2 中的 X' 点，EX' 与地芯球相切，相应的 θ_{max}(直线传播)为力图 7－33－2 中 $\angle EOX'$ 之半，为

$$\theta_{max}(\text{直线传播}) = \arccos\frac{R_C}{R}$$

仅当

$$\theta \leqslant \theta_{max}(\text{直线传播}) = \arccos\frac{R_C}{R} = 56.99°$$

时，才有 $t = \dfrac{2R\sin\theta}{v}$．



力图 7－33－2

2. 地震波经地幔－地芯－地幔两次折射后到达 X 点．如力图 7－33－3 所示，有

$$\theta = \angle EOC = \angle EOA + \angle AOC = (i - \alpha) + (90° - \gamma)$$

由折射定律

$$\frac{\sin i}{\sin\gamma} = \frac{v_p}{v_{Cp}}$$

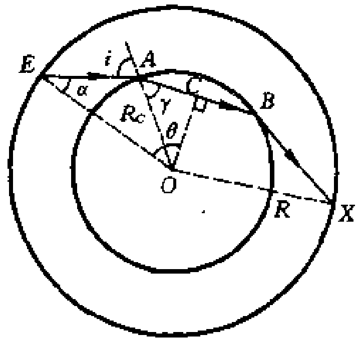
在 $\triangle EOA$ 中，由正弦定理

$$\frac{R_C}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin i}$$

以上三式联立，解出

$$\theta = 90° - \arcsin\left(\frac{v_{Cp}}{v_p}\sin i\right) + i - \arcsin\left(\frac{R_C}{R}\sin i\right)$$

此即 $\theta(i)$ 的函数式．



力图 7－33－3

3. 利用数据

$$\frac{R_C}{R}=\frac{3\,470}{6\,370}=0.5447$$

$$\frac{v_{Cp}}{v_p}=\frac{9.02}{10.85}=0.8313$$

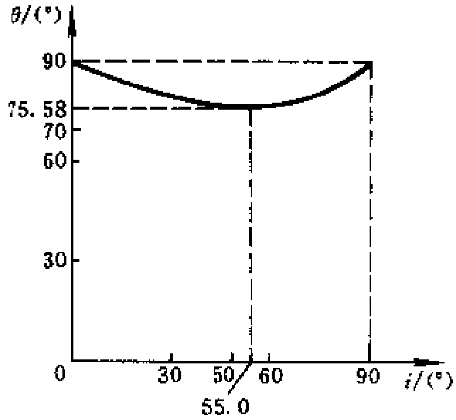
将 i 取 0°到 90°的各值，代入第 2 问中的 $\theta(i)$，可得出相应的 θ 值，从而作出 $\theta(i)$ 曲线如力图 7－33－4．其中当 $i=0°$时，$\theta=90°$；$i=90°$时，$\theta\doteq90.8°$．

如力图 7－33－4，$\theta(i)$曲线在 $i=55.0°$处有一极小值 θ_{min}(两次折射)＝75.58°，计算如下．

$$\frac{d\theta}{di}=\frac{d}{di}\left[90°-\arcsin\left(\frac{v_{Cp}}{v_p}\sin i\right)+i-\arcsin\left(\frac{R_C}{R}\sin i\right)\right]$$

式中

$$\frac{d}{di}(90°)=0,\frac{di}{di}=1$$



力图 7－33－4

设

$$\arcsin\left(\frac{v_{Cp}}{v_p}\sin i\right)=y$$

则

$$\sin y=\frac{v_{Cp}}{v_p}\sin i$$

$$\frac{d}{di}\sin y=\cos y\cdot\frac{dy}{di}=\frac{v_{Cp}}{v_p}\cos i$$

故

$$\frac{dy}{di}=\frac{d}{di}\left[\arcsin\left(\frac{v_{Cp}}{v_p}\sin i\right)\right]=\frac{v_{Cp}}{v_p}\ \frac{\cos i}{\cos y}=\frac{v_{Cp}}{v_p}\cdot\frac{\cos i}{\sqrt{1-\left(\frac{v_{Cp}}{v_p}\sin i\right)^2}}$$

同理

$$\frac{d}{di}\left[\arcsin\left(\frac{R_C}{R}\sin i\right)\right]=\frac{R_C}{R}\cdot\frac{\cos i}{\sqrt{1-\left(\frac{R_C}{R}\sin i\right)^2}}$$

代入$\frac{d\theta}{di}$公式，极小值满足$\frac{d\theta}{di}=0$，故

$$\frac{d\theta}{di}=1-\frac{\frac{v_{Cp}}{v_p}\cos i}{\sqrt{1-\left(\frac{v_{Cp}}{v_p}\sin i\right)^2}}-\frac{\frac{R_C}{R}\cos i}{\sqrt{1-\left(\frac{R_C}{R}\sin i\right)^2}}=0$$

由此解出

$$i=55.0°$$

再代入 $\theta(i)$公式，得出

$$\theta_{min}(\text{两次折射})=75.58°$$

由 θ_{min}(两次折射)＝75.58°及 θ_{max}(直线传播)＝56.99°可知，相应于 $113.98°<2\theta<151.16°$

的观察者接收不到地震波．这是因为地震波经两次折射后，其偏折不会小于151.16°．

由 $t=\dfrac{2R\sin\theta}{v}$，取 $v=v_p$ 及 $v=v_s$，可作 $t(\theta)$ 曲线如力图7－33－5所示．曲线在 $56.99°<\theta<75.58°$ 之间中断，因为相应于这些 θ 的观察者接收不到信号，从而相应的传播时间 t 就失去了意义．

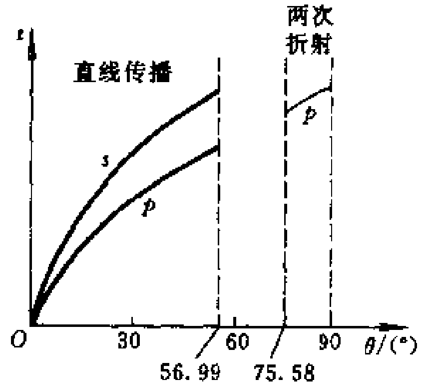
因 s 波不能在地芯内传播，所以 $\theta>\theta_{max}$（直线传播）无 s 波．

4. 考虑地震波由震源 E 经地幔沿直线 EX 传播到 X 点，由于 p 波和 s 波的传播速度不同，造成时间延迟 Δt．由 $t=\dfrac{2R\sin\theta}{v}$，取 v 为 v_p 和 v_s，得出 t_p 和 t_s，则

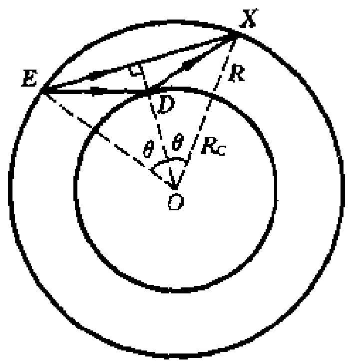
$$\Delta t=t_s-t_p=2R\sin\theta\left(\frac{1}{v_s}-\frac{1}{v_p}\right)$$

代入数据（其中 $\Delta t=2$ 分 11 秒），得 $\theta=8.92°$，故震源 E 与该观察者的角间隔为

$$\angle EOX=2\theta=17.84°$$



力图 7－33－5



力图 7－33－6

5. 另一个时间延迟 $\Delta t'$（注意，$\Delta t'=6$ 分 37 秒 $>\Delta t=2$ 分 11 秒）是同一次地震的纵波和横波在地幔内传播经地芯界面反射后到达 X 点的时间差．即如力图7－33－6，纵波和横波从 E 点发出经 D 点反射后到达 X 点．于是，有

$$\Delta t'=(ED+DX)\left(\frac{1}{v_s}-\frac{1}{v_p}\right)=2ED\left(\frac{1}{v_s}-\frac{1}{v_p}\right)$$

在△EXD 中，

$$\begin{aligned}(ED)^2&=(R\sin\theta)^2+(R\cos\theta-R_C)^2\\&=R^2+R_C^2-2RR_C\cos\theta\end{aligned}$$

由以上两式，得

$$\Delta t'=2\sqrt{R^2+R_C^2-2RR_C\cos\theta}\left(\frac{1}{v_s}-\frac{1}{v_p}\right)$$

在第4问中已经得出

$$\left(\frac{1}{v_s}-\frac{1}{v_p}\right)=\frac{\Delta t}{2R\sin\theta}$$

故

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{R\sin\theta}\sqrt{R^2 + R_C^2 - 2RR_C\cos\theta}$$

将有关数据代入，得出

$$\Delta t' = 396.7\ \text{s}$$

与题目给出的 $\Delta t' = 6$ 分 37 秒 $= 397$ s 相符．这表明上面对延迟时间 $\Delta t'$ 所作的物理解释是正确的．

【本题是 1986 年第 17 届 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)试题．】

【题 34】 到晚上，地面辐射降温使空气层产生温度梯度，温度随高度递增，这导致声速 v 随高度 y 变化．假定变化规律为

$$v = v_0(1 + \alpha^2 y^2)$$

式中 v_0 是地面($y = 0$)处的声速，α 为比例系数．今远方地面上某声源发出一束声波，发射方向与竖直方向成 θ_0 角．假定在声波传播范围内 $\alpha y \ll 1$．试导出该束声波在空间传播所循的轨迹，并求地面上听得最清晰的地点与声源的距离．

【分析】 空气温度的不均匀导致密度的不均匀，而声速与空气密度有关．空气密度随高度减小，使声速随高度增大．将空气分割成许多与地面平行的薄层，每一薄层内的空气密度以及声速可以看作是均匀的．当声波从一薄层进入另一薄层时，将在两薄层的界面上产生折射，偏折方向遵从波的折射定律．根据折射定律和几何关系可以求出声波的传播轨迹．

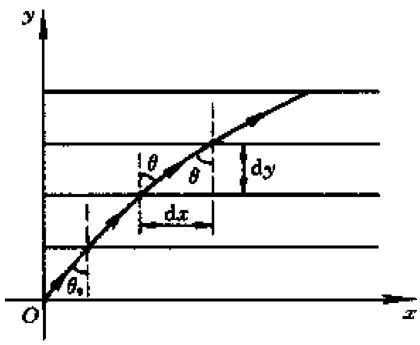
声波波速与地面的交点就是地面上听得最清晰的地点．

【解】 如力图 7-34-1，设置直角坐标，声源在坐标原点 O，x 轴平行于地面，y 轴竖直向上．

如力图 7-34-1，声波束相继地在各薄层的界面上折射，由折射定律，得

$$\frac{\sin\theta_0}{v_0} = \frac{\sin\theta}{v} \tag{1}$$

式中 v_0 是地面处的声速，θ_0 是从地面发射声波的方向，v 是在任一薄层中的声速，θ 是声波束在该层中的折射角．



力图 7-34-1

考虑任一薄层，声波在其中传播的距离为

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

因

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sin\theta}$$

故

$$\frac{1}{\sin\theta} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$

即

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2\theta} - 1$$

把由(1)式确定的 $\sin\theta$ 代入，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\pm\sqrt{\frac{v_0^2}{v^2\sin^2\theta_0}-1} \tag{2}$$

已知

$$v=v_0(1+\alpha^2y^2),\quad \alpha y\ll 1$$

故

$$\frac{1}{v^2}=\frac{1}{v_0^2}(1+\alpha^2y^2)^{-2}\approx\frac{1}{v_0^2}(1-2\alpha^2y^2)$$

代入(2)式,得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\pm\frac{1}{\sin\theta_0}\sqrt{\cos^2\theta_0-2\alpha^2y^2}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\cos^2\theta_0-2\alpha^2y^2}}=\pm\frac{\mathrm{d}x}{\sin\theta_0}$$

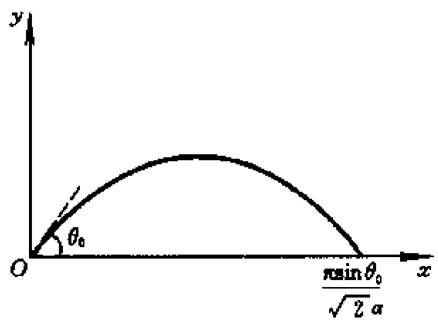
积分,得

$$\frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\mathrm{arc\ sin}\left(\frac{\sqrt{2}\alpha}{\cos\theta_0}\ y\right)=\pm\frac{x}{\sin\theta_0}+C$$

利用初条件 $x=0,y=0$,得出积分常量 $C=0$. 所以声波束的轨迹方程为

$$y=\pm\frac{\cos\theta_0}{\sqrt{2}\alpha}\sin\left(\frac{\sqrt{2}\alpha}{\sin\theta_0}\ x\right)$$

θ_0 取正值时,y 取正,声波束在空气中传播的轨迹如力图 7－34－2 所示.



力图 7－34－2

轨迹曲线与 x 轴的交点是声波束重返地面的地点,亦即地面上听得最清晰的地点,该点满足 $y=0$,即

$$\frac{\sqrt{2}\alpha}{\sin\theta_0}x=0,\text{或 }\pi$$

其中 0 值对应于声源,应弃去. 故该点与声源的距离为

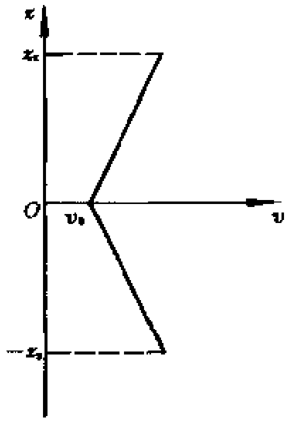
$$x=\frac{\pi}{\sqrt{2}\alpha}\sin\theta_0$$

此题的结果表明,只要空气层的温度形成向上递增的分布,向空中散发的声波束会重新返回地面,这就是晚上往往能比白天听到来自更远处声音的原因. 本题就某种特殊情况给出了定量结果.

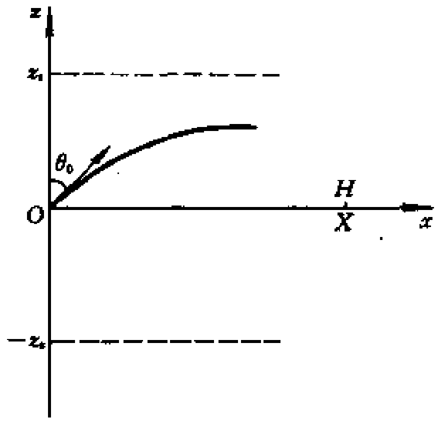
【题 35】 在海洋中,声波的速度随深度、温度和含盐量变化. 已知声速随深度变化的规律如力图 7－35－1 所示. 最小声速 v_0 出现在海洋表面和海底之间,以最小声速处作为坐标原点,z_s 和 z_b 分别表示海洋表面和海底的坐标. 则声速 v 与 z 的关系为

$$v=\begin{cases}v_0+bz & (z>0)\\ v_0 & (z=0)\\ v_0-bz & (z<0)\end{cases}$$

其中 b 为正的常量．



力图 7－35－1



力图 7－35－2

如力图 7－35－2，今在 $x=0, z=0$ 处放置一声源 S．在 zx 平面内，从 S 发出的声波的传播方向用初始发射角 θ_0 表示．声速的不均匀将导致波射线的弯曲．

1．试证明在 zx 平面内声波的初始轨迹是半径为 R 的圆弧，且

$$R=\frac{v_0}{b\sin\theta_0}\qquad\left(0\leqslant\theta_0<\frac{\pi}{2}\right)$$

2．在不被海洋表面反射的声波中，最小的 θ_0 是什么？

3．设在 Ox 轴上 $x=X$ 处设置接收器 H，试导出能直接到达接收器的各声波所对应的 θ_0 的公式．(排除经海洋表面和海底而到达接收器的情形．)

4．已知 $X=10\,000\ \text{m}, v_0=1\,500\ \text{m/s}, b=0.020\ \text{s}^{-1}$．试用这些数据计算可使声波直接从 S 传到 H(不经反射)的 4 个 θ_0 的值(从最小的 θ_0 开始)．

5．当 θ_0 取第 3 问中得出的最小值时，试导出声波从 S 传播到 H 所需时间的表达式，并用第 4 问所给的数据算出这个传播时间．再计算当 $\theta_0=\frac{\pi}{2}$ 时，即声波沿 x 传播到 H 所需的时间．比较上述两个时间的大小．

【分析】 纳入各问的求解之中．

【解】 1．因声速只随 z 变化，故可将海水分成许多与 z 轴垂直的薄层，每一薄层中的声速可看成恒量，声波在各层界面上折射．根据折射定律，有连等式，

$$\frac{\sin\theta_0}{v_0}=\frac{\sin\theta_1}{v_1}=\cdots=\frac{\sin\theta}{v}$$

如力图 7－35－3，任取一薄层，在该层中，声波轨迹为 ds，声速为 v，折射角为 θ．ds 可看成是半径为 R 的一小段圆弧，圆弧半径为 R，圆弧所对圆心角为 $d\theta$，则

$$ds=Rd\theta$$

由上述折射定律连等式

$$\sin\theta=\frac{\sin\theta_0}{v_0}v$$

微分

$$\cos\theta\ d\theta=\frac{\sin\theta_0}{v_0}\ dv$$

因声波在 $z>0$ 区域传播，声速为 $v=v_0+bz$，微分，得

$$dv=b dz$$

代入上式，得

$$\cos\theta\ d\theta=\frac{\sin\theta_0}{v_0}b\ dz$$

即

$$dz=\frac{v_0}{b\sin\theta_0}\cos\theta\ d\theta$$

因

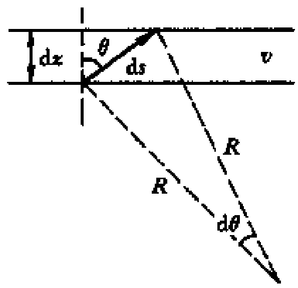
$$dz=ds\ \cos\theta$$

由以上两式，

$$ds=\frac{v_0}{b\sin\theta_0}\ d\theta$$

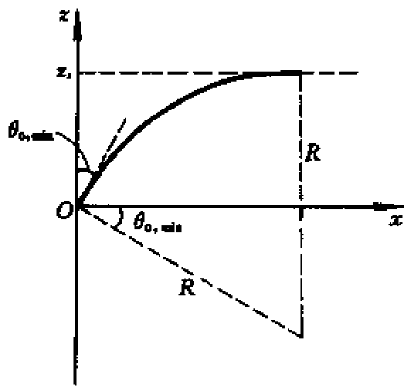
于是，圆弧半径为

$$R=\frac{ds}{d\theta}=\frac{v_0}{b\sin\theta_0}=\text{恒量}$$

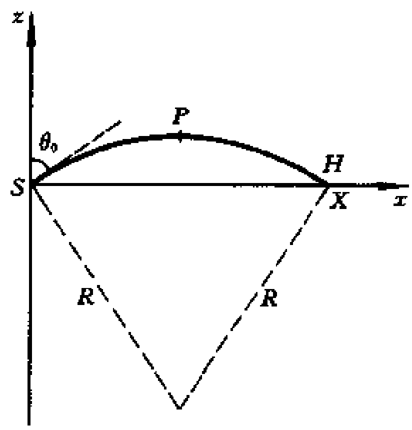


力图 7-35-3

以上结果表明，对于声波传播轨迹上的任意一段圆弧都有相同的半径，因此，在 $z>0$ 区域内整个轨迹是圆的一部分．



力图 7-35-4



力图 7-35-5

2. 如力图 7-35-4，在不被海洋表面反射的各声波中，其轨迹与海洋表面相切的声波对应的 θ_0 最小，记作 $\theta_{0\,\min}$. 由力图 7-35-4，

$$z_s = R - R\sin\theta_{0,\min} = \frac{v_0}{b\sin\theta_{0,\min}}(1-\sin\theta_{0,\min})$$

解出

$$\theta_{0,\min} = \arcsin\left(\frac{v_0}{b\,z_s + v_0}\right)$$

3. 如力图 7－35－5，从 S 发出的声波要能传到接收器 H，则其圆弧轨迹必须通过 H 点．力图 7－35－5 中画出了一种轨迹，如图，有

$$X = 2R\cos\theta_0 = \frac{2v_0\cos\theta_0}{b\sin\theta_0}$$

故能传到 H 点的声波的发射角 θ_0 应满足

$$\cot\theta_0 = \frac{bX}{2v_0}$$

事实上还有多种能通过 H 点的轨迹．力图 7－35－6 就是另一个例子．对此，有

$$\frac{X}{2} = 2R\cos\theta_0$$



力图 7－35－6

相应的发射角应满足

$$\cot\theta_0 = \frac{bX}{4v_0}$$

依此类推，凡是能通过 H 点的轨迹所对应的 θ_0 角为

$$\theta_0 = \operatorname{arc\,cot}\left(\frac{bX}{2nv_0}\right) = \arctan\left(\frac{2nv_0}{bX}\right)$$

其中

$$n = 1,2,3,\cdots$$

当 $n\to\infty$ 时，$\theta_0 = \frac{\pi}{2}$，声波沿 x 轴传播到 H 点．

4. 代入题给数据，从满足条件的最小 θ_0 角开始，得

$$n=1,\theta_0=86.19°$$
$$n=2,\theta_0=88.09°$$
$$n=3,\theta_0=88.73°$$
$$n=4,\theta_0=89.05°$$

5. $n=1$ 对应力图 7－35－5 情形，此时声波从 S 传播到 H 所需时间为

$$t = \int_S^H \frac{ds}{v} = 2\int_S^P \frac{ds}{v} = 2\int_S^P \frac{R\,d\theta}{v}$$

式中 P 点是圆弧 $\overset{\frown}{SH}$ 的中点．又

$$R = \frac{v_0}{b\sin\theta_0} = \frac{v}{b\sin\theta}$$

代入，得

$$t = \frac{2}{b}\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin\theta} = \frac{2}{b}\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)\Bigg|_{\theta=\theta_0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{b}\ln\left(\tan\frac{\theta_0}{2}\right)$$

把 $b=0.020\ \mathrm{s}^{-1}$，$\theta_0=86.19°$代入，得

$$t=6.6546\ \mathrm{s}$$

当 $\theta_0=\frac{\pi}{2}$时，声波沿 x 轴传播到H，所需时间为

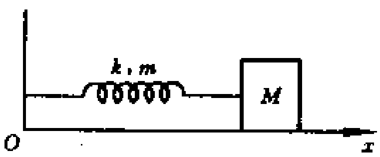
$$t'=\frac{X}{v_0}=\frac{10\,000}{1\,500}\ \mathrm{s}=6.666\,7\ \mathrm{s}$$

可见

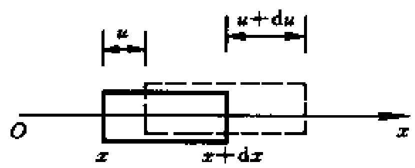
$$t<t'$$

【本题是 1995 年第 26 届 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)试题 .】

【题 36】 如力图 7－36－1，质量为 m、劲度系数为 k 的弹簧原长为L，一端固定，另一端与一质量为 M 的物体相连，整个系统水平放置，物体 M 可在光滑水平面上滑动 .1. 试导出纵向弹性波的波动方程并求波速 .2. 假定 L 远小于弹性波的波长，M 的振幅为A_0，试求弹簧上各点的振幅分布 .3. 在 $m\ll M$ 的条件下，试分别求零级近似和一级近似的频率 .



力图 7－36－1



力图 7－36－2

【分析】 弹簧质量不可忽略时，弹簧上不同地点的弹性力将有一定分布，首先求出这一分布 . 如力图 7－36－2，以弹簧固定端为坐标原点 O，水平方向为 x 轴 . 考虑弹簧上介于 x 和$(x+\mathrm{d}x)$之间的一小段 . 弹簧运动时，设 x 点的位移为u，$(x+\mathrm{d}x)$点的位移为$(u+\mathrm{d}u)$，则该 $\mathrm{d}x$ 小段的伸长形变为 $\mathrm{d}u$，相对形变为$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$. 由胡克定律，该 $\mathrm{d}x$ 小段两端的弹性力为

$$F=Y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{1}$$

式中 Y 是弹簧的弹性模量 . Y 与劲度系数k 密切相关 . 设整个弹簧伸长 Δx，则弹性力

$$F=k\Delta x=Y\frac{\Delta x}{L}$$

故

$$Y=kL$$

弹簧运动时，不同地点的相对形变$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$各不相同，由(1)式，不同地点的弹性力也各异 .

考虑弹簧上一小段，利用(1)式，根据牛顿第二定律即可得到波动方程，波动方程中包含了波速 v，因而波速可求 .

弹簧上各部分均作同频率的简谐振动，写出所得波动方程的猜测解，代入波动方程，再利用边界条件，即可求得弹簧上的振幅分布 .

频率 ω 的零级近似应等于忽略弹簧质量时的值，一级近似应等于本章题 7 的结果 .

【解】 1. 如力图 7－36－3，考虑弹簧上介于 x 和$(x+\Delta x)$之间的一小段，它的左、右两端分别

受弹性力 F_1 和 F_2，利用(1)式，该小段所受合力为

$$F_2-F_1=Y\left[\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)_{x+\Delta x}-\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)_x\right]$$

展成级数，忽略高级小量，得

$$F_2-F_1=Y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\Delta x=Y\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\Delta x$$



力图 7－36－3

该小段的质量为$\frac{m}{L}\Delta x$，由牛顿第二定律

$$Y\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\Delta x=\frac{m}{L}\Delta x\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}=\frac{m}{YL}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}$$

写成偏导数形式，

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\frac{m}{YL}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=0$$

或

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=0 \tag{2}$$

这是波动方程的标准形式，式中 v 即波速，为

$$v=\sqrt{\frac{YL}{m}}=\sqrt{\frac{k}{m}}L \tag{3}$$

2．简谐波是波动方程(2)式的解．弹簧上各处均以相同频率 ω 振动，因弹簧全长 L 比波长小得多，故各处振动的相位可看作相同，不同地点的振幅各不相同．根据以上考虑，可写出方程(2)的猜测解，为

$$u(x,t)=A(x)\cos(\omega t+\varphi) \tag{4}$$

代入波动方程(2)，注意初相位 φ 已看作恒量，得

$$\frac{\mathrm{d}^2A(x)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\omega^2}{v^2}A(x)=0$$

上式具有简谐振动微分方程的形式，其通解为

$$A(x)=a\sin\left(\frac{\omega}{v}x\right)+b\cos\left(\frac{\omega}{v}x\right)$$

式中 a 和 b 为待定系数，可由边界条件确定．在弹簧左端，$x=0$，$A(0)=0$；在弹簧右端，$x=L$，$A(L)=A_0$，故有

$$0=b\cos\left(\frac{\omega}{v}L\right)$$

$$A_0=a\sin\left(\frac{\omega}{v}L\right)+b\cos\left(\frac{\omega}{v}L\right)$$

由以上两式，得出

$$b=0$$

$$a=\frac{A_0}{\sin\left(\frac{\omega}{v}L\right)}$$

故得振幅分布为

$$A(x)=\frac{A_0}{\sin\left(\frac{\omega}{v}L\right)}\sin\left(\frac{\omega}{v}x\right)$$

这是一个正弦函数，式中的波速 v 由(3)式确定，圆频率 ω 将在下面求出．将 $A(x)$ 代入(4)式，有

$$u(x,t)=a\sin\left(\frac{\omega}{v}x\right)\cos(\omega t+\varphi) \tag{5}$$

3．考虑物体 M，由(1)式，所受弹性力为 $Y\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_L$，脚标 L 表示 $x=L$ 处的弹性力，加速度为 $\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}\right)_L$，由牛顿第二定律，

$$M\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}\right)_L=-Y\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_L \tag{6}$$

由(5)式

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}\right)_L=-a\omega^2\sin\left(\frac{\omega}{v}L\right)\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_L=\frac{a\omega}{v}\cos\left(\frac{\omega}{v}L\right)\cos(\omega t+\varphi)$$

代入(6)式，得

$$-Ma\omega^2\sin\left(\frac{\omega}{v}L\right)=-Y\frac{a\omega}{v}\cos\left(\frac{\omega}{v}L\right)$$

即

$$M\omega\tan\left(\frac{\omega}{v}L\right)=\frac{Y}{v}$$

或

$$\frac{\omega L}{v}\tan\left(\frac{\omega}{v}L\right)=\frac{YL}{Mv^2}$$

因

$$Y=kL,\ v^2=\frac{k}{m}L^2$$

故得

$$\frac{\omega L}{v}\tan\left(\frac{\omega}{v}L\right)=\frac{m}{M} \tag{7}$$

系统的振动圆频率 ω 由(7)式决定．因 $m\ll M$，$\frac{\omega L}{v}$是很小的量，取零级近似，有

$$\tan\left(\frac{\omega L}{v}\right)\approx\frac{\omega L}{v}$$

故

$$\frac{\omega^2 L^2}{v^2}=\frac{m}{M}$$

$$\omega^2=\frac{m}{M}\frac{v^2}{L^2}=\frac{m}{M}\frac{k}{m}=\frac{k}{M}$$

即

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{M}}$$

这正是忽略弹簧质量时的振动圆频率．

取一级近似，有

$$\tan\left(\frac{\omega L}{v}\right)=\frac{\omega L}{v}+\frac{1}{3}\left(\frac{\omega L}{v}\right)^3$$

代入(7)式，

$$\frac{\omega L}{v}\left[\frac{\omega L}{v}-\frac{1}{3}\left(\frac{\omega L}{v}\right)^3\right]=\frac{m}{M}$$

即

$$\left(\frac{\omega L}{v}\right)^2\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{\omega L}{v}\right)^2\right]=\frac{m}{M}$$

或

$$\omega^2=\left(\frac{v}{L}\right)^2\frac{m}{M}\frac{1}{1+\frac{1}{3}\omega^2\left(\frac{L}{v}\right)^2}$$

因$\left(\frac{v}{L}\right)^2=\frac{k}{m}$，上式右端的 ω 用$\omega^2=\frac{k}{M}$近似，得

$$\omega^2=\frac{k}{M}\frac{1}{1+\frac{1}{3}\frac{k}{M}\frac{m}{k}}=\frac{k}{M}\frac{1}{1+\frac{1}{3}\frac{m}{M}}=\frac{k}{M+\frac{m}{3}}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{M+\frac{m}{3}}}$$

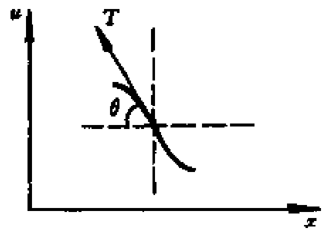
此即本章题 7 中的结果．

【题 37】 无穷长弦线，拉紧，质量线密度为 $\rho=0.01\mathrm{kg/m}$. 今在线一端施以横向简谐力，峰值为 $F_{max}=0.3\,\mathrm{N}$，使弦线中产生简谐振动，波速为 $v=\frac{30}{\pi}$ m/s. 试求单位时间内通过弦线某一截面传输的平均能量 S.

【分析】 在拉紧的弹性弦中，波源的振动引起了形变，各部分互施切向张力 T，使波动得以传播．由能量密度公式 $N=\frac{1}{2}\rho v\,\omega^2A^2$（$\omega$ 和 A 分别为简谐波的圆频率和振幅），利用张力的横向分量与形变的关系及波速 $v=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$，即可求解．

【解】 如图，在弦线中任取一横截面，通过横截面左侧对右侧施以张力 T，其横向分量为

$$F\approx T\sin\theta$$



力图 7－37－1

对于小振动

$$\sin\theta \approx \tan\theta = -\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

代入 F，得

$$F = -T\frac{\partial u}{\partial x}$$

对于简谐波，有

$$u = A\cos(\omega t - kx)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -Ak\sin(\omega t - kx)$$

式中

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$$

代入 F，得

$$F = TAk\sin(\omega t - kx)$$

把上式用于端点，最大横向力为

$$F_{max} = TAk = TA\frac{\omega}{v}$$

波速 v 与张力 T 及线密度 ρ 的关系为

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}，或\ T = \rho v^2$$

代入 F_{max}，得

$$F_{max} = \rho v^2 A\frac{\omega}{v} = \rho v \omega A$$

即

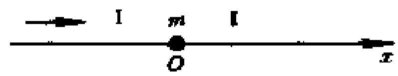
$$A = \frac{F_{max}}{\rho v \omega}$$

能流密度为

$$N = \frac{1}{2}\rho v \omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\rho v \omega^2\left(\frac{F_{max}}{\rho v \omega}\right)^2 = \frac{F_{max}^2}{2\rho v} = \frac{3\pi}{20}\ \mathrm{N\cdot m/s}$$

【题 38】 拉紧的弦线，张力为 T，质量线密度为 ρ，质量为 m 的质点附在弦上某点．圆频率为 ω 的波沿弦线传播．试求波在质点 m 反射时的能量反射系数．

【分析】 如图，取 x 轴沿波传播方向，原点 O 在质点 m 处．原点左侧的Ⅰ区中同时存在入射波和反射波，原点右侧的Ⅱ区只有透射波．把入射波、反射波、透射波均用复数表示，取入射波振幅为 1，则反射波的振幅即为振幅反射系数，透射波的振幅即为振幅透射系数．



力图 7－38－1

在原点 O 的边界条件是：位移连续；m 所受两侧横向力之和引起了 m 的上、下振动．由此即可确定反射系数和透射系数．

【解】 取坐标如图．Ⅰ区的入射波与反射波表为

$$\text{入射波}\quad e^{-i(\omega t-kx)}=e^{ikx}e^{-i\omega t}$$

$$\text{反射波}\quad Ae^{-i(\omega t+kx)}=Ae^{-ikx}e^{-i\omega t}$$

因取入射波振幅为1，故 A 为振幅反射系数．在Ⅰ区的波动为入射波与反射波之和，即

$$u_1=(e^{ikx}+Ae^{-ikx})e^{-i\omega t} \tag{1}$$

在Ⅱ区只有透射波

$$u_2=Be^{-i(\omega t-kx)}=Be^{ikx}e^{-i\omega x} \tag{2}$$

式中 B 为振幅透射系数．(1)、(2)式中的 k 为

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{\omega}{v}=\omega\sqrt{\frac{\rho}{T}}$$

上述 u_1 及 u_2 在 m 点应满足的边界条件是位移连续，即

$$u_1(0)=u_2(0) \tag{3}$$

以及 m 所受两侧横向力之和引起 m 的上、下振动，即

$$\left(T\frac{\partial u_2}{\partial x}-T\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=0}=m\frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial t^2}\Bigg|_{x=0} \tag{4}$$

把(1)、(2)式代入(3)、(4)式，得

$$\begin{cases}1+A=B\\ -m\omega^2B=\mathrm{i}Tk(B-1+A)\end{cases} \tag{5}$$

解出

$$A=\frac{-m\omega^2}{2\mathrm{i}Tk+m\omega^2}$$

$$B=\frac{2\mathrm{i}Tk}{2\mathrm{i}Tk+m\omega^2}$$

A 和 B 都是复数表明，反射和透射时都产生相位突变，能量反射系数为

$$|A|^2=\frac{m^2\omega^4}{m^2\omega^4+4T^2k^2}$$

式中 $k=\omega\sqrt{\dfrac{\rho}{T}}$.

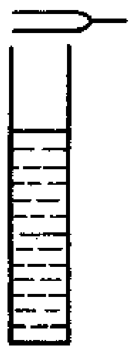
【题39】 音叉与频率为250.0 Hz的标准声源同时发音时，产生1.5 Hz的拍音．当音叉粘上一小块橡皮泥时，拍频增加了．如力图7－39－1，将该音叉放在盛水的细管口，连续调节水面的高度，当空气柱高度相继为0.34 m和1.03 m时发生共振．

试求：1. 声波在空气中的声速．2. 画出空气柱中的驻波图．

【分析】 当两个同方向、不同频率的谐振动合成时，合振幅周期性变化的现象叫做拍．拍频等于两谐振动频率之差．本题音叉粘上橡皮泥后质量增加，频率减小，而题设拍频增加，可见拍频应为声源频率减去音叉频率，于是音叉粘橡皮泥后的频率可求．

共振是强迫力频率(即音叉频率)与振动系统(从管口到水面的那一段空气柱)的固有频率接近时，在阻尼力不大的情况下，振动系统的振幅达到极大值的现象．声波从管口出发经空气柱传

播，在水面反射，两波叠加，形成驻波，管口为波腹，水面为波节，空气柱的长度应为$(2n+1)\frac{\lambda}{4}$（λ 为波长，n 为整数）．由频率及波长，声速可求．由所给数据可知 n 值，画出驻波图．



力图 7－39－1

【解】 设标准声源的频率为 ν_0，音叉（粘上橡皮泥）频率为 ν，则拍频为

$$\nu_{拍}=\nu-\nu_0 \quad 或 \quad \nu_0-\nu$$

因粘上橡皮泥后音叉质量增加，ν 减小，而 $\nu_{拍}$ 增大，故应取

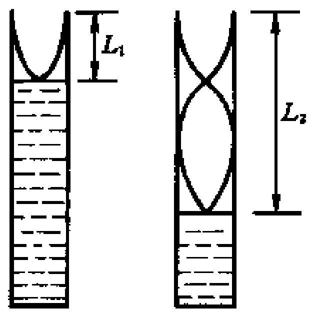
$$\nu_{拍}=\nu_0-\nu$$

即

$$\nu=\nu_0-\nu_{拍}$$
$$=250.0-1.5=248.5\ \text{Hz}$$

发生共振，形成驻波时，管口为波腹，水面为波节，设波长为 λ，则空气柱长度 L 满足

$$L=(2n+1)\frac{\lambda}{4}, \quad n=整数$$



力图 7－39－2

由题设

$$L_1=(2n+1)\frac{\lambda}{4}=0.34\ \text{m}$$

$$L_2=[2(n+1)+1]\frac{\lambda}{4}=1.03\ \text{m}$$

故

$$L_2-L_1=\frac{\lambda}{2}=1.03-0.34=0.69\ \text{m}$$

波长为

$$\lambda=2(L_2-L_1)=1.38\ \text{m}$$

声速为

$$v=\lambda\nu=1.38\times248.5=343\ \text{m/s}$$

因波长 $\lambda=1.38$ m，故 $L_1=(2n+1)\frac{\lambda}{4}=0.34$ m 中的 $n=0$．即

$$L_1=\frac{\lambda}{4},L_2=\frac{3}{4}\lambda$$

所以当空气柱长为 L_1 和 L_2 时，其中的驻波分别如力图 7－39－2 中两图所示．

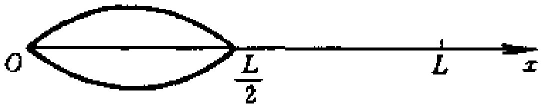
【题 40】 小提琴弦长为 L，质量线密度为 ρ，张力为 T．1．用手指轻按弦的中点，试求基频和一次谐波的频率，并写出弦上各点的振动方程式．2．在弦的一端$\frac{L}{3}$长度上均匀包缠细线，使其线密度增加为 4ρ，放开手指，试求基频，并写出弦上各点的振动表达式．

【分析】 1．手指按住弦的中点，表明参与振动的弦长只有$\frac{L}{2}$，其两端应为驻波波节．基频与最长的波长对应，即$\frac{L}{2}$长的两端应为两个相邻的波节，故$\frac{\lambda}{2}=\frac{L}{2}$，由基波的波长及波速可求基频，各

点的振动表达式构成驻波．一次谐波的频率为基频的 2 倍．

2．放开手指后，长 L 的弦都参与振动．弦一端(设为左端)$\frac{L}{3}$部分缠上细线后，两部分的线密度不同，波速亦不同．为了得到稳定的驻波，弦上不同密度的连接点必须是波节．因此，左端基波波长为$\frac{2L}{3}$，由左端波速可求左端基频，各点的振动表达式构成驻波；右端基波波长为$\frac{4L}{3}$，由右端波速可求右端基频，各点的振动表达式构成驻波．

值得注意的是，因连接点是波节，两侧振动的相位相反；又，连接点两侧的张力大小相等，且张力的横向分量相等．上述条件给出了连接点两侧各点振动的振幅和初相位的关系．



力图 7－40－1

【解】 1．波动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

波速为

$$v=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

如力图 7－40－1，手按中点，参与振动的弦长$\frac{L}{2}$，两端为驻波波节，基频对应于最长波长，即$\frac{L}{2}$两端为相邻波节，故基波波长 λ 满足

$$\frac{L}{2}=\frac{\lambda}{2}$$

即

$$\lambda=L$$

基频为

$$\nu_1=\frac{v}{\lambda}=\frac{1}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

圆频率为

$$\omega_1=2\pi\nu_1=\frac{2\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

弦上各点的振动表达式为

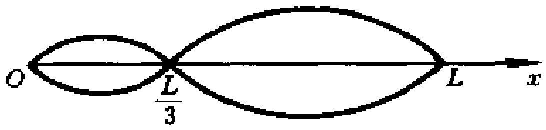
$$u_1=A_1\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}t+\varphi_1\right)$$

一次谐波的圆频率和各点的振动表达式为

$$\omega_2=2\omega_1=\frac{4\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

$$u_2 = A_2 \sin\left(\frac{4\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{4\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}t + \varphi_2\right)$$

2. 如力图 7－40－2，放开手指，长 L 的弦都参与振动，左端$\frac{L}{3}$缠细线，右端$\frac{2L}{3}$不缠，为得稳定驻波，不同密度的连接点应为波节．



力图 7－40－2

左端基波波长、波速及基频圆频率为

$$\lambda_{1左} = \frac{2L}{3}$$

$$v_{左} = \sqrt{\frac{T}{4\rho}}$$

$$\omega_{1左} = 2\pi\nu_{1左} = 2\pi\frac{v_{左}}{\lambda_{1左}} = \frac{3\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{4\rho}} = \frac{3\pi}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

右端基波波长、波速及基频圆频率为

$$\lambda_{1右} = \frac{4L}{3}$$

$$v_{右} = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

$$\omega_{1右} = 2\pi\nu_{1右} = 2\pi\frac{v_{右}}{\lambda_{1右}} = \frac{3\pi}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

可见，左、右两端有相同的基频，即

$$\omega_{1左} = \omega_{1右} = \omega_1 = \frac{3\pi}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

左、右两端各点的振动表达式为

$$\begin{cases} u_{1左} = A_{1左}\sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right)\cos(\omega_1 t + \varphi_{1左}), & 0 \leqslant x \leqslant \frac{L}{3} \\ u_{1右} = A_{1右}\sin\left[\frac{3\pi}{2L}\left(x - \frac{L}{3}\right)\right]\cos(\omega_1 t + \varphi_{1右}), & \frac{L}{3} \leqslant x \leqslant L \end{cases} \tag{1}$$

连接点为波节，两侧振动的相位相反，即

$$\varphi_{1右} = \varphi_{1左} + \pi \tag{2}$$

连接点两侧的张力大小相等，且张力的横向分量相等，即

$$T\frac{\partial u_{1左}}{\partial x}\bigg|_{x=\frac{L}{3}} = T\frac{\partial u_{1右}}{\partial x}\bigg|_{x=\frac{L}{3}}$$

将(1)式代入，得

$$A_{1左}\frac{3\pi}{L} = A_{1右}\frac{3\pi}{2L}$$

即

$$A_{1左}=\frac{1}{2}A_{1右}=A_1 \tag{3}$$

把(2)、(3)式代入(1)式，得

$$u_{1左}=A_1\sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}+\varphi_{1左}\right)$$

$$u_{1右}=2A_1\sin\left[\frac{3\pi}{2L}\left(x-\frac{L}{3}\right)\right]\cos\left(\frac{3\pi}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}+\varphi_{1左}+\pi\right)$$

【题 41】 一列振幅为 A，频率为 ν，波长为 λ 的横波沿一拉紧的水平细线传播．细线单位长度的质量为 ρ. 任一点位移的表达式为

$$y_1=A\sin 2\pi\left(\nu t-\frac{x}{\lambda}\right)$$

式中 t 为时间，x 为细线上各点的水平坐标．

另一列具有相同振幅、频率、波长的波同时在细线中沿相反方向传播．两列波 $t=0$ 时在 $x=0$ 处的相位差为 φ. 今在 $x=0$ 和 $x=L$ 两处将细线固定．

1．试导出细线中的驻波方程，并求细线中所有可能存在的波长．

2．试求任意时刻的总动能和总势能．规定细线上各点均处于平衡位置时的总势能为零．

3．设 $L=2.50$ m，长为 L 的细线的质量为 $m=0.0100$ kg，细线中的张力 $T=10.0$ N，驻波的最大振幅为 0.02 m.(a)试求基模的频率和对应的总能量．(b)用手拨动细线，在其中激起所有可能的驻波模式，然后在距端点 0.50m 处抓住细线．试问哪些频率的驻波可在细线中继续存留．

【分析】 两列具有相同振幅、频率、波长的波反向传播，叠加后形成驻波．驻波方程是两行波方程之和．因 $x=0$ 及 $x=L$ 处固定，振幅为零，由此可确定各种允许的波长．

任一线元的动能为$\frac{1}{2}(\mathrm{d}m)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$，积分可得总动能．当全部线元均处于平衡位置，总势能为零时，总动能达最大值，此即总能量．总能量减去总动能即得总势能．

基模相应于最大允许波长，即最小允许频率，由基模波长及波速可得出基模频率，并得出相应的总能量．

细线被抓住处不振动，为波节，继续存留的驻波模式必须满足此条件．

【解】 1．两列反向传播的行波的方程为

$$y_1=A\sin 2\pi\left(\nu t-\frac{x}{\lambda}\right)$$

$$y_2=A\sin\left[2\pi\left(\nu t+\frac{x}{\lambda}\right)+\varphi\right]$$

叠加后的总位移为

$$\begin{aligned}y&=y_1+y_2=A\sin 2\pi\left(\nu t-\frac{x}{\lambda}\right)+A\sin\left[2\pi\left(\nu t+\frac{x}{\lambda}\right)+\varphi\right]\\&=2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x+\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(2\pi\nu t+\frac{\varphi}{2}\right)\end{aligned} \tag{1}$$

这就是驻波方程，各点按 $\sin\left(2\pi\nu t+\frac{\varphi}{2}\right)$ 振动，振幅 $2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x+\frac{\varphi}{2}\right)$ 与 x 有关，驻波的最大振幅为 $2A$.

因 $x=0$ 处的振幅为零，故

$$\cos\frac{\varphi}{2}=0$$

即

$$\frac{\varphi}{2}=\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{3\pi}{2},\cdots,\pm\frac{2n+1}{2}\pi,\cdots$$

又因 $x=L$ 处的振幅为零，故

$$\cos\left(\frac{2\pi L}{\lambda}+\frac{\varphi}{2}\right)=0$$

即

$$\frac{2\pi L}{\lambda}+\frac{\varphi}{2}=\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{3\pi}{2},\cdots,\pm\frac{2n+1}{2}\pi,\cdots$$

即

$$\frac{2\pi L}{\lambda}=0,\pm\pi,\pm2\pi,\cdots,\pm n\pi,\cdots$$

因 $L>0$，故

$$\frac{2\pi L}{\lambda}=n\pi$$

所以允许的波长为

$$\lambda=\frac{2L}{n},n=1,2,3,\cdots \tag{2}$$

因 $\frac{\varphi}{2}=\frac{2n+1}{2}\pi$，驻波方程(1)式可简化为

$$y=-2A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos(2\pi\nu t)$$

2. 考虑任一线元，如图，其长度为 dx，质量为 ρdx，速度为 $\frac{\partial y}{\partial t}$，故其动能为

$$\begin{aligned}dE_k&=\frac{1}{2}(\rho dx)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\\&=\frac{1}{2}\rho dx\left[2A(2\pi\nu)\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\sin(2\pi\nu t)\right]^2\\&=8\pi^2\rho\nu^2A^2\sin^2(2\pi\nu t)\sin^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)dx\end{aligned}$$

长为 L 的细线的总动能为

$$E_k=8\pi^2\rho\nu^2A^2\sin^2(2\pi\nu t)\int_0^L\sin^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)dx$$

因 $L=\frac{n\lambda}{2}$ 是半波长的整数倍，故

$$\int_0^L\sin^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)dx=\frac{L}{2}$$

代入，得

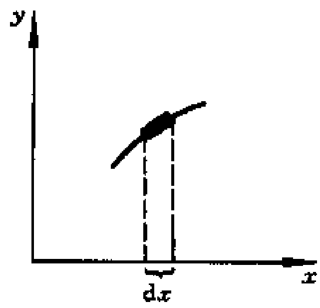
$$E_k=4\pi^2\rho\nu^2A^2L\ \sin^2(2\pi\nu t)$$

可见总动能 E_k 随时间 t 变化，最大动能为

$$E_{k,max}=4\pi^2\rho\nu^2A^2L$$

$E_{k,max}$对应于所有线元都处于平衡位置，此时总势能为零，故 $E_{k\,max}$即为驻波总机械能 E

$$E=E_{k,max}=E_k+E_p=4\pi^2\rho\nu^2A^2L \qquad (3)$$



力图 7－41－1

总势能为

$$E_p=E-E_k=E_{k,max}-E_k=4\pi^2\rho\nu^2A^2L[1-\sin^2(2\pi\nu t)]$$

3. 基模对应的 $n=1$，由(2)式，基模波长为

$$\lambda_{基}=2L=2\times2.5=5.0\ \text{m}$$

波速为

$$v=\sqrt{\frac{T}{\rho}}=\sqrt{\frac{TL}{m}}=50\ \text{m/s}$$

故基模的频率为

$$\nu_{基}=\frac{v}{\lambda}=10\ \text{Hz}$$

由(3)式，基模的总能量为

$$E_{基}=4\pi^2\rho\nu^2A^2L=\pi^2\rho\nu^2(2A)^2L$$
$$=(\pi\times10\times0.02)^2\times0.01=3.95\times10^{-3}\ \text{J}$$

手抓住距端点 0.50m 处时，该处为波节，即要求

$$n\frac{\lambda}{2}=0.50\ \text{m},\quad n=1,2,3,\cdots$$

或

$$\lambda=\frac{1}{n}\ \text{m}$$

不满足此条件的驻波模式均将消失，所以存留的驻波模式的频率为

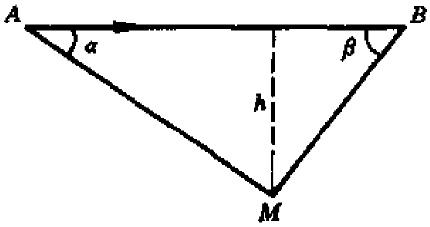
$$\nu=\frac{v}{\lambda}=nv=50n\ \text{Hz},\quad n=1,2,3,\cdots$$

【题 42】 飞机在上空以速度 $v=200$ m/s 作水平飞行，发出频率为 $\nu_0=2\ 000$ Hz 的声波．静止在地面上的观察者测定飞机发出的声波的频率，当飞机越过观察者上空时，观察者在 4 s 钟内测出的频率从 $\nu_1=2\ 400$ Hz 降为 $\nu_2=1\ 600$ Hz. 已知声波在空气中的速度为 $v=330$ m/s. 试求飞机的飞行高度 h.

【分析】 由于波源或观察者相对于媒质的运动，观察者接收到的波的频率会有所变化，这种现象叫做多普勒效应．本题观察者测出的频率发生变化的原因即在于此．利用多普勒效应的有关公式即可求解．

【解】 如图，设飞机在 $t=4$s 内从 A 点水平飞行到 B 点，飞行高度为 h. 在地面上 M 点的观察

者，测出从 A 点发出的声波的频率为 ν_1，从 B 点发出的声波的频率为 ν_2，声源在 AM 方向的分速度为 $u_{AM}=u\cos\alpha$，声源在 BM 方向的分速度为 $u_{BM}=u\cos\beta$，其中 u 是飞机速度，α 和 β 如图．由多普勒效应的公式



力图 7－42－1

$$\nu_1=\frac{v}{v-u_{AM}}\nu_0=\frac{v}{v-u\ \cos\alpha}\nu_0$$

解出

$$\cos\alpha=\frac{\nu_1-\nu_0}{\nu_1 u}v=0.275$$

又

$$\nu_2=\frac{v}{v+u_{BM}}\nu_0=\frac{v}{v+u\cos\beta}\nu_0$$

解出

$$\cos\beta=\frac{\nu_0-\nu_2}{\nu_2 u}v=0.4125$$

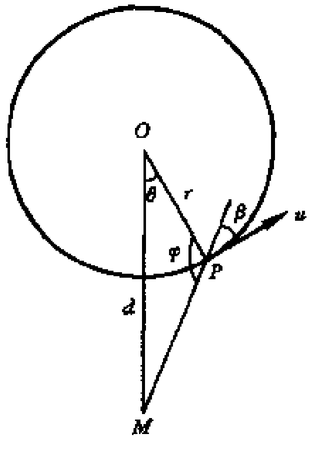
由几何关系

$$AB=ut=h(\cot\alpha+\cot\beta)$$

故

$$h=\frac{ut}{\cot\alpha+\cot\beta}=\frac{ut}{\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}+\dfrac{\cos\beta}{\sqrt{1-\cos^2\beta}}}=1.08\times10^3\ \mathrm{m}$$

【题 43】 如图，音叉 P 沿着半径 $r=8$ m 的圆以角速度 $\omega=4$ rad/s 作匀速圆周运动．音叉发出频率为 $\nu_0=500$ Hz 的声波，声波的速度为 $v=330$ m/s．观测者 M 与圆周共面，与圆心 O 的距离为 $d=2r$．试问当 θ 角为多大时，观测到的频率为最高或最低，并求其数值．θ 是 OP 和 OM 的夹角．



力图 7－43－1

【分析】 由于音叉运动，使观察到的频率 ν 与音叉的频率 ν_0 有所区别，这是多普勒效应．由上题的公式，当音叉在位置 P 时，M 测出的 ν 与音叉速度 u 在观察方向（即 PM 方向）的投影有关，即与 β 有关．由几何关系，不难得出 ν 与 θ 的关系，ν 为极值要求 $\frac{d\nu}{d\theta}=0$，于是可求出相应的最高或最低的 ν．

【解】 根据多普勒效应的公式，观察频率 ν 与角 β 的关系为

$$\nu=\frac{v}{v+u\ \cos\beta}\nu_0=\frac{v}{v+r\omega\sin\varphi}\nu_0 \tag{1}$$

式中 $u\ \cos\beta$ 是声源在观测方向上的分速度．

利用正弦定理，把 $\sin\varphi$ 表成 θ 的函数

$$\frac{\sin\varphi}{d}=\frac{\sin(\pi-\theta-\varphi)}{r}$$

即

$$\frac{\sin\varphi}{2r}=\frac{\sin(\varphi+\theta)}{r}$$

或

$$\sin\varphi=2\sin(\varphi+\theta)=2\sin\varphi\ \cos\theta+2\cos\varphi\ \sin\theta$$

$$\sin\varphi(1-2\cos\theta)=2\cos\varphi\ \sin\theta$$

$$\tan\varphi=\frac{2\sin\theta}{1-2\cos\theta}$$

故

$$\sin\varphi=\frac{\tan\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}=\frac{2\sin\theta}{\sqrt{(1-2\cos\theta)^2+4\sin^2\theta}}=\frac{2\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$$

代入(1)式,得

$$\nu=\frac{v\nu_0}{v+r\omega\dfrac{2\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}} \tag{2}$$

ν 为极值时满足

$$\frac{d\nu}{d\theta}=0$$

把(2)式代入,得

$$\frac{d\nu}{d\theta}=v\nu_0\frac{-1}{\left(v+r\omega\dfrac{2\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}\right)^2}\cdot 2r\omega\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}\right)$$

$$=\frac{-2r\omega v\nu_0}{\left(v+\dfrac{2r\omega\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}\right)^2}\cdot\frac{\cos\theta(5-4\cos\theta)-2\sin^2\theta}{(5-4\cos\theta)^{3/2}}=0$$

即

$$5\cos\theta-4\cos^2\theta-2\sin^2\theta=0$$

或

$$2\cos^2\theta-5\cos\theta+2=0$$

解出

$$\cos\theta=\frac{1}{4}(5\pm\sqrt{25-16})=\frac{5\pm3}{4}=\frac{1}{2}\text{或}2$$

其中 $\cos\theta=2$ 显然不合,应弃去．故

$$\cos\theta=\frac{1}{2},\quad \theta=\pm60^\circ$$

当 $\theta_1=60^\circ$时,

$$\sin\varphi_1=\frac{2\sin\theta_1}{\sqrt{5-4\cos\theta_1}}=\frac{2\sin60^\circ}{\sqrt{5-4\cos60^\circ}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=1$$

$$\nu_1=\frac{v\nu_0}{v+r\omega}=456\ \text{Hz}$$

当 $\theta_2 = -60°$时,

$$\sin\varphi_2 = -1$$

$$\nu_2 = \frac{v\nu_0}{v - r\omega} = 554\ \text{Hz}$$

可见,当 θ 为 $\pm 60°$时,观测到最低和最高的频率 ν_1 及 ν_2.

第二部分

热　学

第一章　平衡态　理想气体状态方程

【题1】 道尔顿提出过一种定压温标．在此温标下，压强为一恒定值时，理想气体体积的相对增量正比于温度 τ 的增量，且也将冰点定为 $\tau=0°$，汽点定为 $\tau=100°$．试用摄氏温度 t 来表示道尔顿温度 τ．

【分析】 温标是温度的数值表示法．建立一种温标需要选定测温物质的测温属性，选取参考点，规定测温属性随温度的变化关系．道尔顿温标以理想气体为测温物质，其体积 V 为测温属性，规定 $\frac{\mathrm{d}V}{V}\propto \mathrm{d}\tau$，还规定了冰点和汽点的温度，这是一种完整的温标．它和其他常用的温标应有确定的对应关系．

理想气体(测温物质)的体积 V 与 τ 的变化关系已经规定．利用理想气体的等压过程方程，即可得出 V 与理想气体温标的温度 T 之间的关系，而 T 与摄氏温标的温度 t 之间的关系是熟知的．于是 τ 与 t 之间的关系可求．

【解】 在恒定压强 p_0 下，一定量理想气体(测温物质)的体积 V(测温属性)与相应的道尔顿温标的温度 τ 之间的变化关系规定为

$$\frac{\mathrm{d}V}{V}\propto \mathrm{d}\tau$$

即

$$\frac{\mathrm{d}V}{V}=A\mathrm{d}\tau$$

式中 A 为待定常量．设在冰点即 $\tau=0°$时，该一定量理想气体的体积为 V_0，则上式积分为

$$\ln\frac{V}{V_0}=A\tau \tag{1}$$

在理想气体的等压过程中，其体积 V 与理想气体温标的温度 T 之间的关系为

$$\frac{V}{V_0}=\frac{T}{T_0} \tag{2}$$

式中 $T_0=273.15\mathrm{K}$ 是理想气体温标的冰点温度．T 与摄氏温标的温度 t℃之间的关系为

$$T=T_0+t \tag{3}$$

(1)、(2)、(3)式联立，得

$$\tau=\frac{1}{A}\ln\frac{V}{V_0}=\frac{1}{A}\ln\frac{T}{T_0}=\frac{1}{A}\ln\left(1+\frac{t}{T_0}\right) \tag{4}$$

对于汽点，$t=100℃$，$\tau=100°$，代入(4)式，得

$$A=\frac{1}{100}\ln\left(1+\frac{100}{T_0}\right)=\frac{1}{100}\ln\frac{373.15}{273.15}$$

把 A 的结果代入(4)式，得

$$\tau = \frac{100\ln\left(1+\frac{t}{T_0}\right)}{\ln\frac{373.15}{273.15}} = 320.6\ln\left(1+\frac{t}{273.15}\right)$$

这就是道尔顿温度 τ 与摄氏温度 t 之间的关系．

【题 2】 某热电偶测温计的一个触点始终保持为 0 ℃，另一触点与待测温度的物体接触．当待测温度为 t ℃时，测温计中的热电动势为

$$\mathscr{E} = \alpha t + \beta t^2$$

其中 $\alpha = 0.20\ \mathrm{mV/℃}$，$\beta = -5.0\times10^{-4}\ \mathrm{mV/(℃)^2}$.

如果以热电偶的热电动热 $\mathscr{E}$ 为测温属性，规定下述线性关系来定义温标 t^* ：

$$t^* = a\mathscr{E} + b$$

并规定冰点的 $t^* = 0°$，汽点的 $t^* = 100°$. 试画出 $t^*(t)$曲线．

【分析】 温标 t^* 以热电动势 $\mathscr{E}$ 为测温属性，并规定 t^* 与 $\mathscr{E}$ 成线性关系．又已知 $\mathscr{E}$ 与摄氏温标的温度 t 之间的关系．故 t^* 与 t 的关系即可求得．系数 a 和 b 则可由规定的冰点和汽点的 t^* 值确定．

【解】 已知

$$t^* = a\mathscr{E} + b,\quad \mathscr{E} = \alpha t + \beta t^2$$

得出 t^* 与 t 的关系为

$$t^* = a\alpha t + a\beta t^2 + b$$

规定冰点的

$$t = 0\ ℃,\quad t^* = 0°$$

规定汽点的

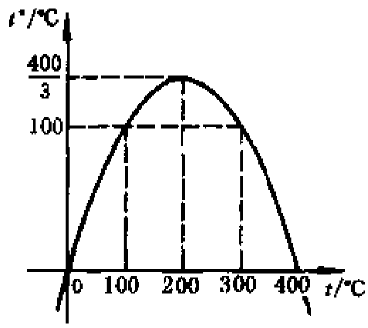
$$t = 100\ ℃,\quad t^* = 100°$$

代入，即可得出系数 a 与 b 为

$$b = 0,\quad a = \frac{1}{\alpha + 100\beta} = \frac{20}{3}\ °/\mathrm{mV}$$

于是，t^* 和 t 的关系为

$$t^* = \frac{20}{3}\alpha t + \frac{20}{3}\beta t^2 = \frac{4}{3}t - \frac{1}{300}t^2$$



热图 1－2－1

$t^*(t)$曲线如图所示，t^* 与 t 之间并非一一对应，且 t^* 有极值$\left(\frac{400°}{3}\right)$

【题 3】 贮气罐的体积为 V，罐内气体压强为 p. 贮气罐经阀门与体积为 V_0 的真空室相连，打开阀门，为真空室充气，达到平衡后，关闭阀门；然后换一个新的同样的贮气罐继续为真空室（已非"真空"）充气；…. 如此不断充气，直到真空室中气体的压强达到 p_0（$p_0 < p$）为止．设充气过程中温度恒定不变．试问共需多少个贮气罐．

【分析】 在任一贮气罐为真空室充气的过程中，前者内部气体压强减小，后者内部气体压强增大，气体从贮气罐流向真空室，当两者压强相同时，该次充气过程结束．

利用理想气体状态方程，容易求出贮气罐中原有的气体摩尔数 n. 设第 K 次充气前，真空室内的气体摩尔数为 $n_{K-1}(n_0=0)$，加上贮气罐中的气体，总摩尔数为$(n+n_{K-1})$，经第 K 次充气达到平衡后的压强 p_K 可由$(n+n_{K-1})$及温度不变的条件求出．同时，可按体积比求出第 K 次充气后，真空室内的气体摩尔数 n_K. 当 p_K 达到p_0 时，充气结束，所需的次数 K 可求．

【解】 每个贮气罐原有的气体摩尔数为

$$n=\frac{pV}{RT}$$

式中 T 是充气过程中不变的环境温度．当第一罐向真空室充气达到平衡后，气体压强为

$$p_1=\frac{nRT}{V_0+V}=\frac{pV}{V_0+V}$$

进入真空室的气体摩尔数为

$$n_1=\frac{V_0}{V_0+V}n$$

第二罐向真空室(已非“真空”)充气达到平衡后，气体压强为

$$\begin{aligned}p_2&=\frac{(n+n_1)RT}{V_0+V}\\&=\frac{\left(1+\frac{V_0}{V_0+V}\right)nRT}{V_0+V}=\left(1+\frac{V_0}{V_0+V}\right)\frac{pV}{V_0+V}\end{aligned}$$

第二次充气后，真空室内的气体摩尔数为

$$n_2=\frac{V_0}{V_0+V}(n+n_1)=\left(1+\frac{V_0}{V_0+V}\right)\frac{V_0}{V_0+V}n$$

第三罐向真空室充气达到平衡后，相应的物理量分别为

$$p_3=\frac{(n+n_2)RT}{V_0+V}=\cdots=\left[1+\frac{V_0}{V_0+V}+\left(\frac{V_0}{V_0+V}\right)^2\right]\frac{PV}{V_0+V}$$

$$n_3=\frac{V_0}{V_0+V}(n+n_2)=\cdots=\left[1+\frac{V_0}{V_0+V}+\left(\frac{V_0}{V_0+V}\right)^2\right]\frac{V_0}{V_0+V}n$$

依次类推，第 K 罐向真空室充气达到平衡后，相应的物理量应分别为

$$\begin{aligned}p_K&=\left[1+\frac{V_0}{V_0+V}+\left(\frac{V_0}{V_0+V}\right)^2+\cdots+\left(\frac{V_0}{V_0+V}\right)^{K-1}\right]\frac{pV}{V_0+V}\\&=\frac{1-\left(\frac{V_0}{V_0+V}\right)^K}{1-\frac{V_0}{V_0+V}}\cdot\frac{pV}{V_0+V}=\left[1-\left(\frac{V_0}{V_0+V}\right)^K\right]p\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}n_K&=\left[1+\frac{V_0}{V_0+V}+\left(\frac{V_0}{V_0+V}\right)^2+\cdots+\left(\frac{V_0}{V_0+V}\right)^{K-1}\right]\frac{V_0}{V_0+V}n\\&=\left[1-\left(\frac{V_0}{V_0+V}\right)^K\right]\frac{V_0}{V}n\end{aligned}$$

充气结束时，真空室内气体压强达到 p_0，即

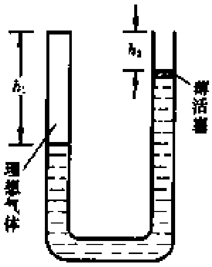
$$p_K=p_0$$

把上述 p_K 的结果代入，得出所需的贮气罐的数量为

$$K=\frac{\ln\frac{p-p_0}{p}}{\ln\frac{V_0}{V_0+V}}$$

K 取正整数．

【题 4】 在地面上竖直放置一个截面均匀的 U 型管，管内盛有水．如图所示，管的右上端开口，左上端封口，左侧水面与上端相距 $h_1=30\text{cm}$，其间封有一定质量的理想气体，右侧水面与上端相距 $h_2=20\text{cm}$．在右侧水面上放置一个质量可忽略不计的薄活塞，它与管壁间既无空隙又无摩擦．当从右侧上端缓慢注入高为 $H=7.5\text{cm}$ 的水银柱时，发现水银柱的上表面恰好与左侧水面等高．设注入水银过程中，环境温度与空气压强均不变．已知水银密度是水密度的 13.6 倍．试求空气压强 p_0 的大小



热图 1－4··1

【分析】 取 U 形管左侧被封闭的理想气体为研究对象．随着水银从右侧注入，左侧液面不断上升，理想气体等温压缩，遵从玻意耳定律．水银注入前，理想气体的压强等于大气压强与高度为(h_1-h_2)的水柱产生的压强之和．水银注入后，理想气体的压强等于大气压强加上高度为 H 的水银柱产生的压强减去高度为H 的水柱产生的压强．注入水银后，左侧液面与上端的距离可由题目给定的条件求出．于是可解．

【解】 注入水银前，左侧封闭理想气体的压强为

$$p_{左}=p_0+\rho_{水}g(h_1-h_2)$$

注入水银后，因左侧水面与右侧水银面等高，左侧封闭理想气体的压强变为

$$p_{左}'=p_0+(\rho_{汞}-\rho_{水})gH$$

注入水银前，左侧水面与上端相距 h_1．注入水银后，两侧液面等高，故左侧水面上升的高度为$\frac{1}{2}(H+h_1-h_2)$，于是左侧水面与上端相距为

$$h_1-\frac{1}{2}(H+h_1-h_2)=\frac{1}{2}(h_1+h_2-H)$$

由玻意耳定律

$$p_{左}h_1=p_{左}'\cdot\frac{1}{2}(h_1+h_2-H)$$

把 $p_{左}$ 和$p_{左}'$代入，得

$$[p_0+\rho_{水}g(h_1-h_2)]h_1=[p_0+(\rho_{汞}-\rho_{水})gH]\left[\frac{1}{2}(h_1+h_2-H)\right]$$

取毫米汞柱(mmHg)为 p_0 的单位，上式化为

$$\left[p_0+\frac{1}{13.6}(h_1-h_2)\right]h_1=\left[p_0+\frac{12.6}{13.6}H\right]\left[\frac{1}{2}(h_1+h_2-H)\right]$$

由此算出

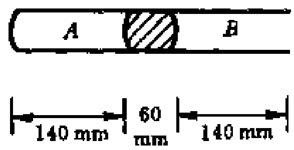
$$p_0=144\ \text{mmHg}$$

在教学中为了培养学生灵活处理各种具体问题的能力，常在某类题目中保留诸如大气压(atm)、

毫米汞柱(mmHg)或厘米汞柱(cmHg)等压强单位，它们与国际标准的压强单位帕(P_a)之间的换算关系为

$$1\ \text{atm} = 1.01325\times 10^5\ \text{Pa} = 760\ \text{mmHg} = 76\ \text{cmHg}$$

【题5】 在一端封闭、一端开口、内径均匀的直玻璃管内，有一段60 mm长的水银柱．当管水平放置达到平衡时，闭端A管内空气柱长140 mm，开端B管内空气柱长也为140 mm，如热图1－5－1所示．今将此管轻轻倒转，使开口向下，然后再竖直地插入水银槽内，达到平衡时管中闭端A管内空气柱长133 mm，设大气压强为760 mmHg，温度不变．试求槽中水银进入管中的高度H.



热图1－5－1

【分析】 如热图1－5－1，管水平放置时，A和B内均为大气压强，达到平衡．竖直且开口向下(尚未插入水银槽)时，B内仍为大气压强，且等于A内气体压强与60 mmHg的压强之和，才能平衡．故A内气体压强减小了，换言之，A内气体等温膨胀，体积加大了．因汞柱体积不变，B内必定有一部分气体被挤出外泄，这一点容易被忽视．再将管竖直地插入水银槽，B内剩余的气体也被封闭起来，并压缩，与此同时A内气体也被压缩，A和B内气体压强之差仍为该段汞柱．B内气体被封闭压缩后，其压强当然要高于大气压强，因此由槽进入B内的汞面将低于槽中的汞面，才能保持平衡．

本题涉及两个过程：管由水平到竖直，再竖直插入水银槽．两个都是等温过程．区别在于，前者B内始终为大气压强，空气外泄；后者B内气体封闭压缩，压强增大．

【解】 当管由水平倒转开口向下时，A内空气等温膨胀，压强由$p_A = 760$ mmHg减为$p_A' = (760-60)$ mmHg，空气柱长度由$L_A = 140$ mm增为L_A'，由玻意耳定律

$$L_A' = \frac{p_A L_A}{p_A'} = \frac{760\times 140}{760-60} = 152\ \text{mm}$$

此时B内空气柱长度为

$$L_B' = 140 + 140 - 152 = 128\ \text{mm}$$

即B内气体一部分(长度为12 mm)外泄．在此过程中，B内气体压强不变，仍为大气压强，即

$$p_B' = p_B = 760\ \text{mmHg}$$

把管竖直插入水银后，如热图1－5－2，A内空气柱长为$L_A'' = 133$ mm，其中气体的压强为

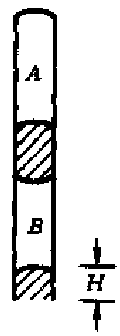
$$p_A'' = \frac{p_A L_A}{L_A''} = \frac{760\times 140}{133} = 800\ \text{mmHg}$$

此时B内空气压强为

$$p_B'' = 800 + 60 = 860\ \text{mmHg}$$

故B内空气柱的长度为

$$L_B'' = \frac{p_B' L_B'}{p_B''} = \frac{760\times 128}{860} = 113\ \text{mm}$$

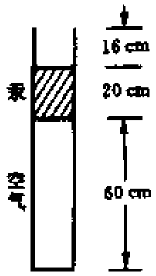


热图1－5－2

因此，如热图1－5－2所示，进入玻璃管中的水银柱的高度为

$$H=(L_A+L_B)-(L_A''+L_B'')=34\ \text{mm}$$

【题 6】 如图，一根均匀玻璃管长 96 cm，一端封闭，一端开口，竖直放置，开口端向上．管内有一段长为 20 cm 的水银柱，当温度为 27 ℃时，水银柱下方被封闭的空气柱的长度为 60 cm，外界的大气压强为 76 cmHg．试问当温度升高到多少时，水银柱刚好从管中全部溢出．设玻璃管和水银因温度升高而产生的膨胀可忽略不计，设外界大气压强始终保持不变，设被封闭的空气可视为理想气体．



热图 1－6－1

【分析】 取被水银柱封闭在管下方的空气为研究对象，其压强等于大气压强与水银柱压强之和．当水银柱未溢出管外时，封闭空气的压强等于大气压强与全部水银柱压强之和，保持不变，随着温度的升高，作等压膨胀，将水银柱上推．温度继续上升，水银开始外溢，此时封闭空气的压强等于大气压强与仍留在管内的那部分水银柱压强之和，即压强逐渐减小．因此，此题的求解需分阶段仔细讨论．

【解】 如图，初始状态的空气柱，长 $L_0=60$ cm，压强 $p_0=76+20=96$ cmHg，温度 $T_0=300$ K．然后从 T_0 开始升温，分阶段讨论如下．

第一阶段，水银柱未外溢，气体压强 p_0 不变，当温度从 T_0 升高时，等压膨胀，水银柱上升．设当温度升到 T_1 时，水银柱上端刚好达到管口．由理想气体状态方程

$$\frac{p_0L_0}{T_0}=\frac{p_0(L_0+16)}{T_1}$$

解出

$$T_1=380\ \text{K}$$

第二阶段，温度从 T_1 继续上升，水银开始外溢，留存管内的水银柱的长度为 x（$x<20$cm），仍能维持内、外压强平衡，从而水银柱可不必全部溢出，此时管内封闭气体的压强为$(76+x)$ cmHg，温度设为 T_x，则有

$$\frac{p_0L_0}{T_0}=\frac{(76+x)(96-x)}{T_x}$$

把 p_0、L_0、T_0 代入，得

$$x^2-20x-96\times\left(76-\frac{T_x}{5}\right)=0$$

这是 x 的二次代数方程，x 有实数解的条件是方程的判别式大于、等于零，即

$$\Delta=(20)^2+4\times96\times\left(76-\frac{T_x}{5}\right)\geqslant0$$

亦即要求

$$T_x\leqslant385\ \text{K}$$

满足此条件时，可实现内外平衡的 x 有两个解，分别称为 $x_大$ 和 $x_小$，为

$$x_大=\left[10+\sqrt{100+96\times\left(76-\frac{T_x}{5}\right)}\right]\ \text{cm}$$

$$x_小=\left[10-\sqrt{100+96\times\left(76-\frac{T_x}{5}\right)}\right]\ \text{cm}$$

第二阶段开始时，$T_x=T_1=380$ K，代入得出 $x_{大}=20$ cm，$x_{小}=0$. 显然，实际情况是 $x_{大}=20$ cm，水银并未溢出，刚刚开始溢出．

当温度 T_x 从 $T_1=380$ K 逐渐升高时，从 $x_{大}$与 T_x 的关系式可以看出，$x_{大}$应从 20 cm 逐渐减小，即水银逐渐溢出．当 $T_x=385$ K 时，$x_{大}=10$ cm. 当 $T_x>385$ K 时，上述判别式 $\Delta<0$，x 无实数解，即不存在平衡解．

因此，$T_x=385$ K，$x_{大}=10$ cm 是最后的内外平衡状态，此时管内封闭气体压强仍大于大气压强．由此，水银柱将继续外溢，x 继续减小，直到水银柱全部溢完．但从 $x_{大}=10$ cm 到 $x_{大}=0$，内外已无法达到平衡，这一结果不能从上面的方程中反映出来(方程成立的条件是内外平衡)．

［结论］ 当温度达到 385 K 时，水银柱溢出 10 cm，留存 10 cm，内外平衡．当温度刚刚超过 385K 时，内外无法保持平衡，水银柱将全部从管中迅速溢出．

［讨论］ 许多实际的由一系列非平衡状态构成的非静态过程是无法用通常的方法严格求解的，但仍可根据有关情况作出某些判断，这就是本题的特点．值得提请读者注意．

【题 7】 如热图1－7－1，截面均匀，下端 A 封闭的细长试管 AB 竖直放置．管下端 A 内封有长为 L_0 的空气，管中间是长为 $L=4L_0$ 的水银柱，管上端 B 有长为 L_0 的空气．开始时，管上端 B 与大气连通，大气压强为 $p_0=2\rho gL$，其中 ρ 为水银密度．

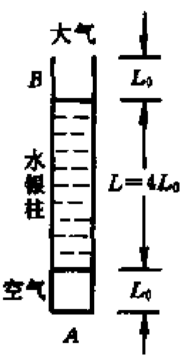
1. 如果先将 B 端封闭，再将试管缓慢倒转 180°，试问管中 A 端空气柱长度 L_A 与 B 端空气柱长度 L_B 各为多少 L_0?

2. 如果 B 端始终与大气连通，不封闭，先将试管缓慢倒转 180°，再缓慢回转 180°复原．试问最后管中 A 端空气柱长度 L_A' 与 B 端空气柱长度 L_B' 各为多少 L_0?

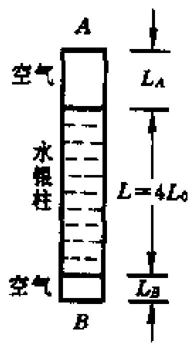
设倒转过程均在大气环境下进行，温度不变．

【分析】 若 B 端封闭，则倒转前后 A、B 两端的空气质量均不变，而压强变化，又所求 L_A 与 L_B 之和仍为 $2L_0$，利用理想气体状态方程即可求出 L_A 与 L_B.

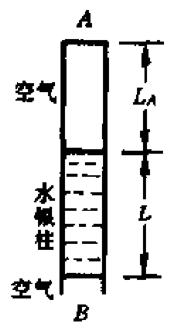
若 B 端不封闭，需考虑倒转时水银是否外泄．若无泄漏，倒转再回转后恢复原状，$L_A'=L_0$，$L_B'=L_0$. 若有泄漏，应先算出倒转后所剩水银柱高度，再求回转后的 L_A'与 L_B'.



热图 1－7－1



热图 1－7－2



热图 1－7－3

【解】 1. 如热图 1－7－1，封闭 B 端，倒转前，A 端空气柱压强为$(p_0+\rho gL)$，B 端空气柱压强为 p_0. 倒转后，如热图 1－7－2，设 A 端空气柱压强为 p_A，则 B 端空气柱压强为 $p_B=p_A+\rho gL$.

由玻意耳定律，有

$$(p_0+\rho gL)L_0=p_AL_A$$
$$p_0L_0=p_BL_B=(p_A+\rho gL)L_B$$

又

$$L_A+L_B=2L_0$$
$$p_0=2\rho gL$$
$$L=4L_0$$

由以上几式，解出

$$L_A=\frac{1}{2}(\sqrt{33}-3)L_0=1.37L_0$$

$$L_B=\frac{1}{2}(7-\sqrt{33})L_0=0.63L_0$$

2. B 端不封闭，设倒转后水银不外泄，如热图 1－7－3 所示，A 端空气柱长度仍记为 L_A，则有

$$(p_0+\rho gL)L_0=(p_0-\rho gL)L_A$$

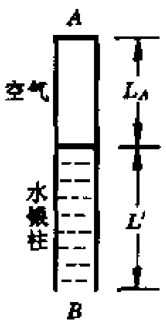
故

$$L_A=3L_0$$

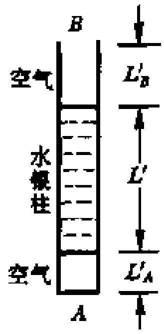
但水银不外泄时，水银柱的长度 $L=4L_0$，即要求

$$L_A\leqslant 2L_0$$

以上两者矛盾，表明倒转时水银必定外泄一部分．



热图 1－7－4



热图 1－7－5

设试管倒转水银外泄一部分后，剩下的水银柱的长度为 L'，A 端长度为 L_A，如热图 1－7－4 所示．回转后，如热图 1－7－5 所示，设 A 端和 B 端空气柱的长度分别为 L_A' 和 L_B'，水银柱仍为 L'．

在倒转过程中，如热图 1－7－1 和热图 1－7－4，应有

$$\begin{cases}(p_0+\rho gL)L_0=(p_0-\rho gL')L_A\\ L_A+L'=2L_0+L=6L_0\end{cases}$$

解出

$$L_A=(\sqrt{13}-1)L_0=2.61L_0$$

$$L'=(7-\sqrt{13})L_0=3.39L_0$$

在回转过程中，如热图 1－7－1、热图 1－7－4 和热图 1－7－5，应有

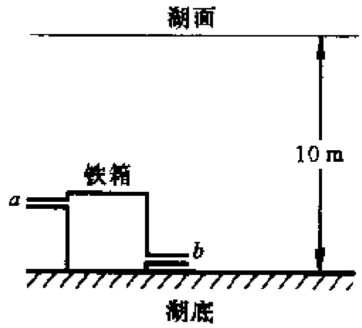
$$\begin{cases}(p_0+\rho gL)L_0=(p_0-\rho gL')L_A=(p_0+\rho gL')L_A' \\ L_B'=L_A-L_A'\end{cases}$$

解出

$$L_A'=\frac{12}{15-\sqrt{13}}L_0=1.05L_0$$

$$L_B'=\frac{4(4\sqrt{13}-10)}{15-\sqrt{13}}L_0=1.55L_0$$

【题 8】 如图，一个装有进水孔 a 和排水孔 b 的铁制水箱，质量为 840 kg，容积为 1 m^3．此箱不慎沉入湖底，箱内充满了水，排水孔 b 与湖面相距 10 m．今采用充气法打捞水箱，先将管子与进水孔 a 连接，用压气机把空气打进箱内，使箱内的水排出一部分．试问要打进多少体积的压强为 1 atm、温度为 27 ℃的空气，水箱才开始上浮？设湖底的水温为 7 ℃，空气重量可略，水箱铁壳的体积可略，水的密度随湖深度的变化也可忽略．



热图 1－8－1

【分析】 随着空气不断打进水箱，水箱所受湖水浮力逐渐增大，以致上浮．据此，可先算出水箱开始上浮时，箱内空气应占据的体积 V．这部分箱内空气的温度 T 和压强 p 即为湖底的水温和压强．另外，湖面上空气的压强 p_0 及温度 T_0 均已知．把空气打入水箱，相当于将湖面上(p_0, T_0, V_0)的空气转变为水箱内(p, T, V)的空气，利用理想气体状态方程可建立起两者的联系，于是 V_0 可求．

【解】 设充气使水箱内空气体积为 V 时，水箱刚好能上浮，则应有

$$\rho Vg=mg$$

式中 $\rho=10^3\ kg/m^3$ 为水的密度，$m=840$ kg 为水箱质量．故

$$V=0.84\ m^3$$

此体积小于水箱的容积 1m^3，表明充气使水箱上浮的做法是可行的．湖底的压强为

$$p=p_0+\rho gh$$

式中 p_0 为大气压强，可取 $p_0=1.0\times10^5$ Pa，h 为湖底深度，即 $h=10$ m．计算得出

$$p=2p_0$$

由于水箱下端的排水孔 b 位于湖底，在忽略水箱高度的情况下（与湖深 h 相比），上述湖底压强 p 就是打入水箱的空气的压强．又，湖底水温 T 即为打入水箱的空气的温度，即

$$T=273+7=280\ K$$

湖面上方大气压强为 p_0，温度为 $T_0=(273+27)=300$ K．空气打入水箱，即将湖面(p_0, T_0, V_0)的空气转变为水箱内(p, T, V)的空气，设为理想气体，则

$$\frac{pV}{T}=\frac{p_0V_0}{T_0}$$

需要打进的 1 atm、27 ℃的空气的体积为

$$V_0=\frac{pV}{T}\cdot\frac{T_0}{p_0}=1.8\ \mathrm{m}^3$$

【题 9】 一球形热气球，总质量（包括隔热很好的球皮以及吊篮等装载）为 300 kg．经加热后，气球膨胀到最大体积，其直径为 18 m．设球内外气体成份相同，球内气体压强稍高于大气压．已知大气温度为 27 ℃，压强为 1 atm，标准状态下空气的密度为 1.3 kg/m³．试问热气球刚好能上升时，球内空气的温度应为多少？

【分析】 在热气球问题中应注意，球内空气密度虽小于球外空气密度，但两者同数量级，故球内热空气的质量不可忽略．

【解】 热气球排开的空气质量为

$$M_1=\frac{4}{3}\pi r^3\rho_1$$

式中 $r=9$ m 为球半径，ρ_1 是温度 $T_1=300$ K、压强 $p_1=1$ atm 的空气的密度．标准状态（$T_0=273$ K，$p_0=1$ atm）下的空气密度为 $\rho_0=1.3$ kg/m³．由此

$$\rho_1=\frac{p_1}{T_1}\frac{T_0}{p_0}\rho_0=1.18\ \mathrm{kg/m^3}$$

代入，得

$$M_1=3603\ \mathrm{kg}$$

因球皮、吊篮等装载的质量为 300 kg，故气球内热空气的质量 M_2 为

$$M_2=M_1-300\ \mathrm{kg}=3303\ \mathrm{kg}$$

气球内热空气的压强为 $p_2=p_1=1$ atm（忽略 p_2 与 p_1 的差异），温度记为 T_2，体积 V 即为热气球容积，摩尔质量为 μ，则有

$$p_2V=\frac{M_2}{\mu}RT_2$$

即

$$T_2=\frac{p_2\mu V}{M_2R}$$

对于被热气球排开的质量为 M_1 的空气，有

$$p_1V=\frac{M_1}{\mu}RT_1$$

即

$$\frac{\mu V}{R}=\frac{M_1T_1}{p_1}$$

代入 T_2 的公式，得

$$T_2=\frac{p_2}{M_2}\cdot\frac{M_1}{p_1}T_1=\frac{M_1}{M_2}T_1=327\ \mathrm{K}$$

为使热气球刚好能上升，球内空气应加热到 327K．

【题10】 一薄壁圆柱形浮沉子一端封闭，一端开口．将开口端向下插入密度为 ρ 的液体中，浮沉子内气体被封闭，当液体上方大气压强为 p_0 时，闭端刚好与液面持平．若突然将液面上方压强增为 $2p_0$，试证明浮沉子下沉深度 x 与它在该处运动速度 v 的关系为

$$v^2=2gx-\frac{2p_0}{\rho}\ln\left(1+\frac{\rho gx}{2p_0}\right)$$

其中 g 为重力加速度．设空气密度与 ρ 相比可以忽略，空气可看作理想气体，不计任何粘滞阻力，且设液体内处处温度相同．

【分析】 开始时浮沉子闭端与液面持平，即刚好浮在液面下，由浮力与重力平衡，可将浮沉子的质量 M 用液体密度 ρ 与空气柱体积 V_0 表示．

上方压强突然增为 $2p_0$ 后，浮沉子内空气被压缩，浮力减小，产生向下的加速度．浮沉子内空气被压缩后的体积与下沉深度 x 有关，于是可建立加速度与 x 之间的关系，由此即可解出浮沉子速度 v 与 x 的关系．

顺便指出，由于浮沉子下沉的加速度不可能达到 g，故应有 $v^2<2gx$．

【解】 设开始时浮沉子内空气柱的体积为 V_0，因重力与浮力平衡，有

$$Mg=\rho V_0 g$$

即

$$M=\rho V_0$$

其中 M 为浮沉子的质量．

当浮沉子上方压强突然增为 $2p_0$ 时，其中空气被压缩，浮力减少，向下加速运动．当浮沉子下沉深度为 x 时，其中气体体积减小为 $V(x)$，所受压强除外加的 $2p_0$ 外，还有液柱的压强 ρgx．因液体内温度处处相等，气体压缩是等温过程，有

$$p_0V_0=(2p_0+\rho gx)V(x)$$

浮沉子在 x 处受重力 Mg，浮力 $\rho V(x)g$，由牛顿第二定律

$$Mg-\rho V(x)g=M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

由以上三式，得

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\left(1-\frac{p_0}{2p_0+\rho gx}\right)g$$

式中 v 是浮沉子在 x 处的速度．因

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

故

$$v\,\mathrm{d}v=\left(1-\frac{p_0}{2p_0+\rho gx}\right)g\,\mathrm{d}x$$

积分，考虑到初条件为 $x=0$ 处，$v=0$，得

$$v^2=2gx-\frac{2p_0}{\rho}\ln\left(1+\frac{\rho gx}{2p_0}\right)$$

【题11】 宇宙飞船投放的一个仪器以恒定速度垂直下落，接近并到达某行星的表面．该仪器用

约定单位记录的压强 p 随时间 t 变化的曲线如图所示．落到行星表面时，该仪器还测出环境温度为 $T=700$ K，行星表面自由落体加速度为 $g=10$ m/s^2．已知该行星的大气由二氧化碳构成．试求仪器下落的速度 v．

【分析】 行星大气在平衡情况下，各高度处的热运动压强等于重力压强．以 v 竖直下落的仪器在 $\mathrm{d}t$ 时间内下降的高度为 $\mathrm{d}h=v\mathrm{d}t$，相应的重力压强之差为 $\mathrm{d}p=\rho g\mathrm{d}h$，其中 ρ 是行星大气在某高度的密度．由理想气体状态方程，可将该处的 ρ 与热运动压强 p 联系起来，即 $\rho=\dfrac{\mu p}{RT}$．于是，仪器下落速度 v 可通过某高度处的 p、$\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$、$g$、$T$ 等量表示．图中给出的 $p(t)$ 曲线的端点 A 对应落地点，由图可量出行星表面的 p 与$\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$，另外，行星表面的 T、g 已知，于是 v 可求．

【解】 设 $\mathrm{d}t$ 时间内仪器从某高度下降的高度为 $\mathrm{d}h$，则有

$$\mathrm{d}h=v\mathrm{d}t$$

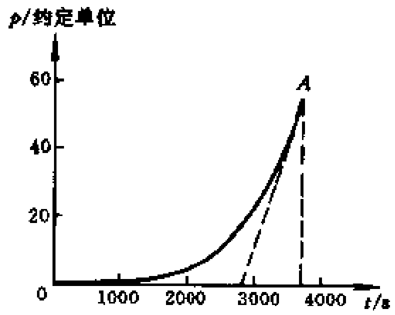
相应的行星大气重力压强差为

$$\mathrm{d}p=\rho g\mathrm{d}h$$

式中 ρ 和 g 分别为该高度处的大气密度和重力加速度．

行星大气在平衡时，重力压强等于热运动压强，均用 p 表示，由理想气体状态方程，有

$$pV=\frac{M}{\mu}RT$$



热图 1－11－1

即

$$\rho=\frac{M}{V}=\frac{\mu p}{RT}$$

由以上几式，得出

$$v=\frac{RT}{\mu pg}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$$

在行星表面，已知 $T=700$ K，$g=10$ m/s^2．又由图中 A 点量出，

$$p=55\ \text{约定单位}$$

行星表面的$\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$可通过 A 点作曲线的切线得出．如图，作两条辅助线（虚线），斜直线即为通过 A 点的曲线的切线，直线为通过 A 点与 p 轴平行的直线．直线的高度（即 A 点的纵坐标）约为 55 约定单位，斜直线及直线与大轴的交点相距约为 900 s，于是得出 A 点的切线斜率$\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\approx 55\ \text{约定单位}/900\ \text{s}$$

又，二氧化碳的

$$\mu=44\times10^{-3}\ \text{kg/mol}$$

把以上数据代入 v 表达式，得出

$$v\approx14.6\ \text{m/s}$$

由于$\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$是借助于作图测算得出的，误差较大，故 v 的结果也有较大误差．

【题12】 所谓某混合理想气体中各组分的体积百分比，是指各组分单独处在与混合理想气体相同压强与温度状态下，其体积在混合理想气体体积中所占的百分数．空气可当作理想气体，空气中几种主要组分的体积百分比是，氮(N_2)78%，氧(O_2)21%，氩(Ar)1%．试求在标准状态(1atm，0℃)下空气的密度．已知氮、氧、氩的分子量分别是28.0，32.0，39.9.

【分析】 空气的密度等于其中各组分密度之和．各组分均可看作单元系理想气体，由理想气体状态方程可将各组分的密度与它在空气中的分压强联系起来，分压强则可由其体积百分比确定．于是可解．

【解】 取体积为 V、压强为 p、温度为 T 的空气，则氮、氧、氩在 p、T 状态下单独存在时所占体积分别为

$$V_{N_2}=0.78V,\quad V_{O_2}=0.21V,\quad V_{Ar}=0.01V$$

上述三个体积统一表为 V_i．若将各组分单独存在时的体积 V_i 均扩大为V，保持温度 T 不变，则各组分的压强将由 p 变为p_i．由单元系理想气体状态方程，有

$$p_iV=pV_i \qquad (i=N_2,O_2,Ar)$$

即

$$p_{N_2}=\frac{V_{N_2}}{V}p=0.38p$$

$$p_{O_2}=\frac{V_{O_2}}{V}p=0.21p$$

$$p_{Ar}=\frac{V_{Ar}}{V}p=0.01p$$

由道尔顿分压定律，p_i 即为第 i 组分在空气中的分压强．

各组分在空气中的密度分别为

$$\rho_i=\frac{p_i\mu_i}{RT}$$

标准状态下 $p=1.013\times10^5$ Pa，$T=273$ K. 又 $\mu_{N_2}=28.0\times10^{-3}$ kg/mol，$\mu_{O_2}=32.0\times10^{-3}$ kg/mol，$\mu_{Ar}=39.9\times10^{-3}$ kg/mol. 把这些数据代入，得

$$\rho_{N_2}=0.98\ \mathrm{kg/m^3},\quad \rho_{O_2}=0.30\ \mathrm{kg/m^3},\quad \rho_{Ar}=0.018\ \mathrm{kg/m^3}$$

故标准状态下空气的密度为

$$\rho=\rho_{N_2}+\rho_{O_2}+\rho_{Ar}=1.298\ \mathrm{kg/m^3}$$

【题13】 一块铝片先在干燥空气中测量质量，再在潮湿空气中测量质量．已知潮湿空气中水蒸气的分压为15.2 mmHg，称质量时采用铜砝码，大气压强为760 mmHg，在两种测量时温度相同为20 ℃．如果所用称的灵敏度只能对0.1 mg 的差别才有反应，试问铝片至少应有多少质量才能在上述两种测量下表现出差别．

已知铝的密度为2.7 g/cm³，铜的密度为8.5 g/cm³，20 ℃的空气的密度为0.0012 g/cm³，水蒸气的密度为0.00075 g/cm³.

【分析】 在同样温度(20 ℃)下，$\rho_{空气}$与$\rho_{水蒸气}$的不同，导致$\rho_{干空气}$与$\rho_{湿空气}$不同，使得干空气和湿空气对同一物体的浮力不同，因而在干空气和湿空气中分别用铜砝码称同一块铝片时，将引起称量结果的差别．称的灵敏度规定了这种差别能够表现出来的最小值，从而也就规定了铝片质量的最小值．

值得注意的是，干空气和湿空气不仅对铝片有不同浮力，而且对铜砝码也有不同浮力，这是应该考虑在内的．

【解】 大气压强为 760 mmHg 时，水蒸气分压为 15.2 mmHg，表明湿空气中有$\frac{15.2}{760}=\frac{1}{50}$体积的水蒸气以及$\frac{49}{50}$体积的空气．于是，在 20 ℃时，

$$\rho_{干空气}=\rho_{空气}=0.0012\ \text{g/cm}^3$$

$$\rho_{湿空气}=\frac{1}{50}(49\rho_{空气}+\rho_{水蒸气})$$

$$=\frac{1}{50}(49\times0.0012+0.00075)=0.00119\ \text{g/cm}^3$$

$$\rho_{干空气}-\rho_{湿空气}=0.00001\ \text{g/cm}^3$$

1g 铝的体积为 0.370 $\text{cm}^3\left(=\frac{1}{2.7}\right)$，1 g 铜的体积为 0.118 $\text{cm}^3\left(=\frac{1}{8.5}\right)$，两者相差 0.252 cm^3．1 g 铝在干空气中称量达到平衡(用铜砝码)，换以湿空气(仍用铜砝码)，向上的浮力减少了

$$0.252\ \text{cm}^3\times0.00001\ \text{g/cm}^3\times g=0.0000025\text{g}\ 质量的重力$$

称的灵敏度为 0.0001 g，为使在干空气和湿空气中称量的差别能够表现出来，铝片必须至少比 1 g 大

$$\frac{0.0001\ \text{g}}{0.0000025\ \text{g}}=40\ 倍$$

即铝片的质量至少应为 40 g.

【题 14】 由固态导热材料做成的长方体容器，被一隔板分成两个互不连通的部分，其中分别贮有相等质量的干燥空气和潮湿空气，在潮湿空气中水汽质量占 2%．

1. 若隔板可自由无摩擦地沿器壁滑动．试求达到平衡后，干空气和湿空气所占体积的比值．

2. 若一开始采用能确保不漏气的方式将隔板抽出．试求达到平衡后容器内气体的压强，与未抽出隔板时干空气和湿空气各自的压强这三者的比值．

设干空气和湿空气均可视为理想气体．

【分析】 1. 若隔板可无摩擦地滑动，则两侧干空气和湿空气达到平衡的条件是：压强相同，温度相同(即为环境温度)，设为 p 和 T．利用理想气体状态方程，可把平衡后干空气的体积表为 p、T 等量．平衡后湿空气的压强 p 包括空气的分压强 $p_{空}$ 和水汽的分压强 $p_{水}$，它们与各量的关系也由理想气体状态方程给出，再利用题目所给条件，不难求出结果．

2. 利用理想气体状态方程及有关条件应可顺利求解．

【解】 1. 平衡后，干空气和湿空气的压强相同，温度相同，记为 p，T；体积可能不同，分别记为 $V_{干}$ 和 $V_{湿}$．又，干空气和湿空气的质量相同，记为 M；纯空气的摩尔质量记为 $\mu_{空}$，水汽的摩尔

质量记为 $\mu_{水}$．

对于干空气，由理想气体状态方程

$$pV_{干}=\frac{M}{\mu_{空}}RT$$

即

$$V_{干}=\frac{MRT}{\mu_{空}p}$$

对于湿空气，其中空气分压强记为 $p_{空}$，水汽分压强记为 $p_{水}$，由道尔顿分压定律

$$p=p_{空}+p_{水}$$

由理想气体状态方程，

$$p_{空}V_{湿}=\frac{M_{空}}{\mu_{空}}RT$$

$$p_{水}V_{湿}=\frac{M_{水}}{\mu_{水}}RT$$

其中 $M_{空}$ 和 $M_{水}$ 分别是湿空气中纯空气的质量和水汽的质量，由题设

$$M_{空}=0.98M,\quad M_{水}=0.02M$$

由以上几式，得

$$pV_{湿}=(p_{空}+p_{水})V_{湿}=\left(\frac{0.98}{\mu_{空}}+\frac{0.02}{\mu_{水}}\right)MRT$$

于是，平衡后干空气和湿空气所占体积之比为

$$V_{干}:V_{湿}=\frac{1}{\mu_{空}}:\left(\frac{0.98}{\mu_{空}}+\frac{0.02}{\mu_{水}}\right)$$

因

$$\frac{\mu_{空}}{\mu_{水}}=\frac{28.8}{18}=1.6$$

故

$$V_{干}:V_{湿}=1:1.012=0.988$$

2．隔板抽出前，干空气和湿空气的体积相同，记为 V_0，压强分别记为 $p_{干}$ 和 $p_{湿}$．由理想气体状态方程

$$p_{干}V_0=\frac{M}{\mu_{空}}RT$$

$$p_{湿}V_0=\frac{0.98M}{\mu_{空}}RT+\frac{0.02M}{\mu_{水}}RT$$

抽出隔板，干空气与湿空气混合达到平衡后，系统的压强记为 p，则有

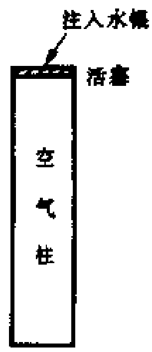
$$p(2V_0)=\frac{1.98M}{\mu_{空}}RT+\frac{0.02M}{\mu_{水}}RT$$

故三个压强之比为

$$p:p_{干}:p_{湿}=\frac{1}{2}\left(\frac{1.98}{\mu_{空}}+\frac{0.02}{\mu_{水}}\right):\frac{1}{\mu_{空}}:\left(\frac{0.98}{\mu_{空}}+\frac{0.02}{\mu_{水}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1.98}{28.8}+\frac{0.02}{18}\right):\frac{1}{28.8}:\left(\frac{0.98}{28.8}+\frac{0.02}{18}\right)=1.006:1:1.012$$

【题 15】 如图所示，一端开口，另一端封闭的长圆柱形导热容器开口向上竖直放置．在气温为 27 ℃，气压为 760 mmHg，相对湿度（空气中水蒸气压强与该温度下饱和水蒸气压强的比值）为 75% 时，同一质量可忽略不计的光滑薄活塞将开口端封闭．已知水蒸气的饱和蒸汽压在 27 ℃ 时为 26.7 mmHg，在 0 ℃ 时为 4.58 mmHg．



热图 1-15-1

试问：1．若保持温度不变，通过在活塞上方注入水银增加压强的方法使管内开始有水珠出现，则容器至少应为多长？

2．若在水蒸气刚开始凝结时固定活塞，降低容器的温度，则当温度降至 0 ℃ 时，容器内气体的压强为多大？

【分析】 1．管内潮湿空气中的水蒸气，在其压强达到饱和蒸汽压时，开始凝结出现水珠．为了使水蒸气压强增大达到饱和蒸汽压，采用注入水银等温压缩的方法．由玻意耳定律可求得出现水珠时空气柱的长度（需注入水银的长度同时求出）．此时管内气体的压强为大气压与注入水银柱的压强之和．由此可解．

2．与第 1 问保持恒温不同，现在是固定活塞，体积不变，遵从查理定律．注意潮湿空气中水蒸气凝结生成的水很少，体积可略．由查理定律不难求出管内干燥空气在降温过程中压强的变化，加上饱和水蒸气的压强，即得管内潮湿空气的压强．

【解】 1．由题设，在 27 ℃ 时饱和水蒸气压强为

$$p_{饱}=26.7\ \text{mmHg}$$

在开始时，即在注入水银前，由题设的相对湿度，可知管内潮湿空气柱中所含水蒸气的分压强为

$$p_{气}=\frac{3}{4}p_{饱}$$

设容器长度为 L_0，随着注入水银，活塞下压，等温压缩．设当空气柱长度减小为 L 时，管内水蒸气开始凝结成水，即达到饱和蒸汽压，对水蒸气，由玻意耳定律，有

$$p_{气}L_0=p_{饱}L$$

由以上两式，解出

$$L=\frac{3}{4}L_0$$

即管内开始出现水珠时，潮湿空气柱的长度从 L_0 减为 $\frac{3}{4}L_0$．换言之，活塞上方至多注入的水银柱高度为 $\frac{1}{4}L_0$．达到平衡时，管内外压强相同，即活塞上下压强相同．活塞上方压强为

$$p_{上}\leqslant\left(760+\frac{L_0}{4}\right)\ \text{mmHg}$$

活塞下方压强（即管内空气柱压强），由玻意耳定律，为

$$p_{下}=\frac{4}{3}p_0=\frac{4}{3}\times 760\ \text{mmHg}$$

其中 $p_0=760$ mmHg 是注入水银前空气柱的压强即大气压强．平衡时，

$$p_上 = p_下$$

故

$$L_0 \geqslant 1013\ \text{mm}$$

即容器至少需要长 1013 mm，才能经等温压缩使管内潮湿空气中的水蒸气凝结，出现水珠．

2．水蒸气凝结生成的水珠所占体积很小，可以忽略不计．刚开始出现水珠时，管内干燥空气的分压强为

$$p_1 = \left(\frac{4}{3}\times 760 - 26.7\right)\ \text{mmHg} = 986.3\ \text{mmHg}$$

其中 $p_2 = 26.7$ mmHg 是管内饱和水蒸气的分压强．经等体降温到 0 ℃，干燥空气分压强减为 p_1'，由查理定律

$$p_1' = \frac{273}{273+27}p_1 = 897.5\ \text{mmHg}$$

由题设，0 ℃时水蒸气的饱和蒸气压为

$$p_2' = 4.58\ \text{mmHg}$$

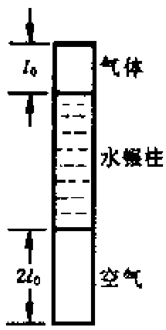
因此，管内潮湿空气在 0 ℃的总压强为

$$p' = p_1' + p_2' = 902.1\ \text{mmHg}$$

【题 16】 如图，一根两端封闭、粗细均匀的石英管竖直放置，管内有一段水银柱，水银柱下方为空气，上方为一种可分解的双原子分子气体．这种双原子分子气体的性质是，当温度 $T > T_0$ 时，它的双原子分子开始分解为单原子分子．若用 n_0 表示 T_0 时的双原子分子数，用 Δn 表示 $(T_0 + \Delta T)$ 时分解了的双原子分子数，则当 ΔT 很小时，分解遵循的规律为

$$\frac{\Delta n}{n_0} = \frac{\Delta T}{T_0}$$

已知初始温度为 T_0，此时下方空气柱的长度为 $2l_0$，上方气柱的长度为 l_0，水银柱产生的压强为下方空气柱压强的 α 倍 $(0 < \alpha < 1)$．设石英管和水银柱体积随温度的变化可以忽略．



热图 1－16－1

试问当温度由 T_0 稍稍增加时，水银柱将上升还是下降？

【分析】 求解此类问题的一种方法是，在温度变化时假设水银柱不动，然后分别计算上方气体与下方空气各自压强的变化．如果变化的结果是，上方气体压强与水银柱重力压强之和大于下方空气压强，则真实情况是水银柱下降．反之，如果前两者之和小于后者，则水银柱上升．

在体积不变的前提下，下方空气因升温导致的压强变化容易由理想气体状态方程求得．在计算上方气体因升温导致的压强变化时，则需考虑部分双原子分子的分解，并利用道尔顿分压定律．

【解】 当温度为 T_0 时，下方空气柱压强记为 p_0，当温度升为 $(T_0 + \Delta T)$ 时，其压强记为 p_1．若设体积不变，则应有

$$\frac{p_0}{T_0} = \frac{p_1}{T_0 + \Delta T}$$

即

$$p_1=\left(1+\frac{\Delta T}{T_0}\right)p_0$$

当温度为 T_0 时,由题设水银柱产生的压强为 αp_0,故上方双原子分子气体的压强为

$$p_0-\alpha p_0=(1-\alpha)p_0$$

当温度升为$(T_0+\Delta T)$时,有 Δn 个双原子分子分解为$2\Delta n$ 个单原子分子．设 T_0 时双原子分子气体的摩尔数为 ν,则$(T_0+\Delta T)$时双原子分子气体的摩尔数为

$$\nu_{双}=\left(1-\frac{\Delta n}{n_0}\nu\right)$$

单原子分子气体的摩尔数为

$$\nu_{单}=\frac{2\Delta n}{n_0}\nu$$

假设体积不变时,两种气体的分压强分别为 $p_{双}$ 和 $p_{单}$,把石英管截面积记为 S,则有

$$p_{双}l_0S=\nu_{双}R(T_0+\Delta T)=\left(1-\frac{\Delta n}{n_0}\right)\nu R(T_0+\Delta T)$$

$$p_{单}l_0S=\nu_{单}R(T_0+\Delta T)=2\frac{\Delta n}{n_0}\nu R(T_0+\Delta T)$$

故在$(T_0+\Delta T)$时,上方气体的总压强(记为 p_2)应为

$$p_2=p_{双}+p_{单}$$

把 $p_{双}$ 和 $p_{单}$ 代入,在$(T_0+\Delta T)$时,上方气体的状态方程为

$$p_2lS=\left(1+\frac{\Delta n}{n_0}\right)\nu R(T_0+\Delta T)$$

而在 T_0 时上方气体的状态方程为

$$(1-\alpha)p_0l_0S=\nu RT_0$$

由以上两式,解出

$$p_2=(1-\alpha)\left(1+\frac{\Delta n}{n_0}\right)\left(1+\frac{\Delta T}{T_0}\right)p_0$$

在假设体积不变,即假设水银柱不因升温而移动的情况下,在$(T_0+\Delta T)$时,上方气体压强与水银柱重力压强之和为

$$p_{和}=p_2+\alpha p_0=\left[(1-\alpha)\left(1+\frac{\Delta n}{n_0}\right)\left(1+\frac{\Delta T}{T_0}\right)+\alpha\right]p_0$$

因$\frac{\Delta n}{n_0}=\frac{\Delta T}{T_0}$,且 ΔT 很小,故可引入小量 ε

$$\varepsilon=\frac{\Delta T}{T_0}=\frac{\Delta n}{n_0}$$

于是 $p_{和}$ 可表为

$$p_{和}=[(1-\alpha)(1+\varepsilon)^2+\alpha]p_0$$

可见,升温到$(T_0+\Delta T)$时,下方空气柱压强为 p_1,上方气体压强与水银柱重力压强之和为 $p_{和}$,用 Δp 表示两者之差

$$\Delta p = p_{和} - p_1$$
$$= [(1-\alpha)(1+\epsilon)^2 + \alpha - (1+\epsilon)]p_0 = [(1-2\alpha)\epsilon + (1-\alpha)\epsilon^2]p_0$$

由于

$$0 < \alpha < 1, \epsilon \ll 1$$

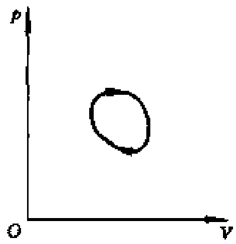
因此，可以作出如下判断

当 $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$ 时，$\Delta p > 0$，水银柱应下降，

当 $\alpha < \frac{1}{2}$ 时，$\Delta p < 0$，水银柱应上升．

第二章 热力学第一、第二定律

【题1】 试证明如图所示的理想气体循环过程的比热 c 必不为常量 .



热图 2-1-1

【解】 当系统从某一初态出发,经如图的循环过程回到该态后,内能不变,即

$$\Delta U=0$$

因如图的循环过程沿顺时针方向进行,故系统对外作功

$$W>0$$

由热力学第一定律,系统经循环过程净吸热为

$$Q=W>0$$

循环过程由一系列微小过程构成,在任一微小过程中吸热 ΔQ,系统温度改变 ΔT,设系统的质量为 M,则在该微小过程中的比热 c 定义为

$$c=\frac{\Delta Q}{M\Delta T}$$

循环过程净吸热 Q 为各微小过程吸热之和,即

$$Q=\Sigma\,\Delta Q$$

由以上两式,得

$$Q=\Sigma cM\Delta T$$

若 c 为常量,则

$$Q=cM\Sigma\Delta T$$

循环一周,回复初态,$\Sigma\Delta T=0$,故

$$Q=0$$

与上述 $Q>0$ 矛盾,可见在循环过程中系统的比热 c 不可能是常量 .

【讨论】 1. 上述结论与循环过程的方向无关 . 如果循环过程沿逆时针方向进行,可以同样证明 . 如果循环过程既有顺时针方向进行的,又有逆时针方向进行的部分,仍有同样的结论,因为只需将上述证明中用到的 $Q=W>0$ 改为 $Q=W\neq0$ 即可 .

2. 上述证明并不涉及理想气体的特殊性质,因此也适用于非理想气体的循环过程 .

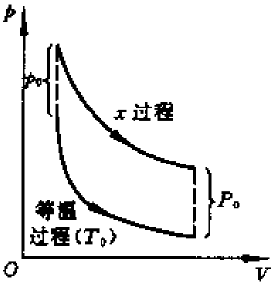
【题2】 摩尔质量为 μ,等体比热为 c_V(c_V 为常量)的理想气体所经历的 x 过程如热图 2-2-1 所示 . 若在此 $p-V$ 坐标面上,把上述 x 过程向下平移 p_0($p_0>0$),则所得之曲线刚好是该理想气体温度为 T_0 的等温过程 .

1. 试确定 x 过程中的温度下限,并指明该温度在 x 过程曲线的哪个部位 .

2. 试导出 x 过程中比热 c 与压强 p 的定量关系,并画出 $c\sim p$ 曲线 .

【分析】 如所周知,在 $p-V$ 坐标面上,等温过程是双曲线,不同温度的等温曲线构成双曲线

族,从原点向外,各等温曲线的温度逐渐升高．由于 x 过程是 T_0 等温线向上平移得出的,所以每一条等温双曲线与 x 过程只有一个交点,该点(即该状态)的温度就是与之相交的等温曲线的温度．因此,可以定性地判断,x 过程的温度由左上端向右下端逐渐增高,左上端温度最低,右下端温度最高．



热图 2-2-1

但为了定量地讨论,就需要给出 x 过程的过程方程．设 x 过程中任一状态的压强为 p,体积为 V,如热图 2-2-1,$(p-p_0)$就是 T_0 等温过程中体积亦为 V 的状态的压强,这个状态的状态方程$(p-p_0)V=\frac{M}{\mu}RT_0$就是用 $p-V$ 表示的x 过程的过程方程．把它变换成 $V-T$ 或 $p-T$ 形式的过程方程,即可确定 x 过程中最低温度状态之所在．

根据比热的定义 $c=\frac{\Delta Q}{M\Delta T}$,由 $V-T$ 形式的 x 过程方程确定 ΔV 与 ΔT 的关系,进而利用热力学第一定律确定 ΔQ 与 ΔT 的关系,即可得出 x 过程中$c-p$ 的关系,并作图．

【解】 设理想气体的质量为 M,在 x 过程中任取一点,其压强为 p,体积为 V. 将该态从热图 2-2-1 中竖直下移 p_0,得到的压强为$(p-p_0)$,体积为 V 的状态是 T_0 等温线上的一点,其状态方程为

$$(p-p_0)V=\frac{M}{\mu}RT_0$$

此即 x 过程的过程方程．

理想气体状态方程为

$$pV=\frac{M}{\mu}RT$$

式中 T 是x 过程中p,V 态的温度．

由以上两式,消去 p 或V,得出用 $V-T$ 或$p-T$ 表示的x 过程的过程方程为

$$V=\frac{MR}{\mu p_0}(T-T_0)$$

$$p=\frac{p_0T}{T-T_0}$$

在以上两式中,因 $V>0$ 及 $p>0$,故

$$T>T_0$$

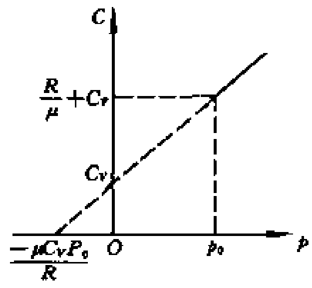
即 x 过程中任一状态的温度都高于T_0. 由 $V-T$ 关系式可知,随着 V 的增大,温度 T 逐渐增高．因此,如热图 2-2-1,在 x 过程中,从左上端(体积最小)到右下端(体积最大)温度逐渐升高,左上端状态的温度最低,右下端状态的温度最高．

2. 在 x 过程中任取一小过程,由上述 $V-T$ 关系式可以得出在此小过程中 V 的增量 ΔV 与相应的T 的增量 ΔT 的关系为

$$\Delta V=\frac{MR\Delta T}{\mu p_0}$$

由热力学第一定律,在此小过程中吸热为

$$\Delta Q = p\Delta V + \Delta U$$
$$= p\frac{MR}{\mu p_0}\Delta T + c_V M\Delta T$$
$$= \left(\frac{pR}{\mu p_0} + c_V\right)M\Delta T$$



热图 2－2－2

因此，在 x 过程中的比热为

$$c = \frac{\Delta Q}{M\Delta T}$$
$$= \frac{R}{\mu p_0}p + c_V$$

$c-p$ 曲线如热图 2－2－2 中的实线所示，是一条直线，即在 x 过程中比热 c 随压强 p 线性地增大．

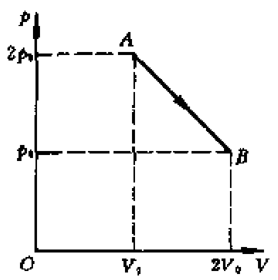
【题 3】 质量为 M，摩尔质量为 μ，等体比热为 $c_V=\frac{3R}{2\mu}$ 的理想气体经历的直线过程如热图 2－3－1 所示．

1. 试确定此过程的 $T-V$ 关系，并画图．

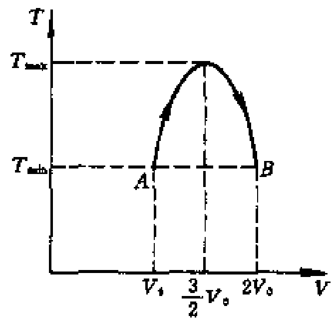
2. 试确定此过程中比热 c 与体积 V 之间的关系，画出曲线，并依据 $c=\frac{\mathrm{d}Q}{M\mathrm{d}T}$ 对各段曲线 c 值的正、负作定性解释．

【分析】 $p-V$ 图上的直线（如热图 2－3－1 所示）表明过程中 p 与 V 成线性关系，利用图上 A 态和 B 态的参量，写出过程中 $p-V$ 的定量关系，把它与理想气体状态方程结合，即可得出此过程中的 $T-V$ 关系，并画图．

根据比热的定义 $c=\frac{\mathrm{d}Q}{M\mathrm{d}T}$，利用 $T-V$ 关系式得出 $\mathrm{d}T$ 与 $\mathrm{d}V$ 的关系，再利用热力学第一定律给出 $\mathrm{d}Q$ 与 $\mathrm{d}V$ 的关系，由此即可得出 $c-V$ 关系，并画图．然后分段从物理上加以说明．



热图 2－3－1



热图 2－3－2

【解】 1. 如热图 2－3－1，$p-V$ 图上直线过程的方程为

$$p = -\frac{p_0}{V_0}V + 3p_0$$

理想气体的状态方程为

$$pV=\frac{M}{\mu}RT$$

由以上两式，消去 p，得出此过程中 $T-V$ 的关系式为

$$T=-\frac{\mu p_0}{MRV_0}V^2+\frac{3\mu p_0}{MR}V$$

可见此过程的 $T-V$ 曲线是抛物线，如热图 2-3-2 所示，其中温度的极大值与极小值为

$$T_{\max}=\frac{9\mu p_0V_0}{4MR},\quad T_{\min}=\frac{2\mu p_0V_0}{MR}$$

2. 在此过程中任取一小过程，设其中 V 的微小增量为 $\mathrm{d}V$，由上述 $T-V$ 关系式，可算出 T 的相应微小增量 $\mathrm{d}T$ 为

$$\mathrm{d}T=\frac{\mu p_0}{MR}\left(3-\frac{2V}{V_0}\right)\mathrm{d}V$$

由热力学第一定律，在该小过程中，系统吸收的热量为

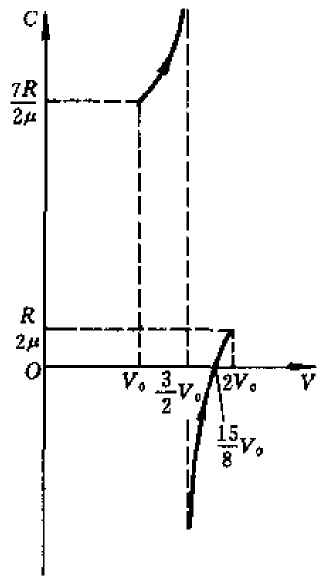
$$\begin{aligned}\mathrm{d}Q&=p\mathrm{d}V+c_VM\mathrm{d}T\\&=\left(-\frac{p_0}{V_0}V+3p_0\right)\mathrm{d}V+\frac{3R}{2\mu}M\frac{\mu p_0}{MR}\left(3-\frac{2V}{V_0}\right)\mathrm{d}V=\left(-\frac{4p_0}{V_0}V+\frac{15}{2}p_0\right)\mathrm{d}V\end{aligned}$$

由上式可见，从 A 态到 B 态的过程中，$V=\frac{15}{8}V_0$ 是吸热和放热的转折点，即

$$\begin{cases}当\ V_0\leqslant V<\frac{15}{8}V_0, & \mathrm{d}Q>0,吸热\\ 当\ V=\frac{15}{8}V_0, & \mathrm{d}Q=0\\ 当\ \frac{15}{8}V_0<V\leqslant 2V_0, & \mathrm{d}Q<0,放热\end{cases}$$

把上述 dT 和 dQ 的表达式，代入比热 c 的定义式，即得

$$c=\frac{\mathrm{d}Q}{M\mathrm{d}T}=\frac{\left(-\frac{4p_0}{V_0}V+\frac{15}{2}p_0\right)\mathrm{d}V}{M\cdot\frac{\mu p_0}{MR}\left(3-\frac{2V}{V_0}\right)\mathrm{d}V}=\frac{R(15V_0-8V)}{2\mu(3V_0-2V)}$$



热图 2-3-3

$c-V$ 曲线如热图 2-3-3 所示．由热图 2-3-3 可对 c 值的正、负讨论如下：$\left(V_0,\frac{3}{2}V_0\right)$段，由 $T-V$ 图(热图 2-3-2)可知，随着体积增大，温度上升，$\mathrm{d}T>0$，由 $\mathrm{d}Q$ 表达式可知 $\mathrm{d}Q>0$，故在此段 c 为正值．在接近$\frac{3}{2}V_0$ 时，温度 T 几乎不变与等温过程相近，$\mathrm{d}T$ 几乎为零，故 c 趋于 $+\infty$．

$\left(\frac{3}{2}V_0,\frac{15}{8}V_0\right)$段，由 $T-V$ 图，随着体积增大，温度下降，$\mathrm{d}T<0$，由 $\mathrm{d}Q$ 表达式，吸热，$\mathrm{d}Q>0$，故 c 为负值．在接近$\frac{3}{2}V_0$ 时，温度 T 几乎不变与等温过程相近，$\mathrm{d}T$ 几乎为零，故 c 趋于 $-\infty$．在$\frac{15}{8}V_0$，$\mathrm{d}Q=0$，与绝热过程相同，故 $c=0$．

$\left(\frac{15}{8}V_0, 2V_0\right)$段，由 $T-V$ 图，随着体积增大，温度下降，$dT<0$，由 dQ 表达式，放热，$dQ<0$，故 c 为正值．

上述对各段 c 值正、负的讨论与热图 2－3－3 相符．

【题 4】 由 ν_1 摩尔的单原子分子理想气体与 ν_2 摩尔的双原子分子理想气体混合组成某种理想气体，已知该混合理想气体在常温下的绝热方程为

$$pV^{\frac{11}{7}}=\text{常量}$$

试求 ν_1 与 ν_2 的比值 α．

【分析】 如所周知，一种分子构成的理想气体的绝热过程方程的形式为 $pV^{\gamma}=$ 常量．可以证明，混合理想气体的绝热过程方程也具有同样形式，且仍有

$$\gamma=\frac{C_p}{C_V},\quad C_p=C_V+R$$

其中 C_p 与 C_V 分别是混合理想气体的定压与定体摩尔热容量．

由以上两式可得出 C_V 与绝热指数 γ 的关系．又，由混合理想气体的内能可找出 C_V 与 ν_1 和 ν_2 的关系．于是 ν_1 和 ν_2 与 γ 的关系可知，从而解出 ν_1 和 ν_2 的比值 α．

【解】 混合理想气体的状态方程为

$$pV=\nu RT$$

其中

$$\nu=\nu_1+\nu_2$$

混合理想气体定压摩尔热容量 C_p 与定体摩尔热容量 C_V 的关系是

$$C_p=\frac{p\mathrm{d}V+\nu C_V\mathrm{d}T}{\nu\mathrm{d}T}=\frac{p}{\nu}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}+C_V$$

在等压过程中，有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}=\frac{\nu}{p}R$$

由以上两式，得

$$C_p=C_V+R$$

上式与一种分子理想气体的结果完全相同．

对于混合理想气体，在绝热过程中，有

$$p\mathrm{d}V+\nu C_V\mathrm{d}T=0$$

由混合理想气体的状态方程，有

$$p\mathrm{d}V+V\mathrm{d}p=\nu R\mathrm{d}T$$

由以上两式，消去 $\mathrm{d}T$，得

$$(C_V+R)p\mathrm{d}V+C_VV\mathrm{d}p=0$$

即

$$C_p p\mathrm{d}V+C_VV\mathrm{d}p=0$$

引入绝热指数

$$\gamma=\frac{C_p}{C_V}$$

则有

$$\gamma p\mathrm{d}V+V\mathrm{d}p=0$$

积分，得

$$pV^{\gamma}=\text{常量}$$

上式与一种分子理想气体绝热过程方程的形式相同．

综上，对于混合理想气体，有

$$C_p=C_V+R,\quad \gamma=\frac{C_p}{C_V}$$

由此得出

$$C_V=\frac{R}{\gamma-1}$$

上式与一种分子理想气体的结果完全相同．

温度为 T 时，ν_1 摩尔单原子分子理想气体的内能和定体摩尔热容量为

$$U_1=\nu_1C_{V1}T,\quad C_{V1}=\frac{3}{2}R$$

温度为 T 时，ν_2 摩尔双原子分子理想气体的内能和定体摩尔热容量为

$$U_2=\nu_2C_{V2}T,\quad C_{V2}=\frac{5}{2}R$$

其中已利用了常温条件．混合后，混合理想气体的总内能为

$$U=U_1+U_2=(\nu_1C_{V1}+\nu_2C_{V2})T$$

混合理想气体的内能 U 与它的定体摩尔热容量 C_V 的关系是

$$U=\nu C_VT$$

由以上两式，得出

$$C_V=\frac{1}{\nu}(\nu_1C_{V1}+\nu_2C_{V2})=\frac{\nu_1C_{V1}+\nu_2C_{V2}}{\nu_1+\nu_2}$$

上面已经得出

$$C_V=\frac{R}{\gamma-1}$$

由以上两式，得

$$\frac{R}{\gamma-1}=\frac{\nu_1C_{V1}+\nu_2C_{V2}}{\nu_1+\nu_2}=\frac{\left(\frac{3}{2}\nu_1+\frac{5}{2}\nu_2\right)R}{\nu_1+\nu_2}$$

已知，

$$\gamma=\frac{11}{7}$$

又

$$\alpha=\frac{\nu_1}{\nu_2}$$

由以上三式，得

$$\frac{7}{4}=\frac{3\alpha+5}{2\alpha+1}$$

故

$$\alpha=3$$

【题 5】 1 mol单原子分子理想气体经历某准静态过程，初态为$(4p_0, V_0)$，终态为$\left(\frac{p_0}{4}, 8V_0\right)$. 已知在此过程的每一小过程中热功效率$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}Q}$均相同．试求此过程中气体对外界所作总功 W.

【分析】 如所周知，多方过程是热容量 C 为常量的过程．本题涉及的则是热功效率 η 为常量的过程．两者是否有什么联系呢？由此，不难证明，η 为常量过程的热容量C 也为常量，即也是多方过程．于是写出过程方程，并利用初态和终态的参量，确定多方指数以及初态和终态的温度．最终求出对外作功 W.

【解】 用 η 表示热功效率，则

$$\mathrm{d}W=\eta\mathrm{d}Q$$

对于 1 mol 理想气体，由热力学第一定律

$$\mathrm{d}Q=\mathrm{d}W+C_V\mathrm{d}T$$

由以上两式，得

$$(1-\eta)\mathrm{d}Q=C_V\mathrm{d}T$$

此过程的摩尔热容量 C 定义为

$$C=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}$$

因此

$$C=\frac{C_V}{1-\eta} \tag{1}$$

可见 η 为常量过程的C 也是常量，即热功效率为常量的过程是多方过程．过程方程为

$$pV^n=\text{常量}$$

把初态$(4p_0, V_0)$和终态$\left(\frac{p_0}{4}, 8V_0\right)$代入，得

$$4p_0V_0^n=\frac{1}{4}p_0(8V_0)^n$$

即

$$n=\frac{4}{3}$$

多方过程的摩尔热容量 C 与多方指数 n 的关系是

$$C=\frac{\gamma-n}{1-n}C_V$$

对于单原子分子理想气体，绝热指数 γ 和定体摩尔热容量C_V 分别为

$$\gamma=\frac{5}{3},\quad C_V=\frac{3}{2}R$$

代入，得

$$C=-\frac{3}{2}R=-C_V \tag{2}$$

由(1)、(2)式，得

$$\eta=1-\frac{C_V}{C}=2$$

初态和终态的温度分别为

$$T_1=\frac{p_1V_1}{R}=\frac{4p_0V_0}{R}$$

$$T_2=\frac{p_2V_2}{R}=\frac{p_0}{4}\frac{8V_0}{R}=\frac{2p_0V_0}{R}$$

全过程吸热为

$$\begin{aligned}Q&=C(T_2-T_1)\\&=\left(-\frac{3}{2}R\right)\left(-\frac{2p_0V_0}{R}\right)=3p_0V_0\end{aligned}$$

全过程气体对外所作总功为

$$W=\eta Q=6p_0V_0$$

【题 6】 2 mol单原子分子理想气体从某初态经历热容量为 $C=2R(1+0.01T)$的准静态过程，到达温度为初态温度 2 倍、体积为初态体积$\sqrt{2}$倍的终态．试求内能增量 ΔU 及系统对外所作的功 W.

【分析】 若初态温度 T_0 求得，则终态温度为 $2T_0$，从而内能增量 ΔU、吸热 Q、对外作功 W 均可求得，因此关键在于求 T_0.

通常的过程方程直接表为 p,V,T 中任意两个量变化时所遵循的关系．本题的过程方程稍有不同，表为热容量 C 随温度的变化．由 C 的定义，利用热力学第一定律及理想气体状态方程，即可将上述过程方程改写成通常的 T 和 V 之间的变化关系．由此，再利用已知的初态和终态的关系，T_0 可求，问题迎刃而解．

【解】 热容量的定义为

$$C=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}$$

题设过程方程为

$$C=2R(1+0.01T)$$

热力学第一定律

$$\mathrm{d}Q=C_V\mathrm{d}T+p\mathrm{d}V$$

对于 2mol 单原子分子理想气体，有

$$C_V=2\times\frac{3}{2}R=3R$$

理想气体状态方程

$$p=\frac{\nu RT}{V}=2\frac{RT}{V}$$

由以上五式，得

$$0.01\mathrm{d}T=\frac{\mathrm{d}T}{2T}+\frac{\mathrm{d}V}{V}$$

积分，从初态(T_0,V_0)积分到过程中任意的(T,V)态，得

$$0.01(T-T_0)=\ln\frac{\sqrt{T}V}{\sqrt{T_0}V_0}$$

这就是用(T,V)表示的过程方程．

设终态为(T_1,V_1)，则题设

$$T_1=2T_0$$

$$V_1=\sqrt{2}V_0$$

代入过程方程，得

$$0.01T_0=\ln2$$

故

$$T_0=100\ln2=69.3\ \mathrm{K}$$

内能增量，吸热及对外作功分别为

$$\Delta U=C_V(T_1-T_0)=C_VT_0=3RT_0=1728\ \mathrm{J}$$

$$Q=\int_{T_0}^{T_1}C\mathrm{d}T=\int_{T_0}^{2T_0}2R(1+0.01T)\mathrm{d}T=2RT_0+0.03RT_0^2$$

$$W=Q-\Delta U=(0.03T_0-1)RT_0=622\ \mathrm{J}$$

【题7】 空气是混合气体，其中的质量分配是，氮气约占76.9%，氧气约占23.1%，其余成分可忽略不计．现有一气缸，缸内充有空气，并装有一些由细钢丝做成的钢丝棉．设气缸内的活塞能无摩擦地运动，设缸内气压恒定为1 atm．设缸内非常缓慢地进行化学反应，设化学反应生成1 mol的Fe_2O_3后，因氧气耗尽而中止．已知化学反应过程是在1 atm，300 K条件下进行的，在此过程中系统释放出8.24×10^5 J的热量．

试求在此过程中：1．系统内能的改变量．2．缸内气体内能的改变量．3．缸内氮气密度的改变量．

设缸内气体可视为理想气体．设1 mol氧气和1 mol氮气的内能均为$\frac{5}{2}RT$．设缸内钢丝棉等固态物质与缸内气体相比，所占体积很小，可忽略不计．

【分析】 本题讨论化学反应过程的热力学问题，此类题不多见，值得注意．

化学反应是缸内的Fe（钢丝）与缸内空气中的O_2化合生成Fe_2O_3，缸内空气中的N_2并不参与反应，但反应后N_2的密度有所变化．所以系统包括Fe，O_2，N_2和Fe_2O_3．

弄清楚上述基本概念，根据热力学第一定律，理想气体状态方程及有关条件应可顺利求解．

【解】 1．缸内的化学反应是

$$2Fe+\frac{3}{2}O_2\rightarrow Fe_2O_3$$

可见为了生成1 mol的Fe_2O_3需要1.5 mol的O_2和2 mol的Fe．由题设，这1.5 mol的O_2就是

缸内的全部氧气，当它耗尽后，因反应是在等温、等压条件下进行的，又因 Fe 和 Fe_2O_3 的体积可略，缸内气体的体积将减少 ΔV. 由理想气体状态方程，得

$$\Delta V = \Delta\nu \frac{RT}{p}$$

式中 $\Delta\nu = -1.5$ 就是消耗的 O_2 的摩尔数．体积减少意味着在化学反应过程中系统对外作功(活塞可无摩擦运动)为

$$W = p\Delta V = \Delta\nu RT = -3739.5\ \text{J}$$

已知系统在此过程中吸热为

$$Q = -8.24\times10^5\ \text{J}$$

因此，由热力学第一定律，系统内能增量为

$$\Delta U = Q - W = -8.203\times10^5\ \text{J}$$

即系统的内能减少了．

2. 缸内气体包括 O_2 和 N_2，N_2 的温度不变，又未参加反应，摩尔数也不变，故 N_2 的内能不变．O_2 的温度不变，但因参加反应，摩尔数减少 $\Delta\nu = -1.5$(耗尽)，内能相应减少．因此，缸内气体在此过程中内能的改变量为

$$\Delta U = \left(\frac{5}{2}RT\right)\Delta\nu = -9349\ \text{J}$$

上式用到 1 mol 的 O_2 内能为 $\frac{5}{2}RT$ 的条件．

3. 经化学反应后，缸内生成 1 mol 的 Fe_2O_3，同时耗尽了缸内全部 1.5 mol 的 O_2，故开始时，缸内 O_2 的质量 M_1 为(O_2 的摩尔质量为 32 g)

$$M_1 = 1.5\times32\times10^{-3}\ \text{kg} = 48\times10^{-3}\ \text{kg}$$

由题设，缸内 N_2 的质量为

$$M_2 = M_1\times\frac{76.9}{23.1} = 159.8\times10^{-3}\ \text{kg}$$

用 p_0 表示 1 atm，p 表示反应前 N_2 的分压强，V_0 表示反应前缸内空气的体积(它等于反应前 N_2 的体积，也等于反应前 O_2 的体积)，V 表示反应后 N_2 的体积(反应过程缸内气体压强不变，为 p_0，反应后 O_2 耗尽，N_2 体积将减少)，μ_1 和 μ_2 分别表示 O_2 和 N_2 的摩尔质量．对于 N_2 和 O_2，在反应前，有

$$pV_0 = \frac{M_2}{\mu_2}RT$$

$$(p_0 - p)V_0 = \frac{M_1}{\mu_1}RT$$

反应结束后，对 N_2，有

$$p_0V = \frac{M_2}{\mu_2}RT$$

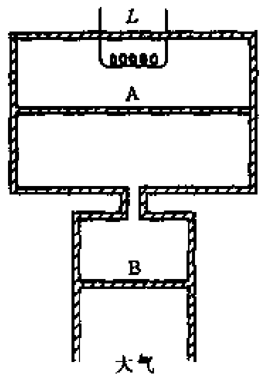
因此，反应前后，缸内 N_2 密度的改变量为

$$\Delta\rho = \rho_{\text{反应后}} - \rho_{\text{反应前}} = \frac{M_2}{V} - \frac{M_0}{V_0}$$

把上面的结果代入，得

$$\Delta\rho=\frac{\frac{\mu_2}{\mu_1}p_0M_1}{\left(\frac{M_2}{\mu_2}+\frac{M_1}{\mu_1}\right)RT}=0.236\ \mathrm{kg/m^3}$$

【题 8】 如图所示为一固定的直立气缸，它由上、下两个相互连通的圆筒构成．上部圆筒的体积为 V_m，其中有一个质量为 $2m$、面积为 $2S$ 的薄活塞 A．下部圆筒足够长，其中有一个质量为 m、面积为 S 的活塞 B．两圆筒由一细而短的管道连通，两活塞均可在各自的圆筒内无摩擦地上下滑动，活塞 A 的上方盛有 1 mol 的理想气体，活塞 A、B 之间盛有某种气体，活塞 B 下方与大气连通．开始时整个系统处于平衡态，A 上方理想气体的温度为 T_0，已知该理想气体每摩尔的内能 $U=CT$，其中 C 为常量，T 为热力学温度，活塞 B 下方的大气压强为常量 p_0，设气缸壁、管道、活塞均不导热．然后，通过置于上部圆筒顶端的电热丝 L 对活塞 A 上方的气体缓慢加热，设在整个加热过程中传递给 A 上方气体的热量为 Q_0．试问达到平衡时，A 上方气体的温度 T_f 是多少？



热图 2－8－1

【分析】 本题的困难在于：1．未说明开始时活塞 A 是在上圆筒中部还是已经到达上圆筒底端．2．又未说明如果 A 开始在上圆筒中部，经加热后始终未到达底端，还是在其间已经到达底端．这两个问题的答案十分重要，因为它使得 A 上方理想气体在加热时所经历的热力学过程的性质截然不同．然而，由于题目给定的已知量均非具体数据，上述两个问题都无法确切回答．所以只能就可能出现的各种情况逐一讨论并求解．

为了讨论的方便，应先确定 A 到达上圆筒底端的条件，这实际上变为对 A 上方理想气体温度的某种要求，以及对吸收热量的某种要求．

如果 A 开始时就在上圆筒底端，则在加热过程中 A 将始终在底端，于是 A 上方理想气体经历的是等容过程，由此可求解．

如果 A 开始时不在上圆筒底端，加热到最终仍未到达底端或在加热终了时刚好达到底端，则 A 上方理想气体经历的是等压过程，由此亦可求解．

如果 A 开始不在上圆筒底端，但在加热完成以前 A 已经到达底端，则在 A 到达底端前，A 上方理想气体经历等压过程；而在 A 到达底端后，直至加热终了，A 上方理想气体经历等容过程．可分别讨论求解．

【解】 活塞 A 的位置，即 A 是否到达上圆筒底端，与 A 上方理想气体的温度有关．只要 A 尚未到达上圆筒底端，则 A 上方气体以及 A 与 B 之间的气体经历的都是等压过程．设 A 上方气体压强为 p_1，A 下方，即 A 与 B 之间气体压强为 p_2，则有

$$p_2=p_0-\frac{mg}{S}$$

$$p_1=p_2-\frac{2mg}{2S}=p_0-\frac{2mg}{S}$$

设 A 上方气体开始时的温度为 T_0，体积为 V_0，设上圆筒的全部体积为 V_m，则开始时，A 未处于

上圆筒底端的条件是

$$V_0=\frac{RT_0}{p_1}<V_m$$

把 p_1 代人，得出开始时 A 未处于底端的条件是，其温度 T_0 应满足下述要求

$$T_0<\frac{V_m}{R}\left(p_0-\frac{2mg}{S}\right)$$

情况Ⅰ. 设开始时因 T_0 过高，活塞 A 已处于上圆筒底端，这要求

$$T_0\geqslant\frac{V_m}{R}\left(p_0-\frac{2mg}{S}\right)$$

于是 A 上方理想气体开始时的体积就是

$$V_1=V_m$$

加热过程中，体积不变，为等体过程，不作功. 由热力学第一定律，吸收的热量 Q_0 全部变为内能的增加，故有

$$Q_0=\Delta U_1=cT_f-cT_0$$

即 A 上方气体最后达到的温度 T_f 为

$$T_f=\frac{Q_0}{c}+T_0$$

情况Ⅱ. 设 T_0 不够高，开始时活塞 A 处于上圆筒底端之上，即

$$T_0<\frac{V_m}{R}\left(p_0-\frac{2mg}{S}\right)$$

开始时 A 上方理想气体的体积 V_0 为

$$V_0=\frac{RT_0}{p_1}<V_m$$

式中 p_1 是开始时 A 上方理想气体的压强，其表达式如前.

再分两种情况讨论.

1. A 上方理想气体从上述初态经加热，在加热终了时，设 A 仍未到达(或刚好到达)上圆筒底端，则整个加热过程是等压过程. 设 A 上方理想气体的终态体积为 V'，则在过程中气体对外作功为

$$W=p_1(V'-V_0)$$

由热力学第一定律

$$Q_0=\Delta U_1+W=(cT_f-cT_0)+p_1(V'-V_0)$$

又因终态时

$$p_1V'=RT_f$$

由以上两式及 V_0 表达式，得出终态温度为

$$T_f=\frac{Q_0}{R+c}+T_0$$

把上述结果代入 Q_0 表达式，得

$$Q_0=c(T_f-T_0)+p_1(V'-V_0)$$

$$=\frac{cp_1V'}{R}+p_1V'-(c+R)T_0=(c+R)\frac{p_1V'}{R}-(c+R)T_0$$
$$=(c+R)\left(\frac{p_1V'}{R}-T_0\right)=(c+R)\left[\left(p_0-\frac{2mg}{S}\right)\frac{V'}{R}-T_0\right]$$

在以上推演中，先后用到了 $T_f=\frac{p_1V'}{R}$，$p_1V_0=RT_0$，$p_1=p_0-\frac{2mg}{S}$ 等结果．于是，在加热终了时，A 仍未或刚好到达上圆筒底端的条件

$$V'\leqslant V_m$$

可改写为

$$Q_0\leqslant(c+R)\left[\left(p_0-\frac{2mg}{S}\right)\frac{V_m}{R}-T_0\right]=Q_{max}$$

由此可见，初态时，A 未到达上圆筒底端的条件是 $V_0<V_m$ 或 $T_0<\frac{V_m}{R}\left(p_0-\frac{2mg}{S}\right)$；加热结束达到终态时，A 未到达或刚好到达上圆筒底端的条件是 $V'<V_m$ 或 $Q_0\leqslant Q_{max}$．

2. 设在加热终了前，A 已经到达上圆筒底端，即

$$Q_0>(c+R)\left[\left(p_0-\frac{2mg}{S}\right)\frac{V_m}{R}-T_0\right]=Q_{max}$$

则当加热的热量达到 Q_{max} 时，A 刚好到达上圆筒底端，设此时 A 上方理想气体的温度为 T，则应有

$$T=\frac{Q_{max}}{R+c}+T_0$$

从此刻起，继续加热，输入的热量为 (Q_0-Q_{max})，在此过程中，A 上方理想气体经历等体过程，其温度由 T 增至终态的 T_f，仿前，应有

$$T_f=\frac{Q_0-Q_{max}}{c}+T$$

把 T 和 Q_{max} 代入，得

$$T_f=\frac{1}{c}\left[Q_0-\left(p_0-\frac{2mg}{S}\right)V_m+(R+c)T_0\right]$$

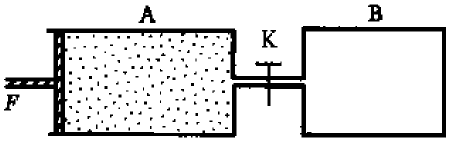
综上，所求 T_f 为

当 $T_0\geqslant\frac{V_m}{R}\left(p_0-\frac{2mg}{S}\right)$ 时，$T_f=\frac{Q_0}{c}+T_0$

当 $\begin{cases}T_0<\frac{V_m}{R}\left(p_0-\frac{2mg}{S}\right)\\ Q_0\leqslant(c+R)\left[\left(p_0-\frac{2mg}{S}\right)\frac{V_m}{R}-T_0\right]\end{cases}$ 时，$T_f=\frac{Q_0}{R+c}+T_0$

当 $\begin{cases}T_0<\frac{V_m}{R}\left(p_0-\frac{2mg}{S}\right)\\ Q_0>(c+R)\left[\left(p_0-\frac{2mg}{S}\right)\frac{V_m}{R}-T_0\right]\end{cases}$ 时，$T_f=\frac{1}{c}\left[Q_0-\left(p_0-\frac{2mg}{S}\right)V_m+(R+c)T_0\right]$

【题9】 如图,A和B是两个圆筒形绝热容器,中间用细的短管连通,短管中有导热性能良好的阀门K,短管与阀门对外绝热．F是带柄的绝热活塞,与容器A的内表面紧密接触,不漏气,且摩擦可忽略不计．



热图2-9-1

开始时K关闭,F处于A的左端．A中有 n 摩尔理想气体,温度为 T_0;B中为真空．现在向右推动F,直到A中气体的体积与B的容积相等．在此过程中,已知对气体作功为 W,气体温度升为 T_1,然后将K稍稍打开一点,使A中的气体缓慢地向B扩散,同时让活塞F缓慢地前进,并保持A中活塞F附近气体的压强近似不变．试问在此过程中,气体最后的温度是多少? 设活塞、阀门、容器的热容量均可不计．

【分析】 第一阶段为绝热过程,外界对气体所作的功 W,全部转化为气体内能的增量,温度由 T_0 升至 T_1,由此可知理想气体的定体摩尔热容量 C_V.

本题关键在于第二阶段,稍不注意,便会误以为此阶段终态是气体全部进入B容器,即终态体积与初态体积都等于B的容积．然而,细审题文可知,此阶段活塞作功是等压压缩功．由于A向B漏气,气体经历的过程虽非准静态等压过程,但气体终态的压强应与初态压强相同．外界作功使气体内能增加,终态温度 T_2 应高于初态温度 T_1,因此终态体积必定大于初态体积．弄清楚这些,便不难由等压压缩功转化为内能增量,算出终态温度 T_2.

【解】 第一阶段外界对气体作功 W 全部转化为气体内能增量 ΔU,即

$$W=\Delta U$$

又

$$\Delta U=nC_V(T_1-T_0)$$

式中 C_V 为等定体摩尔热容量,T_1 是第一阶段结束时气体的温度．由以上两式,得

$$C_V=\frac{W}{n(T_1-T_0)}$$

设B的容积为 V_1,则第二阶段初态的气体体积为 V_1. 设第二阶段终态时,A中气体体积为 V',则终态气体体积为

$$V_2=V_1+V'$$

在第二阶段中,初态与终态的气体压强相同,记为 p,则对初态,有

$$pV_1=nRT_1$$

设终态气体温度为 T_2,则有

$$pV_2=nRT_2$$

即

$$p(V_1+V')=nRT_2$$

由此得出

$$pV'=nRT_2-pV_1=nR(T_2-T_1) \tag{1}$$

第二阶段外力作功

$$W'=p(V_1-V')$$

此功转化为气体内能的增量,即

$$W'=\Delta U=nC_V(T_2-T_1)$$

故

$$p(V_1-V')=nC_V(T_2-T_1)$$

即

$$pV'=pV_1-nC_V(T_2-T_1)=nRT_1-nC_V(T_2-T_1) \tag{2}$$

由(1)、(2)式，得

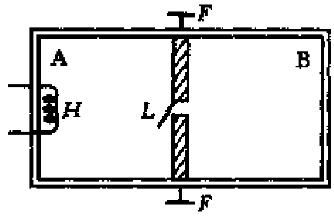
$$T_2=\frac{2R+C_V}{R+C_V}T_1$$

将第一阶段求出的 $C_V=W/n(T_1-T_0)$代入，得

$$T_2=\frac{2nR(T_1-T_0)+W}{nR(T_1-T_0)+W}T_1$$

【题 10】 如图，在一以绝热壁包围的刚性圆柱形封闭气缸内，装着一个有小阀门 L 的绝热活塞，在气缸的 A 端还装有电热器 H，可用于加热气体．

开始时，活塞紧贴气缸 B 端的内壁，小阀门 L 关闭．整个气缸内装有一定质量的理想气体，其温度为 T_0．然后设法把活塞推到气缸中央，设活塞与气缸壁之间的摩擦可以忽略，并用销钉 F 将活塞固定住，这样气缸被分成体积相等的左、右两室，如图所示．在上述压缩气体的过程中，设外界对气体作功 W，气体温度上升到 T．



热图 2－10－1

再开启小阀门，经过足够长时间后关闭，并拔去销钉使活塞可以自由移动．用电热器加热气体，加热完毕并经过一定时间后，测出左室气体压强增为加热前的 1.5 倍，右室的体积变为原来的 0.75 倍．试求电热器传递给气体的热量．

【分析】 初阅此题，似颇繁杂，稍加分析，即可了然．活塞从紧贴 B 端内壁移至中央，气体被绝热压缩到左半，右半则为真空．打开阀门，活塞固定，气体从左半经阀门自由膨胀，不吸热，不作功，内能与温度均不变，这是非静态过程．再关阀门，拔销钉，加热气体．整个过程可分成以上三段，不难求解．

【解】 气体开始时温度为 T_0，经绝热压缩，外界作功 W 全部转化为气体内能的增量 ΔU，使气体温度升为 T．又因理想气体内能与温度成正比，故有

$$W=\Delta U=k(T-T_0)$$

式中 k 是理想气体内能 U 与温度 T 之间的比例系数．

然后打开小阀门，因右半为真空，又因气缸绝热，气体自由膨胀，不吸热，不作功，内能不变，温度不变．结果气缸左、右两半充满了温度均为 T，压强均为 p，体积均为 V 的气体．两半气体的内能也相同，各占总内能之半．

关阀门，拔销钉（使活塞可移动），加热．由题设，左室气体压强由 p 升为$\frac{3}{2}p$，体积由 V 增为$\frac{5}{4}V$，设其温度为 T_A，则有

$$\frac{pV}{T}=\frac{\left(\frac{3}{2}p\right)\left(\frac{5}{4}V\right)}{T_A}$$

即

$$T_A=\frac{15}{8}T$$

左室气体内能增量为

$$\Delta U_A=\frac{1}{2}k(T_A-T)=\frac{1}{2}\cdot\frac{W}{T-T_0}\cdot\frac{7}{8}T$$

式中的$\frac{1}{2}$是因为左室只有一半气体．右室中气体压强由 p 升为$\frac{3}{2}p$(因活塞可自由活动，平衡后左、右室气体压强相同)，体积由 V 减为$\frac{3}{4}V$，设其温度为 T_B，则有

$$\frac{pV}{T}=\frac{\left(\frac{3}{2}p\right)\left(\frac{3}{4}V\right)}{T_B}$$

即

$$T_B=\frac{9}{8}T$$

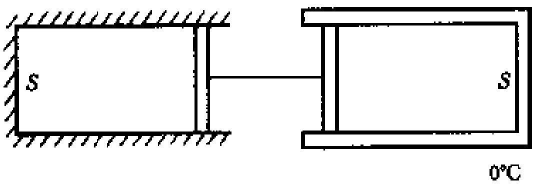
右室气体内能增量应为

$$\Delta U_B=\frac{1}{2}k(T_B-T)=\frac{1}{2}\cdot\frac{W}{T-T_0}\cdot\frac{T}{8}$$

因气缸绝热，活塞又无摩擦，电热器在加热过程中传递给气体的热量 Q 应等于全部气体内能的增量，为

$$Q=\Delta U_A+\Delta U_B=\frac{WT}{2(T-T_0)}$$

【题 11】 如图所示为两个底面积均为 $S=100\ \mathrm{cm}^2$ 的圆筒．左筒内气体的质量 $M_{左}=4$ g，体积 $V_{左}=22.4$L，压强 $p_{左}=1$ atm，温度 $T_{左}=273$ K．右筒内有同种气体，质量 $M_{右}=7.44$ g，体积 $V_{右}=22.4$L，温度 $T_{右}=273$ K．左筒筒壁绝热，右筒靠大热库维持恒定的 0 ℃ 的温度．整个系统在真空中，放开左、右筒相联的活塞后，活塞移动了 $l=50$ cm 后达到平衡而静止．试问右筒内的气体吸收了多少热量？已知气体可视为理想气体，其定容比热为 $c_V=0.75$ cal* /(g.K)＝3.14 J/(g·K)，设活塞与筒壁之间无摩擦．



热图 2－11－1

【分析】 先用状态方程算出右筒内气体初始压强，与左筒比较，确定活塞移动方向(左移)．

随着活塞左移，左筒气体绝热压缩，外界(即右筒气体)对它作功，内能增加，升温．与此同时，右筒气体等温膨胀，内能不变，从热库吸热，对外(即对左筒气体)作功．总之，右筒气体从热

* 卡(cal)是一种常用的热量单位，它与热量国际标准单位焦耳(J)的换算关系是，1 cal＝4.184 J.

库吸收的热量,等于它对左筒气体所作的功,也等于左筒气体内能的增量．

【解】 放开活塞前,由状态方程

$$p_{左}V_{左}=\frac{M_{左}}{\mu}RT_{左},\quad p_{右}V_{右}=\frac{M_{右}}{\mu}RT_{右}$$

故

$$p_{右}=\frac{M_{右}RT_{右}}{V_{右}}\cdot\frac{p_{左}V_{左}}{M_{左}RT_{左}}=1.86\ \text{atm}$$

可见 $p_{右}>p_{左}$,活塞放开后应左移．

活塞左移 l 后达到平衡．在移动过程中,左筒气体绝热压缩,右筒气体等温膨胀．平衡后,左、右筒气体的状态参量为

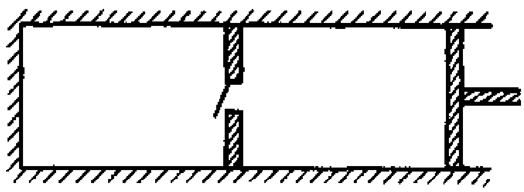
$$V_{右}'=V_{右}+lS=27.4\text{L}$$
$$V_{左}'=V_{左}-lS=17.4\text{L}$$
$$p_{右}'=\frac{p_{右}V_{右}}{V_{右}'}=1.521\ \text{atm}$$
$$p_{左}'=p_{右}'=1.521\ \text{atm}$$
$$T_{左}'=\frac{p_{左}'V_{左}'T_{左}}{p_{左}V_{左}}=322.5\ \text{K}$$

因右筒气体从热库吸收的热量 $Q_{右}$ 等于右筒气体对左筒气体所作的功,也等于左筒气体内能的增量 $\Delta U_{左}$,故有

$$\begin{aligned}Q_{右}&=\Delta U_{左}=M_{左}c_V\Delta T_{左}\\&=M_{左}c_V(T_{左}'-T_{左})=148.5\ \text{cal}=620.7\ \text{J}\end{aligned}$$

【本题是 1972 年第 6 届 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)试题．】

【题 12】 如图,底面积为 100 cm^2 的圆筒,筒壁、活塞以及内部隔板都是完全绝热的．当筒内右方压强大于左方时,隔板的阀门打开．开始时有 12 g 氦气在左方,有 2 g 氦气在右方,左、右两方的长度均为 112 cm,温度均为 0 ℃．外部压强为 10^5 Pa．氦气定体比热 $c_V=3.15$ J/(g·K),定压比热为 $c_p=5.25$ J/(g.K)．今把活塞缓慢地推向隔板,当阀门打开时稍停片刻,尔后继续缓慢地推动活塞,直至到达隔板为止．设氦气可看作理想气体,各过程可看作准静态过程,忽略摩擦．试求所作的总功．



热图 2－12－1

【分析】 关键在于弄清楚涉及的各个状态及其间的过程,并注意隔板的开、闭．

状态Ⅰ(初态),活塞未动,计算表明左方压强大,隔板关闭．活塞左移,直至左、右方气体压强相同,隔板将开而未开,这是状态Ⅱ．继而隔板打开,左、右气体混合,达到共同的平衡态,这是状态Ⅲ．然后活塞一直左移到隔板为止,这是状态Ⅳ(终态)．可见,从状态Ⅰ到Ⅱ,右方气体绝热压缩,左方气体无变化．从状态Ⅱ到Ⅲ,左、右混合．从状态Ⅲ到Ⅳ,绝热压缩混合气体．

【解】 状态Ⅰ(初态),活塞尚未移动,由已知的 $T_{右Ⅰ}$, $V_{左Ⅰ}$, $M_{左}$, μ,得

$$p_{左\mathrm{I}}=\frac{M_{左}}{\mu}\frac{RT_{左\mathrm{I}}}{V_{左\mathrm{I}}}=6\ \mathrm{atm}$$

因 $p_{左\mathrm{I}}>p_{右\mathrm{I}}(p_{右\mathrm{I}}=1\ \mathrm{atm})$，隔板关闭．

活塞左移，右方气体绝热压缩，左方气体不变，到达 $p_{右\mathrm{II}}=p_{左\mathrm{II}}=6\ \mathrm{atm}(p_{左\mathrm{II}}=p_{左\mathrm{I}})$，这是隔板将开未开的状态Ⅱ．由绝热过程方程，有

$$p_{右\mathrm{I}}V_{右\mathrm{I}}^{\gamma}=p_{右\mathrm{II}}V_{右\mathrm{II}}^{\gamma}$$

又

$$\gamma=\frac{5}{3}$$

得

$$V_{右\mathrm{II}}=3.82\times10^{3}\ \mathrm{cm}^{3}$$

由状态方程

$$p_{右\mathrm{II}}V_{右\mathrm{II}}=\frac{M_{右}}{\mu}RT_{右\mathrm{II}}$$

得

$$T_{右\mathrm{II}}=5.59\times10^{2}\ \mathrm{K}$$

由状态Ⅰ到状态Ⅱ，外界作功

$$A_{\mathrm{I}到\mathrm{II}}=\Delta U_{\mathrm{I}到\mathrm{II}}=\frac{M_{右}}{\mu}C_{V}(T_{右\mathrm{II}}-T_{右\mathrm{I}})=1.80\times10^{3}\ \mathrm{J}$$

隔板打开，活塞停住，气体混合，达到状态Ⅲ．注意到 $T_{左\mathrm{II}}=T_{左\mathrm{I}}$，$V_{左\mathrm{II}}=V_{左\mathrm{I}}$，于是

$$T_{\mathrm{III}}=\frac{M_{左}T_{左\mathrm{II}}+M_{右}T_{右\mathrm{II}}}{M_{左}+M_{右}}=3.14\times10^{2}\ \mathrm{K}$$

$$V_{\mathrm{III}}=V_{\mathrm{II}}=V_{左\mathrm{II}}+V_{右\mathrm{II}}=1.50\times10^{4}\ \mathrm{cm}^{3}$$

$$p_{\mathrm{III}}=p_{右\mathrm{II}}=p_{左\mathrm{II}}=6\ \mathrm{atm}$$

从状态Ⅱ到Ⅲ，外界不作功

$$A_{\mathrm{II}到\mathrm{III}}=0$$

活塞继续左移，绝热压缩混合气体，直至活塞到达隔板，这是状态Ⅳ（终态）．显然 $V_{\mathrm{IV}}=11.2\times10^{3}\ \mathrm{cm}^{3}$．由绝热过程方程

$$T_{\mathrm{III}}V_{\mathrm{III}}^{\gamma-1}=T_{\mathrm{IV}}V_{\mathrm{IV}}^{\gamma-1}$$

得

$$T_{\mathrm{IV}}=381.7\ \mathrm{K}$$

从状态Ⅲ到Ⅳ，外界作功

$$A_{\mathrm{III}到\mathrm{IV}}=\Delta U_{\mathrm{III}到\mathrm{IV}}=MC_{V}\Delta T=(M_{左}+M_{右})C_{V}(T_{\mathrm{IV}}-T_{\mathrm{III}})=2.99\times10^{3}\ \mathrm{J}$$

整个过程所作总功为

$$A_{总}=A_{\mathrm{I}到\mathrm{II}}+A_{\mathrm{II}到\mathrm{III}}+A_{\mathrm{III}到\mathrm{IV}}=1802+0+2990=4.79\times10^{3}\ \mathrm{J}$$

应减去外部大气压所作的功

$$A_{大气}=10\ \mathrm{N.cm}^{2}\times100\ \mathrm{cm}^{2}\times1.12\ \mathrm{m}=1.12\times10^{3}\ \mathrm{J}$$

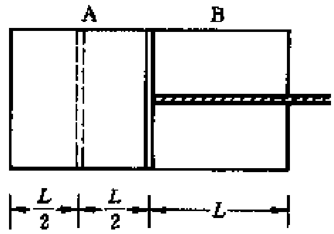
故所作总功为

$$A = A_{总} - A_{大气} = 3.67\times 10^3\ \text{J}$$

【本题是1976年第9届IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)试题．】

【题13】 如图,长为$2L$的长方形绝热容器被一个可以无摩擦地自由滑动的活塞分为容积相等的两部分A和B,A和B内各装有相同摩尔的单原子分子理想气体,温度相同,压强均为一个大气压．今将活塞缓慢地向左推移,当活塞移过$\frac{1}{2}$时便停住,再将活塞上的阀门打开,使两边的气体混合．试求容器内气体的最终压强p.

【分析】 活塞左移时,A中气体绝热压缩,温度升高,内能增加(外力作了功);B中气体绝热膨胀,温度降低,内能减少．活塞左移到$\frac{1}{2}$处停住,打开阀门,气体混合,A和B两部分内能增量之和即为全部气体的内能增量,加上活塞左移前两部分气体的内能,得出混合后全部气体的内能,于是混合气体的温度可求．



热图2-13-1

对于全部气体,开始时的体积和质量,与活塞左移、打开阀门、混合后的体积和质量相同,由状态方程可得出初态和终态的压强与温度的关系(相当于等体过程的关系),于是最终的压强p可求．终态的压强p应大于初态的压强p_0,这是因为在活塞左移过程中外力作了功,导致内能增加,温度升高．

【解】 当活塞从中央左移到$\frac{1}{2}$处时,A中气体经绝热压缩,体积由V_0减为$\frac{V_0}{2}$,温度由T_0增为T_A,由绝热过程方程,得

$$T_A = \left(\frac{V_0}{\frac{V_0}{2}}\right)^{\gamma-1} T_0 = 2^{\gamma-1}T_0 > T_0$$

内能增量为

$$\Delta U_A = \frac{M_A}{\mu}C_V(T_A - T_0) = \frac{M_A}{\mu}C_V(2^{\gamma}-1)T_0 > 0$$

与此同时,B中气体绝热膨胀,体积由V_0增为$\frac{3}{2}V_0$,其温度T_B及内能增量ΔU_B分别为

$$T_B = \left(\frac{V_0}{\frac{3}{2}V_0}\right)^{\gamma-1} T_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^{\gamma-1}T_0 < T_0$$

$$\Delta U_B = \frac{M_B}{\mu}C_V(T_B - T_0) = \frac{M_B}{\mu}C_V\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{\gamma-1} - 1\right]T_0 < 0$$

式中$M_B = M_A$.

因此,在活塞左移到$\frac{L}{2}$处的过程中,全部气体的内能增量为

$$\begin{aligned}\Delta U &= \Delta U_A + \Delta U_B = \frac{M_A}{\mu}C_V(2^{\gamma-1}-1)T_0 + \frac{M_B}{\mu}C_V\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{\gamma-1} - 1\right]T_0 \\ &= \frac{M_A}{\mu}C_V\left[2^{\gamma-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{\gamma-1} - 2\right]T_0\end{aligned}$$

打开阀门，气体在混合过程中，既不吸热，又不作功，内能没有变化．故平衡后终态全部气体的内能 U 即为初态的 U_0 与上述内能增量 ΔU 之和，为

$$U=U_0+\Delta U=\frac{M_A}{\mu}C_VT_0+\frac{M_B}{\mu}C_VT_0+\frac{M_A}{\mu}C_V\left[2^{\gamma-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{\gamma-1}-2\right]T_0$$

$$=\frac{M_A}{\mu}\left[2^{\gamma-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{\gamma-1}\right]C_VT_0$$

设平衡后终态气体的温度为 T，因

$$U=\frac{M}{\mu}C_VT=\frac{M_A+M_B}{\mu}C_VT$$

故

$$T=\frac{\mu}{2M_AC_V}U=\frac{1}{2}\left[2^{\gamma-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{\gamma-1}\right]T_0$$

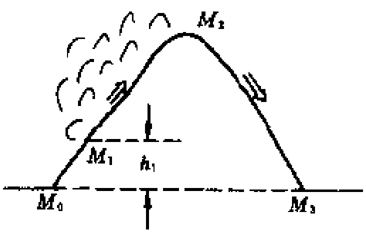
由状态方程，对于初态和终态，分别有

$$p_0(2V_0)=\frac{M}{\mu}RT_0,\quad p(2V_0)=\frac{M}{\mu}RT$$

故终态压强 p 为（注意 $\gamma=\frac{5}{3}$）

$$p=\frac{T}{T_0}p_0=\frac{1}{2}\left[2^{\gamma-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{\gamma-1}\right]p_0=1.18p_0=1.18\ \text{atm}$$

【题 14】 如图，潮湿空气绝热地持续流过山脉．气象站 M_0 和 M_3 测出的大气压强都是 100 kPa，气象站 M_2 测出的大气压强为 70 kPa．在 M_0 处，空气的温度是 20 ℃，随着空气的上升，在压强为 84.5 kPa 的高度处（图中 M_1）开始有云形成．空气由此继续上升，经 1 500 s 之后到达山顶的 M_2 站．在上升过程中，空气里的水蒸气凝结成雨落下．设每平方米上空潮湿空气的质量为 2 000 kg，每千克潮湿空气中凝结出 2.45 g 的雨水．



热图 2-14-1

1．试求出在云层底部高度处（图中 M_1）的温度 T_1．

2．假定空气密度随高度线性地减少，试问云层底部 M_1 与 M_0 的高度差 h_1 是多少？

3．试问在山顶 M_2 处测出的温度 T_2 是多少？

4．试求出由于空气中水蒸气的凝结，在 3 小时内形成的降雨量．设在 M_1 和 M_2 之间降雨是均匀的．

5．试问在山脉背面的气象站 M_3 测出的温度 T_3 是多少？讨论 M_3 处空气的状态，并与 M_0 处相比较．

提示和数据：空气可看作是理想气体．水蒸气对空气热容量和密度的影响均可忽略．同样，汽化热随温度的变化也可忽略．温度的计算应精确到 1K，云层底部高度的计算应精确到 10 m，降雨量的计算应精确到 1 mm．在有关的温度范围内，空气的定压比热为 $C_p=1005$ J/(kg·K)．在 M_0 处，相应于 p_0 和 T_0 的空气密度为 $\rho_0=1.189$ kg/m³．在云层中，水的汽化热为 $L_V=$ 2 500 kJ/kg．又，$\frac{C_p}{C_V}=\gamma$，$\gamma=1.4$，$g=9.81$ m/s²．

【分析】 初阅此题，可能颇感杂乱，应稍加整理归纳，这将有助于分析题意．

对象：一定量的潮湿空气，它是空气与水蒸气的混合物，可看作理想气体．随着在 M_1 和 M_2 之间的降雨，一定量潮湿空气的质量和成分都将有所变化．

过程：一定量潮湿空气沿着山脉持续地流过．从 M_0 到 M_1 以及从 M_2 到 M_3 是单纯的绝热过程．从 M_1 到 M_2 既是绝热过程又伴随着降雨（相变）．

已知的状态参量：$p_0, T_0, \rho_0, p_1, p_2, p_3$.

与降雨有关的已知量：每平方米上空潮湿空气的质量为 M kg/m^2，每千克潮湿空气中凝结的雨水为 m g/kg（潮湿空气），潮湿空气从 M_1 上升到 M_2 的时间为 t，降雨时间 $t_{降雨}$，又在 M_1 和 M_2 之间的降雨是均匀的．

关于空气和水蒸气性质的已知量：$C_p, \rho_0, \gamma = \dfrac{C_p}{C_V}, L_V$. 忽略水蒸气对空气热容量和密度的影响（由于降雨，潮湿空气中的水蒸气含量逐渐减少，这种成分的变化会引起 C_p, γ, ρ 的变化，可略）．忽略 L_V 随温度的变化（水蒸气的汽化热 L_V 是温度的函数，水蒸气凝结降雨造成的放热降温会使 L_V 有所变化，可略）．ρ 随高度线性地变化．

求解：T_1, h_1, T_2，降雨量，T_3.

精度要求：T 为 1 K，h_1 为 10 m，降雨量为 1 mm.

现在分析各个过程．

从 M_0 到 M_1 以及从 M_2 到 M_3 是单纯的绝热过程，T_1 和 T_3 不难求解．区别在于空气的干、湿程度不同．另外，由于从 M_1 到 M_2 降雨，空气吸热，估计 T_3 会大于 T_0，虽然 M_0 和 M_3 在同一高度．

为了求 M_0 与 M_1 之间的高度 h_1，注意到 p_0 与 p_1 之差正是高度为 h_1 的空气柱的重量，即 h_1 应与 p_0、p_1、$\bar{\rho}$ 有关．因 ρ 随高度变化，故取平均值 $\bar{\rho}$，由题设这种变化是线性的，$\bar{\rho}$ 可用 ρ_0 和 ρ_1 表示，ρ_1 可由状态方程 $\dfrac{p_0}{\rho_0 T_0} = \dfrac{p_1}{\rho_1 T_1} =$ 常数求出．于是 h_1 可解．

关键在于从 M_1 到 M_2，既是绝热过程又有降雨．当一定量潮湿空气从 M_1 经绝热流动上升到 M_2 时，由于压强减小（$p_2 < p_1$），温度应从 T_1 下降为 T_x，由 T_1、p_1、p_2，用绝热过程方程，T_x 可求．与此同时，潮湿空气中的水蒸气凝结降雨，这是相变过程，要放热．因绝热流动，潮湿空气与外界无热量变换，故水蒸气凝结降雨所释放的热量只能被空气吸收．换言之，潮湿空气的两部分即干燥空气与水蒸气之间有热量交换．这将使空气吸热升温，温度从 T_x 增为 $T_2 = T_x + \Delta T$. 取 1 kg 潮湿空气，降雨 m g，水蒸气放热 $L_V m$，空气吸热 $C_p \Delta T$，由 $L_V m = C_p \Delta T$ 可求 ΔT，从而 T_2 可得．

上述解法把从 M_1 到 M_2 的绝热过程与降雨过程人为地割裂开来，以便各自单独计算，却没有考虑因降雨造成的潮湿空气成分与质量变化的影响．换言之，实际上两个过程是联系在一起、紧密相关的．因而上述解法是否合理，需要讨论．第一，计算 T_x 的绝热过程方程要求潮湿空气成分不变，否则不能采用同一个 γ 值，因题设忽略水蒸气对空气热容量的影响，故无妨．第二，计算 T_x 的绝热过程方程要求一定量潮湿空气的质量不变，而降雨使水蒸气减少，质量变化了．但因题设每千克潮湿空气中只含 2.45 g 雨水，即含量为 2.45‰或约 $\dfrac{1}{400}$，现题目对计算 T 的精

度要求为 1K,即要求精确到约$\frac{1}{300}$,故降雨引起的潮湿空气的质量减少不会影响计算 T 的精度,可以忽略．第三,计算降雨过程中水蒸气放热,空气吸热时,采用同一个 L_V 和C_p,这要求 L_V 随温度的变化以及 C_p 随成分的变化可略,正是题设．

总之,题目给出的假设及精度要求,允许把绝热过程和降雨过程分开独立计算．

降雨量是指在一定时间内,在一定面积的水平面上存积的雨水的高度．现在,每平方米上空有 M kg 潮湿空气,每千克潮湿空气凝结出 m g 雨水,这些雨水是在 t 时间内陆续凝结降下的,降雨是均匀的,降雨时间为 $t_{降雨}$. 因此,在 $t_{降雨}$时间内,每平方米上的雨量为$\left(\frac{Mm}{t}\right)t_{降雨}$ kg/m^2. 因1 cm^3 的水重 1 g,1 m^3 的水重 1000 kg,故 1 kg/m^2 的雨水相当于 1 mm 的降雨量．

【解】 1. 一定量潮湿空气从 M_0 经绝热过程到 M_1,由绝热过程方程

$$p^{\gamma-1}T^{-\gamma}=常量$$

得

$$T_1=T_0\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}=279\ \text{K}$$

2. M_0 与 M_1 的压强差等于空气柱重量,故

$$p_0-p_1=\bar{\rho}gh_1 \tag{1}$$

式中 $\bar{\rho}$ 是 M_0 与 M_1 之间平均空气密度,因题设 ρ 随高度线性地变化,故

$$\bar{\rho}=\frac{1}{2}(\rho_0+\rho_1) \tag{2}$$

由理想气体状态方程

$$\frac{p_0}{\rho_0T_0}=\frac{p_1}{\rho_1T_1} \tag{3}$$

由(1)、(2)、(3)式,得

$$h_1=\frac{2(p_0-p_1)}{\rho_0g\left(1+\frac{p_1T_0}{p_0T_1}\right)}=1\ 408\ \text{m}$$

3. 从 M_1 到 M_2 经绝热过程,温度由 T_1 降为 T_x,由

$$p^{\gamma-1}T^{-\gamma}=常量$$

得

$$T_x=T_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}=265\ \text{K}$$

同时降雨,水蒸气凝结放热,空气吸热升温 ΔT,因

$$L_Vm=C_p\Delta T$$

得

$$\Delta T=\frac{L_Vm}{C_p}=6\ \text{K}$$

故

$$T_2=T_x+\Delta T=271\ \text{K}$$

4. 在 $t_{降雨}$ 时间内，每平方米水平面上存积的雨水质量为

$$\frac{Mm}{t}t_{降雨}=2\ 000\ \text{kg(潮湿空气)/m}^2\times2.45\times10^{-3}\ \text{kg(雨水)/kg(潮湿空气)}$$

$$\times\frac{1}{1\ 500\ \text{s}}\times3\times3\ 600\ \text{s}=35.3\ \text{kg(雨水)/m}^2$$

因 1 kg(雨水)/m^2 的雨水相当于 1 mm 的降雨量，故降雨量为 35 mm.

5. 一定量干燥空气(降雨后，潮湿空气成为干燥空气)从 M_2 经绝热过程到 M_3，由过程方程

$$p^{\gamma-1}T^{-\gamma}=常量$$

得

$$T_3=T_2\left(\frac{p_3}{p_2}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}=300\ \text{K}$$

与 M_0 处相比，M_3 处的空气干燥、温度稍高、压强相同.

【本题是 1987 年第 18 届 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)试题.】

【题 15】 在两端开口的竖直 U 形管中注入水银，水银柱的全长为 h.

1. 将一边管中的水银下压，静止后撤去所加压力，水银便会振荡起来. 试证明，不计摩擦时，振动周期为 $T_1=2\pi\sqrt{\frac{h}{2g}}$.

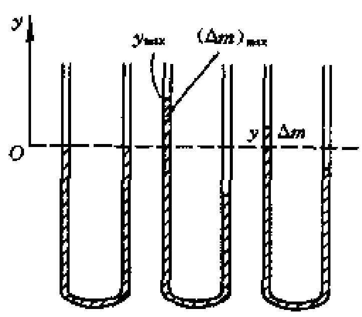
2. 把管的右端封闭，设被封在右管内的空气柱的高度为 L，然后使水银柱作微小的振荡，仍设摩擦可忽略，设空气为理想气体，且可认为水银柱振荡时右管内被封闭的空气经历的是准静态绝热过程. 试证明，振动周期为

$$T_2=2\pi\sqrt{\frac{h}{2g+\gamma h_0\frac{g}{L}}}$$

式中 h_0 为用水银计测量大气压的水银柱的高度，γ 是空气的绝热指数.

3. 试证明，$\gamma=\frac{2L}{h_0}\left(\frac{T_1^2}{T_2^2}-1\right)$.

【分析】 1. 这是力学中的振动问题，作振动的物体是 U 形管中的水银，如图，图左边是振动前的状态，取水银表面为重力势能零点，即 y 轴零点. 图中间是开始振动的初态，全部水银静止，质量为 $(\Delta m)_{max}$ 的一部分上升了 y_{max} 的距离，具有 $(\Delta m)_{max}gy_{max}$ 的势能. 图右边是振动的任意状态，全部水银以速度 v 运动，具有 $\frac{1}{2}mv^2$ 的动能，m 为全部水银的质量，质量为 Δm 的一部分上升了 y 的距离，具有 Δmgy 的势能. 由于无摩擦，水银与地球系统的机械能守恒，于是得出水银的运动方程，即可求解.



热图 2－15－1

2. 右端封闭后，随着水银柱的振荡，被封闭的空气经历绝热的膨胀或压缩过程，过程方程熟知. 另外，由于右端封闭，其中空气的压强一般说来不等于左端(开口)的大气压强，因而水银柱振动时机

械能不守恒，其机械能的变化应等于左、右端空气压强对水银柱作功之和，利用上述关系，可以得出右端封闭时水银柱的运动方程，再注意到微小振动的条件，即可求解．

3. 这是上述两问的结果．

【解】 1. 如图，取振动前水银柱表面为 y 轴（竖直向上）零点和重力势能零点．开始振动时，水银柱静止，动能为零；$(\Delta m)_{\max}$部分上升 $y_{\max}$，势能为$(\Delta m)_{\max}gy_{\max}$．任意状态时，水银柱动能 $\frac{1}{2}mv^2$（m 和 v 分别为水银柱的质量和速度），Δm 部分上升 y，势能为$(\Delta m)gy$．因机械能守恒，有

$$(\Delta m)gy+\frac{1}{2}mv^2=(\Delta m)_{\max}gy_{\max}$$

式中

$$\Delta m=\rho yS,\quad m=\rho hS$$
$$(\Delta m)_{\max}=\rho y_{\max}S,\quad v=\dot{y}$$

其中 S 是 U 型管截面，h 是水银柱全长，ρ 是水银密度．由以上五式，得

$$\rho ySgy+\frac{1}{2}\rho hS\dot{y}^2=\rho y_{\max}Sgy_{\max}=\text{常量}$$

即

$$gy^2+\frac{1}{2}h\dot{y}^2=\text{常量}$$

对时间 t 求导，得

$$2gy\dot{y}+h\dot{y}\ddot{y}=0$$

即

$$\ddot{y}+\frac{2g}{h}y=0$$

这就是水银柱的运动方程，它表明水银柱作简谐振动，其圆频率 ω_1 和周期 T_1 为

$$\omega_1=\sqrt{\frac{2g}{h}},\quad T_1=\frac{2\pi}{\omega_1}=2\pi\sqrt{\frac{h}{2g}}$$

2. 水银柱振荡时，右端被封闭的空气柱经历绝热过程．设水银柱平衡时，右端空气柱长度为 L，则因水银柱振荡使左端水银面上升到任意位置 y 时，右端空气柱长度为$(L+y)$．由绝热过程方程，有

$$p_y[(L+y)S]^\gamma=p_0(LS)^\gamma$$

式中

$$p_0=\rho gh_0$$

为大气压强，p_y 是右端空气柱长为$(L+y)$时的空气压强．上式可改写为

$$p_y-p_0=\left[\left(\frac{L}{L+y}\right)^\gamma-1\right]p_0$$

因微小振荡

$$y\ll L$$

故

$$p_y-p_0\approx\left[\left(1-\frac{y}{L}\right)^{\gamma}-1\right]p_0\approx\left(1-\gamma\frac{y}{L}-1\right)p_0$$
$$=-\gamma\frac{y}{L}p_0=-\gamma\frac{h_0}{L}\rho gy$$

由功能关系，有

$$(\Delta m)gy+\frac{1}{2}mv^2=(\Delta m)_{\max}gy_{\max}+A_p$$

式中 A_p 是由于右端空气压强 p_y 与左端空气压强 p_0 对水银柱所作功之和，为

$$A_p=\int_0^y(p_y-p_0)S\mathrm{d}y$$

或

$$\mathrm{d}A_p=(p_y-p_0)S\mathrm{d}y$$

把上述功能关系改写为

$$\rho ySgy+\frac{1}{2}\rho hS\dot{y}^2=\rho y_{\max}Sgy_{\max}+A_p$$

对 t 求导，并将 $\mathrm{d}A_p$ 代入，得

$$2\rho Sgy\dot{y}+\rho Sh\dot{y}\ddot{y}=\frac{\mathrm{d}A_p}{\mathrm{d}t}=(P_y-P_0)S\dot{y}$$

把(p_y-p_0)的结果代入，得

$$2\rho gy+\rho h\ddot{y}=p_y-p_0=-\gamma\frac{h_o}{L}\rho gy$$

或

$$\ddot{y}+\frac{1}{h}\left(2g+\gamma\frac{h_0}{L}g\right)y=0$$

这就是右端封闭后，在绝热条件下，水银柱作微小振动的运动方程，它表明水银柱作简谐振动，其圆频率 ω_2 和周期 T_2 为

$$\omega_2=\sqrt{\frac{1}{h}\left(2g+\gamma\frac{h_0}{L}g\right)},\quad T_2=\frac{2\pi}{\omega_2}=2\pi\sqrt{\frac{h}{\left(2+\gamma\frac{h_0}{L}\right)g}}$$

3. 由 T_1 和 T_2 得

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2=\frac{\dfrac{h}{2g}}{\dfrac{h}{\left(2+\gamma\frac{h_0}{L}\right)g}}=1+\frac{\gamma h_0}{2L}$$

故绝热指数为

$$\gamma=\frac{2L}{h_0}\left[\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2-1\right]$$

【题 16】 声波可在气体管中形成驻波．现用1 000 Hz的声波在碘蒸气管中做实验，在温度为400 K时，测得管内形成的驻波的相邻间距为6.77 cm．试问管内的碘蒸气分子是单原子的还是

双原子的．已知碘的原子量是127,声波在空气中的传播速度 $v=\frac{1}{\sqrt{\rho K_s}}$,其中 ρ 为气体的密度，K_s 为气体的绝热压缩系数,定义为 $K_s=-\frac{1}{V}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p}\right)_{绝热}$.

【分析】 虽然本题未指明碘蒸气是否理想气体,但不妨假设是理想气体,否则无从下手,而由所得结果判断这个附加假设是否合理可用．

由理想气体绝热过程方程 $pV^\gamma=$常数,可得出 K_s 与 γ、p 的关系．由理想气体状态方程可得出 ρ 与 p、T、μ 的关系．代入 $v=\sqrt{\frac{1}{\rho K_s}}$,可得出 v 与 γ、T、μ 的关系．

由实验测出的波长 λ 和已知的 ν(频率)可得 v,T 又给定,于是 γ 和 μ 的关系可知,即可确定是单原子,还是双原子分子．

【解】 由理想气体绝热过程方程

$$pV^\gamma=常数$$

可得

$$V^\gamma \mathrm{d}p+\gamma pV^{\gamma-1}\mathrm{d}V=0$$

即

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p}\right)_{绝热}=-\frac{V}{\gamma p}$$

代入 K_S 的定义式,得

$$K_S=-\frac{1}{V}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p}\right)_{绝热}=\frac{1}{\gamma p} \tag{1}$$

由理想气体状态方程

$$pV=\frac{M}{\mu}RT$$

及密度 ρ 的定义

$$\rho=\frac{M}{V}$$

得

$$\rho=\frac{p\mu}{RT} \tag{2}$$

把(1)、(2)式代入声速公式,得

$$v=\sqrt{\frac{1}{\rho K_s}}=\sqrt{\frac{RT}{p\mu}\gamma p}=\sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$$

故

$$\gamma=\frac{\mu v^2}{RT} \tag{3}$$

驻波相邻波节的间距为$\frac{\lambda}{2}$,故

$$\lambda=2\times6.77\ \mathrm{cm}=13.54\ \mathrm{cm}$$

所用频率为

$$\nu=1000\ \text{Hz}$$

故声速为

$$v=\lambda\nu=13.54\times1\,000\ \text{cm/s}=135.4\ \text{m/s} \tag{4}$$

把(4)式代入(3)式，又已知 $T=400\text{K}$. 若碘蒸气分子为单原子分子，则

$$\mu=127\ \text{g/mol}=0.127\ \text{kg/mol}$$

$$\gamma=\frac{\mu v^2}{RT}=0.127\times(135.4)^2/8.31\times400=0.70$$

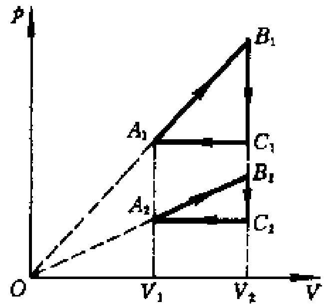
这与单原子分子理想气体的 $\gamma=1.67$ 相差甚远，而且即使碘蒸气不是理想气体也应有 $\gamma>1$，故此解不合理，应弃去．

若碘蒸气分子为双原子分子，则

$$\mu=2\times0.127\ \text{kg/mol},\quad \gamma=2\times0.70=1.40$$

这与双原子分子理想气体的 $\gamma=1.4$ 相符，因此碘蒸气的分子是双原子分子，采用理想气体假设求解是合理的．

【题 17】 定体摩尔热容量 C_V 为常量的某理想气体．经历如图所示的 pV 平面上的两个循环过程 $A_1B_1C_1A_1$ 和 $A_2B_2C_2A_2$，相应的效率分别为 η_1 和 η_2. 试比较 η_1 与 η_2 的大小(用不等式或等式表示).



热图 2-17-1

【分析】 循环过程的效率为 $\eta=\dfrac{W}{Q}$，其中 W 是气体经循环过程对外所作的功，Q 为气体从外界吸收的热量．本题 $A_1B_1C_1A_1$ 与 $A_2B_2C_2A_2$ 两个循环过程的功，很容易从如图所示的直角三角形面积算得．在 $A_1B_1C_1A_1$ 循环过程中，B_1C_1 为等体降压过程，温度降低，吸热量为 $\nu C_V\Delta T$（ν 是气体的摩尔数），因 $\Delta T<0$，吸热为负，即放热．C_1A_1 为等压压缩过程，温度也是降低，吸热量 $\nu C_p\Delta T$ 也是负值，即也是放热．因而循环过程 $A_1B_1C_1A_1$ 的吸热量 Q 就是 A_1B_1 过程的吸热量．循环过程 $A_2B_2C_2A_2$ 类似．不难发现，A_1B_1 和 A_2B_2 过程都是多方指数 $n=-1$ 的多方过程，其摩尔热容量可由 n 和 C_V 确定，过程吸热 Q 也就可以算出．分别算出 η_1 和 η_2，即可比较其大小．

【解】 先计算循环过程 $A_1B_1C_1A_1$ 的效率

$$\eta_1=\frac{W_1}{Q_1}$$

其中 W_1 是图中直角三角形 $A_1B_1C_1$ 的面积，为

$$W_1=\frac{1}{2}(p_{B_1}-p_{C_1})(V_2-V_1)$$

式中 p_{B_1}和 p_{C_1}分别是 B_1 和 C_1 的压强，因 $p_{A_1}=p_{C_1}$，也可写成

$$W_1=\frac{1}{2}(p_{B_1}-p_{A_1})(V_2-V_1)$$

如图，A_1B_1 过程是通过原点的直线，过程方程为

$$p=kV$$

因此

$$p_{B_1}-p_{A_1}=k(V_2-V_1)$$

代入 W_1 表达式，得

$$W_1=\frac{1}{2}k(V_2-V_1)^2$$

如图，B_1C_1 为等体降压过程，温度降低，气体放热；C_1A_1 为等压压缩过程，温度降低，气体放热．循环过程 $A_1B_1C_1A_1$ 的吸热就是 A_1B_1 过程的吸热量．直线过程 A_1B_1 是多方指数 $n=-1$ 的多方过程，过程方程为

$$pV^{-1}=常量$$

此多方过程的摩尔热容量为

$$C=\frac{\gamma-n}{1-n}C_V=\frac{1}{2}(\gamma+1)C_V$$

式中 γ 为气体绝热指数．设气体的摩尔数为 ν，则 B_1 和 A_1 的温度 T_2 和 T_1 分别满足

$$p_{B_1}V_2=\nu RT_2,\quad p_{A_1}V_1=\nu RT_1$$

相减，得

$$T_2-T_1=\frac{1}{\nu R}(p_{B_1}V_2-p_{A_1}V_1)$$

利用 $p=kV$，得

$$T_2-T_1=\frac{k}{\nu R}(V_2^2-V_1^2)$$

故 A_1B_1 过程吸热为

$$Q_1=\nu C(T_2-T_1)=\frac{k}{R}C(V_2^2-V_1^2)$$

由 W_1 和 Q_1，得出 $A_1B_1C_1A_1$ 循环过程的效率为

$$\eta_1=\frac{W_1}{Q_1}=\frac{R(V_2-V_1)}{2C(V_2+V_1)}$$

上式表明，η_1 与 A_1B_1 直线过程斜率 k 的大小无关，而只与 C 以及 V_1、V_2 等量有关，其中 C 也与A_1B_1 直线的斜率 k 无关．因此，只要相应的 V_1 和 V_2 相同，效率便相同，于是 $A_2B_2C_2A_2$ 循环过程的效率 η_2 也应为

$$\eta_2=\frac{R(V_2-V_1)}{2C(V_2+V_1)}$$

即

$$\eta_2=\eta_1$$

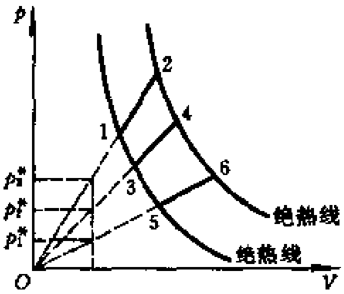
【题 18】 如图，在 $p-V$ 平面上用实线画出了 C_V 为常量的某理想气体的几条准静态过程线，其中两条实曲线是绝热过程，三条实直线是直线过程，其延长线交于原点 O．

1．试比较 η_{12431}（循环过程 12431 的效率，余同）与 η_{12651}的大小．

2．设 $p_1^*:p_2^*:p_3^*=1:2:3$，试比较 η_{12431}与 η_{34651}的大小．

【分析】 循环过程的效率 η 可表为

$$\eta = 1 - \frac{Q_{放}}{Q_{吸}}$$



热图 2－18－1

其中 $Q_{放}$ 为过程中的放热量，$Q_{吸}$ 为过程中的吸热量．在图示的三个循环过程中，三个直线过程为吸热或放热的过程，余为绝热过程无热量吸放，故循环效率取决于这三个直线过程中吸热或放热的多少．三个直线过程都是多方指数 $n=-1$ 的多方过程．又已知经历这些过程的理想气体的 C_V 为常量，利用这些不难求解．

【解】 如图，12、34、56 过程均属多方指数

$$n=-1$$

的多方过程，亦可分别表为

$$p=k_3V(12\text{ 过程}),\quad p=k_2V(34\text{ 过程}),\quad p=k_1V(56\text{ 过程})$$

其中

$$k_3:k_2:k_1=3:2:1$$

这三个直线过程有相同的过程热参量，其摩尔热容量可统一记为 C.

为便于讨论，将 12、34、56 过程的吸热分别记为 Q_1、Q_2、Q_3.

1. 在循环过程 12431 中吸热 Q_1，放热 Q_2，故循环过程的效率为

$$\eta_{12431} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

同样，在循环过程 34653 中吸热 Q_2，放热 Q_3，效率为

$$\eta_{34653} = 1 - \frac{Q_3}{Q_2}$$

在循环过程 12651 中吸热 Q_1，放热 Q_3，效率为

$$\eta_{12651} = 1 - \frac{Q_3}{Q_1}$$

因

$$\eta_{34653} < 1$$

故

$$Q_2 > Q_3$$

因此

$$1-\frac{Q_2}{Q_1} < 1-\frac{Q_3}{Q_1}$$

即

$$\eta_{12431} < \eta_{12651}$$

2. 把状态 1,2,3,4,5,6 的温度分别记为 T_1,T_2,T_3,T_4,T_5,T_6，则因三个直线过程的摩尔热容量 C 相同，有

$$Q_1:Q_2:Q_3=(T_2-T_1):(T_4-T_3):(T_6-T_5)$$

把气体摩尔数记为 ν，状态 1,2,3,4,5,6 的压强和体积分别记为 p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6 和 V_1,V_2,V_3,V_4,V_5,V_6，则有

$$T_2-T_1=\frac{p_2V_2-p_1V_1}{\nu R}=\frac{k_3(V_2^2-V_1^2)}{\nu R}$$
$$T_4-T_3=\frac{p_4V_4-p_3V_3}{\nu R}=\frac{k_2(V_4^2-V_3^2)}{\nu R}$$
$$T_6-T_5=\frac{p_6V_6-p_5V_5}{\nu R}=\frac{k_1(V_6^2-V_5^2)}{\nu R}$$

故

$$Q_1:Q_2:Q_3=k_3(V_2^2-V_1^2):k_2(V_4^2-V_3^2):k_1(V_6^2-V_5^2)$$

状态 1,3,5 在同一绝热线上,状态 2,4,6 在另一绝热线上,若将绝热指数记为 γ,则有

$$p_1V_1{}^{\gamma}=p_3V_3{}^{\gamma}=p_5V_5{}^{\gamma},\quad p_2V_2{}^{\gamma}=p_4V_4{}^{\gamma}=p_6V_6{}^{\gamma}$$

或

$$k_3V_1{}^{\gamma+1}=k_2V_3{}^{\gamma+1}=k_1V_5{}^{\gamma+1},\quad k_3V_2{}^{\gamma+1}=k_2V_4{}^{\gamma+1}=k_1V_6{}^{\gamma+1}$$

两式相除,得

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{V_4}{V_3}=\frac{V_6}{V_5}\overset{令}{=}\alpha$$

于是

$$\begin{aligned}Q_1:Q_2:Q_3&=k_3(\alpha^2-1)V_1^2:\ k_2(\alpha^2-1)V_3^2:\ k_1(\alpha^2-1)V_5^2\\&=k_3V_1^2:\ k_2V_3^2:\ k_1V_5^2\end{aligned}$$

再由

$$k_3V_1^{\gamma+1}=k_2V_3^{\gamma+1}=k_1V_5^{\gamma+1}\overset{令}{=}\beta^{\gamma+1}$$

得

$$V_1=\beta k_3{}^{-\frac{1}{\gamma+1}},\quad V_3=\beta k_2{}^{-\frac{1}{\gamma+1}},\quad V_5=\beta k_1{}^{-\frac{1}{\gamma+1}}$$

故有

$$Q_1:Q_2:Q_3=k_3\beta^2k_3^{-\frac{2}{\gamma+1}}:\ k_2\beta^2k_2^{-\frac{2}{\gamma+1}}:\ k_1\beta^2k_1^{-\frac{2}{\gamma+1}}=k_3{}^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}:\ k_2{}^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}:\ k_1{}^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}$$

现将 η_{12431} 和 η_{34653} 分别表为

$$\eta_{12431}=1-\left(\frac{k_2}{k_3}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}=1-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}},\quad \eta_{34653}=1-\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}$$

因

$$\frac{\gamma-1}{\gamma+1}>0$$

故

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}$$

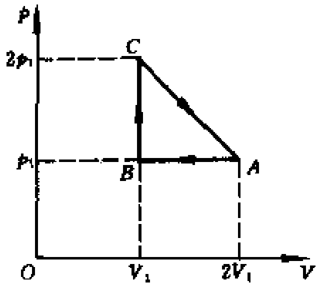
从而

$$\eta_{12431}<\eta_{34653}$$

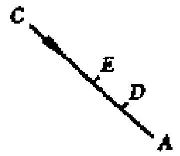
【题 19】 1 mol氦气(理想气体)经历如热图 2－19－1 所示的循环过程,热图 2－19－1 中 AB、

BC、CA 均为直线，有关参量已经标明．试求循环效率 η.

【分析】 循环效率 $\eta=\frac{W}{Q_1}$，W 是循环过程中气体对外所作总功，可由三角形面积求出．Q_1 是循环过程中总的净吸热．本题 AB 是等压压缩过程，放热，对 Q_1 无贡献；BC 是等体升温过程，吸热，不难计算；问题在于 CA 过程的净吸热．



热图 2-19-1



热图 2-19-2

CA 是膨胀过程，体积增大，对外作功．为了分析 CA 过程的内能变化，如热图 2-19-2，作不同温度的等温曲线(双曲线族，图中未画出)，其中应有一条等温线(也只有一条)与 CA 直线相切于 E 点，E 点是 CA 过程中温度最高、内能最大的状态．在 CE 过程中，温度上升，内能增加，又对外作功，应吸热．EA 过程温度下降，内能减少，若某段减少的内能大于对外作功，则放热，反之吸热．由于 EA 过程中越接近 A，温度下降及内能减少越来越快，估计在 EA 过程中应存在一个转折点 D，ED 过程吸热，DA 过程放热．因此关键在于确定 CA 过程中吸热与放热转折点 D 态的位置．

D 点的位置可由直线过程中任一元过程的 $\mathrm{d}Q$，从正值转变为负值，即由 $\mathrm{d}Q=0$ 的条件来确定．为了分析 $\mathrm{d}Q$，则可利用热力学第一定律，状态方程和直线过程方程．另外，D 点应是绝热过程曲线与直线过程的切点，由此也可确定 D 点的位置(参看本题的附录).

【解】 由热力学第一定律，对 CA 中任一元过程，因氦气为 1 mol，有

$$\mathrm{d}Q=\mathrm{d}U+p\mathrm{d}V=C_V\mathrm{d}T+p\mathrm{d}V=\frac{3}{2}R\mathrm{d}T+p\mathrm{d}V \tag{1}$$

状态方程为

$$pV=RT \tag{2}$$

CA 过程方程为

$$p=\alpha-\beta V$$

因 $p_C=2p_1$, $V_C=V_1$, $p_A=p_1$, $V_A=2V_1$，得 $\alpha=3P_1$, $\beta=\frac{p_1}{V_1}$，故过程方程为

$$p=3p_1-\frac{p_1}{V_1}V \tag{3}$$

(1)、(2)、(3)式联立，消去 p 和 T，得

$$\mathrm{d}Q=\frac{p_1}{2V_1}(15V_1-8V)\mathrm{d}V$$

在转折点(D 点)

$$dQ=0$$

故 D 点的体积为

$$V_D=\frac{15}{8}V_1$$

在 CD 过程中，$V<V_D$，$dQ>0$，吸热；在 DA 过程中，$V>V_D$，$dQ<0$，放热．把(4)式代入(3)式和(2)式，得

$$p_D=\frac{9}{8}p_1,\quad RT_D=\frac{9}{8}p_1\cdot\frac{15}{8}V_1=\frac{135}{64}p_1V_1$$

循环过程 $ABCA$ 的效率为

$$\eta=\frac{W}{Q_1}$$

其中 W 是循环过程对外所作总功，即为 ΔABC 的面积

$$W=\frac{1}{2}p_1V_1$$

其中 Q_1 是循环过程中总的净吸热，为

$$Q_1=Q_{BC}+Q_{CD}$$

其中

$$\begin{aligned}Q_{BC}&=C_V(T_C-T_B)=\frac{3}{2}(RT_C-RT_B)\\&=\frac{3}{2}(2p_1V_1-p_1V_1)=\frac{3}{2}p_1V_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_{CD}=\Delta U_{CD}+W_{CD}&=C_V(T_D-T_C)+\text{梯形面积}\\&=\frac{3}{2}(RT_D-RT_C)+\frac{1}{2}\left(2p_1+\frac{9}{8}p_1\right)\left(\frac{7}{8}V_1\right)\\&=\frac{3}{2}\left(\frac{9}{8}p_1\cdot\frac{15}{8}V_1-2p_1V_1\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{8}p_1\cdot\frac{7}{8}V_1\\&=\frac{21}{128}p_1V_1+\frac{175}{128}p_1V_1=\frac{49}{32}p_1V_1\end{aligned}$$

于是

$$Q_1=Q_{BC}+Q_{CD}=\left(\frac{3}{2}+\frac{49}{32}\right)p_1V_1=\frac{97}{32}p_1V_1$$

$$\eta=\frac{W}{Q_1}=\frac{1}{2}p_1V_1\Big/\frac{97}{32}p_1V_1=\frac{16}{97}\approx0.16$$

【附录】 证明在理想气体的任何准静态过程中，吸热与放热的转折点是 $p-V$ 图上绝热曲线与该过程曲线的切点．

任意元过程可看作多方过程．由热力学第一定律

$$dQ=dU+dW$$

其中

$$dU=\frac{M}{\mu}C_VdT$$

$$dW=pdV=\frac{M}{\mu}\frac{RT}{V}dV$$

利用多方过程方程

$$TV^{n-1}=\text{常量}$$

得

$$\mathrm{d}W=-\frac{M}{\mu}\frac{R}{n-1}\mathrm{d}T$$

于是元过程中吸热的公式为

$$\mathrm{d}Q=\frac{M}{\mu}\left(C_V-\frac{R}{n-1}\right)\mathrm{d}T=\frac{M}{\mu}C_V\left(\frac{n-\gamma}{n-1}\right)\mathrm{d}T$$

式中 n 是多方指数．上式表明 $\mathrm{d}Q$ 的正、负取决于 $\mathrm{d}T$ 及 $\left(\frac{n-\gamma}{n-1}\right)$ 两个因子．

如热图 2-19-3，过 A 点作等体($n=\infty$)，绝热($n=\gamma$)，等温($n=1$)，等压($n=0$)曲线，它们把 $p-V$ 平面分成八个区域．从 A 点出发的任意元过程必在八区之中或恰在边界上．

从 $A\to$①，$\gamma<n<\infty$，$\mathrm{d}T>0$，故 $\mathrm{d}Q>0$，吸热．

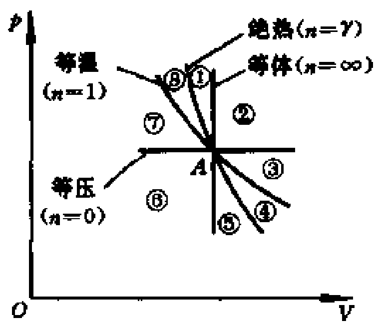
从 $A\to$②，$n<0$，$\mathrm{d}T>0$，故 $\mathrm{d}Q>0$，吸热．

从 $A\to$③，$0<n<1$，$\mathrm{d}T>0$，故 $\mathrm{d}Q>0$，吸热．

从 $A\to$④，$1<n<\gamma$，$\mathrm{d}T<0$，故 $\mathrm{d}Q>0$，吸热．

从 $A\to$⑤，⑥，⑦，⑧类似，只是 $\mathrm{d}T$ 反号，故 $\mathrm{d}Q<0$，放热．

若过程反向，则结论相反，例如从①$\to A$，放热．余类似．

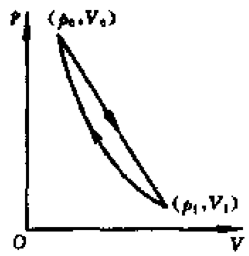


热图 2-19-3

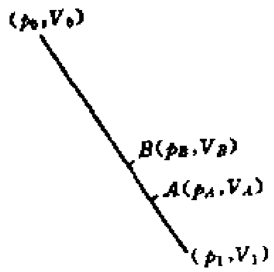
总之，如热图 2-19-3，在 $p-V$ 图上，以经过 A 点的绝热曲线为界，从 A 点向绝热曲线右方的任意元过程均吸热，从 A 点向绝热曲线左方的任意元过程均放热．换言之，对于任何过程，其吸热与放热的转折点是该过程曲线与绝热曲线的切点．因为如果该过程曲线在绝热曲线左侧，则从上方经该过程到达切点应吸热，从切点经该过程往下应放热，所以切点是转折点；如果该过程在绝热曲线右侧或过程反向，可作类似讨论，切点仍是转折点．

【题 20】 如热图 2-20-1，0.1 mol 单原子分子理想气体从初态($p_0=32.0$ Pa，$V_0=8.00$ m^3)经 $p-V$ 图上的直线过程到达终态($p_1=1.0$ Pa，$V_1=64.0$ m^3)，再经绝热过程回到初态，构成循环．

试求：1. 循环效率．2. 上述循环的最高温度和最低温度．



热图 2-20-1



热图 2-20-2

【分析】 与上题类似,循环效率 $\eta=\frac{W}{Q_1}$,其中 W 是循环过程中气体对外所作总功,等于循环包围的面积,Q 上循环过程中总的净吸热．如上题,在热图 2－20－2 的直线过程中应存在一个吸热和放热的转折点 A,A 点是绝热曲线与直线的切点,也可由直线过程中元过程的 $\mathrm{d}Q=0$ 来确定 A 点．从初态到 A 态的吸热即为Q_1,于是 η 可求．

最高温度是等温曲线与直线的切点 B 态的温度,最低温度是终态(p_1,V_1)的温度．

【解】 直线过程方程为

$$p=\alpha-\beta V$$

对初态和终态,有

$$\begin{cases}p_0=\alpha-\beta V_0\\p_1=\alpha-\beta V_1\end{cases}$$

解出

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{p_0V_1-V_0p_1}{V_1-V_0}=\dfrac{255}{7}\ \mathrm{Pa}\\[2ex]\beta=\dfrac{p_0-p_1}{V_1-V_0}=\dfrac{31}{56}\ \mathrm{Pa/m^3}\end{cases}$$

循环过程对外作功为$\left(注意\ \gamma=\frac{5}{3}\right)$

$$\begin{aligned}W&=W_{直线}+W_{绝热}=\frac{1}{2}(p_1+p_0)(V_1-V_0)+\frac{p_1V_1-p_0V_0}{\gamma-1}\\&=924-288=636\ \mathrm{J}\end{aligned}$$

确定直线过程中吸热与放热转折点 $A(p_A,V_A)$的位置．由热力学第一定律,理想气体状态方程及直线过程方程,有

$$\begin{cases}\mathrm{d}Q=\mathrm{d}U+p\mathrm{d}V=\nu\check{C}_V\mathrm{d}T+p\mathrm{d}V\\pV=\nu RT\\p=\alpha-\beta V\end{cases}$$

式中

$$C_V=\frac{R}{\gamma-1}=\frac{R}{\frac{5}{3}-1}=\frac{3}{2}R,\quad \nu=0.1$$

代入,消去 p 和 T,得

$$\mathrm{d}Q=\left[\frac{C_V}{R}(\alpha-2\beta V)+(\alpha-\beta V)\right]\mathrm{d}V=\left[\frac{1}{\gamma-1}(\alpha-2\beta V)+(\alpha-\beta V)\right]\mathrm{d}V$$

转折点 A 满足

$$\mathrm{d}Q=0$$

故

$$V_A=\frac{\gamma\alpha}{(\gamma+1)\beta}=\frac{5\alpha}{8\beta}=\frac{5}{8}\times\frac{259}{7}\times\frac{56}{31}=41.1\ \mathrm{m^3}$$

$$p_A=\alpha-\beta V_A=\frac{3}{8}\alpha=13.7\ \mathrm{Pa}$$

计算(p_A, V_A)的另一方法．A 点是绝热曲线与直线的切点，故

$$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}\right)_{直线}=\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}\right)_{绝热}$$

因

$$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}\right)_{直线}=-\beta$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}\right)_{绝热}=-\gamma\frac{p}{V}$$

由以上三式，得

$$-\beta=-\gamma\frac{p}{V}$$

A 点在直线上，应满足

$$p=\alpha-\beta V$$

由以上两式，解出

$$V_A=\frac{\gamma\alpha}{(\gamma+1)\beta},\quad p_A=\alpha-\beta V_A$$

与上面求出的结果相同．

净吸热为

$$\begin{aligned}Q_1&=Q(从初态到\ A\ 态吸热)=W(初态到\ A\ 态)+\Delta U(初态到\ A\ 态)\\&=\frac{1}{2}(p_A+p_0)(V_A-V_0)+\nu C_V(T_A-T_0)\\&=\frac{1}{2}(p_A+p_0)(V_A-V_0)+\nu\frac{3}{2}R\left(\frac{p_AV_A}{\nu R}-\frac{p_0V_0}{\nu R}\right)\\&=756+459=1215\ \mathrm{J}\end{aligned}$$

循环效率为

$$\eta=\frac{W}{Q_1}=\frac{636}{1215}=0.52=52\%$$

最高温度是等温曲线与直线的切点 B 的温度．由

$$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}\right)_{直线}=\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}\right)_{等温},\quad\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}\right)_{直线}=-\beta,\quad\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}\right)_{等温}=-\frac{p}{V}$$

得

$$-\beta=\frac{p}{V}$$

B 点是直线上的一点，应满足

$$p=\alpha-\beta V$$

由以上两式解出

$$V_B=\frac{\alpha}{2\beta},\quad p_B=\frac{\alpha}{2}$$

故

$$T_{\max}=T_B=\frac{p_BV_B}{\nu R}=\frac{\alpha^2}{4\beta\nu R}=721\ \mathrm{K}$$

最低温度是终态的温度 T_1，为

$$T_{\min}=T_1=\frac{p_1V_1}{\nu R}=77\ \text{K}$$

顺便指出，由直线过程方程

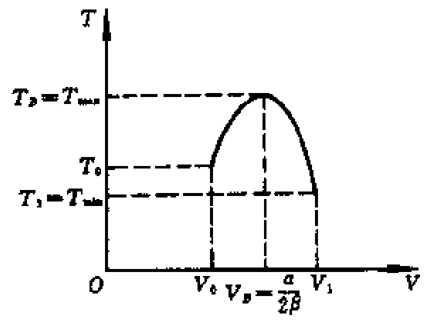
$$p=\alpha-\beta V$$

及理想气体状态方程

$$pV=\nu RT$$

得出直线过程中的 $T(V)$ 关系为

$$T=\frac{\alpha V-\beta V^2}{\nu R}$$



热图 2－20－3

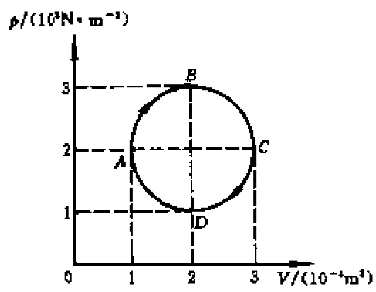
这是抛物线，如热图 2－20－3 所示．由 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}V}=0$ 也可求出 $T_{\max}$，与上面的结果相同．

【题 21】 1 mol单原子分子理想气体所经准静态循环过程是如热图 2－21－1 所示的圆．有关参量已在热图 2－21－1 中标明．

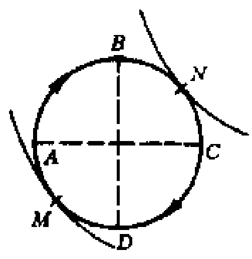
1. 试求一次循环对外所作的功 W. 2. 试计算由 A 经 B 到 C 过程中内能的增量 ΔU. 3. 试计算由 A 经 B 到 C 过程中吸收的热量 Q. 4. 为了求出循环效率，必须知道循环过程中吸热与放热的转折点．试导出转折点坐标所满足的代数方程(不必求解)．

【分析】 如热图 2－21－1，循环过程是 $p-V$ 图上的圆，过程方程不难写出(注意，若改变 p，V 轴的标度，上述圆将变为椭圆)．一次循环对外作功 W 等于圆(或椭圆)面积．

ABC 过程的 ΔU_{ABC} 取决于温度的变化．W_{ABC} 等于半圆下的面积(半圆加上正方形，如热图 2－21－1)．由 ΔU_{ABC} 和 W_{ABC}，Q_{ABC} 可求．



热图 2－21－1



热图 2－21－2

吸热与放热转折点的位置由绝热曲线与循环曲线的切点确定，如热图 2－21－2，应有两个转折点 M 和 N．循环过程由吸热的 $MABN$ 过程及放热的 $NCDM$ 过程两部分构成，如热图 2－21－2 所示(请参看本章题 19 的附录，本题 $MABN$ 过程相当于该附录图中 $A\to$①②以及⑥⑦$\to A$ 的过程，为吸热．本题 $NCDM$ 过程则相当于该附录图中 $A\to$⑤⑥以及②③$\to A$ 的过程，为放热．因此，本题的圆过程中只有两个吸热与放热的转折点，即 M 点和 N 点．)

【解】 循环过程为 $p-V$ 图上的圆，过程方程为

$$\left(\frac{p}{p_0}-2\right)^2+\left(\frac{V}{V_0}-2\right)^2=1$$

式中 $p_0=10^5\ \mathrm{N/m^2}$，$V_0=10^{-3}\ \mathrm{m^3}$．若改变 p，V 轴的标度，循环过程为椭圆，其过程方程为

$$\frac{(p-2p_0)^2}{p_0^2}+\frac{(V-2V_0)^2}{V_0^2}=1$$

就代数方程而言，以上两式是等价的．

一次循环 $ABCDA$ 对外作功 W 为圆或椭圆的面积，为

$$W=\pi p_0V_0=314\ \mathrm{J}$$

在 ABC 过程中，内能增量 ΔU_{ABC}、对外作功 W_{ABC}，吸热 Q_{ABC}分别为

$$\Delta U_{ABC}=C_V(T_C-T_A)=\frac{3}{2}R\left(\frac{p_CV_C}{R}-\frac{p_AV_A}{R}\right)$$

$$=\frac{3}{2}(6p_0V_0-2p_0V_0)=6p_0V_0=600\ \mathrm{J}$$

$$W_{ABC}=\frac{1}{2}\pi p_0V_0+2p_0(3V_0-V_0)=\left(\frac{\pi}{2}+4\right)p_0V_0$$

$$Q_{ABC}=W_{ABC}+\Delta U_{ABC}=\left(\frac{\pi}{2}+4\right)p_0V_0+6p_0V_0$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}+10\right)p_0V_0=1157\ \mathrm{J}$$

吸热和放热的转折点是绝热曲线与循环曲线的切点，如热图 2－21－2，应满足

$$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}\right)_{循环}=\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}\right)_{绝热}$$

令

$$\begin{cases}x=\dfrac{V}{V_0}\\[2mm] y=\dfrac{p}{p_0}\end{cases}$$

则由

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{循环}=\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{绝热}\\ (y-2)^2+(x-2)^2=1\text{（循环曲线）}\\ yx^{\gamma}=\text{常量（绝热曲线）}\end{cases}$$

得

$$\frac{x-2}{y-2}=-\gamma\frac{y}{x}$$

式中 $\gamma=\dfrac{5}{3}$．转折点在循环曲线上，故其坐标(x,y)应满足的二元二次方程组为

$$\begin{cases}3x(x-2)+5y(y-2)=0\\ (x-2)^2+(y-2)^2=1\end{cases}$$

上述代数方程组的两个解，就是两个转折点 M 和 N 的坐标．

【题 22】 某空调器按可逆卡诺循环运转，其中的作功装置连续工作时所提供的功率为 P_0．

1. 夏天，室外温度为恒定的 T_1，启动空调器连续工作，最后可将室温降至恒定的 T_2. 室外通过热传导在单位时间内向室内传输的热量正比于(T_1-T_2)(牛顿冷却定律)，比例系数为 A. 试用 T_1，P_0 和 A 来表示 T_2.

2. 当室外温度为 30 ℃时，若这台空调器只有 30％的时间处于工作状态，则室温可维持在 20 ℃. 试问室外温度最高为多少时，用此空调器仍可使室温维持在 20 ℃.

3. 冬天，可将空调器吸热、放热反向. 试问室外温度最低为多少时，用此空调器可使室温维持在 20 ℃.

绝对零度取为 −273 ℃.

【分析】 夏天，空调器为制冷机，作逆向卡诺循环，从室内(低温热源)吸热，向室外(高温热源)放热，对工作物质作功. 为保持室温恒定，空调器从室内吸收的热量应等于室外向室内通过热传导传输的热量.

冬天刚好相反，空调器为热机，作顺向卡诺循环，从室外(低温热源)吸热，向室内(高温热源)放热. 为保持室温恒定，空调器向室内的放热，应等于室内向室外通过热传导传输的热量.

【解】 无论空调器是连续工作还是间断工作，其作功装置提供的平均功率统记为 P，显然，连续工作时 $P=P_0$ 为极大，间断工作时应打个折扣.

1. 夏天，空调器为制冷机，单位时间从室内(低温热源，温度为 T_2)吸热 Q_2，向室外(高温热源，温度为 T_1)放热 Q_1，故

$$Q_1=Q_2+P$$

因空调器作可逆卡诺循环，故有

$$\frac{Q_1}{T_1}=\frac{Q_2}{T_2}$$

由以上两式，得出

$$Q_2=\frac{T_2}{T_1-T_2}P$$

同时，单位时间内室外向室内通过热传导传输的热量为

$$Q=A(T_1-T_2)$$

为了保持室温恒定，室内(注意不是室外)应处于热平衡，故应有

$$Q=Q_2$$

把 Q 和 Q_2 的表达式代入，得

$$A(T_1-T_2)=\frac{T_2}{T_1-T_2}P$$

或

$$T_1-T_2=\sqrt{\frac{P}{A}T_2} \tag{1}$$

这是一个 T_2 的二次代数方程，容易求解. 弃去不合理的 $T_2>T_1$ 解，得出解为

$$T_2=T_1+\frac{1}{2}\left[\frac{P}{A}-\sqrt{\left(\frac{P}{A}\right)^2+\frac{4P}{A}T_1}\right]$$

因空调器连续工作，式中的 $P=P_0$，故

$$T_2=T_1+\frac{1}{2}\left[\frac{P_0}{A}-\sqrt{\left(\frac{P_0}{A}\right)^2+\frac{4P_0}{A}T_1}\right]$$

2. 按题意，当 $T_1=293$ K，$P=0.3P_0$ 时，$T_1=303$ K. 而所求的是 $P=P_0$ 时对应的 T_1 值，记为 $T_{1,max}$. 把(1)式分别应用于这两种情况，可得

$$T_1-T_2=\sqrt{\frac{P}{A}T_2}=\sqrt{\frac{0.3P_0}{A}T_2}$$

$$T_{1,max}-T_2=\sqrt{\frac{P_0}{A}T_2} \tag{2}$$

由以上两式，得

$$T_{1,max}=T_2+\sqrt{0.3}(T_1-T_2)=311.26\ \text{K}$$

即

$$t_{1,max}=38.26\ ℃$$

若空调器连续工作，则当夏天室外温度最高为 38.26 ℃时，仍可使室温维持在 20 ℃.

3. 冬天，空调器为热机，单位时间从室外(低温热源，温度为 T_1')吸热 Q_1'，向室内(高温热源，温度仍表为 T_2)放热 Q_2'，空调器连续工作，功率为 P_0，故有

$$Q_2'=Q_1'+P_0$$

因空调器作可逆卡诺循环，有

$$\frac{Q_1'}{T_1'}=\frac{Q_2'}{T_2}$$

由以上两式，得出

$$Q_2'=\frac{T_2}{T_2-T_1'}P_0$$

同时，单位时间从室内向室外通过热传导传输的热量为

$$Q'=A(T_2-T_1')$$

为了保持室温恒定，室内(注意不是室外，即与夏天的情况并不对称)应处于热平衡，故应有

$$Q'=Q_2'$$

把 Q' 和 Q_2' 的表达式代入，得

$$T_2-T_1'=\sqrt{\frac{P_0}{A}T_2}$$

注意上式与(2)式并不对称. 于是

$$T_1'=T_2-\sqrt{\frac{P_0}{A}T_2}$$

把(2)式代入，得

$$\begin{aligned}T_1'&=T_2-(T_{1,max}-T_2)=2T_2-T_{1,max}\\&=2\times293-311.26=274.74\ \text{K}\end{aligned}$$

即

$$t_1'=1.74\ ℃$$

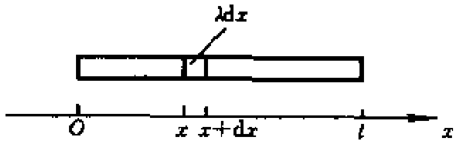
若空调器连续工作,则当冬天室外温度最低为 1.74 ℃时,仍可使室内维持在 20 ℃.

【题 23】 长 l 的均匀细棒,质量线密度为 λ,开始时一端温度为 T_1,另一端温度为 $T_2=2T_1$,中间各处温度线性地分布．此棒在绝热的情况下,最终达到热平衡．已知棒各处的比热为相同的常量 C. 试求全过程棒的熵增量,并说明此过程是否可逆．

【分析】 棒的初始温度分布容易求得．因过程绝热,棒与外界无热量交换,只是棒中温度较低处从温度较高处吸热而升温,同时温度较高处向温度较低处放热而降温,最后棒各处达到一致的温度．由棒吸热与放热总量平衡,可确定终态全棒的温度．棒中各小段从其初温达到终温,相应有熵的增量,各小段熵增量之和即为全过程棒的熵增量．由棒的熵增量的正、负号,即可确定过程是否可逆．

其实,这一过程就是热量自发地从高温物体向低温物体传输的过程．由热力学第二定律可知,这是一个不可逆过程,因此全过程的熵增量必定为正．

【解】 沿棒取 x 坐标如图所示,则有



热图 2-23-1

$$T_0=T_1$$

$$T_l=T_2=2T_1$$

因棒各处温度线性地分布,故棒中任意 x 处的温度为

$$T_x=T_0+\frac{x}{l}(T_l-T_0)$$

$$=T_1+\frac{x}{l}(2T_1-T_1)=\left(1+\frac{x}{l}\right)T_1$$

设在绝热条件下达到热平衡后,棒各处的温度同为 T_e,则从 x 到 $(x+\mathrm{d}x)$ 小段的吸热量应为

$$\mathrm{d}Q=c(\lambda\mathrm{d}x)(T_e-T_x)$$

积分,得棒在此过程中的总吸热量 Q,因绝热 Q 应为零,即

$$Q=\int_0^l c(\lambda\mathrm{d}x)(T_e-T_x)=0$$

即

$$T_e\int_0^l \mathrm{d}x=\int_0^l T_x\mathrm{d}x$$

把上述 T_x 表达式代入,积分,得

$$T_e l=T_1\cdot\frac{3}{2}l$$

故

$$T_e=\frac{3}{2}T_1$$

这一结果是很自然的,不难直观地猜到．

棒中从 x 到 $(x+\mathrm{d}x)$ 小段,在全过程中,温度从初态的 T_x 达到终态的 T_e. 该小段在任意元过程中,温度从 T 增为 $(T+\mathrm{d}T)$ 时的熵增量为

$$\mathrm{d}S=\frac{\mathrm{d}Q'}{T}=\frac{c(\lambda\mathrm{d}x)\mathrm{d}T}{T}$$

该小段从 T_x 到 T_e 的熵增量为

$$\int_{T_x}^{T_e}\mathrm{d}S = c\lambda\mathrm{d}x\int_{T_x}^{T_e}\frac{\mathrm{d}T}{T} = c\lambda\mathrm{d}x\ln\frac{T_e}{T_x}$$

各小段在全过程中的熵增量之和即为棒在全过程中的总熵增量 ΔS，应为

$$\Delta S = \int_0^l c\lambda\ln\frac{T_e}{T_x}\mathrm{d}x$$

把 T_e 和 T_x 的表达式代入，得

$$\Delta S = c\lambda\left\{\int_0^l\left(\ln\frac{3}{2}l\right)\mathrm{d}x - \int_0^l[\ln(l+x)]\mathrm{d}x\right\}$$
$$= c\lambda\left\{l\left(\ln\frac{3}{2}l\right) - \int_l^{2l}(\ln u)\mathrm{d}u\right\}$$

利用积分公式

$$\int(\ln u)\mathrm{d}u = u\ln u - u$$

最后得

$$\Delta S = c\lambda\left\{l\left(\ln\frac{3}{2}l\right) - [2l(\ln 2l) - 2l - l\ln l + l]\right\} = c\lambda l\left(1+\ln\frac{3}{8}\right)$$
$$=0.019c\lambda l>0$$

可见，在全过程中，棒的总熵增量 $\Delta S>0$，为正．因此，这是不可逆过程．

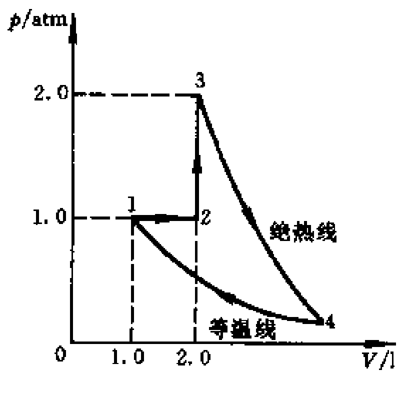
【题 24】 3.2 g 的氧气(绝热指数取为$\frac{7}{5}$)从初态 1($p_1=1.0$ atm，$V_1=1.0$ L)出发，经过等压过程到达状态 2($V_2=2.0$ L)，再经过等体过程到达状态 3($p_3=2.0$ atm)，又经过绝热过程到达状态 4，状态 4 的温度刚好与状态 1 的温度相同，最后经等温过程回到状态 1，构成循环过程．

1. 试求循环过程的效率 η.

2. 设初态 1 的熵为 S_1，取系统熵 S 为纵坐标，系统温度 T 为横坐标．试尽可能正确地画出循环过程的 $S-T$ 曲线．要求，曲线形状定性正确，标明曲线各特征点的坐标，其中 S 坐标可表为 S_1 加上或减去相应的数值．

【分析】 首先在 $p-V$ 坐标面上画出循环过程的曲线．分析和计算其中各过程的吸热、放热，即可得出循环过程的效率 η.

由已知的循环过程中各状态的压强与体积，可求得各状态的温度．由理想气体熵的公式可以确定在各过程中熵 S 随温度 T 的变化，从而定性地画出循环过程的 $S-T$ 曲线，并算出各特征点的 T 和 S.



热图 2-24-1

【解】 在 $p-V$ 坐标面上画出循环过程 12341 的曲线，如热图 2-24-1 所示．由题设，氧气的摩尔质量 μ，摩尔数 ν，等体摩尔热容量 C_V，等压摩尔热容量 C_p，绝热指数 γ 分别为

$$\mu=32\ \mathrm{g/mol},\quad \nu=0.1\ \mathrm{mol}$$

$$C_V=\frac{5}{2}R,\quad C_p=\frac{7}{2}R,\quad \gamma=\frac{7}{5}$$

1. 由理想气体状态方程,循环过程中各有关过程的过程方程,以及题目给定的数据,可以算出状态 1,2,3,4 的 p、V、T 如下(具体计算从略).

状态 1, $p_1=1.0$ atm, $V_1=1.0$L, $T_1=122$ K

状态 2, $p_2=1.0$ atm, $V_2=2.0$L, $T_2=244\text{ K}=2T_1$

状态 3, $p_3=2.0$ atm, $V_3=2.0$L, $T_3=488\text{ K}=4T_1$

状态 4, $p_4=0.0157$ atm, $V_4=64$L, $T_4=122\text{ K}=T_1$

等压过程 1－2 的吸热量为

$$Q_1=\nu C_p(T_2-T_1)=\frac{7}{2}\nu RT_1$$

等体过程 2－3 的吸热量为

$$Q_2=\nu C_V(T_3-T_2)=5\nu RT_1$$

绝热过程 3－4 的吸热量为零．等温过程 4－1 的放热量为

$$Q_3=\nu RT_4\ln\frac{V_4}{V_1}=(\ln 64)\nu RT_1$$

故循环过程 12341 的效率为

$$\eta=1-\frac{Q_{放}}{Q_{吸}}=1-\frac{Q_3}{Q_1+Q_2}=1-\frac{\ln 64}{\frac{7}{2}+5}=51\%$$

2. 理想气体的熵可表为

$$S=\nu C_V\ln T+\nu R\ln V+S_0$$

理想气体的状态方程为

$$V=\frac{\nu RT}{p}$$

由以上两式,可得出理想气体熵的另一表达式为

$$S=\nu(C_V+R)\ln T-\nu R\ln p+\nu R\ln\nu R+S_0=\nu C_p\ln T-\nu R\ln p+S_0'$$

在等压过程 1－2 中,熵增量为

$$\begin{aligned}S_2-S_1&=(\nu C_p\ln T_2-\nu R\ln p_2+S_0')-(\nu C_p\ln T_1-\nu R\ln p_1+S_0')\\&=\nu C_p\ln\frac{T_2}{T_1}=0.1\times\frac{7}{2}R\times\ln 2=2.02\text{ J/K}\end{aligned}$$

在等压过程 1－2 中,熵 S 随温度 T 的变化率应为

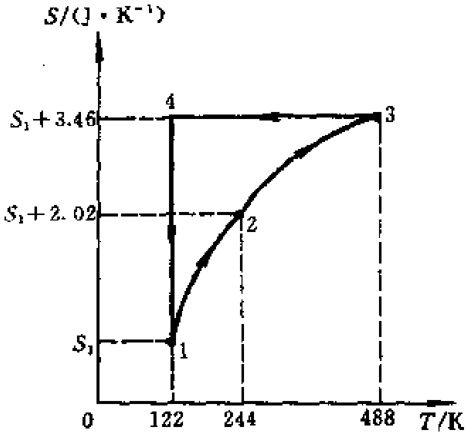
$$\left(\frac{dS}{dT}\right)_p=\frac{\nu C_p}{T}$$

可见,在等压过程 1－2 中,$S-T$ 曲线的斜率随 T 增大而减小,这将在热图 2－24－2 的曲线中显示出来．

在等体过程 2－3 中,状态 3 相对状态 1 的熵增量为

$$\begin{aligned}S_3-S_1&=(\nu C_V\ln T_3+\nu R\ln V_3+S_0)-(\nu C_V\ln T_1+\nu R\ln V_1+S_0)\\&=\nu C_V\ln\frac{T_3}{T_1}+\nu R\ln\frac{V_3}{V_1}=\nu C_V\ln 4+\nu R\ln 2\end{aligned}$$

$$=6\nu R\ln2=6\times0.1R\ln2=3.46\ \mathrm{J/K}$$



热图 2-24-2

在等体过程 2-3 中，熵 S 随温度 T 的变化率应为

$$\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}T}\right)_V=\frac{\nu C_V}{T}$$

可见，在等体过程 2-3 中，$S-T$ 曲线的斜率随 T 增大而减小，但因 $C_V<C_p$，曲线的弯曲程度应不如等压过程 1-2，这些都将在热图 2-24-2 的曲线中显示出来．

在绝热过程 3-4 中，熵不变，即

$$S_4=S_3$$

故绝热过程 3-4 的 $S-T$ 曲线应是一条等熵的直线．

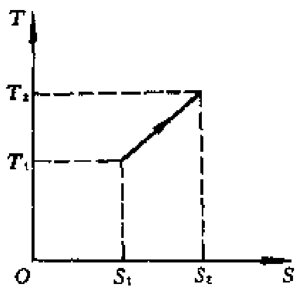
在等温过程 4-1 中，温度不变，即

$$T_4=T_1$$

故等温过程 4-1 的 $S-T$ 曲线应是一条等温的直线．

综合以上全部结果，可将如热图 2-24-1 所示的循环过程 12341 的 $S-T$ 曲线画出，如热图 2-24-2 所示．

【题 25】 ν 摩尔理想气体经历的某过程的 $T-S$ 曲线是如图所示的一条直线．设绝热指数 γ 为常数．试导出该过程的过程方程．



热图 2-25-1

【分析】 如所周知，理想气体的准静态过程，可按在过程中热容量 C 是否常量分为两类．C 为常量的过程是多方过程．C 为变量的过程为非多方过程．如果某过程的 C 已知，由热力学第一定律和理想气体状态方程，即可导出相应的过程方程．

本题给定的 $T-S$ 关系可用于确定过程的热容量 C，进而导出相应的过程方程．

本题提醒读者，由温-熵($T-S$)曲线可以导出过程方程．这是确定过程方程的一种方法．

【解】 将过程的摩尔热容量表为 C，根据熵的定义，有

$$\mathrm{d}S=\frac{\mathrm{d}Q}{T}=\frac{\nu C\mathrm{d}T}{T}$$

故

$$C=\frac{T}{\nu}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}T}$$

如图，本题某过程的 $T-S$ 曲线是直线，故有

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}T}=\frac{S_2-S_1}{T_2-T_1}$$

由以上两式，得出该过程的摩尔热容量 C 为

$$C=\frac{S_2-S_1}{\nu(T_2-T_1)}T$$

为讨论方便，引入常量 α

$$\alpha=\frac{S_2-S_1}{\nu(T_2-T_1)}\cdot\frac{1}{C_V}$$

其中 C_V 为等体摩尔热容量，有

$$C_V=\frac{R}{\gamma-1}$$

故

$$\alpha=\frac{(\gamma-1)(S_2-S_1)}{\nu R(T_2-T_1)}$$

于是 C 可表为

$$C=\alpha C_V T$$

可见，在本题的过程中，摩尔热容量 C 随温度 T 变化，并非常量，因此本题的过程是一个非多方过程．

由热力学第一定律

$$\nu C\mathrm{d}T=p\mathrm{d}V+\nu C_V\mathrm{d}T$$

即

$$p\mathrm{d}V=\nu(C-C_V)\mathrm{d}T$$

在本题的过程中

$$C=\alpha C_V\mathrm{T}$$

由以上两式，得

$$p\mathrm{d}V=\nu C_V(\alpha T-1)\mathrm{d}T$$

理想气体状态方程为

$$p=\frac{\nu RT}{V}$$

由以上两式，得

$$\frac{\mathrm{d}V}{V}=\frac{C_V}{R}\left(\alpha-\frac{1}{T}\right)\mathrm{d}T=\frac{1}{\gamma-1}\left(\alpha-\frac{1}{T}\right)\mathrm{d}T$$

积分，得

$$\ln V-\frac{1}{\gamma-1}\alpha T+\frac{1}{\gamma-1}\ln T=常量$$

即

$$\alpha T-\ln(TV^{\gamma-1})=常量$$

这就是本题过程的过程方程，式中的常量 α 已在前面给出．

第三章　气体动理论

（理想气体动理论，麦克斯韦分布，玻尔兹曼分布，平均自由程，输运过程，布朗运动）

【题1】 在一个密闭容器内盛有水，未满，处于平衡状态．已知水在 14 ℃时的饱和蒸汽压为 12.0 mmHg. 设水蒸气分子碰到水面后，都能进入水内，设饱和水蒸气可看作理想气体．试问在 100 ℃和 14 ℃时，单位时间内通过单位面积水面蒸发成为水蒸气的分子数之比 $n_{100}:n_{14}$为多大（取 2 位有效数字）.

【分析】 在密闭容器内有水和水蒸气，达到平衡时，由水蒸发为水蒸气的分子数与由水蒸气进入水面的分子数相等，水面上的是饱和水蒸气．所以，为了计算由水蒸发为水蒸气的分子数只需计算由水蒸气进入水面的分子数即可．

由题设，水蒸气分子只要碰到水面便都可进入水内，因此，平均而言，在 $\mathrm{d}t$ 时间内通过 $\mathrm{d}S$ 水面面积能进入水面的水蒸气分子数应正比于以 $\bar{v}\mathrm{d}t$ 为长度、$\mathrm{d}S$ 为底面积的柱体内的水蒸气分子数 $\mathrm{d}N$. 显然，$\mathrm{d}N$ 与柱体体积 $\bar{v}\mathrm{d}t\mathrm{d}S$ 及水蒸气数密度 n_0 有关，由题设水蒸气为理想气体，故 n_0 与 p、T 关系可知，且有 $\bar{v}\propto\sqrt{T}$，于是可知 $\mathrm{d}N$ 与 p、T 的关系，从而可得出 n_{100}与 n_{14}之比．

【解】 根据上述分析，在任意 $\mathrm{d}t$ 时间内，通过任意 $\mathrm{d}S$ 水面面积进入水面的水蒸气分子数 $\mathrm{d}N$ 正比于以 $\bar{v}\mathrm{d}t$ 为长度、$\mathrm{d}S$ 为底面积的柱体内的水蒸气分子数，设水蒸气分子的数密度为 n_0，则

$$\mathrm{d}N=An_0\bar{v}\mathrm{d}t\mathrm{d}S$$

式中 A 为比例系数．于是，单位时间通过单位水面面积进入水中的水蒸气分子数为

$$n=\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t\mathrm{d}S}=An_0\bar{v}$$

平均速率 $\bar{v}$ 与温度 T 的关系为

$$\bar{v}=B\sqrt{T}$$

式中 B 为比例系数．由题设，水蒸气为理想气体，其状态方程为

$$p=n_0kT$$

其中 p 为压强，k 为玻尔兹曼常数，即

$$n_0=\frac{P}{kT}$$

把上述 $\bar{v}$ 和 n_0 的表达式代入 n 的表达式，得

$$n=An_0\bar{v}=A\frac{p}{kT}B\sqrt{T}=C\frac{p}{\sqrt{T}}$$

式中 $C=\dfrac{AB}{k}$为常量．

在 100 ℃即 $T=373$ K 时，饱和水蒸气的压强为 $p_{100}=760$ mmHg. 在 14 ℃即 $T=287$ K

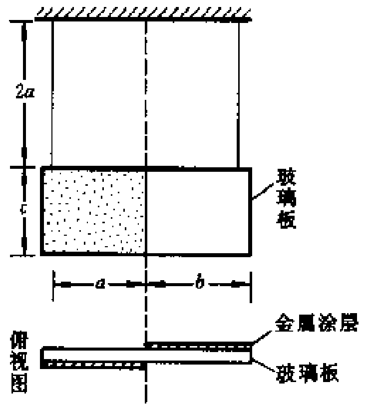
时，由题设饱和水蒸气的压强为 $p_{14}=12.0$ mmHg，代入上式，得

$$n_{100}:n_{14}=\frac{p_{100}}{\sqrt{373}}:\frac{p_{14}}{\sqrt{287}}=\frac{760}{\sqrt{373}}:\frac{12}{\sqrt{287}}=56:1$$

【题 2】 如热图 3-2-1，一块平面薄的长方形匀质玻璃板，用两根质量可略的等长细线悬挂起来，玻璃板两个表面的半个面分别对称地涂了一层化学性质活泼的金属，整个装置放在容器之中，容器内有压强为 p 的氯气．

设每一个氯气分子遇到金属分子后发生化学反应的概率为 $q(q<1)$，且 q 为恒量．设玻璃板两边的氯气密度相等．设在化学反应过程中，氯气压强的减小可忽略不计．设玻璃板的质量为 m，有关几何量如热图 3-2-1 所标示．

观察到玻璃板绕它的竖直轴转过一个很小的角度 α 后，处于平衡状态．试求 α 的大小．



热图 3-2-1

【分析】 与金属发生化学反应的氯气分子与玻璃板的碰撞可以看作是完全非弹性碰撞，不发生化学反应的氯分子与玻璃板的碰撞则是完全弹性的．由于两者给玻璃板的冲量不同，使玻璃板受到转动力矩的作用而扭转．

氯分子与未涂金属的玻璃表面之间只有弹性碰撞，形成的压强就是氯气的压强 p. 氯分子与涂金属的玻璃表面之间既有完全非弹性碰撞又有弹性碰撞，两种碰撞对压强的贡献可由化学反应的概率 q 来确定，这两种压强之和不同于 p，形成转动力矩，使玻璃板扭转．转动导致悬挂玻璃板的细线张力产生反向力矩．平衡时，两个力矩相等反向，由此可算出平衡时的转角 α.

【解】 与金属发生化学反应的氯气分子与玻璃板的碰撞是完全非弹性的，不发生化学反应的氯分子与玻璃板的碰撞是弹性的．前者给玻璃板的冲量是后者的一半(平均而言).

设氯气分子的数密度为 n_0，温度为 T，则未涂金属的玻璃表面因受氯气分子弹性碰撞所获得的压强，与容器器壁所获得的压强相同，均等于氯气的压强 p，故有

$$p=n_0kT$$

对于涂金属的玻璃表面，每一个氯分子遇金属发生化学反应的概率为 q，不发生化学反应的概率为$(1-q)$. 故 n_0 中有 qn_0 个分子与涂金属表面作完全非弹性碰撞，对该表面压强的贡献应为

$$p_1'=\frac{1}{2}qn_0kT=\frac{1}{2}qp$$

在 n_0 中有$(1-q)n_0$ 个分子与涂金属表面作弹性碰撞，对该表面压强的贡献为

$$p_2'=(1-q)n_0kT=(1-q)p$$

因此涂金属玻璃表面的压强为

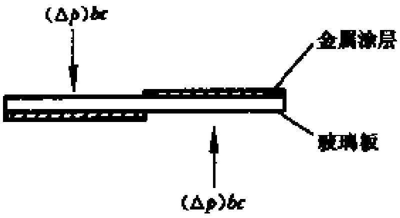
$$p'=p_1'+p_2'=\left(1-\frac{q}{2}\right)p$$

于是，不涂金属表面与涂金属表面的压强差为

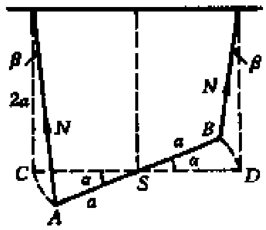
$$\Delta p=p-p'=\frac{1}{2}qp$$

如热图 3－2－2,上述压强差 Δp 形成的力矩的大小为

$$M'=[\Delta p(bc)]b=\frac{1}{2}qb^2cp$$



热图 3－2－2



热图 3－2－3

由于力矩 M' 的作用,使玻璃板转过一个小的角度 α,如热图 3－2－3 所示．设悬挂玻璃板的细线中的张力为 N,由于扭转了 α 角,使得 N 有水平分量 $N\sin\beta$,它产生的相应的力矩 M 的大小为

$$M=2[(N\sin\beta)a\sin\angle SAC]$$

其中

$$\angle SAC=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$$

代入,得

$$M=2aN\sin\beta\cos\frac{\alpha}{2}$$

由几何关系

$$2a\beta=\overset{\frown}{AC}=a\alpha$$

得

$$\beta=\frac{\alpha}{2}$$

因 α 很小,有

$$\sin\beta=\sin\frac{\alpha}{2}\approx\frac{\alpha}{2},\quad \cos\frac{\alpha}{2}=1$$

故

$$M=aN\alpha$$

又由竖直方向受力平衡,有

$$mg=2N\cos\beta\approx2N$$

由以上两式,得

$$M=\frac{1}{2}mga\alpha$$

平衡时,两力矩相等反向,

$$M'=M$$

即

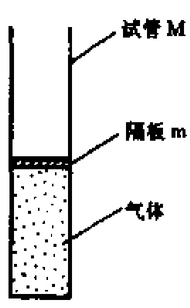
$$\frac{1}{2}qb^2cp=\frac{1}{2}mga\alpha$$

故平衡时转过的小角度 α 为

$$\alpha=\frac{qb^2cp}{mga}$$

【题 3】 如图，在真空中有一个质量为 M 的试管，它被质量为 m 的隔板等分为两部分．隔板封闭的那部分有质量为 n mol，温度为 T，摩尔质量为 μ 的单原子分子理想气体．放开隔板后，隔板无摩擦地直立向上移动，在隔板离开试管顶端后气体方始从试管逸出．设隔板开始运动时，试管静止．试求试管的最终速度．

设重力可忽略．设气体、隔板、试管三者之间的热量交换可忽略．设在隔板离开试管前，气体经历准静态过程．



热图 3－3－1

【分析】 初阅此题，可能不大习惯．

题设在真空中，又忽略重力，不妨设想试管在远离地球的太空之中，因而所谓直立、上下、静止或运动都是相对于观测者而言的．

放开隔板时，试管、隔板、空气（指整体的运动）都是静止的．由于外部是真空，隔板又无重量且能无摩擦地移动，气体将膨胀，隔板将上升．因设气体、隔板、试管三者间无热量交换，气体的膨胀是绝热的．又题设隔板离开试管前，气体经历准静态过程（这是简化假设，实际上气体的绝热膨胀应很快，并非准静态过程），所以是准静态绝热膨胀过程，可以采用绝热过程方程．通过绝热膨胀，气体温度降低，内能减少．因外部真空，又无重力，气体对外不作功，减少的内能将转化为隔板与试管的动能以及气体整体定向运动的动能．不难设想，当隔板受气体压力向上运动时，试管和气体（整体）应反向向下运动，由于没有任何外力，三者的总动量在运动过程中应守恒，即隔板向上运动的动量与试管和气体（整体）向下运动的动量应相等．由此即可确定隔板离开试管时，试管及所装气体（整体）的速度 u_1．以上可称之为过程Ⅰ．

当隔板离开试管后，气体将陆续全部逸出试管，这时气体作绝热的自由膨胀，这是一种非准静态过程，绝热过程方程不再适用．在气体逸出过程中，作无规则热运动的气体分子将撞击试管的底部，使试管的速度进一步增大了 u_2．为求 u_2，可采用平均的方法，即以具有平均动能的分子来代替运动情况各异的各种实际分子．首先，可以认为在气体逸出过程中，有半数分子撞击试管底部一次．这是合理的，因为平均而言，向上和向下的分子应各占一半，向下运动的分子撞击试管底部一次后反向运动逸出．其次，尽管分子的速度各不相同，但平均而言，可以认为各分子均以方均根速率 $\sqrt{\overline{v^2}}$ 运动，并以它在试管运动方向（取为 x 方向）上的投影值即以 $\sqrt{\overline{v_x^2}}$ 的速率撞击试管底部．再次，把气体分子看作弹性球，它撞击试管底部时作弹性碰撞．因此，每个分子撞击一次给予试管的冲量应等于分子碰撞前、后动量（确切地说，是动量的 x 分量）的变化．显然，以上合理假设是计算 u_2 的关键，舍此便无从着手．又，为了方便，可在以 u_1 运动的参考系中计算 u_2．此为过程Ⅱ．

在气体全部逸出后，试管最终的速度应为 $u=u_1+u_2$．

【解】 过程Ⅰ：放开隔板，气体从初始的 (T,V) 经绝热膨胀到隔板离开试管时的 (T_f,V_f)．因是准静态过程，绝热过程方程适用，故有

$$TV^{\gamma-1}=T_fV_f^{\gamma-1}$$

其中

$$V_f=2V$$

对于单原子分子理想气体,绝热指数

$$\gamma=\frac{5}{3}$$

由以上三式,得

$$T_f=\frac{T}{2^{2/3}}$$

气体内能的减少转化为隔板、试管以及气体整体定向运动的动能

$$\Delta U=nC_V\Delta T=\frac{3}{2}Rn(T-T_f)=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}(n\mu+M)u_1^2$$

式中 v 是隔板 m 在离开试管时向上运动的速度,u_1 是同一时刻试管 M 和气体(质量为 $n\mu$)整体向下定向运动的速度．

隔板、试管、气体整体开始均静止,尔后隔板向上运动,试管与气体整体向下运动,因无外力,在此过程系统的动量守恒,故在隔板离开试管时,有

$$mv=(n\mu+M)u_1$$

由以上三式,消去 T_f 和 v,得

$$u_1=\left[\frac{3(2^{2/3}-1)}{2^{2/3}}\cdot\frac{mnRT}{(n\mu+M)(m+n\mu+M)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

过程Ⅱ:从隔板离开试管到气体全部从试管逸出．取以 u_1 运动的参考系．假设在气体逸出过程中有半数分子即$\frac{1}{2}nN_0$ 个分子撞击试管底部,N_0 为阿伏伽德罗常量,假设平均而言,分子的速率为方均根速率,即

$$v_{分子}=\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3RT_f}{\mu}}$$

则 $\boldsymbol{v}_{分子}$在试管运动方向(取为 x 方向)上的投影为

$$(v_{分子})_x=\sqrt{\overline{v_x^2}}=\sqrt{\frac{1}{3}\overline{v^2}}$$

上式用到了

$$\overline{v_x^2}=\overline{v_y^2}=\overline{v_z^2}=\frac{1}{3}(\overline{v_x^2+v_y^2+v_z^2})=\frac{1}{3}\overline{v^2}$$

于是,一个分子撞击试管底部一次,传递给试管的动量为

$$p=2m_{分子}(v_{分子})_x=\frac{2\mu}{N_0}\sqrt{\frac{1}{3}\overline{v^2}}$$

半数分子各撞击试管底部一次给予试管的总动量为

$$P=\frac{1}{2}nN_0p=\frac{nN_0}{2}\cdot\frac{2\mu}{N_0}\sqrt{\frac{1}{3}\overline{v^2}}=n\sqrt{\mu RT_f}$$

故由于全部气体逸出使试管获得的速度为

$$u_2=\frac{P}{M}=\frac{n}{M}\sqrt{\mu RT_f}=\frac{n}{2^{1/3}M}\sqrt{\mu RT}$$

因此,在隔板开始运动时试管、隔板、气体整体均为静止的参考系中,从隔板开始运动到隔板离开试管直至气体全部逸出,试管最终的速度为

$$u = u_1 + u_2 = \left[\frac{3(2^{2/3}-1)mnRT}{2^{2/3}(n\mu+M)(m+n\mu+M)}\right]^{\frac{1}{2}} + \frac{n\sqrt{\mu RT}}{2^{1/3}M}$$

【题 4】 在一柱形容器内,有大量相同的小球沿着容器的长度方向往返运动．小球可视为质点,小球之间以及小球与容器端面(与其长度方向垂直)之间作弹性碰撞．小球的速率以及向前还是向后运动都是无规的．可引入“温度”T 的概念,它是由小球的平均动能 $\bar{\varepsilon}$ 定义的,为 $\bar{\varepsilon}=\frac{1}{2}kT$,式中 k 是玻尔兹曼常数．今在容器的一端安装平面弹性活塞,并使活塞缓慢地沿容器长度方向向内推进,运动的小球因与活塞作弹性正碰撞增加了动能,从而使系统的“温度”升高．

上述模型实际上就是单原子分子理想气体一维热运动绝热压缩的微观模型．

试导出在活塞缓慢推进过程中,“温度”T 与体积 V 的关系式(此即单原子分子理想气体的一维绝热过程方程)．设重力,引力,各种阻力和摩擦力均可忽略．

【分析】 容器中的小球相当于气体分子,其间除弹性正碰撞外,并无相互作用,且运动是无规的,这正是理想气体分子的行为．小球看作质点,无内部结构,表明小球“分子”是单原子分子．因此,完全可以仿照气体分子运动论的做法,引入表征大量小球系统平均运动激烈程度的“温度”概念．随着活塞的缓缓推进,外界所作的功增大了与活塞碰撞的小球的动能,再通过小球之间的碰撞使系统的动能即温度增长,同时体积减少,这相当于绝热压缩．

在活塞推进的过程中,计算与之碰撞的小球速度、动能的变化与容器体积变化的关系,取平均值,即可得出用 $T-V$ 关系表示的一维绝热方程．

理想气体的绝热方程是熟知的,它在一维情形的结果应与上述计算相符,可以此作检验．

【解】 由于小球均相同,其间的碰撞是弹性正碰撞,故碰后两球交换速度．即速度为 v 的小球与另一小球碰撞后,将把速度 v 传递给后者,下文速度为 v 的小球实际上指的是“速度 v 的携带者”．由于小球是质点,碰后,速度携带者的位置并无变化．

沿容器长度方向取 x 轴,设容器长度为 x,活塞推进速度为 u(因缓慢推进,故 $u\ll v$)．则速度为 v 的小球经 $\Delta t=\frac{2x}{v}$时间与活塞相碰一次．碰后,小球相对活塞的速度从 $-v'=-(v+u)$ 变为 $v'=(v+u)$,在地面参考系中小球的速度则从$(-v'+u)=-v$ 变为$(v'+u)=(v+2u)$．因此,由于活塞移动而引起的小球速度变化率为

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{2u}{\frac{2x}{v}}=\frac{uv}{x}$$

随着活塞的推进,在 dt 时间内,容器缩短了 $-dx$,即

$$u\,dt=-dx$$

由以上两式,得

$$x\,dv+v\,dx=0 \tag{1}$$

小球的动能为

$$\varepsilon=\frac{1}{2}mv^2$$

即

$$v=\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}$$

$$\mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}}$$

代入(1)式,得

$$x\mathrm{d}\varepsilon+2\varepsilon\mathrm{d}x=0 \tag{2}$$

(1)、(2)式就是在活塞推进过程中,速度为 v 的小球的速度、动能的变化与容器长度变化之间的关系．

把(2)式对具有各种速度、动能的小球作平均,得

$$x\mathrm{d}\bar{\varepsilon}+2\bar{\varepsilon}\mathrm{d}x=0 \tag{3}$$

对于大量小球的系统,可用平均动能 $\bar{\varepsilon}$ 定义系统的"温度"T,为

$$\bar{\varepsilon}=\frac{1}{2}kT$$

代入(3)式,得

$$x\mathrm{d}T+2T\mathrm{d}x=0$$

设容器底面积为 S,则容器体积 $V=Sx$,上式可改写为

$$V\mathrm{d}T+2T\mathrm{d}V=0$$

或

$$\frac{\mathrm{d}T}{T}+\frac{2\mathrm{d}V}{V}=0$$

积分,得

$$\ln\frac{T}{T_0}+\ln\frac{V^2}{V_0^2}=0$$

式中 T_0 和 V_0 是小球系统初态的温度和体积．即

$$TV^2=T_0V_0^2=\text{常量} \tag{4}$$

这就是活塞缓慢推进过程中,小球系统的温度 T 与体积 V 的关系,亦即单原子分子理想气体的一维绝热方程．

下面讨论理想气体绝热过程方程在一维运动情形的结果,它应与(4)式相符．

理想气体的绝热过程方程为

$$TV^{\gamma-1}=\text{常量} \tag{5}$$

式中的绝热指数 γ 为

$$\gamma=\frac{C_p}{C_V}=\frac{\frac{i+2}{2}R}{\frac{i}{2}R}=\frac{i+2}{i}=\frac{(t+r+2s)+2}{t+r+2s}$$

式中 C_p 和 C_V 是理想气体定压和定体摩尔热容量,t、r、s 分别是气体分子的平动、转动、振动自由度数,$i=(t+r+2s)$．对于单原子分子,$t=3$,$r=0$,$s=0$．若限制作一维运动,则 $t=1$．因而,对于作一维运动的单原子分子,有

$$t=1,\quad r=0,\quad s=0$$

$$i=t+r+2s=1,\quad \gamma=\frac{i+2}{i}=3$$

代入(5)式,得

$$TV^2=常量$$

这就是用 $T-V$ 关系表示的单原子分子理想气体的一维绝热方程,与(4)式相符.

【题 5】 空腔内的热辐射可以当作光子气来处理.设腔的内表面对光子是完全反射面.

1. 如果在某温度下,腔内热辐射已处于平衡状态,此时光子气的能量密度为 u.试求光子气的压强 p.

2. 试证明 u 只是温度 T 的函数.

3. 试证明 $p\propto T^4$.

4. 试导出光子气在绝热过程中压强 p 与空腔体积 V 之间满足的关系式(绝热过程方程).

【分析】 推导平衡态理想气体压强公式时得出 $p=\frac{1}{3}\frac{N}{V}m\overline{v^2}$,对光子气应有类似结果.因光子速度为 c,式中 $\overline{v^2}$ 应为 c^2;因光子能量的 $h\nu$,式中 m 应为 $\frac{h\nu}{c^2}=m_\nu$;式中分子数 N 则应为频率为 ν 的光子数 N_ν.于是得出 $p_\nu=\frac{1}{3}n_\nu h\nu=\frac{1}{3}u_\nu$($u_\nu$ 是光子气中频率为 ν 的光子的能量密度),再对各种可能的 ν 求和,即得所求.

为证明 $u=u(T)$,可采用反证法.即假设 u 不仅与 T 还与其他因素有关,据此,设计一个过程,由于其结论违背热力学第二定律,证明前提不对.

第 1 问得出 $p=\frac{1}{3}u$,第 2 问得出 $u=u(T)$,故光子气内能 $U=u(T)V$.为了寻找光子气的 p 和 T 的关系,从各种热力学公式中找到 $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T=T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V-p$,它是合用的,因为左边为 u,右边第一项包含 T 和 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}T}$,右边第二项只含 u,于是 $u(T)$ 即 $p(T)$ 可求.

利用绝热条件及光子气内能的表达式即可导出光子气的绝热过程方程.

【解】 1. 平衡态理想气体的压强公式为

$$p=\frac{1}{3}\frac{N}{V}m\overline{v^2}$$

对于光子气中频率为 ν 的光子,上式中的 p、$n=\frac{N}{V}$、m、$\overline{v^2}$ 应分别为 p_ν、$n_\nu=\frac{N_\nu}{V}$、$\frac{h\nu}{c^2}$、c^2,于是得出

$$p_\nu=\frac{1}{3}n_\nu\frac{h\nu}{c^2}c^2=\frac{1}{3}n_\nu h\nu=\frac{1}{3}u_\nu$$

式中 $u_\nu=n_\nu h\nu$ 是频率为 ν 的光子的能量密度.对各种可能的频率 ν 求和,得出光子气的总压强为

$$p=\sum p_\nu=\frac{1}{3}\sum u_\nu=\frac{1}{3}u$$

式中 $u=\sum u_\nu$ 是光子气的能量密度．

2．设 u 不仅与温度 T，还与空腔体积 V 及腔壁材料性质有关，则总可取温度相同而体积或腔壁材料不同的两个空腔，其间用小孔连通，在小孔中装上可以移动的无摩擦活塞．此时因活塞两边光子气的能量密度 u 不同，由第 1 问的结果 $p=\frac{1}{3}u$，两边光子气的压强便不同，于是活塞将被推动．这相当于从单一热源（由腔构成的等温系统）吸热，全部变为对外作功而不产生其他影响，显然违背了热力学第二定律．因此，前提有误，即 u 与空腔体积 V 及腔壁材料无关，u 只能与温度 T 有关，即

$$u=u(T)$$

3．设空腔体积为 V，则光子气的总能量（内能）为

$$U=u(T)V$$

由热力学第二定律，

$$\mathrm{d}U=T\mathrm{d}S-p\mathrm{d}V$$

得

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T=T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T-p$$

由

$$\mathrm{d}F=\mathrm{d}(U-TS)=-S\mathrm{d}T-p\mathrm{d}V$$

得

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T=\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V,\quad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T=T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V-p$$

应用于光子气，利用第 1、2 问的结果，有

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T=u,\quad \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V=\frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}T},\quad p=\frac{1}{3}u$$

代入，得

$$u=\frac{1}{3}T\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}T}-\frac{1}{3}u$$

即

$$\frac{\mathrm{d}u}{u}=4\frac{\mathrm{d}T}{T}$$

积分，得

$$u=u_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^4$$

即

$$u\propto T^4$$

故光子气的压强 p 与温度 T 的关系为

$$p\propto T^4$$

4．由热力学第一定律，在绝热过程中，有

$$\mathrm{d}U=-p\mathrm{d}V$$

它用于光子气，因 $U=u(T)V$，故有

$$Vdu+udV=-pdV$$

把第1问的结果 $u=3p$ 代入，得

$$3Vdp+3pdV=-pdV$$

即

$$\frac{dp}{p}=-\frac{4}{3}\frac{dV}{V}$$

积分，得光子气的绝热过程方程为

$$pV^{\frac{4}{3}}=p_0V_0^{\frac{4}{3}}=常量$$

【题6】 混合理想气体处于温度为 T 的平衡态，其中任意两个质量分别为 m_1 和 m_2 的分子之间的相对速度定义为 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2$，式中 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 分别是 m_1 和 m_2 的速度．试求：相对速率的方均根值和平均值，即求 $\sqrt{\overline{u^2}}$ 和 $\bar{u}$．

【分析】 麦克斯韦速度分布或速率分布可解释为在平衡态理想气体中每一个分子具有某种速度或速率的概率分布．对于混合理想气体，只要总的分子数足够多，则每一个分子的速度分布或速率分布都具有麦克斯韦分布函数的形式，而与这个分子所属成分的分子数是否足够多无关．因此本题的结果也适用于理想气体中混杂有个别杂质分子的情形．

考虑由 m_1 和 m_2 两个分子组成的系统，不难找出 $\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$ 与相对速度 $\boldsymbol{u}$、质心速度 $\boldsymbol{V}$ 之间的关系．换言之，既可用 $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)$ 又可用 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{V})$ 来描述系统的运动．

由于系统中 m_1 处于 $\boldsymbol{v}_1$ 到 $(\boldsymbol{v}_1+d\boldsymbol{v}_1)$，$m_2$ 处于 $\boldsymbol{v}_2$ 到 $(\boldsymbol{v}_2+d\boldsymbol{v}_2)$ 的概率为 $f(\boldsymbol{v}_1)d\boldsymbol{v}_1f(\boldsymbol{v}_2)d\boldsymbol{v}_2$，利用 $\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$ 与 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 的关系，以及把 $d\boldsymbol{v}_1d\boldsymbol{v}_2$ 变换到 $d\boldsymbol{u}d\boldsymbol{v}$ 的雅可比行列式，可以得出系统处于 $\boldsymbol{u}$ 到 $(\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{u})$，$\boldsymbol{V}$ 到 $(\boldsymbol{V}+d\boldsymbol{V})$ 的概率，并进而得出 $f(\boldsymbol{u})$ 仍是麦克斯韦分布，于是 $f(u)$ 可知，$\bar{u}$ 可求．

【解】 考虑质量为 m_1、m_2，速度为 $\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$ 的两个分子组成的系统．系统的折合质量 μ 和质心速度 $\boldsymbol{V}$ 为

$$\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{V}=\frac{m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1+m_2} \tag{2}$$

两分子之间的相对速度 $\boldsymbol{u}$ 为

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2 \tag{3}$$

显然，系统的动能既等于两分子的动能之和，也等于质心的动能 $E_k(C)$ 和两分子相对质心的动能 $E_k(i)$ 之和，即

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=E_k(C)+E_k(i)$$

因

$$E_k(C)=\frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2$$

$$\begin{aligned}E_k(i)&=\frac{1}{2}m_1(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{V})^2+\frac{1}{2}m_2(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{V})^2\\&=\frac{1}{2}m_1\left(\boldsymbol{v}_1-\frac{m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1+m_2}\right)^2+\frac{1}{2}m_2\left(\boldsymbol{v}_2-\frac{m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1+m_2}\right)^2\\&=\frac{m_1m_2^2}{2(m_1+m_2)^2}(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)^2+\frac{m_1^2m_2}{2(m_1+m_2)^2}(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)^2=\frac{1}{2}\mu u^2\end{aligned}$$

上述运算中用到了(1)、(2)、(3)式．因此

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2+\frac{1}{2}\mu u^2 \tag{4}$$

(2)、(3)、(4)式给出了 $\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$ 与 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{V}$ 的关系．

计算$\sqrt{\overline{u^2}}$．

由(3)式，得

$$\overline{u^2}=\overline{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}=\overline{(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)^2}=\overline{v_1^2}-\overline{2\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2}+\overline{v_2^2}$$

因 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 彼此独立，且各自的平均值为零($\overline{\boldsymbol{v}_1}=0,\overline{\boldsymbol{v}_2}=0$)，故$\overline{\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2}=0$，又 v_1 与 v_2 遵循各自的麦克斯韦分布，故$\overline{v_1^2}=\frac{3kT}{m_1}$，$\overline{v_2^2}=\frac{3kT}{m_2}$，代入上式，得

$$\overline{u^2}=\frac{3kT}{m_1}+\frac{3kT}{m_2}=\frac{3kT}{m_1m_2}(m_1+m_2)=\frac{3kT}{\mu}$$

即

$$\sqrt{\overline{u^2}}=\sqrt{\frac{3kT}{\mu}} \tag{5}$$

可见两分子相对速率的方均根值等于具有折合质量 μ 的分子的方均根速率．

再计算 $\bar{u}$．

系统中 m_1 的速度在 $\boldsymbol{v}_1$ 到$(\boldsymbol{v}_1+\mathrm{d}\boldsymbol{v}_1)$，$m_2$ 的速度在 $\boldsymbol{v}_2$ 到$(\boldsymbol{v}_2+\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2)$的概率为

$$f(\boldsymbol{v}_1)\mathrm{d}\boldsymbol{v}_1f(\boldsymbol{v}_2)\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2$$

式中 $f(\boldsymbol{v}_1)$和 $f(\boldsymbol{v}_2)$均为麦克斯韦速度分布函数．

利用 $\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$ 与 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{V}$ 的关系，上式中 $f(\boldsymbol{v}_1)=f[\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{V})]=G(\boldsymbol{u},\boldsymbol{V})$，$f(\boldsymbol{v}_2)=f[\boldsymbol{v}_2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{V})]=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{V})$．另外，可利用雅可比行列式把 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}_1\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2$ 化为 $\mathrm{d}\boldsymbol{u}\ \mathrm{d}\boldsymbol{V}$，即 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}_1\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2=\mathrm{d}v_{1x}\mathrm{d}v_{1y}\mathrm{d}v_{1z}\mathrm{d}v_{2x}\mathrm{d}v_{2y}\mathrm{d}v_{2z}=|J|\mathrm{d}\boldsymbol{u}\mathrm{d}\boldsymbol{V}=|J|\mathrm{d}u_x\mathrm{d}u_y\mathrm{d}u_z\mathrm{d}V_x\mathrm{d}V_y\mathrm{d}V_z$．这样，系统的相对速度在 $\boldsymbol{u}$ 到$(\boldsymbol{u}+\mathrm{d}\boldsymbol{u})$、质心速度在 $\boldsymbol{V}$ 到$(\boldsymbol{V}+\mathrm{d}\boldsymbol{V})$的概率为

$$f[\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{V})]f[\boldsymbol{v}_2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{V})]|J|\mathrm{d}\boldsymbol{u}\mathrm{d}\boldsymbol{V} \tag{6}$$

先计算(6)式中的雅可比行列式 J，它是偏导数的 6×6 行列式，可简写为

$$J=\frac{\partial(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)}{\partial(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}$$

由于直接计算 J 比较麻烦，取逆变换即 $\mathrm{d}\boldsymbol{u}\mathrm{d}\boldsymbol{V}=|J'|\mathrm{d}\boldsymbol{v}_1\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2$，相应的雅可比行列式 J'为

$$J'=\frac{\partial(\boldsymbol{u},\boldsymbol{V})}{\partial(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)}$$

两次正、逆变换的结果是恢复原状,故

$$|J||J'|=1$$

写出 J' 的表达式,利用(2)、(3)式及行列式的运算法则,计算 J' 如下.

$$J'=\begin{vmatrix}\frac{\partial u_x}{\partial v_{1x}} & \frac{\partial u_x}{\partial v_{1y}} & \frac{\partial u_x}{\partial v_{1z}} & \frac{\partial u_x}{\partial v_{2x}} & \frac{\partial u_x}{\partial v_{2y}} & \frac{\partial u_x}{\partial v_{2z}}\\ \frac{\partial u_y}{\partial v_{1x}} & \frac{\partial u_y}{\partial v_{1y}} & \frac{\partial u_y}{\partial v_{1z}} & \frac{\partial u_y}{\partial v_{2x}} & \frac{\partial u_y}{\partial v_{2y}} & \frac{\partial u_y}{\partial v_{2z}}\\ \frac{\partial u_z}{\partial v_{1x}} & \frac{\partial u_z}{\partial v_{1y}} & \frac{\partial u_z}{\partial v_{1z}} & \frac{\partial u_z}{\partial v_{2x}} & \frac{\partial u_z}{\partial v_{2y}} & \frac{\partial u_z}{\partial v_{2z}}\\ \frac{\partial V_x}{\partial v_{1x}} & \frac{\partial V_x}{\partial v_{1y}} & \frac{\partial V_x}{\partial v_{1z}} & \frac{\partial V_x}{\partial v_{2x}} & \frac{\partial V_x}{\partial v_{2y}} & \frac{\partial V_x}{\partial v_{2z}}\\ \frac{\partial V_y}{\partial v_{1x}} & \frac{\partial V_y}{\partial v_{1y}} & \frac{\partial V_y}{\partial v_{1z}} & \frac{\partial V_y}{\partial v_{2x}} & \frac{\partial V_y}{\partial v_{2y}} & \frac{\partial V_y}{\partial v_{2z}}\\ \frac{\partial V_z}{\partial v_{1x}} & \frac{\partial V_z}{\partial v_{1y}} & \frac{\partial V_z}{\partial v_{1z}} & \frac{\partial V_z}{\partial v_{2x}} & \frac{\partial V_z}{\partial v_{2y}} & \frac{\partial V_z}{\partial v_{2z}}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ \frac{m_1}{m_1+m_2} & \frac{m_2}{m_1+m_2} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{m_1}{m_1+m_2} & \frac{m_2}{m_1+m_2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_1}{m_1+m_2} & \frac{m_2}{m_1+m_2}\end{vmatrix}$$

$$
=\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\dfrac{m_1}{m_1+m_2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dfrac{m_1}{m_1+m_2} & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{m_1}{m_1+m_2} & 1
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\dfrac{m_1}{m_1+m_2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & \dfrac{m_1}{m_1+m_2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & \dfrac{m_1}{m_1+m_2} & 0 & 0 & 1
\end{vmatrix}
$$

即

$$|J'|=1$$

故

$$|J|=1$$

再算(6)式中的分布函数，因 $f(\boldsymbol{v}_1)$ 与 $f(\boldsymbol{v}_2)$ 均为麦克斯韦速度分布函数，故有

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{v}_1)f(\boldsymbol{v}_2) &= \left(\frac{m_1}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}m_1v_1^2/kT}\left(\frac{m_2}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}m_2v_2^2/kT} \\
&= \left(\frac{m_1+m_2}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)2\pi kT}\right]^{\frac{3}{2}} e^{-(\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2)/kT} \\
&= \left(\frac{m_1+m_2}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2/kT}\left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}\mu u^2/kT}
\end{aligned}
$$

上式最后一个等式用到了(1)式和(4)式，把它变为 V 和 u 的函数．

把上面得出的 $|J|=1$ 和 $f(\boldsymbol{v}_1)f(\boldsymbol{v}_2)$ 的结果代入(6)式，得出系统的相对速度在 $\boldsymbol{u}$ 到 $(\boldsymbol{u}+\mathrm{d}\boldsymbol{u})$，质心速度在 $\boldsymbol{V}$ 到 $(\boldsymbol{V}+\mathrm{d}\boldsymbol{V})$ 的概率为

$$
\left[\left(\frac{m_1+m_2}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2/kT}\mathrm{d}\boldsymbol{V}\right]\cdot\left[\left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}\mu u^2/kT}\mathrm{d}\boldsymbol{u}\right]
$$

上式第一个因子表明系统的质心速度 $\boldsymbol{V}$ 遵循麦克斯韦速度分布，第二个因子表明相对速度 $\boldsymbol{u}$ 遵

循的也是麦克斯韦速度分布．由于 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 是两个独立的因素，故系统相对速度在 $\boldsymbol{u}$ 到 $(\boldsymbol{u}+\mathrm{d}\boldsymbol{u})$ 的概率为上式对一切可能的 $\boldsymbol{V}$ 积分，即

$$f(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{u}=\left[\int\left(\frac{m_1+m_2}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2/kT}\mathrm{d}\boldsymbol{V}\right]\cdot\left[\left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mu u^2/kT}\mathrm{d}\boldsymbol{u}\right]$$

$$=\left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mu u^2/kT}\mathrm{d}\boldsymbol{u}$$

因此，

$$f(\boldsymbol{u})=\left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mu u^2/kT}$$

于是，相对速率的概率分布函数 $f(u)$ 为麦克斯韦速率分布，即

$$f(u)=4\pi\left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mu u^2/kT}u^2$$

由此，相对速率的平均值为

$$\bar{u}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi\mu}} \tag{7}$$

相当于一个具有折合质量 μ 的分子的平均速率．

讨论．若 $m_1=m_2=m$，则 $\mu=\frac{m}{2}$，$\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 可统一表为 $\boldsymbol{v}$．于是，由(5)式和(7)式，得

$$\sqrt{\overline{u^2}}=\sqrt{2}\sqrt{\overline{v^2}},\quad \bar{u}=\sqrt{2}\bar{v}$$

若 $m_2\gg m_1$，则 $\mu\approx m_1$，于是有

$$\sqrt{\overline{u^2}}=\sqrt{\overline{v_1^2}},\quad \bar{u}\approx\bar{v}_1$$

可见当 m_2 远大于 m_1 时，平均而言，m_1 的速率比 m_2 的速率大得多，在计算 $\sqrt{\overline{u^2}}$ 和 $\bar{u}$ 时，m_2 可以近似看作是"静止"的．

另外，由(1)式

$$\frac{1}{\mu}=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}$$

因此，(5)式和(7)式也可表为

$$\sqrt{\overline{u^2}}=\sqrt{\frac{3kT}{\mu}}=\sqrt{\frac{3kT}{m_1}+\frac{3kT}{m_2}}=\sqrt{\overline{v_1^2}+\overline{v_2^2}}$$

$$\bar{u}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi\mu}}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m_1}+\frac{8kT}{\pi m_2}}=\sqrt{(\bar{v}_1)^2+(\bar{v}_2)^2}$$

【题7】 理想气体处于平衡态，其分子平动动能表为 E，分子最概然平动动能表为 E_p，与 E_p 相应的平动速率表为 v_0，试求 v_0 与最概然速率 v_p 的比值．

【分析】 如所周知，最概然速率 v_p 是相对气体分子速率分布函数而言的，同样，最概然平动动能 E_p 是相对气体分子平动动能的分布函数而言的．因此，为求 E_p，首先需要由麦克斯韦速率分布函数 $f(v)$ 导出气体分子平动动能的分布函数 $f(E)$，其极值相应的就是最概然平动动能 E_p.

平动动能 E 与分子速率 v 的关系是 $E=\frac{1}{2}mv^2$，从而 $\mathrm{d}E$ 与 $\mathrm{d}v$ 的关系为 $\mathrm{d}E=mv\,\mathrm{d}v=\sqrt{2mE}\mathrm{d}v$（$m$ 是分子质量）. 分子平动动能处在 E 与 $(E+\mathrm{d}E)$ 的概率是 $f(E)\mathrm{d}E$，分子速率处在 v 和 $(v+\mathrm{d}v)$ 的概率是 $f(v)\,\mathrm{d}v$，其间必有

$$f(E)\mathrm{d}E=f(v)\mathrm{d}v$$

由此，可从 $f(v)$ 求得 $f(E)$. $f(E)$ 的极大值对应的就是 E_p，相应的速率为 v_0，于是 v_0 与 v_p 之比可得.

【解】 平动动能 E 与速率 v 的关系是

$$E=\frac{1}{2}mv^2$$

故

$$\mathrm{d}E=mv\,\mathrm{d}v=\sqrt{2mE}\mathrm{d}v$$

平衡态理想气体分子平动动能分布函数 $f(E)$ 与速率分布函数 $f(v)$ 的关系是

$$f(E)\mathrm{d}E=f(v)\mathrm{d}v$$

由以上三式，得

$$f(E)=f(v)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}E}=\frac{f(v)}{\sqrt{2mE}}$$

$$=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-mv^2/2kT}\,\frac{v^2}{\sqrt{2mE}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-\frac{3}{2}}\sqrt{E}\,\mathrm{e}^{-E/kT}$$

因 $f(E)$ 总为正，且在 $E=0$ 和 $E=\infty$ 处为零，故若 $f(E)$ 只有一个极值，则必为极大值，相应的即为最概然平动动能 E_p.

$f(E)$ 的极值应满足

$$\frac{\mathrm{d}f(E)}{\mathrm{d}E}=0$$

即

$$\frac{1}{2}E^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-E/kT}+\sqrt{E}\left(-\frac{1}{kT}\right)\mathrm{e}^{-E/kT}=0$$

满足上式的最概然平动动能为

$$E_p=\frac{1}{2}kT$$

与 E_p 对应的平动速率 v_0 为

$$E_p=\frac{1}{2}mv_0^2$$

即

$$v_0=\sqrt{\frac{kT}{m}}$$

故 v_0 与最概然速率 v_p 之比为

$$v_0:v_p=\sqrt{\frac{kT}{m}}:\sqrt{\frac{2kT}{m}}=1:\sqrt{2}$$

【题 8】 设热气球具有不变的容积 $V_B = 1.1\ \mathrm{m}^3$，气球蒙皮体积与 V_B 相比可忽略不计，蒙皮的质量为 $m_H = 0.187\ \mathrm{kg}$. 在外界气温 $t_1 = 20\ ℃$，正常外界大气压 $p_1 = 1.013 \times 10^5\ \mathrm{Pa}$ 的条件下，气球开始升空，此时外界大气的密度为 $\rho_1 = 1.2\ \mathrm{kg/m^3}$.

1. 试问气球内部的热空气的温度 t_2 应为多少，才能使气球刚好浮起 .

2. 先把气球系牢在地面上，并把其内部的空气加热到稳定温度 $t_3 = 110\ ℃$，试问气球释放升空时的初始加速度 a 等于多少?(不考虑空气的阻力 .)

3. 将气球下端通气口扎紧，使气球内部的空气密度保持恒定 . 在内部空气保持稳定温度 $t_3 = 110\ ℃$ 的情况下，气球升离地面，进入温度恒为 20 ℃ 的等温大气层中 . 试问，在这些条件下，气球上升到多少高度 h 能处于力学平衡状态 .

4. 在上升到第 3 问中的高度 h 时，将气球在竖直方向上拉离平衡位置 10 m，然后再予以释放 . 试定性叙述气球将作何种运动 .

【分析】 在地面上，当气球内部热空气密度 ρ_2 小于球外空气密度 ρ_1 时，产生浮力 . 刚好浮起的条件是，浮力等于气球所受重力，即气球中气体质量(其密度为 ρ_2) 与蒙皮质量之和应等于被气球排开的外界空气的质量(其密度为 ρ_1). 由此可确定与 ρ_2 对应的温度 t_2.

若气球内热空气温度 t_3 超过上述 t_2，气球内热空气的密度 ρ_3 便小于 ρ_2，从而气球所受重力小于浮力，气球将加速上升 . 由已知的 t_3，上升加速度 a 可求 .

气球下部通气口扎紧后，在 t_3 保持不变的情况下，一方面气球总质量不变，另一方面排开的空气体积恒定 . 随着气球的上升，因周围空气的密度随高度指数下降(玻尔兹曼分布) 被排开的空气质量将减少，浮力相应减小 . 当被排开的空气质量等于气球质量时，即当浮力与气球所受重力相等时，气球便可处于平衡状态 . 利用空气密度随高度变化的玻尔兹曼分布，即可求得气球处于平衡状态的高度 h.

若气球从平衡位置升高，则浮力进一步减小，合力向下，使气球回到原平衡位置 . 反之；若气球从平衡位置降低，则浮力增大，合力向上，也会使气球回到原平衡位置 . 可见气球将作某种振动，若考虑空气阻力，气球将作阻尼振动 .

【解】 1. 刚好浮起的条件是，气球蒙皮质量 m_H 与球内温度为 t_2 的热空气质量 m_2 之和，等于被排开的温度为 t_1 的空气质量 m_1，即

$$m_2 + m_H = m_1$$

即

$$\rho_2 V_B + m_H = \rho_1 V_B$$

由此得出

$$\rho_2 = \rho_1 - \frac{m_H}{V_B}$$

把有关数据 $\rho_1 = 1.2\ \mathrm{kg/m^3}$，$m_H = 0.187\ \mathrm{kg}$，$V_B = 1.1\ \mathrm{m^3}$ 代入，得

$$\rho_2 = 1.03\ \mathrm{kg/m^3}$$

由理想气体状态方程

$$\rho = \frac{\mu p}{RT}$$

因热气球下端开口，内外压强相同均为 p，但内外温度不同，分别为 T_2 和 T_1，故有

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{T_1}{T_2}$$

气球内热空气温度为

$$T_2=\frac{\rho_1}{\rho_2}T_1=\frac{\rho_1}{\rho_2}(t_1+273.15)=341.53\ \text{K}$$

即

$$t_2=68.38\ ℃$$

2. 气球内热空气温度为 $t_3=110℃$ 时，热空气密度为

$$\rho_3=\frac{T_1}{T_3}\rho_1=\frac{t_1+273.15}{t_3+273.15}\rho_1=0.918\ \text{kg/m}^3$$

热气球所受升力(浮力减去重力)为

$$F_{升}=[\rho_1V_B-(\rho_3V_B+m_H)]g=1.2\ \text{N}$$

故热气球升空时的初始加速度为

$$a=\frac{F_{升}}{\rho_3V_B+m_H}=1.003\ \text{m/s}^2$$

3. 当热气球内空气温度为 t_3 时，气球的平均密度为

$$\bar{\rho}=\frac{\rho_3V_B+m_H}{V_B}=1.088\ \text{kg/m}^3$$

当气球上升到离地面 h 的高度处，外部空气密度 ρ_h 与地面空气密度 ρ_1 的关系遵循玻尔兹曼分布，为

$$\rho_h=\rho_1\,\mathrm{e}^{-mgh/kT_1}$$

其中 m 为空气分子的质量．故有

$$h=\frac{kT_1}{mg}\ln\frac{\rho_1}{\rho_h}$$

把上式右边分子与分母都乘以地面空气分子的数密度 n_1，并利用

$$n_1kT_1=p_1,\quad n_1m=\rho_1$$

得出

$$h=\frac{p_1}{\rho_1g}\ln\frac{\rho_1}{\rho_h}$$

气球在 h 处达到平衡，要求

$$\rho_h=\bar{\rho}$$

故得

$$h=\frac{p_1}{\rho_1g}\ln\frac{\rho_1}{\bar{\rho}}=844\ \text{m}$$

4. 取气球的平衡位置为原点，竖直向上为 y 轴．当气球在 y 位置时，周围空气的密度为

$$\rho_y=\rho_h\,\mathrm{e}^{-mgy/kT_1}$$

因题设 $|y|\leqslant10$ m，与 $h=844$ m 相比，y 是小量，故近似有

$$\rho_y\doteq\rho_h\left(1-\frac{mg}{kT_1}y\right)=\rho_h\left(1-\frac{n_1mg}{n_1kT_1}y\right)=\rho_h\left(1-\frac{\rho_1g}{p_1}y\right)$$

气球在 y 处所受沿 y 方向的合力为

$$F_y=[\rho_y V_B-(\rho_3 V_B+m_H)]g=(\rho_y V_B-\bar{\rho}V_B)g$$
$$=\left[\rho_h\left(1-\frac{\rho_1 g}{p_1}y\right)-\bar{\rho}\right]v_B g=\left[\bar{\rho}\left(1-\frac{\rho_1 g}{p_1}y\right)-\bar{\rho}\right]v_B g$$
$$=-\left(\frac{\bar{\rho}\rho_1 V_B g^2}{p_1}\right)y$$

可见这是一个线性恢复力．因此，如果不计空气阻力，当热气球从平衡位置拉开 10 m 后，将以 $A=10$ m 的振幅围绕平衡位置在竖直方向作简谐振动．如果考虑空气阻力，热气球将在竖直方向作阻尼振动，振幅逐渐减小．

【本题是 1982 年第 13 届 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛）试题．】

【题 9】 取地面为重力势能零点．试估算等温大气的重力势能与热运动能量之比．设大气分子都只有平动和转动的动能已被激发．

【分析】 等温大气是一种近似，认为地面上不同高度的大气的温度相等．在重力场中，大气中任一组元分子的数目随高度的分布遵循玻尔兹曼分布，即随着高度的增长按指数衰减．所以等温大气的高度实际上是有限的，可以认为远小于地球半径，因而不同高度的 g 可当作常数．作为一种估算，可近似把等温大气当作一种柱体来处理(把等温大气当作包围地球的大气层来处理并不合理，因为若考虑全球范围，则应计及由于昼夜不同、地域差异等因素引起的显著温差，很难认为各处是“等温”的)．另外，大气的成分虽复杂，但主要是氧气和氮气，它们都是双原子分子．

【解】 设等温大气区域是高度为 H，底面积为 S 的柱体，大气温度为 T，取 z 轴竖直向上，原点 $z=0$ 在地面上．设大气中第 i 种组元分子的质量为 m_i，该组元在 $z=0$ 处的分子数密度为 n_{0i}．由玻尔兹曼分布，在 z 到 $(z+\mathrm{d}z)$ 范围，第 i 组元的分子数 $\mathrm{d}N_i$ 为

$$\mathrm{d}N_i=n_{0i}\mathrm{e}^{-m_i gz/kT}S\mathrm{d}z$$

因 $\mathrm{d}N_i$ 随 z 按指数衰减，离地较高处的大气已很稀薄，等温大气的高度实际上是有限的，可认为等温大气高度 H 远小于地球半径 R，故 g 为常量．这 $\mathrm{d}N_i$ 个分子所具有的重力势能 $\mathrm{d}E_{pi}$ 为

$$\mathrm{d}E_{pi}=(m_i gz)\mathrm{d}N_i$$

于是等温大气第 i 种组元分子的平均重力势能为

$$\bar{\varepsilon}_{pi}=\frac{\int_0^H \mathrm{d}E_{pi}}{\int_0^H \mathrm{d}N_i}=\frac{\int_0^H (m_i gz)\mathrm{e}^{-m_i gz/kT}S\,\mathrm{d}z}{\int_0^H \mathrm{e}^{-m_i gz/kT}S\,\mathrm{d}z}$$

等温大气的高度 H 虽远小于地球半径，仍是个大量，在计算上式的积分时，可近似取 $H\approx\infty$，则有

$$\bar{\varepsilon}_{pi}=\frac{\int_0^\infty m_i gz\,\mathrm{e}^{-m_i gz/kT}\,\mathrm{d}z}{\int_0^\infty \mathrm{e}^{-m_i gz/kT}\,\mathrm{d}z}=\frac{m_i g\left(\frac{kT}{m_i g}\right)^2}{\frac{kT}{m_i g}}=kT$$

上式表明，$\bar{\varepsilon}_{pi}$ 与组元 i 无关，即各组元分子的平均重力势能都是 kT．因此，等温大气中分子的平均重力势能 $\bar{\varepsilon}_p$ 即为 kT

$$\bar{\varepsilon}_p = kT$$

大气成分复杂，但主要是氮气和氧气，都是双原子分子，在只有平动和转动的动能被激发时，分子的平均热运动能量均为

$$\bar{\varepsilon}_k = \frac{5}{2}kT$$

因此，等温大气中分子平均重力势能 $\bar{\varepsilon}_p$ 与分子平均热运动能量 $\bar{\varepsilon}_k$ 之比为

$$\bar{\varepsilon}_p : \bar{\varepsilon}_k = kT : \frac{5}{2}kT = 2 : 5$$

这就是等温大气的重力势能 E_p 与热运动能量 E_k 之比，即

$$E_p : E_k = 2 : 5$$

【题10】 把大气看作理想气体，设在大气范围内重力加速度 g 为常量，设海平面 $z = 0$ 处的大气温度为 T_0.

1. 从力平衡观点出发，试导出 z 处压强随高度的变化率$\frac{dp}{dz}$与 z 处的压强 p 和温度 T 的关系．
2. 设大气是等温的，且 $t_0 = 0$ ℃，试计算半数分子处于其下的高度 h.
3. 设大气是绝热的，且 $t_0 = 0$ ℃，绝热指数 $\gamma = \frac{7}{5}$. 试计算大气层的高度 H.

【分析】 大气是理想气体，应遵循理想气体状态方程 $p = nkT$，n 是分子数密度．考虑重力的作用，压强应随高度变化，不同高度的压强差与其间的大气分子所受重力平衡．

在等温($T = T_0$)条件下，由 p 随高度的变化可知 n 随高度的变化．从而可以确定占有半数分子的大气层高度 h.

绝热条件给出了不同高度处(p, T)之间的关系，与第 1 问中求出的$\frac{dp}{dz}$结合，即可确定压强随高度变化的关系 $p(z)$. 于是 $p = 0$ 相应的大气层高度 H 可求．

【解】 1. 设大气为理想气体，故有

$$p = nkT \tag{1}$$

式中 p, T, n 分别是 z 处大气的压强，温度，分子数密度．

在 z 处，取面积为 S、厚度为 dz 的薄层大气，它受到的重力为 $n(S\,dz)mg$(m 是空气分子的质量). 因上、下压强差而提供的竖直向上的作用力为$[p(z) - p(z + dz)]S = -S\,dp$. 由力平衡，得

$$nS\,dz\,mg = [p(z) - p(z + dz)] = -S\,dp$$

即

$$\frac{dp}{dz} = -nmg \tag{2}$$

(1)、(2) 式联立，得

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{mgp}{kT} = -\frac{\mu gp}{RT} \tag{3}$$

式中 $\mu = 29.0 \times 10^{-3}$ kg/mol 为大气的平均摩尔质量．

2. 设大气等温 $T = T_0$，把(1) 式对 z 求导，得

$$\frac{dp}{dz} = kT_0\frac{dn}{dz}$$

把(2)式代入,得

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z}=-\frac{mg}{kT_0}n=-\frac{\mu g}{RT_0}n$$

或

$$\frac{\mathrm{d}n}{n}=-\frac{\mu g}{RT_0}\mathrm{d}z$$

积分,得

$$n(z)=n_0\mathrm{e}^{-\frac{\mu gz}{RT_0}} \tag{4}$$

式中 n_0 是 $z=0$(即海平面)的大气分子数密度.

设从海平面 $z=0$ 到高度 $z=h$ 处的大气分子为全部之半,则有

$$\int_0^h n(z)\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\int_0^\infty n(z)\mathrm{d}z$$

把(4)式代入,得

$$\mathrm{e}^{-\frac{\mu gh}{RT_0}}-1=-\frac{1}{2}$$

故

$$h=\frac{RT_0}{\mu g}\ln 2=5.5\times10^3\,\mathrm{m}$$

(3) 设大气绝热,p 与 T 均随 z 变,应遵循的关系为

$$p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}T=p_0^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}T_0$$

与(3)式联立,消去 T,得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}=-\frac{\mu gp}{RT}=-\frac{\mu gp}{R}p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\frac{1}{T_0}p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}=-\left(\frac{\mu g}{RT_0}p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)p^{\frac{1}{\gamma}}$$

积分,得

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)=-\frac{\mu g}{RT_0}p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}z$$

设大气层的全部高度为 H,则在 $z=H$ 处有

$$n_H=0,\quad p_H=0$$

故

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}=\frac{\mu g}{RT_0}p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}H$$

即

$$H=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{RT_0}{\mu g}=28.0\times10^3\,\mathrm{m}$$

【题 11】 设地球的大气等温,温度为 T,地面附近的分子数密度为 n_0,大气分子的平均质量为 m. 如果认为,在距地面高度为 h 处的大气分子沿某方向(当然不包括会与地面相碰的那些方向)的速度,达到或超过该处人造卫星绕地球作圆运动的速度(在不计空气阻力条件下)时,该分子便能沿此方向逃离大气而去. 设地球半径为 R,地面的重力加速度为 g. 试求在 h 处,沿任一

允许方向，单位时间通过单位垂直截面逃离大气的分子数．

【分析】 把人造卫星绕地球作圆运动的速度 v_0，作为该处大气分子沿某方向的逃逸速度不尽合理，但作为一种估算并无不可．

显然，v_0 不难利用力学知识求得．

大气分子沿 x 方向的速率分布为麦克斯韦一维速率分布函数 $f(v_x)$，单位时间沿该方向通过单位垂直面积逃离的分子数可由 v_0，$f(v_x)$ 以及 h 处的分子数密度 $n(h)$ 求得，$n(h)$ 可由玻耳兹曼分布确定，于是可解．

【解】 在距地面高度为 h 处，设空气阻力可略，则作圆运动的人造卫星的速度 v_0 应满足，

$$\frac{m_{卫} v_0^2}{R+h} = \frac{GMm_{卫}}{(R+h)^2}$$

式中 M 为地球质量．由上式得出

$$v_0^2 = \frac{GM}{R+h}$$

地面的重力加速度为

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

由以上两式，得

$$v_0^2 = \frac{R^2 g}{R+h}$$

取大气分子的逃逸方向为 x 方向，在 x 方向麦克斯韦一维速率分布函数为

$$f(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-mv_x^2/2kT}$$

式中 m 为分子质量，T 为大气温度．取与 x 方向垂直的面元 dS，在 dt 时间内以 v_x 速度运动并能通过 dS 的分子应在体元 $(v_x\,dt)dS$ 内，在此体元内速度在 v_x 到 (v_x+dv_x) 的分子数为 $n(h)f(v_x)dv_x(v_x\,dt)dS$，其中 $n(h)$ 是 h 处的分子数密度．对 v_x 从 v_0 到无穷积分，便得出在 dt 时间沿 x 方向经 dS 逃逸的分子数．故在 h 处沿 x 方向单位时间通过单位垂直面积逃逸的分子数为

$$\frac{dN}{dt\,dS} = \int_{v_0}^{\infty} n(h)\,f(v_x)v_x\,dv_x = n(h)\int_{v_0}^{\infty}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} v_x\,e^{-mv_x^2/2kT}\,dv_x$$

$$= n(h)\left(\frac{kT}{2\pi m}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-mv_0^2/2kT} = n(h)\left(\frac{kT}{2\pi m}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-mgR^2/2kT(R+h)}$$

其中已用到 v_0 的结果．

分子在地面的引力势能为

$$E_p(0) = -\frac{GMm}{R}$$

分子在地面上 h 处的引力势能为

$$E_p(h) = -\frac{GMm}{R+h}$$

从地面到 h 处分子引力势能的增量为

$$\Delta E_p = E_p(h) - E_p(0) = \frac{GMmh}{R(R+h)} = \frac{mghR}{R+h}$$

由玻耳兹曼分布

$$n(h)=n_0\,\mathrm{e}^{-\Delta E_p/kT}=n_0\,\mathrm{e}^{\frac{-mghR}{kT(R+h)}}$$

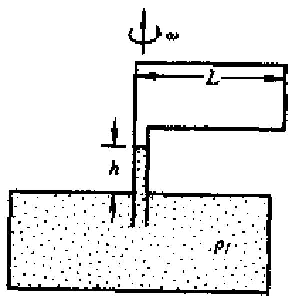
代入$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t\ \mathrm{d}S}$的表达式，得出

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t\ \mathrm{d}S}=n_0\,\mathrm{e}^{\frac{-mghR}{kT(R+h)}}\left(\frac{kT}{2\pi m}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{mgR^2}{2kT(R+h)}}$$

$$=n_0\left(\frac{kT}{2\pi m}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{mgR(R+2h)}{2kT(R+h)}}$$

【题 12】 一根长为 L 的水平粗管与一根竖直细管连接成如图所示的形状．把细管下端插入密度为 ρ_f 的液体之中，然后将粗管的管口封住，并使粗管绕细管以恒定的微小角速度 ω 旋转．已知空气的密度为 ρ_a，细管的体积与粗管相比可以忽略，毛细现象也可忽略．在温度恒定的条件下，试求细管中液面上升的高度 h．

【分析】 在随粗管一起匀角速转动的非惯性系中，粗管内被封闭的空气沿粗管水平长度方向有一定的惯性离心势能分布，使得平衡时粗管内被封闭的空气分子的数密度 n 沿粗管长度水平方向有相应的玻耳兹曼分布．结果，在粗管中离细管较远处的 n 大于封闭旋转前的 n_0，在粗管中靠近细管处的 n 小于 n_0．封闭旋转前的 n_0 与大气压强 p_0 对应．使得粗管中靠近细管处的空气压强 p_0' 小于 p_0，导致液体被抽上细管．细管内液体上升的高度取决于 p_0' 与 p_0 之差，最终达到平衡．



热图 3－12－1

【解】 取以 ω 旋转的非惯性系，取 x 轴沿粗管水平长度方向，原点在细管处．则粗管中在 x 位置的空气分子具有的惯性离心势能为

$$E_p(x)=-\frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

式中 m 是分子质量．$E_p(x)$ 使得粗管中的气体分子数密度沿 x 轴按玻耳兹曼分布，为

$$n(x)=n(0)\,\mathrm{e}^{-E_p(x)/kT}=n(0)\,\mathrm{e}^{m\omega^2x^2/2kT}$$

式中 $n(0)$ 为 $x=0$ 处（即粗管中紧挨细管处）的 n 值，T 为空气温度．

设粗管截面积为 S，封闭旋转前的空气分子数密度为 n_0，则因旋转前后粗管内空气分子总数不变，应有

$$n_0SL=\int_0^L n(x)\ S\ \mathrm{d}x=n(0)S\int_0^L \mathrm{e}^{m\omega^2x^2/2kT}\mathrm{d}x$$

故

$$n(0)=\frac{n_0L}{\int_0^L \mathrm{e}^{m\omega^2x^2/2kT}\mathrm{d}x}$$

题设 ω 为小量，故有

$$\mathrm{e}^{m\omega^2x^2/2kT}\approx 1+\frac{m\omega^2x^2}{2kT}$$

及

$$\int_0^L e^{m\omega^2x^2/2kT}dx = L + \frac{m\omega^2L^3}{6kT}$$

代入,得

$$n(0) = \frac{n_0}{\left(1 - \frac{m\omega^2L^2}{6kT}\right)} = n_0\left(1 - \frac{m\omega^2L^2}{6kT}\right)$$

大气压强为

$$p_0 = n_0kT$$

封闭旋转后,粗管中紧挨细管处的气体压强为

$$p_0{'} = n(0)kT = n_0kT\left(1 - \frac{m\omega^2L^2}{6kT}\right) = \left(1 - \frac{m\omega^2L^2}{6kT}\right)p_0$$

p_0 与 $p_0{'}$ 的差异导致液体沿细管上升 h 高度,达到平衡后,应有

$$\rho_f gh = p_0 - p_0{'} = \frac{m\omega^2L^2}{6kT}p_0$$

即

$$h = \frac{m\omega^2L^2p_0}{6kT\rho_f g}$$

把 $p_0 = n_0kT$ 代入,并利用空气密度 ρ_a 与 n_0 和 m 的关系

$$\rho_a = n_0m$$

得

$$h = \frac{\omega^2L^2\rho_a}{6\rho_f g}$$

【题 13】 原子序数为 Z,原子量为 A 的单质气体,完全电离后形成的等离子体在均匀引力场 $\boldsymbol{g}$ 中处于热平衡状态．设气体密度很小,电离后正、负离子间的局域相互作用可以忽略．

1. 在等温条件下,为了避免宏观的电荷分离(即正离子的数密度与负离子的数密度之比不因位置而变化),试证明必须有均匀电场 $\boldsymbol{E} = -\frac{Am_p - m_e}{(1+Z)e}\boldsymbol{g}$ 存在．其中 m_p 和 m_e 分别是质子和电子的质量．

2. 如果不等温,但各正、负离子受到的因热运动相互碰撞引起的平均力可认为相同,试证明也必须有第 1 问的电场 $\boldsymbol{E}$ 存在．

3. 太阳表面附近存在着等离子体,设其厚度远小于太阳半径,设太阳表面有均匀分布的电荷 Q,试在等温、不等温条件下分别求 Q 值．

4. 设太阳表面附近的等离子体是由氢原子电离产生的．试计算 Q 值．已知太阳质量 $M = 2.0\times10^{30}$ kg.

【分析】 气体在引力场中处于平衡态,其分子数密度遵循玻尔兹曼分布．气体电离成等离子体后,如果正离子构成的“气体”和由电子构成的“气体”在引力场中分别处于平衡态,则应分别遵循各自的玻尔兹曼分布．但由于正离子和电子的质量不同．在引力场某处的势能不同,从而在该处正离子的数密度和电子的数密度不同．这将引起宏观的电荷分离,产生巨大的库仑力,无法

维持平衡．因此，为了使气体电离后形成的等离子体能在引力场中处于平衡态，必须同时存在一个电场，以确保正、负离子的数密度处处相同，不出现宏观的电荷分离．

【解】 1．沿均匀电场 $\boldsymbol{E}$ 的方向取 z 轴，引力场 $\boldsymbol{g}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 反向，沿 $-z$ 方向．任选某处为 $z=0$，规定该处为静电势能和引力势能的零点，则正、负离子在任意 z 处的势能分别为

$$\begin{cases}\phi_+=(Am_pg-ZeE)z\\ \phi_-=(m_eg+eE)z\end{cases}$$

式中 Am_p 为正离子质量，m_e 为电子(负离子)质量．在等温条件下，在引力场和静电场中处于平衡态时，正、负离子的数密度遵循玻尔兹曼分布，为

$$\begin{cases}n_+(z)=n_{+0}e^{-\phi_+/kT}\\ n_-(z)=n_{-0}e^{-\phi_+/kT}\end{cases}$$

不出现电荷的宏观分离要求

$$\frac{n_+(z)}{n_-(z)}=\frac{n_{+0}}{n_{-0}}$$

即要求

$$\phi_+=\phi_-$$

于是，均匀电场 $\boldsymbol{E}$ 的大小应为

$$E=\frac{Am_p-m_e}{(1+Z)e}g \tag{1}$$

因 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{g}$ 反向，故有

$$\boldsymbol{E}=-\frac{(Am_p-m_e)}{(1+Z)e}\boldsymbol{g} \tag{2}$$

2．正、负离子受到的引力和电力分别为

$$\begin{cases}F_+=Am_pg-ZeE\\ F_-=m_eg+eE\end{cases}$$

沿 $-z$ 方向．既然它们在不等温条件下受到的热运动相互碰撞的平均力相同，则此平均力为正、负离子提供的沿 z 方向的分量也应相同，记为 F．在平衡时要求

$$F=F_+\quad 及\quad F=F_-$$

故

$$F_+=F_-$$

于是同样得到(1)、(2)式．

3．太阳表面电荷 Q 在太阳表面附近产生的电场为

$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0R^2}$$

式中 R 是太阳半径．太阳表面的引力加速度为

$$g=\frac{GM}{R^2}$$

式中 M 是太阳质量，G 是引力常量．把 E，g 代入(1)式，得

$$Q=\frac{4\pi\varepsilon_0(Am_p-m_e)}{(1+Z)e}GM\approx\frac{4\pi\varepsilon_0Am_pGM}{(1+Z)e}$$

4. 对于氢等离子体，$A=1,Z=1$，故

$$Q=\frac{2\pi\varepsilon_0m_pGM}{e}=77.4\ \mathrm{C}$$

【题 14】 从分子某次与其他分子碰撞后开始计算其自由程 λ，它的平均值 $\bar{\lambda}$ 称为平均自由程．设分子间的碰撞具有无后效应性，即在 λ 到 $(\lambda+\mathrm{d}\lambda)$ 区间与其他分子碰撞的概率与前面已经过的路程 λ 无关．

试求：1. 分子经 λ 路程尚未被碰撞的概率 $F(\lambda)$，以及分子自由程为 λ 的概率密度（也称为自由程的分布函数）$f(\lambda)$．

2. 分子在某次碰撞后，先经无碰撞的路程 λ_0，再经 λ 路程未被碰撞的概率 $F^*(\lambda_0,\lambda)$，以及不计 λ_0 的平均自由程 $\bar{\lambda}(\lambda_0)$．

【分析】 气体分子自由程的分布函数是继气体分子速度分布函数（即麦克斯韦速度分布函数）之后，关于理想气体热运动的又一个重要分布函数．由于分子碰撞具有无后效应性，这一分布函数可以从数学上简单地导出．

本题先求经 λ 路程尚未被碰的概率 $F(\lambda)$，再计算自由程为 λ 的概率密度（即分布函数）$f(\lambda)$，这也正是从数学上导出 $f(\lambda)$ 的正当步骤．

本题第 2 问的计算结果将表明，从任意时刻（不管这一时刻是否为刚被碰撞之后）开始计量分子在这之后经过的自由程 λ，那么 λ 的平均值 $\bar{\lambda}$ 是相同的量．即 $\bar{\lambda}(\lambda_0)$ 值与 λ 起点前已经过多长的自由程 λ_0 无关，这是气体分子平均自由程的一个非常重要的特征．

【解】 1. 分子在 λ 到 $(\lambda+\mathrm{d}\lambda)$ 区间被碰的概率 $\mathrm{d}P$ 与 λ 无关，故有

$$\mathrm{d}P\propto\mathrm{d}\lambda$$

引入比例系数 $\frac{1}{\alpha}$，上式表为

$$\mathrm{d}P=\frac{\mathrm{d}\lambda}{\alpha}$$

设分子经 λ 路程尚未被碰的概率为 $F(\lambda)$、再经 $\mathrm{d}\lambda$ 路程未被碰的概率为 $(1-\mathrm{d}P)$，故分子经 $(\lambda+\mathrm{d}\lambda)$ 路程尚未被碰的概率应为

$$F(\lambda+\mathrm{d}\lambda)=F(\lambda)(1-\mathrm{d}P)=F(\lambda)-\frac{1}{\alpha}F(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$

由此
$$\mathrm{d}F=F(\lambda+\mathrm{d}\lambda)-F(\lambda)=-\frac{1}{\alpha}F(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$

初条件显然是

$$F(0)=1$$

积分，得出

$$F(\lambda)=\mathrm{e}^{-\lambda/\alpha}$$

自由程为 λ 的概率密度 $f(\lambda)$，应为分子在 λ 路程前未被碰撞而在 λ 到 $(\lambda+\mathrm{d}\lambda)$ 区域被碰撞的概率 $F(\lambda)\mathrm{d}P$ 除以 $\mathrm{d}\lambda$，即为

$$F(\lambda) = \frac{F(\lambda)\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{1}{\alpha}F(\lambda)$$

把 $F(\lambda)$ 的结果代入，得

$$f(\lambda) = \frac{1}{\alpha}\ \mathrm{e}^{-\lambda/\alpha}$$

由分布函数 $f(\lambda)$，可计算平均自由程，有

$$\bar{\lambda} = \int_0^{\infty} \lambda f(\lambda)\ \mathrm{d}\lambda = \int_0^{\infty} \lambda\ \frac{1}{\alpha}\ \mathrm{e}^{-\lambda/\alpha}$$

采用分部积分法，有

$$\int u\,\mathrm{e}^{Au}\ \mathrm{d}u = \frac{u}{A}\ \mathrm{e}^{Au} - \frac{1}{A^2}\ \mathrm{e}^{Au}$$

利用上式，可算得

$$\bar{\lambda} = \alpha$$

因此

$$F(\lambda) = \mathrm{e}^{-\lambda/\bar{\lambda}},\quad f(\lambda) = \frac{1}{\bar{\lambda}}\ \mathrm{e}^{-\lambda/\bar{\lambda}}$$

2. 分子在某次碰撞后，先经 λ_0 路程未被碰撞的概率为 $F(\lambda_0)$，以此为前提，此后又经 λ 路程未被碰撞的概率表为 $F^*(\lambda_0,\lambda)$. 根据概率乘法规则，分子经 $(\lambda_0+\lambda)$ 路程未被碰撞的概率 $F(\lambda_0+\lambda)$ 为

$$F(\lambda_0+\lambda) = F(\lambda_0)F^*(\lambda_0,\lambda)$$

即

$$F^*(\lambda_0,\lambda) = \frac{F(\lambda_0+\lambda)}{F(\lambda_0)} = \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda_0+\lambda)/\bar{\lambda}}}{\mathrm{e}^{-\lambda_0/\bar{\lambda}}} = \mathrm{e}^{-\lambda/\bar{\lambda}}$$

可见 $F^*(\lambda_0+\lambda)$ 与 λ_0 无关．

分子在某次碰撞后，先经无碰撞的路程 λ_0 后，从新的起点开始计算自由程 λ，则此自由程 λ 的概率密度 $f^*(\lambda)$，应为在 λ 路程前未被碰撞而在 λ 到 $(\lambda+\mathrm{d}\lambda)$ 被碰撞的概率 $F^*(\lambda_0,\lambda)\mathrm{d}P$ 除以 $\mathrm{d}\lambda$，即为

$$f^*(\lambda_0,\lambda) = \frac{F^*(\lambda_0,\lambda)\ \mathrm{d}P}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{1}{\alpha}\ F^*(\lambda_0,\lambda)$$

$$= \frac{1}{\bar{\lambda}}\ \mathrm{e}^{-\lambda/\bar{\lambda}} = f(\lambda)$$

此自由程的平均值为

$$\bar{\lambda}(\lambda_0) = \int_0^{\lambda} \lambda f^*(\lambda_0,\lambda)\ \mathrm{d}\lambda = \int_0^{\lambda} \lambda f(\lambda)\ \mathrm{d}\lambda = \bar{\lambda}$$

可见 $\bar{\lambda}(\lambda_0)$ 与 λ 起点前已经过的自由程 λ_0 无关．

【题 15】 理想气体处于平衡态，分子热运动平均速率为 $\bar{v}$，平均自由程为 $\bar{\lambda}$，把 $t=0$ 时刻某分子所在位置取为坐标原点 O. 试问经过多长时间 t，该分子所在位置与原点 O 相距为 R.

设理想气体占据的容器空间足够大，设 $R \gg \bar{\lambda}$，设该分子在本题讨论的时间范围内未与容器

壁相碰．

最后，已知 $\bar{v}=5.0\times10^2\ \mathrm{m/s}$，$\bar{\lambda}=3.0\times10^{-7}\ \mathrm{m}$，$R=2\ \mathrm{m}$，试给出 t 的具体数值．

【分析】 由于碰撞，热运动的分子走的是曲折的路线，很显然，不能用 R 除以 $\bar{v}$ 来求 t．

分子每两次相邻碰撞之间走过的路程就是一个自由程，设经过 N 个自由程后，分子与原点相距为 R，当 N 足够大时，从统计上考虑，R 必定与平均自由程 $\bar{\lambda}$ 有关．另一方面，分子行经 N 个自由程所需的时间 t 必定与平均碰撞频率 $\bar{Z}$ 有关，$\bar{Z}$ 与 $\bar{v}$ 和 $\bar{\lambda}$ 有关．找出以上两个关系，t 即可求．

【解】 取 xyz 坐标，以分子 $t=0$ 时的出发点为原点 O．分子从 O 点出发经过的第一个自由程可用矢量 $\boldsymbol{\lambda}_1(x_1,y_1,z_1)$ 表示；经过一次碰撞后，第二个自由程表为 $\boldsymbol{\lambda}_2(x_2,y_2,z_2)$；如此继续，第 i 个自由程表为 $\boldsymbol{\lambda}_i(x_i,y_i,z_i)$，则分子经 N 个自由程到达的与 O 点相距为 R 的位置应满足下述关系．

$$R^2=(x_1+x_2+\cdots+x_N)^2+(y_1+y_2+\cdots+y_N)^2+(z_1+z_2+\cdots+z_N)^2$$

因 $x_1,x_2,\cdots,x_N;y_1,y_2,\cdots,y_N;z_1,z_2,\cdots,z_N$ 无规取值，且可正可负，故当 N 足够大时，上式平方展开式中的交叉项之和应为零，于是有

$$\begin{aligned}R^2&=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_N^2+y_1^2+y_2^2+\cdots+y_N^2+z_1^2+z_2^2+\cdots+z_N^2\\&=(x_1^2+y_1^2+z_1^2)+(x_2^2+y_2^2+z_2^2)+\cdots+(x_N^2+y_N^2+z_N^2)\\&=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_N^2\end{aligned}$$

引入自由程平方的平均值 $\overline{\lambda^2}$，定义为

$$\overline{\lambda^2}=\frac{1}{N}(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_N^2)$$

则

$$R^2=N\overline{\lambda^2}$$

在本章题 14 中，已经给出了自由程 λ 的分布函数为

$$f(\lambda)=\frac{1}{\bar{\lambda}}\mathrm{e}^{-\lambda/\bar{\lambda}}$$

式中 $\bar{\lambda}$ 为平均自由程．由 $f(\lambda)$ 可计算 $\overline{\lambda^2}$ 如下，

$$\overline{\lambda^2}=\int_0^\infty\lambda^2f(\lambda)\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{\bar{\lambda}}\int_0^\infty\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda/\bar{\lambda}}\mathrm{d}\lambda$$

利用分部积分法，有

$$\int u^2\mathrm{e}^{Au}\mathrm{d}u=\left(\frac{u^2}{A}-\frac{2u}{A^2}+\frac{2}{A^3}\right)\mathrm{e}^{Au}$$

由此得出

$$\overline{\lambda^2}=-(\lambda^2+2\bar{\lambda}\lambda+2\bar{\lambda}^2)\mathrm{e}^{-\lambda/\bar{\lambda}}\Big|_0^\infty=2\bar{\lambda}^2$$

故有

$$R^2=N\overline{\lambda^2}=2N\bar{\lambda}^2$$

分子经 N 个自由程所需时间 t，与平均碰撞频率 $\bar{Z}$ 的关系为

$$t=\frac{N}{\bar{Z}}$$

$\bar{Z}$ 与平均自由程 $\bar{\lambda}$ 及平均速率 $\bar{v}$ 的关系为

$$\bar{Z}=\frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}}$$

由以上三式，得

$$R^2=2\bar{v}\,\bar{\lambda}\,t$$

即

$$t=\frac{R^2}{2\bar{v}\,\bar{\lambda}}$$

把 $\bar{v}=5.0\times10^2\ \mathrm{m/s}$，$\bar{\lambda}=3.0\times10^{-7}\ \mathrm{m}$，$R=2\ \mathrm{m}$ 代入，得出分子前进到 $R=2\ \mathrm{m}$ 处所需的时间为

$$t=1.3\times10^4\ \mathrm{s}=3.7\ \mathrm{h}$$

可见，虽然气体分子速率很大($\bar{v}=5.0\times10^2\ \mathrm{m/s}$)，但由于碰撞频繁，前进是很缓慢的．

【题 16】 某混合理想气体包含 A 和 B 两种分子，已知 A 和 B 分子的质量、有效直径和数密度分别为 m_{A} 和 m_{B}、d_{A} 和 d_{B}、以及 n_{A} 和 n_{B}. 试求在温度为 T 的平衡态，两种分子各自的平均自由程 $\bar{\lambda}_{\mathrm{A}}$ 和 $\bar{\lambda}_{\mathrm{B}}$.

【分析】 显然，A分子的平均自由程 $\bar{\lambda}_{\mathrm{A}}$ 等于它的平均速率 $\bar{v}_{\mathrm{A}}$ 与平均碰撞频率 $\bar{Z}_{\mathrm{A}}$ 之比．$\bar{v}_{\mathrm{A}}$ 是熟知的．至于 $\bar{Z}_{\mathrm{A}}$，由于是混合气体，A 分子不仅要与其他 A 分子碰撞(平均碰撞频率为 $\bar{Z}_{AA}$)，还要与 B 分子碰撞(平均碰撞频率为 $\bar{Z}_{AB}$)，故 $\bar{Z}_{\mathrm{A}}$ 应是 $\bar{Z}_{AA}$ 与 $\bar{Z}_{AB}$ 之和．$\bar{Z}_{AA}$ 取决于 $\bar{v}_{\mathrm{A}}$，$\bar{Z}_{AB}$ 则取决于 A、B分子间的平均相对速率 $\bar{v}_{AB}$(关于 $\bar{v}_{AB}$ 的公式可参看本章题6的(7)式)．利用有关公式，即可求解．$\bar{\lambda}_{\mathrm{B}}$ 类似．

【解】 A、B 分子各自的平均速率分别为

$$\bar{v}_{\mathrm{A}}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m_{\mathrm{A}}}}$$

$$\bar{v}_{\mathrm{B}}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m_{\mathrm{B}}}}$$

A、B 分子的平均相对速率为

$$\bar{v}_{\mathrm{AB}}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi\mu}}$$

式中

$$\mu=\frac{m_{\mathrm{A}}m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}}$$

某个 A 分子与其他 A 分子的平均碰撞频率为

$$\bar{Z}_{AA}=\sqrt{2}\pi\, d_{\mathrm{A}}^2\,\bar{v}_{\mathrm{A}}\,n_{\mathrm{A}}$$

与 B 分子的平均碰撞频率为

$$\bar{Z}_{AB}=\frac{\pi}{4}(d_A+d_B)^2\,\bar{v}_{AB}\,n_B$$

因此,A 分子的平均碰撞频率为

$$\bar{Z}_A=\bar{Z}_{AA}+\bar{Z}_{AB}=\sqrt{2}\pi\,d_A^2\,\bar{v}_A\,n_A+\frac{\pi}{4}(d_A+d_B)^2\,\bar{v}_{AB}\,n_B$$

A 分子的平均自由程为

$$\bar{\lambda}_A=\frac{\bar{v}_A}{\bar{Z}_A}=\bar{v}_A\Big/\left[\sqrt{2}\pi\,d_A^2\,\bar{v}_A\,n_A+\frac{\pi}{4}(d_A+d_B)^2\,\bar{v}_{AB}\,n_B\right]$$

其中

$$\frac{\bar{v}_{AB}}{\bar{v}_A}=\sqrt{\frac{m_A+m_B}{m_B}}$$

代入,得

$$\bar{\lambda}_A=\frac{1}{\pi}\left[\sqrt{2}\,d_A^2\,n_A+\frac{1}{4}(d_A+d_B)^2\sqrt{\frac{m_A+m_B}{m_B}}\,n_B\right]^{-1}$$

同理

$$\bar{\lambda}_B=\frac{1}{\pi}\left[\sqrt{2}\,d_B^2\,n_B+\frac{1}{4}(d_A+d_B)^2\sqrt{\frac{m_A+m_B}{m_A}}\,n_A\right]^{-1}$$

【题 17】 在阴极射线管中,即使管腔被抽成很高的真空度,也总是还有一些残余的空气存在．因此,从阴极射出的高速电子在通过管腔时,总有一部分因与空气分子相碰而不能直接射到荧光屏上．设阴极射线管工作时,管腔内的温度为 27℃,管腔的长度为 20cm. 为了保证有 90% 的电子能够不经碰撞直接射到屏上,试问管腔需抽到多高的真空度(用管腔内空气的压强表示). 已知空气分子的有效直径为 3.0×10^{-10} m.

【分析】 要求 90% 电子直接射到屏上,意即 $N=0.9N_0$(N_0 是全部电子数) 个电子的自由程至少应为管长 $x=20$ cm. 利用

$$\frac{N}{N_0}=e^{-x/\bar{\lambda}} \tag{1}$$

的关系即可求出 N_0 个电子在管腔中运动的平均自由程 $\bar{\lambda}$. 关于(1) 式的由来,请见下面附注．

$\bar{\lambda}$ 取决于电子与空气分子的平均碰撞频率 $\bar{Z}$ 和电子的速度 v. $\bar{Z}$ 则与电子的速度 v、空气分子的大小以及数密度 n 有关．由于管内空气稀薄,可看作理想气体,于是有 $p=nkT$. 综合以上关系,即可求出管内空气的压强 p.

附注．为了说明(1) 式,让我们设想一种简单的空气模型．设空气分子是半径为 r 的弹性球,均静止,并按立方晶格整齐排列,分子之间的平均距离为 a,在稀薄的条件下 $a\gg r$. 任一电子 A 以速度 v 运动,设 A 的运动方向垂直于空气分子层所在的平面,则当 A 穿过一层空气分子时,不发生碰撞的概率应为该层面积与未被分子球遮盖的面积之比,即为

$$\frac{a^2-\pi r^2}{a^2}=1-\frac{\pi r^2}{a^2}$$

当 A 穿过厚为 x,包含 $\frac{x}{a}$ 层分子的空气层时,不发生碰撞的概率为

$$\left(1-\frac{\pi r^2}{a^2}\right)^{\frac{x}{a}} \approx e^{-\frac{\pi r^2}{a^3}x}$$

当 A 从 x 到 $(x+dx)$，即穿过厚为 dx 的空气薄层时，不发生碰撞的概率为

$$e^{-\frac{\pi r^2}{a^3}x} - e^{-\frac{\pi r^2}{a^3}(x+dx)} = \frac{\pi r^2}{a^3}e^{-\frac{\pi r^2}{a^3}x}dx$$

平均自由程 $\bar{\lambda}$ 就是A 与空气分子不发生碰撞所能通过的距离，故有

$$\int_0^{\bar{\lambda}} \frac{\pi r^2}{a^3}e^{-\frac{\pi r^2}{a^3}x}dx = 1$$

得出

$$\bar{\lambda} = \frac{a^3}{\pi r^2}$$

因此，A 穿过厚为 x 的空气层不发生碰撞的概率为

$$e^{-\frac{\pi r^2}{a^3}x} = e^{-x/\bar{\lambda}}$$

设自由程为 x 的电子数为N 个，总电子数为 N_0 个，则

$$\frac{N}{N_0} = e^{-x/\bar{\lambda}}$$

此即(1)式．上述论证方法实际上正是历史上克劳修斯首次推导平均自由程公式时所采用的方法．

【解】 设电子在管腔中运动的平均自由程为 $\bar{\lambda}$，设从阴极发射的电子总数为 N_0，设有 N 个电子能不经碰撞直接到达荧光屏，即这 N 个电子的自由程至少为管长 x，于是有

$$\frac{N}{N_0} = e^{-x/\bar{\lambda}}$$

或

$$\bar{\lambda} = -\frac{x}{\ln\frac{N}{N_0}} = -\frac{20}{\ln 0.9} = 190\ \text{cm}$$

设电子速度为 v，设电子与空气分子的平均碰撞频率为 $\bar{Z}$，则

$$\bar{\lambda} = \frac{v}{\bar{Z}}$$

因电子速度 v 远大于空气分子的热运动速度，可近似认为空气分子静止不动．因电子远小于空气分子，电子的大小可忽略不计．以空气分子的有效半径为半径，以 $v\,dt$ 为折线长度，按电子的运动轨迹作一曲折圆柱体，则在 dt 时间内此圆柱体内的空气分子都将与该电子碰撞．因此，在 dt 时间内一电子与空气分子的碰撞次数为

$$dN = n(\pi r^2)v\,dt$$

式中 n 是空气分子的数密度．于是，电子与空气分子的平均碰撞频率为

$$\bar{Z} = \frac{dN}{dt} = n\pi r^2 v$$

代入 $\bar{\lambda}$ 表达式，得

$$\bar{\lambda}=\frac{v}{\bar{Z}}=\frac{1}{n\pi r^2}$$

因管内空气稀薄，可看作理想气体，故有

$$n=\frac{p}{kT}$$

式中 p 和 T 是管内空气的压强和温度．由以上两式，得

$$\bar{\lambda}=\frac{kT}{\pi r^2 p}$$

故

$$p=\frac{kT}{\pi r^2\bar{\lambda}}$$

把 $T=300\ \mathrm{K}$，$r=1.5\times10^{-10}\ \mathrm{m}$，上述 $\bar{\lambda}=190\ \mathrm{cm}$，以及玻尔兹曼常量 k 代入，得

$$p=3.1\times10^{-2}\ \mathrm{Pa}$$

【题 18】 设气体分子的热运动速度分布在速度空间具有球对称性，速率分布函数为 $f(v)$，分子数密度为 n．

试证明：1．速率在 v 到 $(v+\mathrm{d}v)$ 的分子，单位时间与单位面积容器壁碰撞的分子数为 $\frac{1}{4}(nf(v)\mathrm{d}v)v$．

2．全部气体在单位时间内与单位面积容器壁碰撞的分子数为 $\frac{1}{4}n\bar{v}$，其中 $\bar{v}$ 的分子的平均速率．

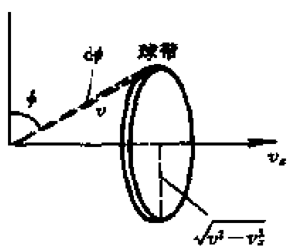
【分析】 众所周知，当气体分子的速度分布为麦克斯韦分布时，单位时间与单位面积容器壁碰撞的分子数为 $\frac{1}{4}n\bar{v}$，其中 n 为分子数密度，$\bar{v}$ 为分子平均速率．其实这一结果对所有具有球对称速度分布的情形均适用，本题即为指出这一点而编．

【解】 由于分子速度分布在速度空间具有球对称性，故在速度空间以 v 为半径的球面上处处具有相同的概率，从而可引入本题的速率分布函数 $f(v)$．

考虑速率为 v 的分子，此种分子速度分量 v_x 的分布函数为 $F_v(v_x)$．为求 $F_v(v_x)$，如图，在速度空间取半径为 v 的球面，在球面上取如图所示的球带，则有

$$F_v(v_x)\mathrm{d}v_x=\text{速度处在球带上的概率}=\text{球带面积}/4\pi v^2$$

$$=2\pi\sqrt{v^2-v_x^2}\,v\mathrm{d}\phi/4\pi v^2=\frac{\sqrt{v^2-v_x^2}\,\mathrm{d}\phi}{2v}$$



热图 3－18－1

因

$$v_x=v\sin\varphi$$

故

$$\mathrm{d}v_x=v\cos\phi\ \mathrm{d}\phi=\sqrt{v^2-v_x^2}\ \mathrm{d}\phi$$

代入，得

$$F_v(v_x)=\frac{1}{2v}$$

因速率仅限于 v，故球面外 $F_v(v_x)=0$，即有

$$F_v(v_x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2v}, & \text{当 } v\geqslant v_x\geqslant -v\\ 0, & \text{当 } |v_x|>v\end{cases}$$

取速率为 v 的分子，其分子数密度为 $n(v)$，则单位体积内速度分量在 v_x 到 $(v_x+\mathrm{d}v_x)$ 之间的分子数为 $n(v)F_v(v_x)\mathrm{d}v_x$. 在所有 v_x 介于 v_x 与 $(v_x+\mathrm{d}v_x)$ 之间的分子中，在 $\mathrm{d}t$ 时间内能够与垂直于 x 轴的面元 $\mathrm{d}S$ 相碰的分子，应是在以 $\mathrm{d}S$ 为底面、以 $v_x\mathrm{d}t$ 为高的柱体内的分子，其数目为 $n(v)F_v(v_x)\mathrm{d}v_x\,\mathrm{d}S\,v_x\,\mathrm{d}t$，因此，单位时间碰到单位面积上速度分量 v_x 在 v_x 到 $(v_x+\mathrm{d}v_x)$ 之间的分子数应为

$$n(v)f_v(v_x)v_x\,\mathrm{d}v_x$$

$v_x<0$ 的分子显然不会与 $\mathrm{d}S$ 面元相碰，所以将上式从 0 到 ∞ 对 v_x 积分，即可求得速率为 v 的分子在单位时间与单位面积容器壁相碰的分子数为

$$\int_0^\infty n(v)F_v(v_x)v_x\,\mathrm{d}v_x$$

把 $F_v(v_x)$ 的结果代入，得

$$\int_0^\infty n(v)F_v(v_x)v_x\,\mathrm{d}v_x=\int_0^v n(v)\,\frac{1}{2v}\,v_x\,\mathrm{d}v_x=\frac{1}{4}\,n(v)v$$

1. 取速率从 v_1 到 $v_2(v_2>v_1)$ 的分子，单位时间与单位面积容器壁碰撞的分子数为

$$\sum_{v_1}^{v_2}\frac{1}{4}\,n(v)v$$

若 $v_1=v,v_2=v+\mathrm{d}v$，得

$$\sum_{v}^{v+\mathrm{d}v}\frac{1}{4}\,n(v)v=\frac{1}{4}\Big(\sum_{v}^{v+\mathrm{d}v}n(v)\Big)v$$

在 v 到 $(v+\mathrm{d}v)$ 对 $n(v)$ 求和，即为 v 到 $(v+\mathrm{d}v)$ 的分子数密度，其值为 $n\,f(v)\mathrm{d}v$，故有

$$\sum_{v}^{v+\mathrm{d}v}n(v)=n\,f(v)\mathrm{d}v$$

因此，速率在 v 到 $(v+\mathrm{d}v)$ 的分子中，单位时间与单位面积容器壁碰撞的分子数为

$$\frac{1}{4}[n\,f(v)\,\mathrm{d}v]v$$

2. 全部气体中在单位时间内与单位面积容器壁碰撞的分子数为

$$\int_0^\infty\frac{1}{4}[n\,f(v)\,\mathrm{d}v]v=\frac{n}{4}\int_0^\infty v\,f(v)\,\mathrm{d}v=\frac{1}{4}\,n\bar{v}$$

式中 $\bar{v}$ 为分子平均速率 .

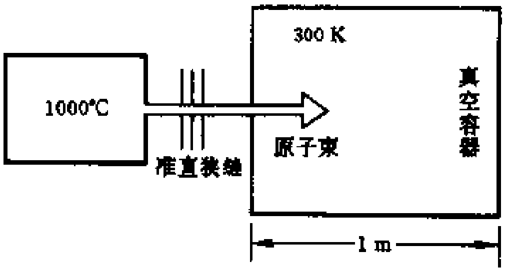
【题 19】 如图，在温度为 1 000 ℃ 的真空加热室中蒸发产生的铍原子(原子量为 9) 气体经小孔逸出，透过准直狭缝形成原子束后，进入长度为 1 m的真空大容器中，容器的右壁与原子束垂直 .

1. 试求原子束中原子的速率分布，平均速率和方均根速率 .

2. 原子束中的原子进入真空容器后，将与残存的稀薄空气分子发生碰撞．设原子束行进 1 m 后，其强度（单位时间内通过的原子数）减小为原来的$\frac{1}{e}$．已知真空容器的温度为 300 K，铍原子与空气分子的碰撞截面为 $10^{-20}\,m^2$，忽略铍原子之间的碰撞．试问真空容器中残存空气的压强是多少？

3. 铍原子每行进 1 m 所需的平均时间 $\bar{\tau}$ 是多少？

4. 设铍原子束刚进入真空容器时的粒子数密度为 $n_0 = 10^{10}\,cm^{-3}$，设铍原子与容器壁作完全非弹性碰撞．试估计因铍原子束与容器壁碰撞对后者所施加的压强．



热图 3－19－1

【分析】 由上题（本章题 18）可知，铍原子气体在单位时间内通过小孔单位截面射出的原子总数为$\frac{1}{4}n\bar{v}$，这里的 $\bar{v}$ 是原子的平均速率．其中速率在 v 到 $(v+dv)$ 的原子数为$\frac{1}{4}(nf(v)\,dv)v$，后者在前者中所占的百分数，即为出射原子束中的原子速率处在 v 到 $(v+dv)$ 的概率，此概率除以 dv，即为原子束中原子的速率分布函数 $F(v)$．原子气可当作理想气体，$\bar{v}$ 可由麦克斯韦速率分布求出，于是 $F(v)$ 可解．由 $F(v)$，不难计算铍原子束中原子的平均速率和方均根速率．

真空容器中的稀薄空气可看作理想气体，故 $p_{空} = n_{空}kT_{空}$，其中 $T_{空}$ 已知，为求 $p_{空}$ 需计算空气分子的数密度 $n_{空}$．铍原子与空气分子的平均碰撞频率为 $\bar{Z} = \sigma\bar{u}n_{空}$，其中碰撞截面 σ 已知，$\bar{u}$ 为铍原子相对空气分子的平均速率．因铍原子束来自高温加热室，且铍原子质量小于空气分子质量，绝大部分铍原子的速率应远大于空气分子的速率，故平均相对速率 $\bar{u}$ 可用原子束中铍原子的平均速率 $\bar{v}_{束}$ 代替．于是有 $n_{空} = \bar{Z}/\sigma\bar{v}_{束}$，所以 $n_{空}$ 的计算又转化为$\bar{Z}$ 的计算．$\bar{Z}$ 与铍原子在空气中的平均自由程 $\bar{\lambda}$ 的关系为$\bar{Z} = \bar{v}_{束}/\bar{\lambda}$，因而又需计算 $\bar{\lambda}$．铍原子与空气分子的碰撞具有无后效应性，参阅本章题 15 可知，铍原子自由程的分布与理想气体分子自由程的分布相同．由原子束行进 1 m 其强度衰减的情况，可以确定 $\bar{\lambda}$．至此，$p_{空}$ 可求．

原子束中铍原子行进的平均速率 $\bar{v}_{束}$ 已求出，由此原子每行进 1 m 所需平均时间 $\bar{\tau}$ 容易求得．

铍原子束进入容器后，其分子数密度从左端的 n_0 减为右端的$\frac{n_0}{e}$，每个铍原子与容器右壁作完全非弹性碰撞施予右壁的冲量为 mv，利用压强与冲量的关系，即可求出原子束对真空容器右壁所施加的压强．

【解】 1. 加热室内铍蒸汽单位时间内通过小孔的单位面积射出的原子数（见本章题 18）为

$$\frac{1}{4}n\,\bar{v}$$

其中 n 是铍原子蒸汽的原子数密度，$\bar{v}$ 是铍原子的平均速率．由本章题 18，铍原子中速率在 v 到 $(v+dv)$ 的原子，在单位时间通过小孔单位面积射出的原子数为

$$\frac{1}{4}(n\,f(v)dv)v$$

其中 $f(v)$ 为麦克斯韦速率分布函数．因此，在射出的原子束中原子速率在 v 到 $(v+dv)$ 之间的

概率为

$$F(v)\mathrm{d}v = \frac{1}{4}[n f(v)\mathrm{d}v]v/\frac{1}{4}n\bar{v} = \frac{v f(v)\mathrm{d}v}{\bar{v}}$$

其中 $F(v)$ 是原子束中的原子速率分布，为

$$F(v) = \frac{v f(v)}{\bar{v}}$$

由麦克斯韦分布 $f(v)$ 得出

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

代入，得

$$F(v) = 4\pi\sqrt{\frac{\pi m}{8kT}}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^3 \mathrm{e}^{-mv^2/2kT}$$

其中 $T = 1\,273$ K，m 为铍原子质量．

原子束中原子的平均速率为

$$\bar{v}_{束} = \int_0^{\infty} v F(v)\,\mathrm{d}v = \frac{1}{\bar{v}}\int_0^{\infty} v^2 f(v)\,\mathrm{d}v$$

其中的定积分即为麦克斯韦速率分布给出的方均速率，即

$$\int_0^{\infty} v^2 f(v)\,\mathrm{d}v = \overline{v^2} = \frac{3kT}{m}$$

故

$$\bar{v}_{束} = \frac{\overline{v^2}}{\bar{v}} = \frac{3kT}{m}\Big/\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{9\pi kT}{8m}} = \sqrt{\frac{9\pi RT}{8\mu}}$$

把 $\mu = 9\times10^{-3}$ kg/mol 等量代入，得

$$\bar{v}_{束} = 2.04\times10^3 \text{ m/s}$$

原子束中原子的方均根速率为

$$\sqrt{\overline{v^2_{束}}} = \left[\int_0^{\infty} v^2 F(v)\mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{2}}$$

把 $F(v)$ 表达式代入，积分，得

$$\sqrt{\overline{v^2_{束}}} = \sqrt{\frac{4kT}{m}} = \sqrt{\frac{4RT}{\mu}} = 2.17\times10^3 \text{ m/s}$$

2．铍原子与空气分子的碰撞也具有无后效应性．参看本章题15的讨论可知，理想气体处于平衡态时，分子自由程的分布仅由这种无后效应性的碰撞所确定，因此铍原子在真空容器中行进的自由程分布必定等同于理想气体分子的自由程分布．由此，铍原子的自由程达到 λ 时，沿未被碰撞的概率为

$$\mathrm{e}^{-\lambda/\bar{\lambda}}$$

这一概率也相当于自由程超过 λ 的原子数所占的百分比，即等于减弱的原子束强度与原来的原子束强度之比，即为 $\frac{1}{\mathrm{e}}$，故有

$$\mathrm{e}^{-\lambda/\bar{\lambda}} = \frac{1}{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{-1}$$

即

$$\lambda = \bar{\lambda}$$

由题设的条件，$\lambda = 1$ m，因此平均自由程为

$$\bar{\lambda} = 1\ \text{m}$$

铍原子来自 $T = 1\,273$ K的高温，其热运动与真空容器中温度为 $T_{空} = 300$ K的空气分子的热运动相比，要剧烈得多．再考虑到铍原子量9小于空气的平均分子量29．因此，在讨论铍原子与空气分子的碰撞时，可忽略空气分子的运动．于是，铍原子的平均自由程 $\bar{\lambda}$ 与平均碰撞频率 $\bar{Z}$（铍原子与空气分子的碰撞）的关系为

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}_{束}}{\bar{Z}}$$

其中 $\bar{v}_{束}$ 是铍原子束的平均速率．

$\bar{Z}$ 与碰撞截面 σ 的关系为

$$\bar{Z} = \sigma \bar{v}_{束} n_{空}$$

其中 $n_{空}$ 是空气分子的数密度．由以上两式，得

$$n_{空} = \frac{1}{\sigma\bar{\lambda}}$$

真空容器中空气压强为

$$p_{空} = n_{空} k T_{空} = \frac{kT_{空}}{\sigma\bar{\lambda}}$$

把 $\sigma = 10^{-20}\ \text{m}^2$ 等有关数据代入，得

$$p_{空} = 0.41\ \text{Pa}$$

3．铍原子每行进1 m所需的平均时间为

$$\bar{\tau} = \frac{1}{\bar{v}_{束}} = 4.9 \times 10^{-4}\ \text{s}$$

4．速率在 v 到 $(v + \mathrm{d}v)$ 之间的铍原子，在 $\mathrm{d}t$ 时间与容器壁 $\mathrm{d}S$ 面元发生完全非弹性碰撞的原子数为

$$[n' F(v)\,\mathrm{d}v] v\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}S$$

式中 n' 是原子束碰壁前的原子数密度，它与刚进入容器时的原子数密度 n_0 的关系为

$$n' = \frac{n_0}{\mathrm{e}}$$

每个原子与器壁完全非弹性碰撞给予器壁的冲量为 mv，故 $\mathrm{d}S$ 面元在 $\mathrm{d}t$ 时间内受到的原子束施予的总冲量为

$$\int_0^\infty mv\,[n' F(v)\,\mathrm{d}v] v\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}S$$

上述总冲量除以 $\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}S$，即得容器壁所受压强为

$$p=\int_0^{\infty} mv\,n'\,F(v)\;v\;\mathrm{d}v=\frac{n_0m}{\mathrm{e}}\int_0^{\infty} v^2\,F(v)\,\mathrm{d}v$$

$$=\frac{n_0m}{\mathrm{e}}\;\overline{v_{束}^2}=\frac{n_0m}{\mathrm{e}}\cdot\frac{4kT}{m}=\frac{4kTn_0}{\mathrm{m}}$$

把 $n_0=10^{10}\,\mathrm{cm^{-3}}=10^{16}\,\mathrm{m^{-3}}$ 等数据代入,得

$$p=2.6\times10^{-4}\,\mathrm{Pa}$$

【题 20】 在气象学中,降雨量是指雨区地面雨水的累加高度．今在离地面足够高处有一片厚度可忽略不计的降雨云层,单位时间的降雨量 Q 为常量．假设雨滴在垂直下落过程中近似保持球体形状,半径均为 R,空气对雨滴的阻力的大小与雨滴的速度大小成正比,比例系数为常量 α.

1. 若在雨区有一飞虫以速率 u 作水平飞行,飞虫也近似看作球体,半径为 r,试在降雨稳定的持续时间内,确定飞虫在雨中的平均自由程(即飞虫每相邻两次与雨滴碰撞之间飞过的路程之平均值)的上限．

再用 $Q=10\,\mathrm{cm/h}$, $R=1.00\,\mathrm{mm}$, $\alpha=3.00\times10^{-3}\,\mathrm{g/s}$, $u=10.0\,\mathrm{m/s}$, $r=4.00\,\mathrm{mm}$ 等数据计算此上限．

2. 设在某段高度范围内雨滴降落速度可以认为是常量 v,而飞虫在该区域恰以速率 $u=v$ 飞行．如果飞虫朝任一空间方向飞行的可能性都相同,试问在不同的飞行方向上,飞虫在雨中的平均自由程是否相同?如果相同,试算出这相同的平均自由程;如果不相同,试计算这些平均自由程的平均值．

【分析】 取 y 轴垂直向下,原点 $y=0$ 在云层．

首先,讨论雨滴的运动．雨滴从云层下落,受到重力 mg(向下)和阻力 αv(向上)的作用,速度从零逐渐增大,当 $mg=\alpha v$ 时,v 达到极大值 $v_{\max}$,尔后以 $v_{\max}$ 匀速下降．当然,能否达到 $v_{\max}$,与云层的高度有关．

其次,讨论降雨．由于雨滴速度随高度变化为 $v(y)$,而稳定降雨量 Q 与 y 无关,为常数,因此雨滴的平均数密度应随高度变化,越往下越小,为 $n(y)$. 由 Q 可确定 $v(y)$ 与 $n(y)$ 的关系．

再次,讨论飞虫与雨滴的碰撞．由题设,飞虫在某高度 y 处以 u 水平飞行,则飞虫相对雨滴的速度 $\boldsymbol{u}_{相对}$ 是 $\boldsymbol{u}$(水平方向)与 $\boldsymbol{v}(y)$(垂直向下)的矢量差．在 $\mathrm{d}t$ 时间内,能与飞虫碰撞的雨滴应处在长度为 $u_{相对}\mathrm{d}t$,底面为半径 $(R+r)$ 的圆所构成的圆柱体内．圆柱体内的雨滴数就是飞虫在 $\mathrm{d}t$ 时间内与雨滴碰撞的平均次数．由此,飞虫与雨滴相邻两次碰撞的平均时间及飞虫的平均自由程 $\bar{\lambda}$ 可求．因为在不同高度 y 处的 $v(y)$ 不同,$\bar{\lambda}$ 亦不同,应表为 $\bar{\lambda}(y)$,于是 $\lambda_{\max}$ 可求．

如果在某高度范围内,雨滴速度与飞虫速度相同且恒定,即 $u=v=$ 常量,但飞虫可沿各种方向运动．则当飞虫飞行方向不同时,飞虫相对雨滴的速度 $\boldsymbol{u}_{相对}$ 不同,$\boldsymbol{u}_{相对}$ 只与 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 之间的夹角 θ 有关．因而平均自由程与 θ 有关,为 $\bar{\lambda}(\theta)$.

在飞虫朝各个空间方向飞行的可能性相同的条件下,$\bar{\lambda}(\theta)$ 对各种空间方向的平均值为

$$\overline{\bar{\lambda}(\theta)}=\frac{1}{\Omega_0}\int\bar{\lambda}(\theta)\mathrm{d}\Omega$$

式中 $\mathrm{d}\Omega$ 是速度空间任意立体角元,$\Omega_0=4\pi$ 是全速度空间所张立体角．在速度空间以 $u=v$ 为半径作一球面,则相同的立体角元 $\mathrm{d}\Omega$ 在球面上所张的面积元相同．于是

$$\overline{\bar{\lambda}(\theta)} = \frac{1}{S_0}\int \bar{\lambda}(\theta)\mathrm{d}S$$

式中 $S_0 = 4\pi u^2$ 是速度空间的球面积．由于 $\bar{\lambda}(\theta)$ 是 θ 的函数，可将球面按不同 θ 分割成许多球带，则从 θ 到 $(\theta + \mathrm{d}\theta)$ 的球带的面积为

$$\mathrm{d}S = 2\pi\, u \sin\theta \cdot u\, \mathrm{d}\theta$$

代入上式，得

$$\overline{\bar{\lambda}(\theta)} = \int_0^{\pi} \bar{\lambda}(\theta)\, \frac{1}{2}\, \sin\theta\, \mathrm{d}\theta$$

于是 $\overline{\bar{\lambda}(\theta)}$ 可求．

【解】 1．取 y 轴垂直向下，原点 $y = 0$ 在云层．由牛顿第二定律，雨滴的运动方程为

$$m\, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - \alpha v$$

式中 m 是雨滴的质量，若水的密度为 ρ，则

$$m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

可见雨滴的速度 $v(y)$ 从零开始增大，当 $mg = \alpha v$ 时，$v(y) = v_{\max}$ 达到最大，为

$$v_{\max} = \frac{mg}{\alpha}$$

$v_{\max}$ 能否达到，取决于云层的高度．

设高度为 y 处的雨滴的平均数密度为 $n(y)$，则单位时间通过水平面积 S 的雨滴总数为 $n(y)v(y)S$，对应的雨水流量为 $\frac{4}{3}\pi R^3\, n(y)\, v(y)S$，在降雨稳定的持续时间内它应等于 QS（Q 是降雨量），因此有

$$QS = \frac{4}{3}\pi R^3\, n(y)\, v(y)S$$

即

$$n(y) = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3\, v(y)}$$

可见 $n(y) \propto \frac{1}{v(y)}$，速度越大处雨滴数密度越小，这是降雨量稳定的必然结果．

当飞虫以 u 水平飞行时，因雨滴以 $v(y)$ 垂直下降，飞虫相对雨滴的速度为

$$u_{相对} = \sqrt{u^2 + v^2(y)}$$

相对雨滴静止的观察者可取以飞虫为中心，以 $(R + r)$ 为半径的圆在 $\mathrm{d}t$ 时间内扫过的空间区域，其体积为

$$\mathrm{d}V = \pi(R + r)^2\, u_{相对}\mathrm{d}t$$

显然，在此空间区域内的雨滴数为

$$n(y)\mathrm{d}V = n(y)\, \pi(R + r)^2\, u_{相对}\mathrm{d}t$$

这就是在 $\mathrm{d}t$ 时间内飞虫与雨滴碰撞的平均次数．因此，单位时间内飞虫与雨滴碰撞的平均次数为

$$n(y)\,\pi(R+r)^2 u_{相对} = n(y)\,\pi(R+r)^2\sqrt{u^2+v^2(y)}$$

飞虫与雨滴相邻两次碰撞的平均时间为

$$\bar{\tau} = \frac{1}{n(y)\,\pi(R+r)^2\sqrt{u^2+v^2(y)}}$$

飞虫的平均自由程(相对地面观察者)为

$$\bar{\lambda} = u\bar{\tau} = \frac{u}{n(y)\,\pi(R+r)^2\sqrt{u^2+v^2(y)}}$$

把 $n(y)$ 的结果代入,得

$$\bar{\lambda} = \frac{4R^3\,u\,v(y)}{3Q(R+r)^2\sqrt{u^2+v^2(y)}}$$

可见 $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(y)$ 是 y 的函数．当 $v(y) = v_{max} = \dfrac{mg}{\alpha}$ 时,$\bar{\lambda}(y) = \bar{\lambda}_{max}$,为

$$\bar{\lambda}_{max} = \frac{4R^3\,u\,v_{max}}{3Q(R+r)^2\sqrt{u^2+v^2(y)}}$$

式中

$$v_{max} = \frac{mg}{\alpha} = \frac{4\pi R^3\rho g}{3\alpha}$$

把 R,ρ,α 及 $g = 9.80\ \mathrm{m/s^2}$ 等数据代入,得

$$v_{max} = 13.7\ \mathrm{m/s}$$

把 R,r,Q,u,v_{max} 等数据代入 $\bar{\lambda}_{max}$,得

$$\bar{\lambda}_{max} = 15.5\ \mathrm{m}$$

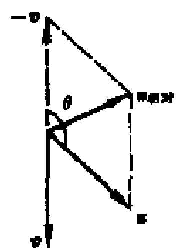
2. 若在某高度范围,$u = v =$ 常量,但飞虫飞行方向任意,则当飞虫沿不同方向飞行时,因飞虫相对雨滴的速度 $\boldsymbol{u}_{相对}$ 不同,故平均自由程 $\bar{\lambda}$ 不同．

如热图 3－20－1,$\boldsymbol{v}$ 为雨滴方向,$\boldsymbol{u}$ 为飞虫飞行方向,$-\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 的夹角为 θ,则飞虫相对雨滴的速度 $\boldsymbol{u}_{相对}$ 如热图 3－20－1 所示．因 $v = u$,故 $\boldsymbol{u}_{相对}$ 的大小为

$$u_{相对} = 2v\cos\frac{\theta}{2}$$

与第 1 问中同理,飞虫与雨滴相邻两次碰撞之间的平均时间为

$$\bar{\tau}(\theta) = \frac{1}{n(y)\pi(R+r)^2\,u_{相对}}$$



热图 3－20－1

因现在 $u_{相对} = u_{相对}(\theta)$,故 $\bar{\tau} = \bar{\tau}(\theta)$ 随 θ 变．式中

$$n(y) = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3 v}$$

因此,当飞虫沿 θ 方向飞行时,其平均自由程为(注意 $u = v$)

$$\bar{\lambda}(\theta) = u\bar{\tau}(\theta) = \frac{v}{n(y)\pi(R+r)^2\,u_{相对}}$$

$$= \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 v^2}{\pi(R+r)^2 \cdot 2v\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{2R^3 v}{3Q(R+r)^2\cos\frac{\theta}{2}}$$

为了计算 $\bar{\lambda}(\theta)$ 对各种空间方向的平均值，如热图2－20－2，在速度空间以 $u=v$ 为半径作球面，其"面积"为 $4\pi u^2$. 因飞虫朝任一空间方向飞行的可能性都相同，因此飞行速度矢量 $\boldsymbol{u}$ 的端点落在 θ 到 $(\theta+\mathrm{d}\theta)$ 球带上的概率为球带"面积"与球面"面积"之比，即

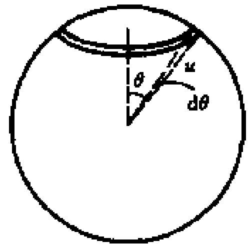
$$\frac{2\pi\, u\,\sin\theta\cdot u\,\mathrm{d}\theta}{4\pi u^2} = \frac{1}{2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

因而 $\bar{\lambda}(\theta)$ 对各种空间方向的平均值 $\overline{\bar{\lambda}(\theta)}$ 为

$$\overline{\bar{\lambda}(\theta)} = \int_0^\pi \bar{\lambda}(\theta)\cdot\frac{1}{2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^\pi \frac{2R^3 v}{3Q(R+r)^2\cos\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{1}{2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{2R^3 v}{3Q(R+r)^2}\int_0^\pi \sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{4R^3 v}{3Q(R+r)^2}$$



热图 3－20－2

其中用到

$$\int_0^\pi \sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = 2$$

【题 21】 气体粘滞系数的测定．

把待测气体充入容积为 V_0 的烧瓶中，使其压强 p_b 大于外界大气压强 p_0，其温度则与外界温度 T_0 一致．烧瓶口外连接长为 L、半径为 r 的水平细圆管与大气相通．细管与烧瓶连接处有阀门，先关闭．打开阀门后瓶内气体经细管向外流出，经过 Δt 时间后再将阀门关闭，测出瓶内气体压强为 p_e，由此便可确定该气体的粘滞系数 η. 设整个过程中，烧瓶、细管、外界处处温度相同且保持不变．试导出 η 的计算公式．

某次实验以二氧化碳为待测气体，有关实验数据为，$V_0 = 1.0$ L，$p_b = \frac{1600}{760}$ atm，$P_0 = \frac{735}{760}$ atm，$t_0 = 15$ ℃，$L = 10$ cm，$r = 0.050$ mm，$\Delta t = 22$ min，$p_e = \frac{1\,350}{760}$ atm，试利用导出的公式计算二氧化碳的粘滞系数 η.

【分析】 烧瓶内的气体经细管向外流出，气体粘滞性的大小将影响流出的快慢．在同样的时间内，η 越大，流出的气体质量应越小，即终态的气体压强 p_e 应越大．因此，在其他量都确定的前提下，有可能通过 p_e 的测量来确定 η 值．本题设计的测量 η 的实验，原则上是可行的．

尽管如此，实验涉及的过程仍相当复杂．这就要求采用一系列大体上符合实验情形的简化假设和模型，否则理论分析就无法进行．

现在作具体分析．

瓶内气体的体积和温度不变，随着气体从瓶口经细管流出，瓶内气体的质量、密度、特别是压强都将逐渐减少，其变化取决于气体经瓶口流出的体积流量 V_Q（单位时间从瓶口流出的气体体积）. 假设瓶内气体为理想气体，利用其状态方程可给出瓶内气体压强的变化与 V_Q 的关系．

再看水平细圆管内的气体．与瓶口相连的细管入口处的气体压强就是瓶内气体的压强 p，与大气相连的细管出口处的气体压强则为大气压强 p_0，可见细管内各处的气体压强从而气体密度是逐渐变化的，这表明细管内气体具有可压缩性，否则密度应不变．沿细管取 x 轴，取细管内各处气体的压强和密度表为 p_x 和 ρ_x（即假设细管内任意 x 处截面上各点的 p_x 相同，ρ_x 相同，忽略压强和密度沿细管径向的变化）．对于细管内从 x 到 $(x+\mathrm{d}x)$ 的任一小段而言，正是由 p_x 和 $p_{x-\mathrm{d}x}$ 的不同，推动了气体沿细管流动．

大家知道，流体力学中的泊肃叶公式确定了粘滞流体通过细圆管的流量的公式．它指出，当粘滞系数为 η 的流体流过细圆管时，每秒流过细管中任一圆截面的流体体积为

$$V_Q=\frac{\pi r^4}{8\eta}\left(\frac{p_1-p_2}{l}\right)$$

式中 r 和 l 是细圆管的半径和长度，(p_1-p_2) 是细管两端的压强差．泊肃叶公式适用于不可压缩的粘滞流体．在本题中，可把它用于细管中任意 $\mathrm{d}x$ 小段，即忽略 $\mathrm{d}x$ 小段气体的可压缩性．由此，可把细管任意 x 处的 V_Q[注意，细管各处的 V_Q 不同，应为 $V_Q(x)$] 与前后的压强差 $(p_x-p_{x+\mathrm{d}x})$ 以及 η 联系起来．另外，因细管很细而并不很长，可以假设在每一时刻管内气体均作稳定流动，即尽管气体密度 ρ_x 和流量 $V_Q(x)$ 在管内处处不同，但质量流量 $\rho_x V_Q(x)$ 却为常量，与 x 无关．这样，便可通过积分，把瓶口处的 V_Q[即 $V_Q(0)$] 与细管两端气体的压强 p 和 p_0 以及 η 联系起来，这是关键的一步．

把以上对瓶内和细管内气体的讨论结合起来，即可顺利求解．

【解】 设瓶内气体为理想气体．瓶内气体的体积和温度恒定，分别为 V_0 和 T_0，任意 t 时刻瓶内气体的压强、质量、密度分别为 p、M、ρ，经瓶口流出的气体的体积流量（即单位时间经瓶口流出的气体体积）为 V_Q．由理想气体状态方程

$$pV_0=\frac{M}{\mu}RT_0$$

得出从 t 到 $(t+\mathrm{d}t)$ 时间内，气体质量的改变为

$$\mathrm{d}M=\frac{\mu V_0}{RT_0}\mathrm{d}p \tag{1}$$

由 V_Q 定义，气体流出的质量 $-\mathrm{d}M$ 与 V_Q 的关系为

$$-\mathrm{d}M=\rho V_Q\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

由状态方程，得

$$\rho=\frac{M}{V_0}=\frac{\mu}{RT_0}p \tag{3}$$

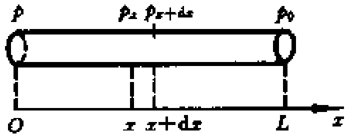
把(1)、(3) 式代入(2) 式，得

$$-V_0\,\mathrm{d}p=V_Q p\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

式中的 $V_Q=V_Q(0)$，见下文．

如图，沿水平细圆管长度方向建立 x 坐标，$x=0$ 处是细管与瓶口连接处，气体压强为 p（即瓶内气体压强）；$x=L$ 处是细管与大气相通处，气体压强为 p_0（即大气压强）；任意 x 处的气体压强为 p_x．由理想气体状态方程，细管内任意 x 处的气体密度 ρ_x 为

$$\rho_x=\frac{\mu}{RT_0}p_x \tag{5}$$



热图 3-21-1

在细管内任取从 x 到 $(x+dx)$ 的一小段，忽略在此小段内气体的可压缩性．在此小段内气体流速有径向分布，管壁附近流速为零，管轴处流速最大．由粘滞流体在水平圆管道中流动的泊肃叶公式，在管中任意 x 处，气体的体积流量 $V_Q(x)$ 为

$$V_Q(x)=\frac{\pi r^4}{8\eta}\cdot\frac{(p_x-p_{x+dx})}{dx}=-\frac{\pi r^4}{8\eta}\frac{dp_x}{dx} \qquad (6)$$

因管细而并不很长，可以认为在每一时刻管内气体近似作稳定流动，即气体的质量流量在管内处处为常量，故

$$\rho_x V_Q(x)=C$$

把(5)、(6)式代入，得

$$p_x\frac{dp_x}{dx}=C$$

积分，得

$$\int_p^{p_x} p_x\,dp_x=\int_0^x C\,dx$$

式中 p 和 p_x 分别是 $x=0$ 处和 x 处的压强．即

$$\frac{1}{2}(p_x^2-p^2)=Cx$$

边条件为

$$x=L\ 处,\quad p_x=p_0$$

代入，得

$$C=\frac{p_0^2-p^2}{2L}$$

由(6)式，$x=0$ 处的体积流量为

$$V_Q(0)=-\frac{\pi r^4}{8\eta}\left(\frac{dp_x}{dx}\right)_{x=0}=-\frac{\pi r^4}{8\eta}\left(\frac{C}{p_x}\right)_{x=0}=\frac{\pi r^4(p^2-p_0^2)}{16\eta Lp} \qquad (7)$$

(7)式的 $V_Q(0)$ 就是(4)式的 V_Q，把(7)式代入(4)式，得

$$-\frac{dp}{p^2-p_0^2}=\frac{\pi r^4}{16\eta LV_0}dt$$

从初态 $t=0, p=p_b$ 到终态 $t=\Delta t, p=p_e$ 作积分，得

$$\int_{p_b}^{p_e}\frac{1}{2p_0}\left(\frac{1}{p+p_0}-\frac{1}{p-p_0}\right)dp=\int_0^{\Delta t}\frac{\pi r^4}{16\eta LV_0}\,dt$$

即

$$\eta=\frac{\pi r^4 p_0\Delta t}{8LV_0\ln\dfrac{(p_e+p_0)(p_b-p_0)}{(p_b+p_0)(p_e-p_0)}}$$

这就是气体粘滞系数 η 的计算公式．

把二氧化碳气体的实验数据代入，得

$$\eta=1.4\times10^{-5}\ \mathrm{N\cdot s/m^2}$$

【题 22】 试证明两杯成分相同而体积和温度不同的液体混合后总体积不变．设该液体的体积随温度(℃)线性地变化，且在混合过程中与外界绝热．

【分析】 线性地变化意即 $V=V_0(1+\beta t)$，式中 V_0 和 V 分别是液体在 0 ℃ 和 t ℃ 的体积，β 是体膨胀系数．因为混合过程与外界绝热，一杯吸热升温膨胀，另一杯放热降温收缩，热量只在两杯液体之间交换．由此，两杯液体的初始温度和质量将决定混合后的温度，从而决定混合后的体积．这样就将混合前和混合后的有关物理量联系了起来．证明过程中必然涉及许多未知量，只要适当归并，耐心地做下去，即可得出结论．

【解】 设混合前两杯液体的体积、温度、质量分别为 V_1、t_1、m_1 和 V_2、t_2、m_2．设两杯液体在 0℃ 的体积分别为 V_{10}，V_{20}，密度均为 d，设混合后两杯液体的体积分别为 V_1'，V_2'，温度为 t℃．

因液体体积随温度(℃)线性地变化，故

$$V=V_0(1+\beta t) \tag{1}$$

用于混合前的两杯液体，为

$$V_1=V_{10}(1+\beta t_1)$$
$$V_2=V_{20}(1+\beta t_2)$$

用于混合后的两杯液体，为

$$V_1'=V_{10}(1+\beta t)$$
$$V_2'=V_{20}(1+\beta t)$$

因混合过程绝热，与外界不交换热量，一杯所吸的热应等于另一杯所放的热．设液体比热为 c，则

$$cm_1(t-t_1)=cm_2(t_2-t)$$

或

$$t=\frac{m_1t_1+m_2t_2}{m_1+m_2} \tag{2}$$

又

$$\begin{cases}m_1=V_{10}d\\ m_2=V_{20}d\end{cases} \tag{3}$$

混合后的体积为(以下运算用到上述(1)、(2)、(3)式)

$$\begin{aligned}V'&=V_1'+V_2'=V_{10}(1+\beta t)+V_{20}(1+\beta t)\\&=V_{10}+V_{20}+\beta(V_{10}+V_{20})t=V_{10}+V_{20}+\beta\frac{(m_1+m_2)}{d}\cdot\frac{(m_1t_1+m_2t_2)}{(m_1+m_2)}\\&=V_{10}+V_{20}+\beta V_{10}t_1+\beta V_{20}t_2=V_{10}(1+\beta t_1)+V_{20}(1+\beta t_2)\\&=V_1+V_2\end{aligned}$$

【题 23】 冬季湖面上的冰经两天的时间，厚度从 20 mm 增为 40 mm，在此期间冰层底部与顶部的平均温差为 8.0 K．设冰的密度为 920 kg/m^3，冰的熔解热为 3.20×10^5 J/kg．试估算冰的热传导率 k．

【分析】 冬季湖面冰层上方空气温度低，冰层下方水的温度高．水通过冰层的热传导，向上方空气不断传输热量，导致水不断结冰，使冰层加厚．理解上述物理过程，本题不难求解．

【解】 设 $t=0$ 时刻冰厚 $h_0=20$ mm，t 时刻冰厚 h，经 $\mathrm{d}t$ 时间冰厚增加 $\mathrm{d}h$，放热量为

$$\mathrm{d}Q = L\,\mathrm{d}m = L\rho S\,\mathrm{d}h$$

式中 L 为冰的熔解热，ρ 为冰的密度，S 为湖面面积．$\mathrm{d}Q$ 通过冰层传送到上方的低温空气中去，近似假设这些热量是在同一时间内传递的，则有

$$\mathrm{d}Q = k\frac{\Delta T}{h}S\,\mathrm{d}t$$

式中 ΔT 是冰的底部与顶部的温差，可用平均值代替．由以上两式，得

$$\left(k\frac{\Delta T}{L\rho}\right)\mathrm{d}t = h\,\mathrm{d}h$$

积分，得

$$k\frac{\Delta T}{L\rho}t = \frac{1}{2}(h^2-h_0^2)$$

即

$$k = \frac{L\rho(h^2-h_0^2)}{2t\Delta T}$$

把 $h=40$ mm，$t=2$ d，以及其他数据代入，得

$$k = 0.13\ \mathrm{W/(m\cdot k)}$$

【题 24】 用同一种物质铸造出质量相同的实心球 A 和立方体 B，将它们加热到 220 ℃，然后都在 20 ℃ 的环境中冷却．设 A 和 B 的热损耗率（单位时间向外散发的热量）均与表面积以及各自与环境的温度差成正比，且比例系数相同．试用 A 在降温过程中的温度 τ_A 来表述 B 在降温过程中的温度 τ_B.

【分析】 由题设，A 或 B 的热损耗率为

$$-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = kS(\tau-\tau_{环})$$

式中 S 和 τ 是 A 或 B 的表面积和温度，$\tau_{环}$ 是环境温度，t 是时间．因 A 或 B 为同种物质且质量 m 相同，故有

$$-\mathrm{d}Q = mc(-\mathrm{d}\tau)$$

式中 c 是比热．于是可知 τ_A 或 τ_B 随时间 t 的变化，消去 t，即可用 τ_A 表述 τ_B.

【解】 A 和 B 的热损耗率为

$$-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = kS(\tau-\tau_{环}) \tag{1}$$

式中 $-\mathrm{d}Q=-\mathrm{d}Q_A$ 或 $-\mathrm{d}Q_B$，是 A 或 B 在 $\mathrm{d}t$ 时间散发的热量，$\tau=\tau_A$ 或 τ_B 是 A 或 B 的温度，$\tau_{环}=20$ ℃ 是环境温度，$S=S_A$ 或 S_B 是 A 或 B 的表面积，k 是共同的比例系数．

A 和 B 是同种物质，具有相同的比热 c，它们的质量也相同，为 m，当 A 或 B 降温 $-\mathrm{d}\tau$ 时，散发的热量 $-\mathrm{d}Q$ 为

$$-\mathrm{d}Q = mc(-\mathrm{d}\tau) \tag{2}$$

由(1)、(2)式消去 $\mathrm{d}Q$，得A或B的温度 τ 随时间 t 的变化为

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau-\tau_{环}}=-\frac{kS}{mc}\mathrm{d}t$$

积分，得

$$\tau-\tau_{环}=(\tau_0-\tau_{环})\mathrm{e}^{-\frac{kS}{mc}t}$$

式中 $\tau_0=220$ ℃ 是A或B的初始温度，$\tau_{环}=20$ ℃ 是环境温度．即

$$\begin{cases}\tau_A-\tau_{环}=(\tau_0-\tau_{环})\mathrm{e}^{-\frac{kS_A}{mc}t}=(\tau_0-\tau_{环})(\mathrm{e}^{-\frac{k}{mc}t})^{S_A}\\ \tau_B-\tau_{环}=(\tau_0-\tau_{环})\mathrm{e}^{-\frac{kS_B}{mc}t}=(\tau_0-\tau_{环})(\mathrm{e}^{-\frac{k}{mc}t})^{S_B}\end{cases}$$

消去 t，得

$$\tau_B-\tau_{环}=(\tau_0-\tau_{环})(\mathrm{e}^{-\frac{k}{mc}t})^{S_B}=(\tau_0-\tau_{环})\left(\frac{\tau_A-\tau_{环}}{\tau_0-\tau_{环}}\right)^{\frac{S_B}{S_A}} \tag{3}$$

设A球半径为 R，B立方体边长为 a，因A和B体积相同，有

$$V=a^3，或\ V=\frac{4}{3}\pi R^3$$

即

$$a=V^{\frac{1}{3}}，或\ R=\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}V}$$

故A或B的表面积分别为

$$S_A=4\pi R^2=4\pi\sqrt[3]{\frac{9}{16\pi^2}V^2}=\sqrt[3]{36\pi}\ V^{\frac{2}{3}}$$

$$S_B=6a^2=6V^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{S_B}{S_A}=\frac{6}{\sqrt[3]{36\pi}}=\frac{6}{4.84}=1.24$$

代入(3)式，得

$$\begin{aligned}\tau_B&=20+200\left(\frac{\tau_A-20}{200}\right)^{1.24}\\&=20+(200)^{-0.24}(\tau_A-20)^{1.24}=20+0.28(\tau_A-20)^{1.24}\ ℃\end{aligned}$$

【题25】 半径为 R_1 的球体内有供能装置，使之成为高温热源．在球体之外包着导热的匀质球壳层A，它的内半径为 R_1，外半径为 R_2，导热系数处处相同，为常量 k．球壳层外是另一均匀热介质．当达到稳定的热传导时，内球温度恒为 T_1，球壳层 A 外的温度恒为 T_2，且 $T_2<T_1$．

1. 试确定球壳层A中温度的径向分布．

2. 试求单位时间内，内球中的供能装置应提供的能量．

【分析】 导热系数等于单位长度上温度相差1℃时，单位时间内通过单位横截面的热量．热传导达到稳定时，单位时间通过 A 中任一球面的热量应与该球面的半径无关．由此即可确定 A 中温度的径向分布，以及内球在单位时间内应提供的能量．

【解】 热传导公式为

$$dQ = -k\left(\frac{dT}{dz}\right)dS\ dt$$

在本题中 z 应为内球或球壳层中任意处的半径，即为

$$dQ = -k\left(\frac{dT}{dr}\right)dS\ dt$$

式中 t 为时间，S 为垂直于径向的横截面积．因此单位时间通过 A 中任一半径为 r 的球面 S_1 的热量为

$$\frac{dQ}{dt} = -k\left(\frac{dT}{dr}\right)S_r = -k\left(\frac{dT}{dr}\right)\cdot 4\pi r^2$$

热传导达到稳定时，$\frac{dQ}{dt}$ 与 r 无关，令

$$\frac{dQ}{dt} = C_0$$

代入上式，得

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)r^2 = -\frac{C_0}{4\pi k} = C$$

式中 C 为另一常量．上式可写为

$$dT = \frac{C}{r^2}\,dr$$

积分，得

$$\int_{T_1}^{T} dT = \int_{R_1}^{r}\frac{C}{r^2}dr$$

或

$$T = T_1 + C\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r}\right),\quad R_1 \leqslant r \leqslant R_2$$

式中 T 是球壳层 r 处的温度．因 $r = R_2$ 处的温度 $T = T_2$，故上式中的常量 C 为

$$C = \frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}(T_2 - T_1) < 0$$

代入，得出球壳层 A 中温度的径向分布为

$$T = T_1 + \frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}(T_2 - T_1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r}\right)$$

此式的其他表述形式为

$$T = T_1 + \frac{R_2(r - R_1)}{(R_2 - R_1)r}(T_2 - T_1)$$

$$T = \frac{R_1(R_2 - r)}{(R_2 - R_1)r}T_1 + \frac{R_2(r - R_1)}{(R_2 - R_1)r}T_2$$

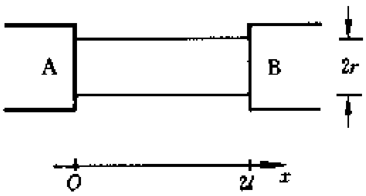
$$T = \frac{1}{R_2 - R_1}\left[R_2R_1(T_1 - T_2)\frac{1}{r} - (R_1T_1 - R_2T_2)\right]$$

以上四式完全等价．

单位时间内，内球供能装置提供的能量为

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=C_0=-4\pi kC=4\pi k\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}(T_1-T_2)>0$$

【题26】 如图,长为 $2l$,半径为 r 的圆柱形保险丝与电路中的两个电阻块A和B连接．设A和B与周围环境具有相同的恒定温度 T_c．设保险丝中通过稳恒电流 I,保险丝已达到热稳定状态．设保险丝中任一正截面上的温度都相同,记为 (T_c+T),不同正截面上的温度不同,若某正截面与A相距为 x,它的温度表为 $T(x)$．设保险丝的电阻率为 ρ,设保险丝沿其长度方向(即 x 方向)的热传导率为 λ,设保险丝单位时间通过其侧面单位面积向外界散发的热量为 CT,其中 C 为常量．



热图 3－26－1

试求保险丝上的温度分布,即求 $T(x)$ 函数．试就 $l\gg\left(\frac{\lambda r}{2C}\right)^{\frac{1}{2}}$ 的所谓长保险丝情形,计算能使长保险丝熔断的电流强度,设保险丝材料的熔点为 T_m．

【分析】 在热稳定条件下,保险丝中因有电流通过所产生的焦耳热,将通过保险丝的侧面和两个端面向外界和向A、B稳定地散发,保险丝内部也有稳定的热传导,同时,在保险丝各处应形成稳定的温度分布(不难猜想,保险丝中间 $x=l$ 处的温度最高,向两侧对称地减少,两端面的温度与A和B相同,为 T_c)．由于保险丝内部的热传导规律,保险丝通过侧面向外散热的规律,以及电流产生焦耳热的规律均为已知,不妨在保险丝中任取一厚为 $\mathrm{d}x$ 的薄层,由稳定条件,流入与流出该薄层的热量之和应为零,于是可得出该薄层的温度 $T(x)$ 所遵循的方程．解方程,用边条件定积分常数,即可求出温度分布 $T(x)$．

当保险丝中最高的温度达到熔点 T_m 时,保险丝便将熔断．

【解】 如图,取 x 轴沿保险丝长度方向,原点 O 在与A交界的左端面．在保险丝中任取从 x 到 $(x+\mathrm{d}x)$ 的一薄层,截面积为 πr^2．其中因有电流通过所产生的焦耳热为

$$Q_1=I^2\rho\frac{\mathrm{d}x}{\pi r^2}$$

式中 ρ 是保险丝的电阻率．因保险丝沿长度方向的热传导率为 λ,故从薄层左端面 x 处流入薄层的热量为

$$Q_2=-\lambda\pi r^2\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$$

式中 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(T+T_c)$,$(T+T_c)$ 是 x 处的温度,T 即 $T(x)$ 从薄层右端面 $(x+\mathrm{d}x)$ 处流出的热量为

$$Q_3=-\lambda\pi r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}T(x+\mathrm{d}x)$$

因保险丝通过侧面单位时间从单位面积向外界散发的热量为 CT,故薄层从侧面流失的热量为

$$Q_4=(2\pi r\,\mathrm{d}x)CT$$

在热稳定时,流入与流出薄层的热量相等,即有

$$Q_1+Q_2=Q_3+Q_4$$

将各量代入,得

$$\frac{I^2\rho}{\pi r^2}\mathrm{d}x-\lambda\pi r^2\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}=-\lambda\pi r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(T+\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right)+2\pi rCT\,\mathrm{d}x$$

$$=-\lambda\pi r^2\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x\right)+2\pi rCT\,\mathrm{d}x$$

即

$$\frac{I^2\rho}{\pi r^2}=-\lambda\pi r^2\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}+2\pi r\,CT$$

或

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}=\frac{2C}{\lambda r}\left(T-\frac{I^2\rho}{2C\,\pi^2r^3}\right)$$

这就是保险丝中温度分布的微分方程．为解此方程,引入辅助量,令

$$\alpha^2=\frac{2C}{\lambda r}$$

$$\beta=\frac{I^2\rho}{2C\pi^2r^3}$$

令

$$y=T-\beta$$

则上述微分方程化为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\alpha^2y$$

解出

$$y=a\mathrm{e}^{\alpha x}+b\mathrm{e}^{-\alpha x}$$

式中 a 和 b 是两个待定的积分常量．由边条件

$$\begin{cases}x=0\text{处}, & T=0\\ x=2l\text{处}, & T=0\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}-\beta=a+b\\ -\beta=a\mathrm{e}^{2\alpha l}+b\mathrm{e}^{-2\alpha l}\end{cases}$$

故

$$\begin{cases}a=-\dfrac{\mathrm{e}^{-2\alpha l}}{1+\mathrm{c}^{-2\alpha l}}\beta\\[2ex] b=-\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-2\alpha l}}\beta\end{cases}$$

代入 y 表达式,得

$$y=-\frac{\mathrm{e}^{-2\alpha l}}{1+\mathrm{e}^{-2\alpha l}}\beta\mathrm{e}^{\alpha x}+\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-2\alpha l}}\beta\mathrm{e}^{-\alpha x}=T-\beta$$

即

$$T=\beta\left\{1-\frac{\mathrm{e}^{-\alpha l}}{1+\mathrm{e}^{-2\alpha l}}\left[\mathrm{e}^{\alpha(x-l)}+\mathrm{e}^{-\alpha(x-l)}\right]\right\}$$

引入双曲余弦函数

$$\cosh(z) = \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z})$$

可将上述 $T(x)$ 函数表为

$$T(x) = \beta\left\{1 - \frac{2e^{-\alpha l}}{1 + e^{-2\alpha l}}\cosh[\alpha(x - l)]\right\}$$

这就是保险丝中的温度分布[保险丝中任意 x 处的温度为 $T_c + T(x)$].

因双曲余弦函数 $\cosh(z)$ 是一个偶函数,故 $T(x)$ 曲线(即保险丝中的温度分布)在 $x = l$ 两侧具有对称性. 因在 $x = l$ 处, $\cosh[\alpha(x - l)] = 1$ 为极小值,故由上式在 $x = l$ 处, $T(x)$ 取极大值,即

$$T_{\max} = T(x = l) = \beta\left(1 - \frac{2e^{-\alpha l}}{1 + e^{-2\alpha l}}\right)$$

由题设,若

$$l \gg \left(\frac{\lambda r}{2C}\right)^{\frac{1}{2}}$$

即若

$$l \gg \frac{1}{\alpha} \text{ 或 } \alpha l \gg 1$$

则

$$T_{\max} \approx \beta$$

当温度的极大值达到

$$T_{\max} = T_m - T_c$$

时,即当保险丝 $x = l$ 处的温度达到熔点 T_m 时,保险丝就会在 $x = l$ 处熔断. 设相应的电流强度为 I_m,则由

$$T_m = T_{\max} + T_c = \beta + T_c = \frac{I_m^2\rho}{2C\pi^2 r^3} + T_c$$

得

$$I_m = \sqrt{\frac{2C\pi^2 r^3}{\rho}(T_m - T_c)}$$

【题 27】 沿 x 轴在 $x = 0$ 到 $x = L$ 之间放一段长为 L 截面积为 S 的均匀柱体,它与外界绝热. $t = 0$ 时, $x = 0$ 处的温度为 T_1, $x = L$ 处的温度为 T_2,且 $T_1 > T_2$,其间温度 T 线性地分布. 设柱体的热传导率 k,比热 c 及密度 ρ 均为常量,各处的热膨胀均可略. 试导出 t 时刻 x 处温度 $T(x,t)$ 的积分表达式.

【分析】 柱体各部分因相互间的热传导而使温度随时间变化,函数 $T(x,t)$ 描绘了这种变化. 把柱体沿 x 轴分割成一系列小段,在 dt 时间内,从 x 到 $(x + dx)$ 的小段从左侧吸收热量,并向右侧放出热量,吸热量多于放热量,使其温度升高. 据此,建立 $T(x,t)$ 遵循的偏微分方程,其积分解即为所求.

【解】 在柱体中取从 x 到 $(x + dx)$ 的一小段,在 t 到 $(t + dt)$ 时间内,该小段从左侧(高温一侧)

吸收的热量为

$$dQ_1 = -k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_x S dt = -kT_x'(x,t)S dt$$

式中 S 为柱体的截面积．同时，该小段向右侧（低温一侧）放出的热量为

$$dQ_2 = -k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx} S dt = -kT_x'(x+dx,t)S dt$$

总的吸热量为

$$\begin{aligned} dQ &= dQ_1 - dQ_2 = -k[T_x'(x,t) - T_x'(x+dx,t)]S dt \\ &= k[T_x'(x+dx,t) - T_x'(x,t)]S dt \end{aligned}$$

吸收的热量使 x 到 $(x+dx)$ 小段在 t 到 $(t+dt)$ 时间升温 dT，即

$$dQ = c\rho(S dx)dT$$

由以上两式，得

$$c\rho dT\, dx = k[T_x'(x+dx,t) - T_x'(x,t)]dt$$

即

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)_{x\text{不变}} = \frac{k}{c\rho}\cdot\frac{T_x'(x+dx,t) - T_x'(x,t)}{dx} = \frac{k}{c\rho}T''_{xx}$$

上式左边是 T 对 t 的偏微商，上式右边的 T''_{xx} 是 T 对 x 的二阶偏微商．即

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ a^2 = \dfrac{k}{c\rho} \end{cases}$$

这就是一维热传导的偏微分方程．

上述偏微分方程的解与 $T(x,t)$ 的初始分布 $T(x,t=0)$ 有关．由题设，初始分布为

$$T(x,0) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{L}x$$

$T(x,t)$ 的积分解为

$$T(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^L T(x',0)e^{-(x'-x)^2/4a^2t}dx'$$

【题 28】 在温度为 T 的恒温热源中有一导热容器，它被隔板分成体积均为 V 的左、右两部分，隔板上有一小孔，面积为 A，开始时（$t=0$），左方装有摩尔质量为 μ_1 的 ν mol 理想气体，右方装有另一种摩尔质量为 $\mu_2(\mu_2 \neq \mu_1)$ 的 νmol 理想气体．由于孔很小，虽然板两侧不断有分子交换，但仍可假定在任一时刻系统都处于平衡态．

1. 试求隔板左、右两侧气体的密度 ρ_L、ρ_R 各自随时间 t 的变化关系．

2. 试计算最后达到 $\rho_L = \rho_R$ 时，气体系统的熵的增量．

【分析】 开始时（$t=0$），隔板两侧分别装有两种不同的理想气体，因体积 V 和摩尔数 ν 相同，两种气体分子的数密度相同且可知．小孔 A 使隔板两侧的不同分子能通过扩散互相交换，逐渐混杂起来．对于每一种气体分子而言，都是从高密度向低密度扩散．为计算由此引起的分子数密

度的变化，可以认为向上、下、左、右、前、后运动的分子数各占总分子数的$\frac{1}{6}$，而且都以平均速率$\bar{v}$运动．这正是用气体分子运动论解释扩散等输运现象的典型做法．

最后必定是两种气体都均匀分布在隔板左、右体积为$2V$的空间内．利用理想气体的熵表达式即可算出从初态到终态由扩散引起的熵的增量．

在计算中应始终注意等温条件．

【解】 $t=0$时，第一种分子在左方的数密度和第二种分子在右方的数密度相同，均为

$$n_0=\frac{\nu N_A}{V} \tag{1}$$

式中N_A为阿伏伽德罗常量．

考虑第一种分子．设任意t时刻，在左方和右方的第一种分子的数密度分别为$n_{1L}(t)$和$n_{1R}(t)$，则

$$n_{1L}(t)+n_{1R}(t)=n_0 \tag{2}$$

从t时刻经过$\mathrm{d}t$时间后，左方第一种分子数密度的减少量$-\mathrm{d}n_{1L}(t)$为

$$-\mathrm{d}n_{1L}(t)=\frac{1}{6}n_{1L}(t)\bar{v}_1A\mathrm{d}t-\frac{1}{6}n_{1R}(t)\bar{v}_1A\mathrm{d}t \tag{3}$$

式中右第一项是在左方的第一种分子因热运动通过小孔A扩散到右方的分子数，右第二项则是在右方的第一种分子因热运动通过小孔A扩散到左方的分子数．其中已假设向上、下、左、右、前、后运动的分子数各占总分子数的$\frac{1}{6}$，并且假设分子均以平均速率$\bar{v}_1$运动．$\bar{v}_1$为

$$\bar{v}_1=\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu_1}} \tag{4}$$

由(2)、(3)式消去$n_{1R}(t)$，得

$$-\mathrm{d}n_{1L}(t)=\frac{1}{6}\bar{v}_1A\ \mathrm{d}t[2n_{1L}(t)-n_0]$$

即

$$\frac{\mathrm{d}n_{1L}(t)}{2n_{1L}(t)-n_0}=-\frac{1}{6}\bar{v}_1A\ \mathrm{d}t$$

从$t=0$到$t=t$积分，利用$n_{1L}(0)=n_0$，得

$$\ln\left[\frac{2n_{1L}(t)-n_0}{n_0}\right]=-\frac{1}{3}\bar{v}_1At$$

故

$$\begin{cases}n_{1L}(t)=\frac{1}{2}n_0(1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}\bar{v}_1At})\\ n_{1R}(t)=\frac{1}{2}n_0(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}\bar{v}_1At})\end{cases} \tag{5}$$

其中第二式用到了(2)式．

对于第二种分子，设t时刻，在左方和右方的第二种分子的数密度分别为$n_{2L}(t)$和$n_{2R}(t)$，则可同样得出

$$\begin{cases} n_{2L}(t)=\dfrac{1}{2}n_0(1-e^{-\frac{1}{3}\bar{v}_2At}) \\ n_{2R}(t)=\dfrac{1}{2}n_0(1+e^{-\frac{1}{3}\bar{v}_2At}) \end{cases} \tag{6}$$

式中 $\bar{v}_2$ 是第二种分子的平均速率，为

$$\bar{v}_2=\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu_2}} \tag{7}$$

因此，在 t 时刻，左方和右方的气体质量密度分别为

$$\begin{cases} \rho_L(t)=m_1n_{1L}(t)+m_2n_{2L}(t) \\ \rho_R(t)=m_1n_{1R}(t)+m_2n_{2R}(t) \end{cases} \tag{8}$$

式中 m_1 和 m_2 分别为两种分子的质量．把(5)、(6)式代入(8)式，得

$$\begin{cases} \rho_L(t)=\dfrac{1}{2}m_1n_0(1+e^{-\frac{1}{3}\bar{v}_1At})+\dfrac{1}{2}m_2n_0(1-e^{-\frac{1}{3}\bar{v}_2At}) \\ \rho_R(t)=\dfrac{1}{2}m_1n_0(1-e^{-\frac{1}{3}\bar{v}_1At})+\dfrac{1}{2}m_2n_0(1+e^{-\frac{1}{3}\bar{v}_2At}) \end{cases} \tag{9}$$

由(1)式，

$$\begin{cases} m_1n_0=\dfrac{m_1\nu N_A}{V}=\dfrac{\mu_1\nu}{V} \\ m_2n_0=\dfrac{m_2\nu N_A}{V}=\dfrac{\mu_2\nu}{V} \end{cases} \tag{10}$$

把(10)、(4)、(7)式代入(9)式，得

$$\begin{cases} \rho_L(t)=\dfrac{\nu}{2V}\left[\mu_1+\mu_2+\mu_1\exp\left(-\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu_1}}At\right)-\mu_2\exp\left(-\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu_2}}At\right)\right] \\ \rho_R(t)=\dfrac{\nu}{2V}\left[\mu_1+\mu_2-\mu_1\exp\left(-\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu_1}}At\right)+\mu_2\exp\left(-\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu_2}}At\right)\right] \end{cases} \tag{11}$$

经过足够长的时间后，即当 $t=\infty$ 时，由(5)、(6)、(11)式，得

$$n_{1L}(\infty)=n_{1R}(\infty),\quad n_{2L}(\infty)=n_{2R}(\infty),\quad \rho_L(\infty)=\rho_R(\infty)$$

即两种气体各自均匀分布在体积为 $2V$ 的全部容器内．

理想气体的熵表达式为

$$S=\nu C_V\ln T+\nu R\ln V+C$$

第一种气体从体积 V 扩散到 $2V$（温度 T 不变），它的熵增量为

$$\Delta S_1=\nu R\ln 2V-\nu R\ln V=\nu R\ln 2$$

同理，第二种气体从 V 扩散到 $2V$（温度 T 不变），它的熵增量为

$$\Delta S_2=\nu R\ln 2$$

因此，系统总的熵增量为

$$\Delta S=\Delta S_1+\Delta S_2=2\nu R\ln 2$$

【题 29】 利用布朗运动的实验可以粗略测量阿伏伽德罗常数 N_A．

作布朗运动的微粒系统可以看作是在计及浮力的重力场中达到平衡态的巨分子系统，其数

密度遵循玻尔兹曼分布律．设在某实验中，半径 $r=2.12\times10^{-7}$ m，质量密度 $\rho=1.194\times10^{3}$ kg/m^3 的球形布朗粒子，悬浮在密度 $\rho_0=1.0\times10^{3}$ kg/m^3、温度 $T=273$ K 的液体中．在高度相距为 $\Delta h=3.0\times10^{-5}$ m 的两处，测得布朗粒子的数密度之比为 $n_1:n_2=2.08$．

试计算 N_A．

【分析】 玻尔兹曼分布是在势场中物质系统的粒子数按能量的分布规律．在本题中，重力与浮力的合力构成了势场，在其中，布朗粒子的数密度随高度的分布由玻尔兹曼分布给出．由不同高度处测出的 n_1 和 n_2 及有关数据可得出玻尔兹曼常量 k，再由 $k=\dfrac{R}{N_A}$ 即可得出 N_A（R 是气体常数）．这是比较粗略地测阿伏伽德罗常量 N_A 的一种方法．

【解】 布朗粒子的质量为

$$m=\frac{4}{3}\pi r^2\rho$$

它受到重力 mg（向下）和液体浮力 $mg\dfrac{\rho_0}{\rho}$（向上）的作用，合力向下，为

$$F=mg-mg\frac{\rho_0}{\rho}=mg\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)$$

取 z 轴垂直向上，规定布朗粒子在由上述合力构成的力场中势能 $\varphi=0$ 处，为坐标原点 $z=0$．则布朗粒子在任意 z 处的势能为

$$\varphi=mg\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)z$$

由玻尔兹曼分布，布朗粒子的数密度 n 随高度 z 的变化规律为

$$n=n_0\mathrm{e}^{-mg\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)z/kT}$$

式中 n_0 为 $z=0$ 处的数密度．设在 z_1 和 z_2 处测出的数密度分别为 n_1 和 n_2，则有

$$\frac{n_1}{n_2}=\mathrm{e}^{-mg\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)(z_1-z_2)/kT}$$

因

$$\frac{n_1}{n_2}=2.08>1$$

由上两式可知 (z_1-z_2) 应为负值，即

$$z_2-z_1=\Delta h$$

代入，得

$$\frac{n_1}{n_2}=\mathrm{e}^{4\pi r^3 g(\rho-\rho_0)\Delta h/3kT}$$

式中已用到 $m=\dfrac{4}{3}\pi r^3\rho$．由上式解出玻尔兹曼常量 k 为

$$k=\frac{4\pi r^3 g(\rho-\rho_0)\Delta h}{3T\ln\dfrac{n_1}{n_2}}$$

因

$$k=\frac{R}{N_A}$$

式中 R 为气体常量，故

$$N_A=\frac{3RT\ln\frac{n_1}{n_2}}{4\pi r^3 g(\rho-\rho_0)\Delta h}=7.29\times10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$$

所得 N_A 的数量级正确，但数值相当不精确．

【题 30】 流体中悬浮小颗粒的布朗运动尽管很复杂，但它在不断被碰撞中像一个大分子一样按能量均分定理获得了自己的运动能量，这就为讨论它的位移方均量提供了基础．

为讨论方便，考虑在 x 方向的一维布朗运动．小颗粒在 x 方向的碰撞净作用力 $F(t)$ 和阻尼力 $f(t)$ 的作用下运动．若 $t=0$ 时刻小颗粒处于 $x=0$ 位置，那么可以肯定，在尔后任何时刻 t 都有 $\overline{x(t)}=0$，但 $\overline{x^2(t)}$ 必不为零．由于热平衡是动态平衡，$F(t)$ 将在零值左右波动，但必有 $\overline{F(t)}=0$．设小颗粒是半径为 R 的球体，它所受流体的粘滞阻力为 $f(t)=-6\pi R\eta\, v_x$，其中 v_x 是小颗粒在 x 方向的运动速度，η 是流体的粘滞系数．设实验中所采用的布朗运动小颗粒的质量 $m\ll6\pi R\eta$．

1．试用牛顿第二定律，证明在温度为 T 时有很好的近似解

$$\overline{x^2(t)}=\frac{kT}{3\pi R\eta}t$$

式中 k 为玻尔兹曼常量．

2．取 $R=5.0\times10^{-6}$ m 的细小油珠，测量它悬浮在氮气中时沿水平方向 x 的布朗运动．每隔 5 s 测量一次油珠的 x 坐标，每两个相邻的 x 值之差记为 Δx．实验中测出 695 个 Δx 值，按 Δx 的大小分为 27 组，每一组中的 Δx 相同，每一组中 Δx 的个数记为 n，详如下表．

$\Delta x/(10^{-6}\ \mathrm{m})$	−13	−12	−11	−10	−9	−8	−7	−6
n	0	2	4	5	10	14	22	26
$\Delta x/(10^{-6}\ \mathrm{m})$	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2
n	29	35	45	49	63	75	60	54
$\Delta x/(10^{-6}\ \mathrm{m})$	3	4	5	6	7	8	9	10
n	45	37	31	27	20	16	9	8
$\Delta x/(10^{-6}\ \mathrm{m})$	11	12	13					
n	6	3	0					

实验是在 15 ℃下进行的，此时氮气的粘滞系数 $\eta=1.73\times10^{-5}$ Pa·s.

试计算玻尔兹曼常量 k 的值．

【分析】 布朗运动是悬浮在液体或气体中的宏观小颗粒所作的不停顿的无规则运动．它是由于小颗粒受周围分子碰撞的不均衡而引起的一种起伏运动．

本题是一维布朗运动，小颗粒受 $F(t)$ 和 $f(t)$ 作用，由牛顿第二定律可列出其运动方程．为了求小颗粒位移的方均值 $\overline{x^2}$，可将运动方程的形式适当改写，然后取平均值．利用 $\overline{x}=0$，$\overline{F}=0$，

$\overline{x^2}\neq 0$,以及小颗粒按能量均分定律获得运动能量(即小颗粒的每一个自由度都具有相同的平均动能$\frac{1}{2}kT$,由此,$\frac{1}{2}m\overline{v_x^2}=\frac{1}{2}m\overline{\dot{x}^2}=\frac{1}{2}kT$)的条件,即可证明$\overline{x^2}$的公式．

由实验测出的 695 个 Δx 值,可以算出$\overline{x^2}$值,再利用已经证明的$\overline{x^2}$公式即可计算玻尔兹曼常量 k 的值．

【解】 1. 小颗粒 m 作一维运动,受 $F(t)$及 $f(t)$的作用,由牛顿第二定律,利用

$$f(t)=-6\pi R\eta\, v_x$$

得出小颗粒的运动方程为

$$m\ddot{x}=-6\pi R\eta\,\dot{x}+F(t)$$

乘以 x,得

$$mx\ddot{x}=-6\pi R\eta\, x\dot{x}+xF(t)$$

利用

$$\begin{cases} x\dot{x}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}(x^2)}{\mathrm{d}t} \\ x\ddot{x}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\dot{x})-\dot{x}^2=\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}^2(x^2)}{\mathrm{d}t^2}-\dot{x}^2 \end{cases}$$

把运动方程改写为

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(mx^2)-m\dot{x}^2=-3\pi R\eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2)+xF(t)$$

取平均值,得

$$\frac{1}{2}\overline{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(mx^2)}-\overline{m\dot{x}^2}=-3\pi R\eta\,\overline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2)}+\overline{xF(t)}$$

即

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(m\overline{x^2})-m\overline{\dot{x}^2}=-3\pi R\eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\overline{x^2})+\overline{x}\cdot\overline{F(t)}$$

由于 x 与$F(t)$彼此独立,故有$\overline{xF(t)}=\overline{x}\cdot\overline{F(t)}$. 在上式中

$$\overline{x}=0$$

$$\overline{F(t)}=0$$

又因小颗粒的运动遵循能量均分定律,故

$$\frac{1}{2}m\overline{\dot{x}^2}=\frac{1}{2}kT$$

把以上三式代入运动方程,得

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\overline{x^2})+\frac{6\pi R\eta}{m}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\overline{x^2})-\frac{2kT}{m}=0$$

这就是由牛顿第二定律得出的小颗粒位移方均值$\overline{x^2}$所遵循的微分方程．它相当于下述形式,即

$$\ddot{z}+\alpha\dot{z}-\beta=0$$

式中

$$z=\overline{x^2},\quad \alpha=\frac{6\pi R\eta}{m},\quad \beta=\frac{2kT}{m}$$

其中 α 和 β 为常量．此微分方程的通解为

$$x=\frac{\beta}{\alpha}t+C_1e^{-\alpha t}+C_2$$

故$\overline{x^2}$的解为

$$\overline{x^2}=\frac{kT}{3\pi R\eta}t+C_1e^{-\frac{6\pi R\eta}{m}t}+C_2$$

因 $t=0$ 时，$\overline{x^2}=0$，故积分常量

$$C_2=-C_1$$

代入，得

$$\overline{x^2}=\frac{kT}{3\pi R\eta}t+C_1(e^{-\frac{6\pi R\eta}{m}t}-1)$$

因题设 $m\ll 6\pi R\eta$，故上式中的指数项很快衰减，可略．于是

$$\overline{x^2}=\frac{kT}{3\pi R\eta}t-C_1$$

但在 t 接近零时，仍要求$\overline{x^2}$接近于零，故 C_1 应为小量，可略．最后得出

$$\overline{x^2}=\frac{kT}{3\pi R\eta}t$$

2．由$\overline{x^2}$的，利用实验数据，有

$$\begin{aligned}\overline{x^2}&=\frac{\sum n_i(\Delta x_i)^2}{\sum n_i}\\&=[0\times(-13)^2+2\times(-12)^2+4\times(-11)^2+5\times(-10)^2+10\times(-9)^2+14\times\\&(-8)^2+22\times(-7)^2+26\times(-6)^2+29\times(-5)^2+35\times(-4)^2+45\times(-3)^2\\&+49\times(-2)^2+63\times(-1)^2+75\times0^2+60\times1^2+54\times2^2+45\times3^2+37\times4^2+\\&31\times5^2+27\times6^2+20\times7^2+16\times8^2+9\times9^2+8\times10^2+6\times11^2+3\times12^2+0\times\\&13^2]/[0+2+4+5+10+14+22+26+29+35+45+49+63+75+60+54+\\&45+37+31+27+20+16+9+8+6+3+0]=21.08\times10^{-12}\mathrm{m}^2\end{aligned}$$

故玻尔兹曼常量 k 为

$$k=\frac{3\pi R\eta}{Tt}\overline{x^2}$$

把 $R=5.0\times10^{-8}$ m，$\eta=1.73\times10^{-5}$ Pa·s，$T=273.15+15=288.15$ K，$t=5$ s，$\overline{x^2}=21.08\times10^{-12}\mathrm{m}^2$等数据代入，得

$$k=1.19\times10^{-23}\ \mathrm{J/K}$$

大家知道，k 的精确值为 $k=1.380662\times10^{-23}$ J/K，可见上述布朗运动的实验结果尚嫌粗略，但数量级是对的．

第四章　范德瓦耳斯气体　液体　固体　相变

【题1】 试求 1 mol 范德瓦耳斯气体由温度 T_1,体积 V_1 自由膨胀到体积 V_2 时熵的增量．设气体的 C_V, a, b 均为已知的常量．

【分析】 为了计算熵的增量,需要知道初态和终态的状态参量,现已知 T_1, V_1 和 V_2,问题在于未知的 T_2. 由于从初态到终态经历的自由膨胀是非静态不可逆过程,无法写出相应的过程方程并由此求 T_2. 然而,自由膨胀意味着在膨胀过程中不受约束,无阻碍,完全是气体分子热运动的结果,所以既不对外作功,也不吸热．换言之,自由膨胀的特点是气体的内能不变,即 $U(T,V)=$常量．因此,可以设计一个内能不变的准静态可逆过程来连接同样的初态和终态．这个可逆过程的方程 $T(V)$可由 $U(T,V)=$常量以及范氏气体的状态方程得出,由此即可求出 T_2. 于是问题迎刃而解．

补充两点:1. 设计的可逆过程只要求内能不变,不要求对外不作功和不吸热,所以显然它并不描述自由膨胀,只是连接同样的初态和终态．

2. 如果是理想气体,因内能 $U=U(T)$,内能不变,则温度不变,可设计可逆的等温膨胀过程来连接自由膨胀的初态和终态．但本题涉及的是范氏气体,因 $U=U(V,T)$,内能不变并不意味着温度一定不变,所以设计的连接自由膨胀初态和终态的可逆过程并非简单的可逆等温膨胀过程．

【解】 设终态温度为 T_2. 因由初态(T_1, V_1)经自由膨胀到达终态(T_2, V_2),内能不变,故设计一个连接同样初态和终态的可逆过程,在此过程中内能不变,即

$$U(T,V)=\text{常量} \tag{1}$$

范氏气体的状态方程为

$$p=\frac{RT}{V-b}-\frac{a}{V^2} \tag{2}$$

利用内能的微分表达式,以及由热学第二定律导出的内能与状态方程的关系,有

$$\mathrm{d}U=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T+\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \mathrm{d}V=C_V\,\mathrm{d}T+\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \mathrm{d}V \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T=T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V-p \tag{4}$$

由(1)、(2)、(3)、(4)式可得出可逆过程的过程方程 $T(V)$及终态的 T_2 如下．把(2)式代入(4)式,得

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T=\frac{a}{V^2}$$

把上式代入(3)式,得

$$\mathrm{d}U=C_V\,\mathrm{d}T+\frac{a}{V^2}\mathrm{d}V$$

由(1)式

$$dU=0$$

由以上两式,得

$$C_V\,dT+\frac{a}{V^2}dV=0 \tag{5}$$

积分,得

$$T=T_1+\frac{a}{C_V}\left(\frac{1}{V}-\frac{1}{V_1}\right)$$

这就是可逆过程的过程方程．取任意状态的(T,V)为终态的(T_2,V_2),得

$$T_2=T_1+\frac{a}{C_V}\left(\frac{1}{V_2}-\frac{1}{V_1}\right) \tag{6}$$

由初态经自由膨胀到达终态的熵的增量,与经上述可逆过程到达同一终态的熵的增量相同,为

$$\Delta S=\int_{初态}^{终态}dS=\int_{初态}^{终态}\frac{dQ}{T}$$

在该可逆过程中,内能不变,$\Delta U=0$,故 $dQ=dW=p\,dV$,代入,得

$$\Delta S=\int_{初态}^{终态}\frac{p\,dV}{T}$$

把(2)式代入,得

$$\Delta S=\int_{初态}^{终态}\left(\frac{R}{V-b}-\frac{a}{TV^2}\right)dV$$

由(5)式,

$$-\frac{a}{V^2}dV=C_V\,dT$$

代入,得

$$\Delta S=\int_{V_1}^{V_2}\frac{R}{V-b}dV+\int_{T_1}^{T_2}C_V\frac{dT}{T}=R\ln\frac{V_2-b}{V_1-b}+C_V\ln\frac{T_2}{T_1}$$

把(6)式的 T_2 代入,得

$$\Delta S=R\ln\frac{V_2-b}{V_1-b}+C_V\ln\left[1+\frac{a}{C_VT_1}\left(\frac{1}{V_2}-\frac{1}{V_1}\right)\right]$$

【题 2】 1 mol氧气在节流过程中体积由高压一边的 4.0×10^{-3} m^3 增大到低压一边的 1.2×10^{-2} m^3. 已知氧气为范德瓦耳斯气体,范氏常量为 $a=0.138$ N·m^4/mol^2, $b=3.2\times10^{-5}$ m^3/mol,摩尔定体热容量恒定,为 $C_V=20.8$ J/(mol·K). 试计算节流过程前后氧气的温度变化．

【分析】 节流过程亦称焦耳－汤姆孙过程,气体从压强较大的空间经多孔塞绝热膨胀到压强较小的空间,多孔塞的作用是在其两侧维持恒定的压强差．节流过程的特点是过程中焓 $H=U+pV$ 保持不变,为等焓过程．气体经节流后,一般温度会降低,从而提供了一种致冷的方法．同时表明,真实气体与理想气体模型有差异,因为理想气体经节流过程后温度是不变的．通过本题的计算应加深上述认识．

节流过程等焓，给出了 U,p,V 的关系．结合范氏方程，可给出 U,T,V 的关系．利用由内能微分表达式和内能与状态方程(范氏方程)的关系可得出 $U(T,V)$．综上，可得出用(T,V)表示的范氏气体经节流过程的过程方程，于是温度变化可求．

【解】 节流过程是等焓过程，故有

$$H_2=H_1$$

或

$$U_2+p_2V_2=U_1+p_1V_1$$

即

$$p_2V_2-p_1V_1=U_1-U_2 \tag{1}$$

式中的下标 1 和 2 分别表示膨胀前和膨胀后的物理量．

范氏气体的状态方程为

$$\left(p+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT \tag{2}$$

即

$$p=\frac{RT}{V-b}-\frac{a}{V^2}$$

把(2)式代入(1)式，消去 p_1 和 p_2，得

$$\left(\frac{RV_2T_2}{V_2-b}-\frac{RV_1T_1}{V_1-b}\right)-\left(\frac{a}{V_2}-\frac{a}{V_1}\right)=U_1-U_2$$

由题给数据，V_1 和 $V_2\gg b$，上式简化为

$$R(T_2-T_1)-a\left(\frac{1}{V_2}-\frac{1}{V_1}\right)=U_1-U_2 \tag{3}$$

把范氏气体的内能表为(T,V)的函数，即

$$U=U(T,V)$$

其微分式为

$$\mathrm{d}U=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V\mathrm{d}T+\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\mathrm{d}V=C_V\mathrm{d}T+\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\mathrm{d}V \tag{4}$$

由热力学第二定律导出内能与状态方程之间有下述关系

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T=T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V-p \tag{5}$$

由范氏方程(2)式，得

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V=\frac{R}{V-b} \tag{6}$$

把(6)式代入(5)式，得

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T=\frac{RT}{V-b}-p=\frac{a}{V^2} \tag{7}$$

再把(7)式代入(4)式，得

$$\mathrm{d}U=C_V\mathrm{d}T+\frac{a}{V^2}\,\mathrm{d}V$$

积分，得

$$U = U_0 + C_V T - \frac{a}{V} \tag{8}$$

此即范氏气体的 $U(T, V)$，于是

$$U_1 - U_2 = C_V(T_1 - T_2) - \left(\frac{a}{V_1} - \frac{a}{V_2}\right)$$

代入(3)式，得

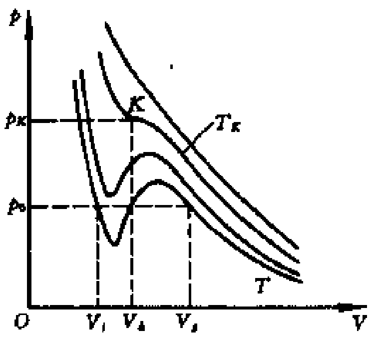
$$(R + C_V)(T_2 - T_1) = 2a\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right)$$

故

$$T_2 - T_1 = \frac{2a}{R + C_V}\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right) = -1.6\ \mathrm{K}$$

可见，在题设条件下范氏气体氧气经节流膨胀后温度降低了．

【题 3】 一定量的乙醚封装在玻璃管内，一部分呈液态，另一部分呈气态，管内无其他杂质．若管内体积恰好为这些乙醚的临界体积，那么在缓慢加热到临界温度时，因气、液两相不再有差别而使液面消失，这就是临界现象的演示实验．假设 1mol 乙醚的状态方程为 $\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$，即为范德瓦耳斯方程，如图所示．



热图 4-3-1

1. 已知乙醚的摩尔临界体积为 V_K，在温度为 T，压强为饱和蒸汽压时，气相和液相的摩尔体积为 V_g 和 V_l．试确定在该温度时玻璃管中气相和液相各占总体积的百分比 B_g 和 B_l．

2. 在 $V_g \gg V_l$ 的条件下，试用 a、b、T 来表述 V_l．

3. 若在 20 ℃ 封装乙醚，那么应取 B_l 为何值？已知乙醚临界点的 $T_K = 466.95$ K，$p_K = 34.60$ atm．

【分析】 范氏气体的等温线如图中实线所示，实际气体的等温线如图中平直虚线所示，实线被平直虚线分割的两块的面积相同．以温度为 T 的等温线为例，摩尔体积为 V_g 时为气相，再压缩便开始液化，V_l 时为液相，V_g 与 V_l 之间两相共存．图中 K 点为临界点，是气、液两相平衡共存的临界状态，这时液体密度和相应饱和蒸汽的密度相等，其间的分界面消失．T_K、p_K、V_K 称为临界温度、临界压强和临界摩尔体积．因此，如本题为了通过等体加温达到临界状态，需使总体积为 V_K．

【解】 1. 取 1 mol 乙醚，其等温曲线如上图．为演示临界现象，总体积应为 V_K，以便随着温度的升高，等体线能通过临界点 K．设温度为 T 时，气相和液相的摩尔数分别为 $\alpha(T)$ 和 $\beta(T)$，则

$$\alpha + \beta = 1$$

$$\alpha V_g + \beta V_l = V_K$$

气相和液相各占总体的百分数为

$$B_g=\frac{\alpha V_g}{V_K}$$

$$B_l=\frac{\beta V_l}{V_K}$$

由以上四式，得

$$\begin{cases}B_g=\dfrac{(V_K-V_l)V_g}{(V_g-V_l)V_K}\\ B_l=\dfrac{(V_g-V_K)V_l}{(V_g-V_l)V_K}\end{cases}\tag{1}$$

如果所取乙醚不是1 mol，而是 ν mol，则上述推导中的 $\alpha+\beta=1$ 应改为 $\alpha+\beta=\nu$，玻璃管的容积也应从 V_K 改为 νV_K，但(1)式不变，即 B_g 和 B_l 与 ν 无关．

2．如图，设温度为 T 时的饱和蒸汽压为 p_0，由等面积法则，得

$$\int_{V_l}^{V_g}p\mathrm{d}V=p_0(V_g-V_l)$$

范氏方程为

$$p=\frac{RT}{V-b}-\frac{a}{V^2}$$

代入，积分，得

$$RT\ \ln\frac{V_g-b}{V_l-b}-a\left(\frac{1}{V_l}-\frac{1}{V_g}\right)=p_0(V_g-V_l)$$

又，在 V_g 和 V_l 两点，由范氏方程，有

$$\begin{cases}\left(p_0+\dfrac{a}{V_g^2}\right)(V_g-b)=RT\\ \left(p_0+\dfrac{a}{V_l^2}\right)(V_l-b)=RT\end{cases}$$

以上三式联立，消去 p_0，得出 V_g 和 V_l 满足的方程组为

$$\begin{cases}RT\ln\dfrac{V_g-b}{V_l-b}=a\left(\dfrac{1}{V_l}-\dfrac{1}{V_g}\right)\left(\dfrac{V_g-b}{V_g}+\dfrac{V_l-b}{V_l}\right)\\ RT\left(\dfrac{1}{V_l-b}-\dfrac{1}{V_g-b}\right)=a\left(\dfrac{1}{V_l^2}-\dfrac{1}{V_g^2}\right)\end{cases}$$

在 $V_g\gg V_l$ 的条件下，简化为

$$\begin{cases}RT\ln\dfrac{V_g-b}{V_l-b}=\dfrac{a}{V_l}\left(2-\dfrac{b}{V_l}\right)\\ \dfrac{RT}{V_l-b}=\dfrac{a}{V_l^2}\end{cases}\tag{2}$$

解出

$$V_l=\frac{1}{2RT}\left[a\pm\sqrt{a(a-4bRT)}\right]\tag{3}$$

(3)式中的正、负号由下述条件确定，即应有

$$3b = V_K > V_l > b$$

3. 由 $T_K = 466.95\text{K}, p_K = 34.60\text{atm}$，得出

$$b = \frac{RT_K}{8p_K} = 1.385 \times 10^4 \text{ m}^3/\text{mol}$$

$$a = 27p_K b^2 = 1.792 \times 10^{-5} \text{ m}^6 \cdot \text{atm/mol}^2$$

$$V_K = 3b = 4.155 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{mol}$$

当 $T = 273.15 + 20 = 293.15$ K时，由(3)式，利用上述 a 和 b 值，得

$$V_l = 1.90 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{mol}$$

由(2)式

$$V_g = (V_l - b)\exp\left[\frac{a}{V_l RT}\left(2 - \frac{b}{V_l}\right)\right] + b = (V_l - b)\exp\left[\frac{a}{V_l RT}\left(1 + \frac{V_l - b}{V_l}\right)\right] + b$$

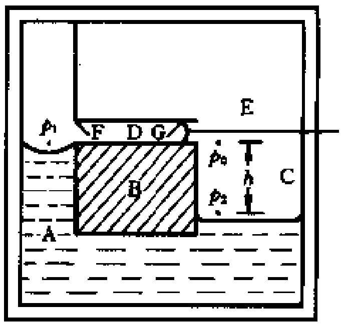
$$= (V_l - b)\exp\left[\frac{a}{V_l RT}\left(1 + \frac{RTV_l}{a}\right)\right] + b = (V_l - b)\exp\left[1 + \frac{a}{V_l RT}\right] + b$$

$$= 7.18 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{mol}$$

把上述 V_K, V_l, V_g 代入(1)式，得

$$B_l = \frac{(V_g - V_K)V_l}{(V_g - V_l)V_K} = 44.1\%$$

【题 4】 一种所谓的第二类永动机装置如图所示．图中水平放置的大容器密封但与大气导热，容器左侧 A 处被围出一个毛细管区域，上方直通容器顶部，右方是实物 B，B 的外面有相当大的空间 C．图中 D 为一导通管，内有活塞 E 可以无摩擦地左右移动．F 和 G 是两个活门，F 可在一定的压差作用下打开，直到压差几乎为零时才关闭；G 则在一定的压差作用下关闭，直到压差几乎为零时又打开，使 D 与 C 导通．图中水平虚线区域代表某种液体，它与图中所有固体部分均为完全润湿，空白部分只有该液体的饱和蒸汽．



热图 4－4－1

设计者依据：第一，图中用点标出的两处饱和蒸汽压 p_1 和 p_2 相同．第二，气体内部因高度差引起的附加压强．推证出该装置能往复地从单一热源(大气)吸取热量全部转化为机械功，而不产生其他影响．

1. 试完成设计者的推证过程．

2. 通过对这个永动机装置的否定，导出 p_1 与 p_2 之间的定量关系，所需参量可自行设取．

【解】 1. 设计者的两个依据是

$$\begin{cases} p_1 = p_2 \\ p_2 = p_0 + \rho_{汽} gh \end{cases}$$

故

$$p_1 > p_0$$

式中 p_0 和 h 的含义如图所示．因 $p_1 > p_0$，活门 F 打开，活门 G 关闭，活塞 E 被向右推动从而对

外作机械功．压差降为零时，F 关闭，G 打开，可不作功地使 E 自动向左退回原处，尔后 C 处部分蒸汽液化，毛细管中部分液体气化，使系统复原，重新形成 p_1 与 p_0 之间的压差．由热力学第一定律，系统在整个过程中对外作功只能来源于从外界（大气）吸热，现在外界是单一热源，并且系统复原，所以违背了热力学第二定律，这是一个第二类永动机．

2．设计者的第二条依据即 $p_2=p_0+\rho_汽 gh$ 是万有引力定律的结果，毋容置疑．问题在于第一条依据即 $p_1=p_2$ 并不成立，应为

$$p_1 \neq p_2$$

也就是说，液面附近的饱和蒸汽压不仅与温度有关，而且还必定与液面的几何形状有关．设计者的失误正在于此．定量分析如下．

设毛细管半径为 r，在完全润湿条件下 r 是球形液面的半径．设 p_A 为毛细管液面内侧的液体压强，设 α 为液体的表面张力系数，设 h 为毛细管液面升高的高度．则有

$$p_1=p_A+\frac{2\alpha}{r},\quad p_A=p_2-\rho_液 gh,\quad p_2=p_0+\rho_汽 gh,$$

$$p_1=p_0 \qquad \text{（确保永动机动不起来）}$$

由以上四式，解出

$$h=\frac{2\alpha}{(\rho_液-\rho_汽)gr}$$

故

$$p_1-p_2=\frac{2\alpha}{r}-\rho_液 gh$$

或

$$p_1=p_2-\frac{2\alpha\rho_汽}{(\rho_液-\rho_汽)r}$$

【题5】 如图，在一根两端开口、内直径为 1.0 mm 的圆柱形毛细管中，滴入一滴水，然后将它竖直放置．若这滴水在毛细管中分别形成 1. 2.00 cm，2. 4.00 cm，3. 2.98 cm 的水柱．试问在这三种情况下水柱下端的液面是平面，还是向液体内部凹陷的或向液体外部凸出的曲面？设毛细管能完全润湿水，已知水的表面张力系数 $\alpha=0.073$ N/m．

【分析】 竖直毛细管中液柱的上液面是凹陷的曲面，因题设完全润湿，接触角为零，故为半球面．于是上液面内一点 A 的压强 p_A 为大气压与表面张力之差．同样，下液面内一点 B 的压强 p_B 亦为大气压与下液面表面张力之差．而 p_B 又等于 p_A 与液柱重量之和．换言之，上、下液面表面张力之差支承着毛细管内的液柱．由此下液面的表面张力及下液面的形状可知．由于上液面的表面张力方向竖直向上，不难设想，当液柱较短时，下液面为凹面（上液面表面张力一部分支承液柱，另一部分与液体表面张力抵消）；随着液柱的增长，当下液面表面张力刚好等于液柱重量时，下液面为平面；液柱再增长，下液面应为凸面，以便上、下液面的表面张力同方向，共同支承液柱．

【解】 上液面凹陷的曲面，题设毛细管完全润湿水，故接触角为零，且因液柱长度至少为 2 cm，几乎是毛细管直径 1 mm 的 20 倍，因此上液面可作球面近似，为半球面，其半径为

$$R_A=5\times10^{-4}\ \text{m}$$

上液面内一点 A(如图)的压强为

$$p_A=p_0-\frac{2\alpha}{R_A} \tag{1}$$

下液面在图中用虚线表示,同理可作球面近似,但不能断定是否为半球面,其半径表为 R_B,规定

$R_B>0$,为凹球面，　$R_B<0$,为凸球面，　$R=\infty$,为平面

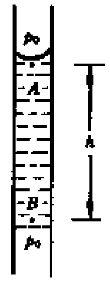
于是,下液面内一点 B(如图)的压强为

$$p_B=p_0-\frac{2\alpha}{R_B} \tag{2}$$

显然

$$p_B=p_A+\rho gh \tag{3}$$

式中 $\rho=10^3\ \text{kg/m}^3$ 为水的密度,h 为水柱高度．



热图 4－5－1

(1)、(2)、(3)式联立,得

$$\frac{1}{R_B}=-\frac{\rho gh}{2\alpha}+\frac{1}{R_A}$$

当 $h=2.00\times10^{-2}$ m 时,得

$$\frac{1}{R_B}=-1.34\times10^3+2\times10^3=0.66\times10^3\ \text{m}>0$$

即

$$R_B>0$$

故下液面为凹面．

当 $h=4.00\times10^{-2}$ m 时,

$$\frac{1}{R_B}=-2.68\times10^3+2\times10^3=-0.68\times10^3\ \text{m}<0$$

即 $R_B<0$,故下液面为凸面．

当 $h=2.98\times10^{-2}$ m 时,

$$\frac{1}{R_B}=2.0\times10^{-3}-2\times10^{-3}=0$$

即 $R_B=\infty$,故下液面为平面．

【题 6】 如图,有一总长度为 L,粗细均匀的 U 型毛细管,将它的两个开口端竖直向下稍稍浸入两个容器的等高液面之中．因毛细作用,液体 1 和液体 2 分别在毛细管中上升了 h_1 和 h_2 的高度．设液体 1 和 2 的密度分别为 ρ_1 和 ρ_2,它们与毛细管壁的接触角均为 0°,设液体在毛细管中上升时管内气体无外漏,大气压强为 p_0.

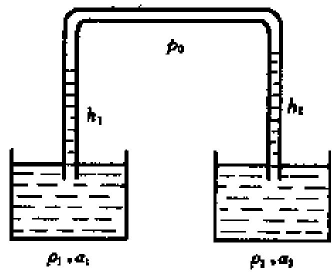
试求液体 1 与液体 2 的表面张力系数的比值．

【分析】 如图,毛细管插入后,因毛细作用,两边液体分别上升了 h_1 和 h_2 的高度．管内的气体插入前为大气压强 p_0,插入后经等温压缩升为 p. 由理想气体状态方程可得出 p 与 h_1 和 h_2 的

关系．左边毛细管内的压强 p 与 ρ_1、α_1 有关，右边的 p 则与 ρ_2、α_2 有关．利用上述关系，即可求出两液体表面张力系数之比 $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$.

【解】 毛细管插入前，其中气体压强为大气压强 p_0，插入后，气体被封闭，经等温压缩，升为 p. 由理想气体状态方程，有

$$p(L-h_1-h_2)=p_0L$$



热图 4-6-1

左边毛细管中液面内的压强 p_1 与液面外的压强 p 的关系为

$$p_1=p-\frac{2\alpha_1}{R}$$

又

$$p_1=p_0-\rho_1gh_1$$

由以上三式，得

$$p_0-\rho_1gh_1=p-\frac{2\alpha_1}{R}=\frac{L}{L-h_1-h_2}p_0-\frac{2\alpha_1}{R}$$

其中 R 为毛细管半径．

同理，由右边毛细管中液面内、外压强关系可得

$$p_0-\rho_2gh_2=\frac{L}{L-h_1-h_2}p_0-\frac{2\alpha_2}{R}$$

把以上两式改写为

$$\frac{2\alpha_1}{R}=\frac{h_1+h_2}{L-h_1-h_2}p_0+\rho_1gh_1$$

$$\frac{2\alpha_2}{R}=\frac{h_1+h_2}{L-h_1-h_2}p_0+\rho_2gh_2$$

相除，得两种液体表面张力系数之比为

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{(h_1+h_2)p_0+\rho_1gh_1(L-h_1-h_2)}{(h_1+h_2)p_0+\rho_2gh_2(L-h_1-h_2)}$$

【题7】 已知水在1 atm和 4 ℃时的表面张力系数 $\alpha=7.24\times10^{-2}$ N/m，等温压缩系数 $\beta=-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T=4.75\times10^{-5}\ \text{atm}^{-1}$. 若在 1 atm 和 4 ℃时，水平液面下附近水的密度为 ρ_0. 试问在 1 atm 和 4 ℃时，半径 $r=1.0\times10^{-6}$ cm 的小水滴密度为多大?

【分析】 由等温压缩系数 β 可知，在等温条件下，水的体积随压强而变，即水的密度随压强而变．小水滴中的压强与水平液面内附近水压强的差别是由表面张力引起的，可由 α 和 r 求出．于是小水滴密度 ρ 与水密度 ρ_0 的关系可知．

【解】 水的等温压缩系数为

$$\beta=-\frac{1}{V}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p}\right)_T$$

在等温条件下，有

$$\beta \mathrm{d}p=-\frac{\mathrm{d}V}{V}$$

积分，得

$$\ln\frac{V_0}{V}=\beta(p-p_0)$$

对于同样质量的水，当其体积由 V_0 变为 V 时，其密度由 ρ_0 变为 ρ，显然

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\frac{V_0}{V}$$

由以上两式，得

$$\ln\frac{\rho}{\rho_0}=\beta(p-p_0)$$

即

$$\rho=\rho_0 e^{\beta(p-p_0)}$$

以下标“0”标志水平液面下附近的水，无下标的量表示小水滴中的水．则小水滴内、外的压强差是由表面张力引起的，为

$$p=p_0+\frac{2\alpha}{r}$$

由以上两式，得

$$\rho=\rho_0 e^{\frac{2\alpha\beta}{r}}$$

式中

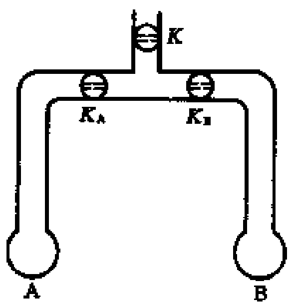
$$\frac{2\alpha\beta}{r}=6.9\times10^{-3}\ll1$$

故

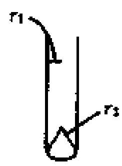
$$\rho\approx\rho_0\left(1+\frac{2\alpha\beta}{r}\right)=1.0069\rho_0$$

【题 8】 在连通管的两端吹出两个相同的球形肥皂泡 A 和 B 后，如热图 4－8－1，关闭活栓 K，活栓 K_A 和 K_B 则依旧打开，两泡内的空气经管相通，两泡相对平衡．

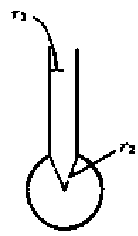
1. 如热图 4－8－2，若 A 泡和 B 泡的形状小于半球，试证明 A 泡和 B 泡之间的平衡是稳定



热图 4－8－1



热图 4－8－2



热图 4－8－3

的．如热图 4－8－3，若 A 泡和 B 泡的形状大于半球，试证明 A 泡和 B 泡之间的平衡是不稳定的．

2．若 A 泡和 B 泡的形状大于半球，设两管口的半径均为 $r_1=2.00$ cm，A 泡和 B 泡的半径均为 $r_2=2.50$ cm．试问当 A 泡和 B 泡分别变化成何种形状时，两泡能再次达到平衡．设空气因压缩或膨胀所引起的密度变化可以忽略．

【分析】 1．球形肥皂泡 A 和 B 在吹大的过程中，泡半径不断变化，泡面实际上是球的一部分．开始时 A 泡和 B 泡大小相同，达到平衡，两泡内气体压强相同．

如热图 4－8－2，若 A 泡和 B 泡的形状相同，均小于半球，泡半径应大于管半径．若因扰动使得例如 A 泡稍稍缩小，则泡半径稍稍增大，表面张力相应稍稍减小，因泡外大气压强不变，A 泡内压强稍稍减小．由于 A 泡与 B 泡经管连通，A 泡内压强稍稍减小后，气体将从 B 泡过来补充，使 A 泡恢复扰动前的形状，重新达到平衡．对于 A 泡因扰动稍稍增大，或 B 泡因扰动稍稍增大或缩小的情况可作同样分析．

总之，当 A 泡和 B 泡的形状小于半球时，扰动会自动消失，其间的平衡是稳定的．

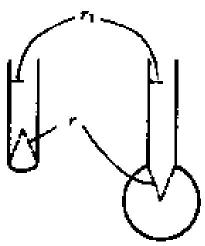
2．如热图 4－8－3，若 A 泡和 B 泡形状相同，均大于半球，达到平衡时，两泡内气体压强相同．若因扰动使 A 泡稍稍缩小，则泡半径稍稍缩小（与热图 4－8－2 情形相反），表面张力相应稍稍增大，A 泡内压强稍稍增大，使气体从 A 泡到 B 泡，B 泡增大．A 泡缩小和 B 泡增大后，扰动将继续发展．

总之，当 A 泡和 B 泡的形状大于半球时，其间的平衡是不稳定的．

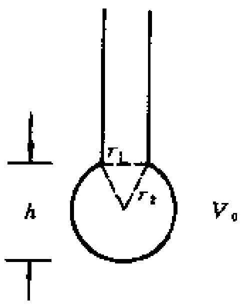
3．值得注意的是，当 A 泡缩小到半球形状时，即当 $r_2=r_1$ 时，A 泡半径最小．若再收缩使形状小于半球时，A 泡半径再度增大，根据 1 中的分析，A 泡内的压强将再度下降．当 A 泡小于半球，B 泡大于半球，而两者的半球相同时，两泡内的压强再次相同，这是又一个新的平衡状态．

【解】 1．见分析 1 和分析 2.

2．如分析 3，另一平衡态为 A 泡小于半球，B 泡大于半球，而两者半径相同，设为 r，如热图 4－8－4 所示．这样，两泡恰好合成一个半径为 r 的球，于是有



热图 4－8－4



热图 4－8－5

$$\frac{4}{3}\pi r^3=2V_0 \tag{1}$$

式中 V_0 为开始 A 泡和 B 泡形状相同时各自的体积．如热图 4－8－5，利用球缺的体积公式，有

$$V_0=\pi h^2\left(r_2-\frac{h}{3}\right) \tag{2}$$

式中 h 如热图 4－8－5 所示，为

$$h=r_2+\sqrt{r_2^2-r_1^2}$$

代入(2)式，得

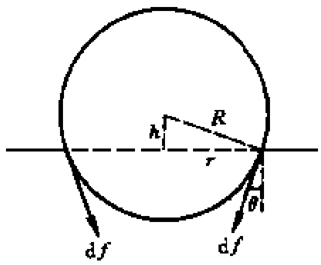
$$V_0=18.67\pi\ \text{cm}^3$$

代入(1)式，得

$$r=\sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}V_0}=\sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}\pi h^2\left(r_2-\frac{h}{3}\right)}$$
$$=\sqrt[3]{\frac{3}{2}(r_2+\sqrt{r_2^2-r_1^2})^2\left[r_2-\frac{1}{3}(r_2+\sqrt{r_2^2-r_1^2})\right]}=3.04\ \text{cm}$$

【题 9】 如图，半径为 R，密度为 ρ 的匀质球浮在 0℃ 的某液体表面上，球心高出液面 h．设球的热膨胀可以忽略．已知液体的热膨胀系数为 α，表面张力系数 σ 随摄氏温度 t 的变化关系 为$\sigma(t)=\sigma_0(1-\beta t)$，其中 β 为常量．设液体对球为完全润湿．试证明，当系统温度小幅度变化时，球浸入液体部分体积不变的条件为

$$\frac{\beta-\alpha}{\alpha}=\frac{2R^4\rho g}{3\sigma_0(R^2-h^2)}$$



热图 4－9－1

【分析】 球浮在液体表面上，所受的重力、浮力和表面张力达到平衡．因液体对球为完全润湿，表面张力沿球与液体交界点的切向，并指向液体．由于球与液体的交界点构成图中半径为 r 的圆，因此各处的表面张力的合力将竖直向下．

温度变化时，球的体积和密度不变(忽略球的热膨胀)，但液体的密度和表面张力系数变化，导致浮力与表面张力的变化．根据给出的 α 和$\sigma(t)$，温度 t 小幅度变化的条件以及球浸入液体部分体积不变的要求，即可给予证明．

【解】 球在重力、浮力、表面张力的作用下达到平衡．重力竖直向下，为

$$mg=\frac{4}{3}\pi R^3\rho g$$

浮力竖直向上，设球浸在液体中的体积为 V_L，液体密度为 ρ_L，则浮力为

$$F=V_L\rho_L g$$

因液体对球完全润湿，表面张力方向如图．设 $\mathrm{d}l$ 为液体表面与球接触的半径为 r 的圆周上的一小段线元，则通过 $\mathrm{d}l$ 作用在球上的表面张力 $\mathrm{d}f$ 的大小为

$$\mathrm{d}f=\sigma\mathrm{d}l$$

$\mathrm{d}f$ 竖直向下的分量为

$$\mathrm{d}f_y=\mathrm{d}f\cdot\cos\theta=\frac{r}{R}\mathrm{d}f=\frac{\sqrt{R^2-h^2}}{R}\sigma\mathrm{d}l$$

球所受表面张力为沿半径 r 圆周各处的表面张力的竖直分量之和，为

$$f_y=\oint\mathrm{d}f_y=\frac{\sigma}{R}\sqrt{R^2-h^2}\oint\mathrm{d}l$$

$$= \frac{\sigma}{R}\sqrt{R^2-h^2}\cdot 2\pi r = \frac{2\pi\sigma}{R}(R^2-h^2)$$

以上三力平衡，有

$$F = f_y + mg$$

即

$$2\pi\frac{\sigma}{R}(R^2-h^2)+\frac{4}{3}\pi R^3\rho g = V_L\rho_L g \tag{1}$$

温度 t 变化时，ρ 和 R 不变，σ 和 ρ_L 变化，h 和 V_L 有相应变化．把上式对 t 求导，得

$$\frac{2\pi}{R}(R^2-h^2)\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}-\frac{4\pi\sigma h}{R}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\rho_L g\frac{\mathrm{d}V_L}{\mathrm{d}t}+V_L g\frac{\mathrm{d}\rho_L}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

当温度 t 在 0℃ 附近小幅度变化时，要求球浸入液体部分的体积不变，即要求 h 和 V_L 不变，于是

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=0\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}V_L}{\mathrm{d}t}=0\end{cases} \tag{3}$$

因

$$\sigma(t)=\sigma_0(1-\beta t)$$

故有

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=-\beta\sigma_0 \tag{4}$$

热膨胀系数 α 定义为

$$\alpha=\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$$

对本题的液体，取恒定的质量 M，当温度 t 变化时，其体积 V_L 和密度 ρ_L 均变化，由

$$M=\rho_L V_L$$

求导，得

$$\frac{\mathrm{d}V_L}{\mathrm{d}t}=-\frac{M}{\rho_L^2}\frac{\mathrm{d}\rho_L}{\mathrm{d}t}$$

代入 α 的定义式，得

$$\alpha=\frac{1}{V_L}\frac{\mathrm{d}V_L}{\mathrm{d}t}=-\frac{M}{V_L\rho_L^2}\frac{\mathrm{d}\rho_L}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{\rho_L}\frac{\mathrm{d}\rho_L}{\mathrm{d}t}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}\rho_L}{\mathrm{d}t}=-\alpha\rho_L \tag{5}$$

把(3)、(4)、(5)式代入(2)式，得

$$-2\pi\beta\sigma_0\frac{R^2-h^2}{R}=-\alpha V_L\rho_L g$$

把上式与(1)式联立，消去 $V_L\rho_L g$，得

$$2\pi\beta\sigma_0\frac{R^2-h^2}{R}=\alpha\left(2\pi\sigma\frac{R^2-h^2}{R}+\frac{4}{3}\pi R^3\rho g\right)$$

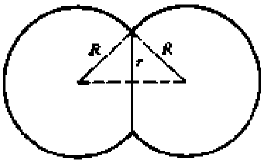
因系统的温度 t 在 0℃附近小幅度变化,故上式右第一项中的 σ 应为 σ_0,于是

$$2\pi\sigma_0\frac{R^2-h^2}{R}(\beta-\alpha)=\frac{4}{3}\pi R^3\alpha\rho g$$

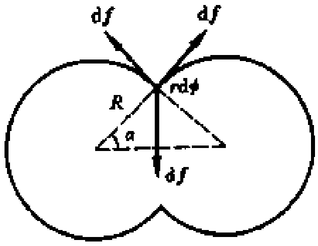
即

$$\frac{\beta-\alpha}{\alpha}=\frac{2R^4\rho g}{3\sigma_0(R^2-h^2)}$$

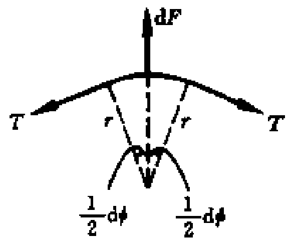
【题 10】 同一液体的两个球形膜碰在一起后,形成如热图 4－10－1 所示的对称连体膜．连体膜的两个球面(实际上是两个超过半球面的部分球面)的半径均为 R,中间相连的圆膜的半径为 r,圆膜边缘用一匀质细线围住．已知液体的表面张力系数为 σ,不计重力．试求细线内的张力 T.



热图 4－10－1



热图 4－10－2



热图 4－10－3

【分析】 细线呈圆环形,细线所受的两个球形液膜的表面张力左右对称,合力背离圆心向外,细线所受圆形连体液膜的表面张力指向圆心．所有这些表面张力的合力应与细线内的张力平衡,由此可求出细线内的张力 T. 另外,应注意液膜都有两个表面,求解计算表面张力时请勿遗漏 2 倍的因子．

【解】 如热图 4－10－2,在细线上任取 $r\mathrm{d}\phi$ 一小段,它在热图 4－10－2 中用一点表示,该线元受到三个表面张力的作用,它们的方向已在热图 4－10－2 中标明,它们的大小相同,均为

$$\mathrm{d}f=2[\sigma(r\mathrm{d}\phi)]$$

三个 $\mathrm{d}f$ 的合力为 $\mathrm{d}F$,其方向沿圆形液膜的径向向外,如热图 4－10－3 所示．其大小为

$$\mathrm{d}F=2\mathrm{d}f\cos\alpha-\mathrm{d}f=(2\cos\alpha-1)\mathrm{d}f$$

其中

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{R}$$

故

$$\mathrm{d}F=2\sigma\frac{r}{R}(2\sqrt{R^2-r^2}-R)\mathrm{d}\phi$$

因圆形细线内还有张力 T 的作用,线元 $r\mathrm{d}\phi$ 所受全部作用力如热图 4－10－3 所示,平衡时,有

$$2T\sin\frac{\mathrm{d}\phi}{2}=\mathrm{d}F$$

由以上两式,得

$$T=\frac{dF}{d\phi}=2\sigma\frac{r}{R}(2\sqrt{R^2-r^2}-R)$$

讨论．以上解答只适用于

$$2\sqrt{R^2-r^2}\geqslant R$$

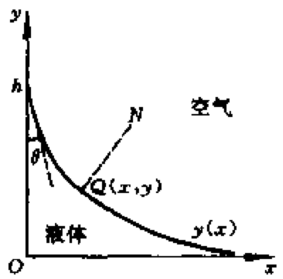
即只适用于

$$r\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}R$$

如果 $r>\frac{\sqrt{3}}{2}R$，则 dF 反向，而柔软细线中不可能形成与此 dF 平衡的挤压力，故细线将向连体圆形液膜内移动．一旦细线离开了连体圆形液膜的边缘，它所受液体的表面张力便处处平衡，于是细线内不存在张力，即 $T=0$．

【题11】 将一竖直无限大平板部分地浸入与其有润湿作用的液体之中，两者之间的接触角为 θ，液体密度为 ρ，表面张力系数为 α．试求液体沿此板上升的高度．

【分析】 如图，取 x 轴表示水平液面，y 轴表示竖直无限大平板．液体因与平板有润湿作用而上升形成的柱形曲面与 xy 平面相交的曲线用 $y(x)$表示．$y(x)$曲线与 y 轴交点的坐标，就是所求的上升高度 h．$Q(x,y)$是 $y(x)$曲线上的任意一点．



热图 4－11－1

液体沿平板上升的原因是表面张力．平衡时，液体内靠近 Q 点的压强应为大气压强 p_0 与表面张力之和，它又等于 p_0 与高为 y 的液柱重量之差．因此，关键在于表面张力的计算．

Q 点的表面张力为$\alpha\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$，$R_1$ 和 R_2 是液面的两个主曲率半径，适当选取两个正交截面，则 R_1 和 R_2 可知，问题可解．

总之，本题在物理上无非是静力平衡，主要用到柱形曲面曲率半径的表达式，应注意记取．

【解】 如图，设液体内侧靠近 Q 点的压强为 p_Q，则

$$p_Q=p_0+\alpha\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) \tag{1}$$

式中 R_1 和 R_2 是液面在 Q 点的两个主曲率半径，p_0 是大气压强，亦即水平液面的内侧压强，故又有

$$p_Q=p_0-\rho gy \tag{2}$$

取第一正交截面为 xy 平面，它与柱形液面的交线为 $y(x)$，则在 Q 点的第一曲率半径 R_1 为

$$|R_1|=\left|\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}\right|$$

式中 $y'=\frac{dy}{dx}$，$y''=\frac{d^2y}{dx^2}$．如图，$y''>0$，若规定曲率中心在液体内侧（即液面向空气凸出）时，R_1 取为正；曲率中心在液体外侧（即液面是凹的）时，R_1 取为负．则如图，R_1 应为负，于是有

$$R_1=-\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} \tag{3}$$

取第二正交截面为通过法线 QN（如图，QN 在 xy 平面内，通过 Q 点且与 $y(x)$ 曲线垂直）且与 xy 平面垂直的平面，则它与液面的交线就是通过 Q 点且与 xy 平面垂直的直线．因此，Q 点的第二曲率半径为

$$R_2=\infty \tag{4}$$

(1)、(2)、(3)、(4)式联立，得

$$\frac{\rho g}{\alpha}y=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \tag{5}$$

因

$$y''=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}y}$$

代入(5)式，得

$$\frac{\rho g}{\alpha}y\mathrm{d}y=\frac{y'\mathrm{d}y'}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

因在 $y=0$ 处，$y'=0$（水平液面），积分，得

$$\int_0^y\frac{\rho g}{\alpha}y\mathrm{d}y=\int_0^{y'}\frac{y'\mathrm{d}y'}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

得

$$\frac{\rho g}{2\alpha}y^2=1-\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

因在 $x=0$ 处，$y=h$，$y'=-\cot\theta$，代入上式，得

$$h=\sqrt{\frac{2\alpha}{\rho g}(1-\sin\theta)}$$

【题 12】 由同种原子组成的均匀一维晶体中，只有最相邻的原子之间有相互作用（余皆可略），作用势为 $V(x)=-\dfrac{A}{x^6}+\dfrac{B}{x^{12}}$，其中 x 是相邻原子的间距，A 和 B 是两个常量．

1．试求平衡时原子间的平均距离．

2．当此晶体在平衡位置附近的相对形变为单位值时，试求其弹性倔强系数（用 A 和 B 表示）．

3．将晶体慢慢拉伸，试问当形变为多大时，晶体会被拉断．

【分析】 由作用势 $V(x)$ 可得出相邻原子间的作用力随间距 x 的变化，因为 $f(x)=-\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$．平衡时，$f(x_0)=0$，于是原子间平均距离 x_0 可求．

$f(x)$ 曲线表明，只在 x_0 附近虎克定律近似成立．单位长度弹性倔强系数是在 x_0 附近产生单位相对形变所需的作用力．

$f(x)$ 曲线表明，相邻原子间的最大吸引力为 f_m，相应的间距为 x_m．当相对形变为 $\dfrac{x_m-x_0}{x_0}$ 时，晶体会被拉断．

【解】 1．设平衡时原子间的平均距离为 x_0，则

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_0}=0$$

即

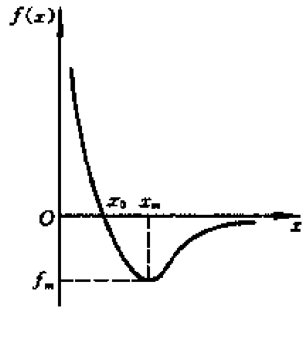
$$6Ax_0^{-7}=12Bx_0^{-13} \tag{1}$$

故

$$x_0=\left(\frac{2B}{A}\right)^{\frac{1}{6}} \tag{2}$$

2. 相邻原子间的作用力为

$$f(x)=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=\frac{6A}{x^7}-\frac{12B}{x^{13}} \tag{3}$$



热图 4－12－1

$f(x)$曲线如图所示，$f(x_0)=0$，x_0 是平衡位置，在 x_0 附近的一段曲线可近似看作直线，这是虎克定律成立的区域．若相邻原子的间距从平衡位置 x_0 偏离小量 Δx，则作用力为

$$f=\frac{6A}{(x_0+\Delta x)^7}-\frac{12B}{(x_0+\Delta x)^{13}}$$
$$=\frac{6A}{x_0^7}\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right)^{-7}-\frac{12B}{x_0^{13}}\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right)^{-13}\approx\frac{6A}{x_0^7}\left(1-7\frac{\Delta x}{x_0}\right)-\frac{12B}{x_0^{13}}\left(1-13\frac{\Delta x}{x_0}\right)$$

把(1)式代入，得

$$f=\frac{6A}{x_0^7}(-7+13)\frac{\Delta x}{x_0}=\frac{36A}{x_0^7}\cdot\frac{\Delta x}{x_0}$$

式中$\frac{\Delta x}{x_0}$为相对形变．因此，单位长度的弹性系数为

$$k=\frac{36A}{x_0^7}$$

把(2)式代入，得

$$k=\frac{18A^2}{B}\left(\frac{A}{2B}\right)^{\frac{1}{6}}$$

3. 由 $f(x)$曲线可知，当 $x=x_m$ 时，$f(x)=f_m$ 为极大吸引力．即当 $x<x_0$ 时，$f>0$ 为排斥力；当 $x>x_0$ 时，$f<0$ 为吸引力；当 $x=x_m$ 时，$f(x)=f_m$ 为极值．若外力(拉力)等于 f_m，则晶体将不断拉长，直至断裂．因此，晶体会被拉断时的相对形变为$\frac{x_m-x_0}{x_0}$．因 x_m 满足

$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_m}=0$$

由(3)式，得

$$-42A\,x_m^{-8}+12\times13\,Bx_m^{-14}=0$$

故

$$x_m=\left(\frac{26B}{7A}\right)^{\frac{1}{6}}$$

晶体会被拉断的相对形变为

$$\frac{x_m-x_0}{x_0}=\frac{x_m}{x_0}-1=\left(\frac{13}{7}\right)^{\frac{1}{6}}-1=0.11$$

【题 13】 NaCl 晶体在平衡态时 Na^+ 和最邻近的 Cl^- 之间的距离为 $r_0=2.81\times10^{-10}$ m，绝热压缩系数为 $k_s=-\frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dp}\right)_s=3.3\times10^{-11}\ m^2/N$，马德隆常量为 $\alpha=1.75$. 试求平衡态时 1 mol NaCl晶体的结合能 E_{P0}.

【分析】 结合能是把单个分子或原子结合成晶体时释放的能量，亦即把晶体拆散成单个分子或原子所需作的功．由 N 个分子组成的 NaCl 晶体的结合能包括离子间的库仑能和由排斥力引起的能量两项，即 $E_P=N\left(\frac{a_m}{r^m}-\frac{\alpha e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)$，式中 r 是相邻离子的间距．可见为了求结合能，需要确定 a_m 和 m 两个常量．

平衡态时结合能为极小的条件即为$\left(\frac{dE_P}{dr}\right)_{r=r_0}=0$，它提供了 a_m 与 m 的一个关系，可将 a_m 用 m 来表示．

已知的绝热压缩系数提供了另一个关系．在绝热条件下，晶体结合能（近似等于内能）的变化等于外界所作的功，由此可得出平衡态的 k_s 与 m 的关系．

于是问题可解．

【解】 由 $N\gg1$ 个分子组成的 NaCl 晶体的结合能为

$$E_P=N\left(\frac{a_m}{r^m}-\frac{\alpha e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\tag{1}$$

在平衡态 $r=r_0$，对 1 mol 晶体 $N=N_A$（阿伏伽德罗常量）．又马德隆常量 α 及电子电量 e 均已知，故问题在于确定 a_m 和 m.

在平衡态，$E_P=E_{P0}$应为极小，需满足

$$\left(\frac{dE_P}{dr}\right)_{r=r_0}=0$$

把(1)式代入，得

$$N\left(-\frac{ma_m}{r_0^{m+1}}+\frac{\alpha e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}\right)=0$$

故

$$a_m=\frac{\alpha e^2}{4\pi\varepsilon_0 m}r_0^{m-1}\tag{2}$$

于是，在平衡态，1 mol NaCl 晶体的结合能为

$$E_{P0}=N_A\left(\frac{a_m}{r^m}-\frac{\alpha e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\right)=\frac{N_A\alpha e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\left(\frac{1}{m}-1\right)\tag{3}$$

通常，$E_P\sim10^5$ J/mol，$E_k\sim RT$（室温）$\sim10^3$ J/mol，即 $E_P\gg E_k$，故晶体的总能量（内能）近似等于其结合能

$$E=E_P+E_k\approx E_P$$

在绝热过程中

$$dE_P = dE = -p\,dV$$

或

$$p = -\frac{dE_P}{dV}$$

因而绝热压缩系数 k_s 可表为

$$\frac{1}{k_s} = -V\frac{dp}{dV} = V\frac{d^2E_P}{dV^2} \tag{4}$$

式中

$$\frac{d^2E_P}{dV^2} = \frac{d}{dV}\left(\frac{dE_P}{dr}\frac{dr}{dV}\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{dE_P}{dr}\frac{dr}{dV}\right)\left(\frac{dr}{dV}\right)$$
$$= \left(\frac{d^2E_P}{dr^2}\frac{dr}{dV} + \frac{dE_P}{dr}\frac{d^2r}{dr\,dV}\right)\left(\frac{dr}{dV}\right)$$

在平衡态，因

$$\left(\frac{dE_P}{dr}\right)_{r=r_0} = 0$$

故

$$\left(\frac{d^2E_P}{dV^2}\right)_{r=r_0} = \left(\frac{dr}{dV}\right)^2\left(\frac{d^2E_P}{dr^2}\right)_{r=r_0}$$

代入(4)式，得

$$\left(\frac{1}{k_s}\right)_{r=r_0} = V\left(\frac{dr}{dV}\right)^2\left(\frac{d^2E_P}{dr^2}\right)_{r=r_0} \tag{5}$$

对于简单立方结构的 NaCl 晶体，其体积为

$$V = 2Nr^3$$

故

$$\frac{dr}{dV} = \frac{1}{6Nr^2}$$

代入(5)式，得

$$\left(\frac{1}{k_s}\right)_{r=r_0} = (2Nr_0^3)\left(\frac{1}{6Nr_0^2}\right)^2\left(\frac{d^2E_P}{dr^2}\right)_{r=r_0} = \frac{1}{18Nr_0}\left(\frac{d^2E_P}{dr^2}\right)_{r=r_0} \tag{6}$$

由(1)、(2)式得，

$$\left(\frac{d^2E_P}{dr^2}\right)_{r=r_0} = N\left[\frac{m(m+1)a_m}{r_0^{m+2}} - \frac{2\alpha e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^3}\right] = \frac{N(m-1)\alpha e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^3}$$

代入(6)式，得

$$\left(\frac{1}{k_s}\right)_{r=r_0} = \frac{(m-1)\alpha e^2}{72\pi\varepsilon_0 r_0^4}$$

把已知的各种数据代入上式，得

$$m = 9.4$$

把 m 代入(3)式，得

$$E_{P0}=\frac{N_A\alpha e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\left(\frac{1}{m}-1\right)=-\frac{8.4}{9.4}\left(\frac{N_A\alpha e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\right)=-7.5\times10^5\ \text{J/mol}$$

【题 14】 质量为2.0 kg，温度为 −13 ℃，体积为 0.19 m³ 的氟利昂(其分子量为 121)，在保持温度不变的条件下被压缩，体积减小为 0.10 m³. 试问在此过程中有多少千克的氟利昂被液化．已知在 −13 ℃时，液态氟利昂的密度为 $\rho=1.44\times10^3$ kg/m³，饱和蒸汽压为 $p_饱=2.08\times10^5$ Pa，又氟利昂的饱和蒸汽可近似看作理想气体．

【分析】 本题是氟利昂的等温压缩，使之部分液化，过程中氟利昂的饱和蒸汽可视为理想气体．利用理想气体的状态方程及题设已知条件，不难解出压缩后液态氟利昂的质量 M_1. 问题在于，压缩前是否已有部分液态氟利昂，若有，应从 M_1 中减去，若无，M_1 全部是在压缩过程中生成的．为此，需计算压缩前气态氟利昂的压强，若小于饱和蒸汽压，则压缩前并无液态氟利昂．

【解】 设氟利昂经等温压缩后，液态部分的质量为 M_1，体积为 V_1，气态部分的质量为 M_2，体积为 V_2，压强当然是饱和蒸汽压 $p_饱$．因氟利昂饱和蒸汽可视为理想气体，故

$$p_饱 V_2=\frac{M_2}{\mu}RT$$

式中 $\mu=121\times10^{-3}$ kg/mol 是氟利昂的摩尔质量，$T=273-13=260\text{K}$ 是它的温度．又

$$V_1+V_2=V,\quad M_1+M_2=M,\quad M_1=\rho V_1$$

式中 $V=0.10$ m³ 为压缩后氟利昂的体积，$M=2.0$ kg 为氟利昂的质量．

由以上四式，消去 V_1, V_2, M_2，解出压缩后液态氟利昂的质量为

$$M_1=\frac{M\dfrac{RT}{\mu}-p_饱 V}{\dfrac{RT}{\mu}-\dfrac{p_饱}{\rho}}=0.84\ \text{kg}$$

设压缩前氟利昂全部处于气态，其体积为 $V_i=0.19$ m³，其压强为 p_i，由状态方程

$$p_iV_i=\frac{M}{\mu}RT$$

故

$$p_i=\frac{M}{\mu}\frac{RT}{V_i}=1.87\times10^5\ \text{Pa}$$

因氟利昂饱和蒸汽压(在 −13 ℃时)为 $p_饱=2.08\times10^5$ Pa，故 $p_i<p_饱$．可见，压缩前氟利昂确实全部处于气态，并未部分液化，上述假设成立．因此，上面解出的 $M_1=0.84$ kg 液态氟利昂全部是在等温压缩过程中被液化的．

【题 15】 液体 A，B 互不相溶，它们的饱和蒸汽压 p 与温度 T(绝对温标)的关系为

$$\ln\frac{p_i}{p_0}=\frac{a_i}{T}+b_i,\ i=A\ 或\ B$$

其中 p_0 是标准大气压，a、b 是由液体本身性质确定的常量．测出两个温度的$\dfrac{p_i}{p_0}$值如下：

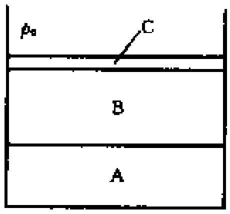
$$40℃,\frac{p_A}{p_0}=0.284,\frac{p_B}{p_0}=0.07278$$

$$90℃,\frac{p_A}{p_0}=1.476,\frac{p_B}{p_0}=0.6918$$

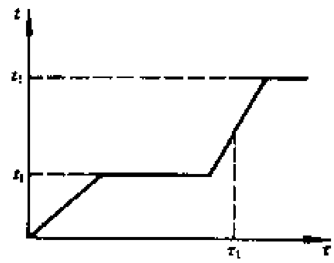
1．在外部压强为 p_0 时，试分别确定 A 和 B 的沸点．

2．现将100 g液体 A 和100 g液体 B 先后注入容器内，并在 B 的表面覆盖上一薄层非挥发性液体 C，C 与 A 和 B 互不相溶，C 的作用是防止 B 的自由蒸发．如热图4－15－1，各液层都不厚，因此液体内因重力产生的附加压强均可忽略．已知液体 A 和 B 的分子质量之比为 $\gamma=\frac{\mu_A}{\mu_B}=8$.

缓慢而持续地加热容器，液体的温度 t（摄氏温标）随时间 τ 的变化关系如热图4－15－2所示．试求出热图4－15－2中的温度 t_1 和 t_2（精确到1℃），以及在 τ_1 时刻液体A和液体B的质量（精确到0.1 g）．



热图4－15－1



热图4－15－2

设A和B的蒸汽均可看作理想气体，因而服从道尔顿分压定律．

【分析】 沸点是液体沸腾的温度，也是气、液两相平衡共存的温度．液体沸腾的条件是饱和蒸汽压和外界压强相等．饱和蒸汽压与液体的性质有关，还与温度有强烈的依赖关系．由给定的 $p(T)$ 关系及数据，可以确定 $p(T)$ 中的待定常数 a，b，进而求出A和B的沸点．此即第1问．

第2问的 $t\sim\tau$ 图（热图4－15－2）给出了加热过程中两种液体共同的温度 t 随时间 τ 的变化．开始 t 线性地增加，在液体A、B内部形成的气泡在A、B交界处混合，混合气泡内的压强等于A、B的饱和蒸汽压之和 (p_A+p_B)（道尔顿分压定律）．在温度不够高，(p_A+p_B) 小于外界大气压强 p_0 时，不沸腾．当温度升高到 t_1，使 $(p_A+p_B)=p_0$ 时，在A、B交界处，两种气体将共同沸腾，由此 t_1 可求．显然，t_1 应低于A、B各自单独沸腾时的沸点．

达到温度 t_1 后，继续加热，两种液体不断沸腾，温度不变．经过一段时间后，A、B中必有一种液体首先全部沸腾掉，只剩下另一种液体．在 t_1 温度下，剩下液体的饱和蒸汽压将小于 p_0，沸腾停止．于是随着加热，温度再次线性地上升．当温度达到了剩下液体的沸点（即该液体的饱和蒸汽压达到 p_0 时），再次沸腾，温度不再上升，因此，$t\sim\tau$ 曲线中第二段平行直线的温度 t_2 必为液体A或液体B单独存在时的沸点．

在 t_1 温度，两种液体在交界处共同沸腾．在由两种液体的饱和蒸汽混合而成的气泡内，A、B蒸汽的体积相同，温度相同，压强分别是各自的饱和蒸汽压 p_A 和 p_B．利用理想气体状态方程及题目给定的 $\frac{\mu_A}{\mu_B}$ 值，可确定气泡内两种蒸汽的密度比或质量比．从而得出在共同沸腾过程中，

两种液体损失的质量之比，这样，当其一全部沸腾殆尽时，另一还剩下多少即可求得．当温度从 t_1 线性地增加到 t_2 时，剩下的液体还未沸腾，其质量不变．

【解】 1. 沸点是

$$\frac{p_i}{p_0}=1$$

时的温度，表为 T_b 或 t_b．由题设

$$\ln\frac{p_i}{p_0}=\frac{a_i}{T}+b_i,\ i=\text{A 或 B}$$

当

$$\ln\frac{p_i}{p_0}=\ln 1=0$$

时，有

$$T_{bi}=-\frac{a_i}{b_i} \tag{1}$$

由题目所给数据，对于液体 A，有

$$\begin{cases}\ln 0.284=\dfrac{a_A}{273.15+40}+b_A\\[2ex]\ln 1.476=\dfrac{a_A}{273.15+90}+b_A\end{cases}$$

解出

$$\begin{cases}a_A=-3748.49\text{K}\\b_A=10.711\end{cases} \tag{2}$$

对于液体 B，有

$$\begin{cases}\ln 0.07278=\dfrac{a_B}{273.15+40}+b_B\\[2ex]\ln 0.1918=\dfrac{a_B}{273.15+90}+b_B\end{cases}$$

解出

$$\begin{cases}a_B=-5121.64\ \text{K}\\b_B=13.735\end{cases} \tag{3}$$

把(2)、(3)式代入(1)式，得 A、B 的沸点为

$$T_{bA}=349.95\ \text{K},\text{或}\ t_{bA}=77\ ℃$$

$$T_{bB}=372.89\text{K}\ ,\text{或}\ t_{bB}=99.74\ ℃\approx 100\ ℃$$

2. 温度 t_1 是两种液体 A 和 B 在交界处共同沸腾的温度．共同沸腾的条件是，在两种蒸汽混合的气泡内，A、B 的饱和蒸汽压之和等于大气压强，即

$$p_A+p_B=p_0$$

或

$$\frac{p_A+p_B}{p_0}=1 \tag{4}$$

由题设

$$\ln\frac{p_i}{p_0}=\frac{a_i}{T}+b_i$$

得

$$\frac{p_i}{p_0}=e^{\frac{a_i}{T}+b_i} \tag{5}$$

把(5)式代入(4)式，得

$$y(t_1)=\exp\left(\frac{a_A}{t_0+t_1}+b_A\right)+\exp\left(\frac{a_B}{t_0+t_1}+b_B\right)=1$$

式中 $t_0=273.15$ ℃．上式是 t_1 的超越方程，难以求解析解，可以求数值解．办法是取不同的 t_1，计算相应的 $y(t_1)$值．根据 $y(t_1)$与 1 的偏离，调整 t_1 的取值，从 $y(t_1)$大于 1 和小于 1 两头逼近，即可求出满足 $y(t_1)=1$ 的 t_1 值．

t_1℃	$y(t_1)$	
40 ℃	0.356<1	（利用题目给的数据）
90 ℃	2.168>1	（利用题目给的数据）
59 ℃	0.749<1	
70 ℃	1.113>1	
66 ℃	0.966<1	
67 ℃	1.001>1	
66.5 ℃	0.983<1	

因此，由上表，在题目要求的精度范围内，可取

$$t_1=67\ ℃$$

在 t_1 温度，A 和 B 液体在交界处共同沸腾．取由 A 和 B 的饱和蒸汽混合而成的任一气泡，其体积为 V，温度为 T_1，A 和 B 饱和蒸汽的压强分别为 p_A 和 p_B，质量分别为 m_A 和 m_B. 由理想气体状态方程

$$\begin{cases} p_A V=\dfrac{m_A}{\mu_A}RT_1 \\ p_B V=\dfrac{m_B}{\mu_B}RT_1 \end{cases}$$

相除，并利用题设的

$$\gamma=\frac{\mu_A}{\mu_B}=8$$

得

$$\frac{m_A}{m_B}=\frac{p_A\,\mu_A}{p_B\,\mu_B}=8\,\frac{p_A}{p_B}$$

式中 $p_A=p_A(t_1)$，$p_B=p_B(t_1)$，分别是温度 t_1 时 A 和 B 的饱和蒸汽压．由(5)式，并利用(2)、(3)式，得

$$p_A=p_0\exp\left(\frac{a_A}{273.15+t_1}+b_A\right)$$

$$= p_0\exp\left(-\frac{3748.49}{273.15+67}+10.711\right)=0.734p_0$$

$$p_B = p_0\exp\left(\frac{a_B}{273.15+t_1}+b_B\right)$$

$$= p_0\exp\left(-\frac{5121.64}{273.15+67}+13.735\right)=0.267p_0$$

因此，

$$\frac{m_A}{m_B}=22.0$$

上式表明，在温度为 t_1 时，A 和 B 液体在交界面上共同沸腾，液体 A 损失的质量为液体 B 的 22 倍．因液体 A 和 B 都是 100 g，故当液体 A 因沸腾而损失殆尽时，液体 B 只损失了

$$\frac{100}{22}\ \text{g}=4.5\ \text{g}$$

因此，在温度从 t_1 线性地增加到 t_2 过程中的任一时刻 τ_1，液体 A 的质量为零，液体 B 的质量为

$$(100-4.5)\ \text{g}=95.5\ \text{g}$$

t_2 是液体 B 单独存在时的沸点，已在第 1 问中求出，为

$$t_2=t_{bB}=100\ ℃$$

【本题是 1989 年第 20 届 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)试题．】

【题 16】 在一密闭容器内有冰、水和水蒸汽各 1 g，三态共存达到平衡，系统的温度为 $t=0.01$ ℃，压强为 $p=4.58$ mmHg，容器内别无其他物质．现在保持容器体积不变的条件下，对此系统缓慢加热，输入热量 $Q=0.255$ kJ．试估算此系统再次达到平衡后，冰、水和水蒸汽各自的质量．已知冰的升华热 $L_{升}=2.83$ kJ/g，水的汽化热 $L_{汽}=2.49$ kJ/g．

【分析】 首先，大致判断一下经缓慢加热系统再次达到平衡后的状况．由 $L_{熔}=L_{升}-L_{汽}=0.34$ kJ/g，得出冰熔解热 $L_{熔}$，因冰原有 1 g，输入热量 $Q=0.255$ kJ，可见冰不致全部熔化．换言之，在缓慢加热过程中，系统将始终保持三态共存，并再次达到平衡．因此，在此过程中，出现的是物态的变化，可以认为系统的温度和压强均保持不变．

利用理想气体状态方程算出初态水蒸汽的密度，并把它与已知的水和冰的密度相比较(注意，初态时冰、水、水蒸汽的质量相同)，可知初态的容器内绝大部分体积被水蒸汽占据了．

由于缓慢加热过程中系统经历的是物态变化，温度和压强均不变，因此过程中水蒸汽的密度应不变．由于初态时水蒸汽已占据绝大部分体积，而过程中因水、冰增减导致的体积变化又可忽略不计，因此过程中水蒸汽的体积也应大致保持不变．于是，在过程中，水蒸汽的质量可认为没有变化．换言之，系统吸收的热量只能用于使冰熔化为水，不难求解．

【解】 冰的熔解热 $L_{熔}$ 近似为

$$L_{熔}=L_{升}-L_{汽}=0.34\ \text{kJ/g}$$

初态有 1 g 冰，全部熔解需吸热 0.34 kJ．加热过程输入的热量只有 $Q=0.255$ kJ，不足使冰全部熔化．所以，在加热过程中，始终三态共存，出现的是物态变化，系统的 t 和 p 应保持不变．

由理想气体状态方程，初态水蒸汽的密度为

$$\rho_{气}=\frac{\mu p}{RT}$$

式中 $\mu=18\times10^{-3}$ kg/mol, $p=4.58$ mmHg = 610 Pa, $T=273$ K, 代入, 得

$$\rho_{汽}=5\times10^{-3}\ \text{kg/m}^3$$

同样条件下，水、冰的密度分别为

$$\rho_{水}=1\times10^3\ \text{kg/m}^3$$

$$\rho_{冰}=0.9\times10^3\ \text{kg/m}^3$$

可见，$\rho_{水}$ 和 $\rho_{冰}\gg\rho_{气}$．因初态水、冰、水蒸汽均为 1 g，质量相同，故初态水蒸汽体积远大于水和冰的体积，几乎占据了全部容器．

在缓慢加热过程中，水蒸汽的温度和压强均不变，故其密度不变．同时因冰、水增减导致的体积变化可略，并且也不可能有相当多的水蒸汽转化为水或冰（这要放热），故水蒸汽体积不变，始终占据绝大部分容器．由此，在物态变化过程中，水蒸汽质量保持不变，为

$$m_{汽}=1\ \text{g}$$

所以物态变化几乎就是冰熔化为水（吸热）．设终态冰、水质量分别为 $m_{冰}$ 和 $m_{水}$，则因

$$m_{冰}+m_{水}=2\ \text{g}$$

及

$$Q=(1\text{g}-m_{冰})L_{熔}$$

得出

$$m_{冰}=0.25\ \text{g},\quad m_{水}=1.75\ \text{g}$$

【题 17】 地球深处35 km 到 2900 km 之间的区域为固态地幔，地幔的主要成分是固态硅酸盐．设硅酸盐的熔解热为 L_m，其液态密度与固态密度之比为 α．试求地幔中硅酸盐岩石的熔点 T_m 随 r 的变化率，r 是岩石与地心的距离．

若已知地幔较上部位某处的 $T_m=1300$ ℃，$\alpha=0.9$，$L_m=10^5$ cal/kg．试估算从该处往地心深入 1 000 m 后，T_m 变化了多少？

【分析】 晶体物质熔解时的温度叫熔点，它也是该物质固、液两相平衡共存的温度．固相物质在熔解过程中吸收的热量称为熔解热．克拉珀龙方程确定了两相平衡条件下压强与温度的关系，对于固、液相变，它确定了熔点随压强的变化关系．克拉珀龙方程是求解本题的根据．

在地幔中任取以地心为中心的一薄层固态硅酸盐，它在引力和上、下压强差的作用下达到平衡．随着向地心深入，重力加速度的变化使薄层所受引力发生了变化，从而导致其上、下压强差的变化．压强的变化引起了熔点的变化，其间的变化关系遵循克拉珀龙方程．

【解】 在固态硅酸盐地幔中，以地心为中心，任取半径从 r 到 $(r+\mathrm{d}r)$ 的一薄层，其底面积为 S，则该薄层在万有引力和上、下压强差的作用下达到平衡，即

$$[p(r)-p(r+\mathrm{d}r)]S=\rho_s(S\mathrm{d}r)g_r \tag{1}$$

式中 ρ_s 是固态硅酸盐的质量密度，g_r 是离地心 r 处的重力加速度．由万有引力定律

$$g_r=G\frac{M_r}{r^2}$$

式中 M_r 是地球内部以 r 为半径的那部分球的质量．设地球质量均匀分布，则

$$M_r=\frac{M}{R^3}r^3$$

式中 M 和 R 分别是地球的质量和半径．把 M_r 代入 g_r，得

$$g_r=G\frac{M}{R^3}r=g\frac{r}{R}$$

式中 g 是地球表面的重力加速度，$g=G\frac{M}{R^2}$，把 g_r 代入(1)式，得

$$\mathrm{d}p=-\rho_s g_r\mathrm{d}r=-\rho_s g\frac{r}{R}\mathrm{d}r \tag{2}$$

克拉珀龙方程确定了熔点 T_m 随压强 p 的变化关系，为

$$\frac{\mathrm{d}T_m}{T_m\mathrm{d}p}=\frac{v_l-v_s}{L_m} \tag{3}$$

式中 v_l 和 v_s 分别是物质的液态比容和固态比容(单位质量的体积)，即

$$\begin{cases}v_l=\dfrac{1}{\rho_l}=\dfrac{1}{\alpha\rho_s}\\[2ex] v_s=\dfrac{1}{\rho_s}\end{cases}$$

式中 ρ_l 为液态硅酸盐的密度．把 v_l 和 v_s 代入(3)式，得

$$\frac{\mathrm{d}T_m}{T_m\mathrm{d}p}=\frac{1-\alpha}{\alpha\rho_s L_m}$$

把(2)式代入，得

$$\frac{\mathrm{d}T_m}{\mathrm{d}r}=\frac{\alpha-1}{\alpha}\cdot\frac{T_m}{L_m}g\frac{r}{R} \tag{4}$$

这就是地幔中固态硅酸盐熔点 T_m 随它到地心距离 r 的变化关系．

对于地幔较上部位，近似有

$$r\approx R$$

又因往地心深入的距离

$$\Delta r=-1\ 000\ \mathrm{m}\ll R$$

可作为小量处理．这样，由(4)式，得

$$\Delta T_m\approx\frac{\alpha-1}{\alpha}\cdot\frac{T_m}{L_m}g\Delta r$$

把有关数据代入，得

$$\Delta T_m=4\ ℃$$

可见，从地球表面附近的地幔较上部向地心深入 1 000 m 后，由于压强增大，将使地幔中固态硅酸盐的熔点升高约 4 ℃．

第三部分

电磁学

第一章　静电场,导体与介质

【题1】 真空中有两个点电荷 q_1 和 q_2,它们的质量分别为 m_1 和 m_2,位置矢量分别为 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$,只考虑其间的库仑相互作用．

1. 引入相对位矢 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$,试建立 $\boldsymbol{r}(t)$ 的微分方程．

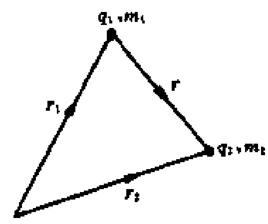
2. 设 $t=0$ 时刻,两点电荷均静止,相互间距为 r_0. 若两点电荷电量异号,试问它们何时相碰．

【分析】 根据库仑定律和牛顿第二定律,分别建立 m_1 和 m_2 的运动方程,相减,即得 $\boldsymbol{r}(t)$ 的微分方程．

在 $t=0$ 时刻,q_1 与 q_2 相对静止,则尔后两点电荷将只沿它们的连线作直线运动,这是一维情形,方程大为简化．积分,利用初条件($t=0$ 时,$r=r_0$)及电荷异号的条件,即可求解．

【解】 1. 如图,q_1 和 q_2 的运动方程为

$$\begin{cases} m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1=-\dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0r^3}\boldsymbol{r} \\ m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2=\dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0r^3}\boldsymbol{r} \end{cases}$$



电图 1-1-1

相减,得

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\ddot{\boldsymbol{r}}_2-\ddot{\boldsymbol{r}}_1=\left(\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_1}\right)\left(\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0r^3}\boldsymbol{r}\right)$$

即

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0r^3}\boldsymbol{r} \tag{1}$$

其中 m 为约化质量

$$m=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$$

2. 因 $t=0$ 时,q_1 和 q_2 静止,尔后两点电荷将沿其连线作直线运动．于是,(1)式可简化为

$$m\ddot{r}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0r^2} \tag{2}$$

为求两点电荷相碰的时刻,即求 $r=0$ 的时刻,需求解 $t(r)$ 关系．为此,先寻找 $\dot{r}(r)$ 关系．利用

$$\ddot{r}=\frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\dot{r}\,\frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}r}$$

由(2)式,得

$$m\dot{r}\mathrm{d}\dot{r}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0r^2}\mathrm{d}r$$

积分，因初条件为

$$t=0\text{ 时},r=r_0,\dot{r}=0$$

得

$$\dot{r}^2=-\frac{q_1q_2}{2\pi\varepsilon_0 m}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)$$

因 q_1 与 q_2 异号，$-q_1q_2>0$，有

$$\dot{r}=\sqrt{\frac{-q_1q_2}{2\pi\varepsilon_0 m}}\sqrt{\frac{r_0-r}{r_0 r}} \tag{3}$$

这就是 $\dot{r}(r)$ 关系式．

把 $\dot{r}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ 代入(3)式，积分，得

$$\int_{r_0}^{r}\sqrt{\frac{r_0 r}{r_0-r}}\mathrm{d}r=\int_0^t\sqrt{\frac{-q_1q_2}{2\pi\varepsilon_0 m}}\mathrm{d}t \tag{4}$$

式中

$$\int_{r_0}^{r}\sqrt{\frac{r_0 r}{r_0-r}}\mathrm{d}r=\sqrt{r_0}\int_{r_0}^{r}\frac{\sqrt{\frac{r}{r_0}}}{\sqrt{1-\frac{r}{r_0}}}\mathrm{d}r$$

作变量替换，令

$$u=\sqrt{\frac{r}{r_0}}$$

有

$$\mathrm{d}r=2r_0u\mathrm{d}u$$

则得

$$\begin{aligned}\sqrt{r_0}\int_{r_0}^{r}\frac{\sqrt{\frac{r}{r_0}}}{\sqrt{1-\frac{r}{r_0}}}\mathrm{d}r&=\sqrt{r_0}\int_1^u\frac{u\cdot 2r_0u\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}\\&=2r_0^{3/2}\int_1^u\frac{u^2\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}=2r_0^{3/2}\int_1^u(-u)\mathrm{d}\sqrt{1-u^2}\\&=r_0^{3/2}(-u\sqrt{1-u^2}+\arcsin u)\Big|_1^u\\&=r_0^{3/2}\left[(-u\sqrt{1-u^2}+\arcsin u)-\frac{\pi}{2}\right]\end{aligned}$$

代入(4)式，得

$$t(r)=\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 m}{-q_1q_2}}r_0^{3/2}\left[\left(-\sqrt{\frac{r}{r_0}}\sqrt{1-\frac{r}{r_0}}+\arcsin\sqrt{\frac{r}{r_0}}\right)-\frac{\pi}{2}\right]$$

设两点电荷相碰($r=0$)的时刻为 $t(0)$，由上式，得

$$t(0)=\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 m}{-q_1q_2}}r_0^{3/2}\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\pi r_0\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 r_0 m}{-2q_1q_2}}$$

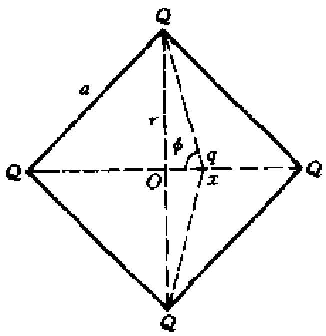
本题表明，在 $t=0$ 时两点电荷静止，尔后沿连线作直线运动的情况下，利用相对位矢 $\boldsymbol{r}$ 的微分方程计算求解比较方便．这是一条经验．

【题 2】 如图，在边长为 a 的正方形的四个顶点分别有电量均为 Q 的固定的点电荷．在正方形对角线交点上放置一个质量为 m、电量为 q（q 与 Q 同号）的自由点电荷．今将 q 沿某一对角线移动一个很小的距离．试问 q 是否将作周期性振动，若是，试求出振动周期．

【分析】 如图，取 x 轴，原点 O 在正方形中心．当 q 有小位移 $x(x\ll a)$ 时，左右两个 Q 给予 q 的作用力沿 $-x$，上下两个 Q 给予 q 的作用力沿 x．计算表明，q 所受合力沿 $-x$ 且与 x 成正比，即合力为线性回复力，故 q 沿 x 作简谐振动，周期 T 可求．

【解】 设 q 沿 x 轴有一小位移 $x(x\ll a)$，则左、右两个 Q 给予 q 的作用力为

$$F_x(1)=\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0(r+x)^2}-\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0(r-x)^2}=\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0r^2}\left[\left(1+\frac{x}{r}\right)^{-2}-\left(1-\frac{x}{r}\right)^{-2}\right]$$



电图 1－2－1

式中

$$r=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

为正方形对角线长度之半．因 $x\ll a$，故 $x\ll r$，有

$$F_x(1)=\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0r^2}\left[\left(1-\frac{2x}{r}\right)-\left(1+\frac{2x}{r}\right)\right]=-\frac{Qq}{\pi\varepsilon_0r^3}x$$

上、下两个 Q 给予 q 的作用力为

$$F_x(2)=\frac{2Qq}{4\pi\varepsilon_0(r^2+x^2)}\cos\varphi=\frac{2Qq}{4\pi\varepsilon_0(r^2+x^2)}\cdot\frac{x}{\sqrt{r^2+x^2}}=\frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0(r^2+x^2)^{3/2}}x\approx\frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0r^3}x$$

q 所受合力为

$$F_x=F_x(1)+F_x(2)=-\frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0r^3}x$$

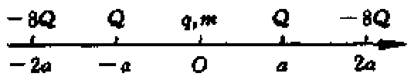
这是一个线性回复力．q 在它的作用下作简谐振动，振动的圆频率 ω 和周期 T 为

$$\omega=\sqrt{\frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0mr^3}}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}Qq}{\pi\varepsilon_0ma^3}},\quad T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi\sqrt{\frac{2\sqrt{2}\pi\varepsilon_0ma^3}{Qq}}$$

【题 3】 如图所示，在 x 轴的 $\pm a$ 处分别有两个固定的点电荷，它们的电量均为 $Q(Q>0)$．在 x 轴的 $\pm 2a$ 处分别有另外两个固定的点电荷，它们的电量均为 $-8Q$．在原点 O 有一个电量为 $q(q>0)$、质量为 m 的带电质点．设带电质点只能在 x 轴上运动．试分析带电质点所在的平衡位置原点 O，是否为稳定平衡位置．若原点 O 为稳定平衡位置，将带电质点移到 $x=A$ 处从静止释放（$0<A\ll a$），试求其振动周期．

【分析】 带电质点 (m,q) 在原点 $x=0$ 处受力平衡．当它偏离平衡位置到达任意 x 处时，可由

库仑定律计算四个固定点电荷对它的合作用力 F_x，若此力为回复力(即与 x 反向)，则 $x=0$ 为稳定平衡位置．计算中可利用 $|x|\ll a$(因 $A\ll a$)的条件，作相应的近似简化．



电图 1-3-1

若 $x=0$ 为稳定平衡位置，则根据力学知识即可计算其振动周期 T.

【解】 设带电质点在 x 轴上偏离平衡位置 $x=0$ 的小位移为 x，则它所受四个固定点电荷的合力为

$$\begin{aligned}F_x &= \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\left[\frac{1}{(x+a)^2}-\frac{1}{(x-a)^2}\right]-\left[\frac{8}{(x+2a)^2}-\frac{8}{(x-2a)^2}\right]\right\}\\ &= \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left\{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{-2}-\left(1-\frac{x}{a}\right)^{-2}-2\left(1+\frac{x}{2a}\right)^{-2}+2\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{-2}\right\}\\ &= \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left\{\left(1-2\frac{x}{a}+3\frac{x^2}{a^2}-4\frac{x^3}{a^3}+\cdots\right)-\left(1+2\frac{x}{a}+3\frac{x^2}{a^2}+4\frac{x^3}{a^3}+\cdots\right)\right.\\ &\quad\left.-2\left[1-2\frac{x}{2a}+3\frac{x^2}{(2a)^2}-4\frac{x^3}{(2a)^3}+\cdots\right]+2\left[1+2\frac{x}{2a}+3\frac{x^2}{(2a)^2}+4\frac{x^3}{(2a)^3}+\cdots\right]\right\}\end{aligned}$$

因 $A\ll a$，故可取 $|x|\ll a$，合力近似为

$$F_x=-\left(\frac{3qQ}{2\pi\varepsilon_0 a^5}\right)x^3$$

这是一个回复力，故 $x=0$ 是稳定平衡位置．

然而，由于 F_x 并非线性回复力，故带电质点将作非简谐性的周期振动．为了计算其振动周期 T，可将 F_x 改写为

$$F_x=-\beta x^3$$

其中

$$\beta=\frac{3qQ}{2\pi\varepsilon_0 a^5}$$

由于 F_x 为保守力，可引入势能．取 $x=0$ 点为势能零点，则带电质点在 x 处的势能为

$$E_p(x)=\frac{1}{4}\beta x^4.$$

因能量守恒，故带电粒子在 A 处的势能(从 A 处静止释放)应等于它在 x 处的势能与动能之和，于是带电质点在 x 处的动能为

$$E_k(x)=E_p(A)-E_p(x)=\frac{1}{4}\beta(A^4-x^4)$$

带电质点在 x 处的速度为

$$v(x)=\sqrt{\frac{2E_k(x)}{m}}=\sqrt{\frac{\beta}{2m}(A^4-x^4)}$$

带电质点从 $x=A$ 处静止释放后，围绕原点往复振动的周期为

$$T=2\int_{-A}^{A}\frac{dx}{v}=2\sqrt{\frac{2m}{\beta}}\int_{-A}^{A}\frac{dx}{\sqrt{A^4-x^4}}$$

由于被积函数为偶函数，故

$$T=4\sqrt{\frac{2m}{\beta}}\int_0^A\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{A^4-x^4}}$$

由第一类椭圆积分公式

$$\begin{cases}\displaystyle\int_x^b\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2+x^2)(b^2-x^2)}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}F\left(\arccos\frac{x}{b},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),\\ \displaystyle F(\Phi,k)=\int_0^\Phi\frac{\mathrm{d}\Phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Phi}}\end{cases}$$

得出

$$\int_0^A\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{A^4-x^4}}=\int_0^A\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(A^2+x^2)(A^2-x^2)}}=\frac{1}{\sqrt{2}A}F\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

故带电质点的振动周期为

$$T=\frac{4}{A}\sqrt{\frac{m}{\beta}}F\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{4}{A}\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 ma^5}{3qQ}}F\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

查表得出

$$F\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1.8541$$

故

$$T=\frac{7.4164}{A}\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 ma^5}{3qQ}}$$

本题的结果表明：1. 在稳定平衡位置附近的小振动，并非均为简谐振动．本题就不是简谐振动．2. 简谐振动的周期与振幅无关，非简谐性振动的周期则可能与振幅有关．本题中，回复力与位移的三次方成正比，振动周期 T 与振幅 A 成反比（有关）．

总之，不能把个别结论随意推广，以偏概全．

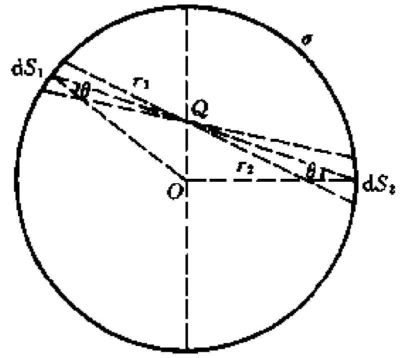
【题 4】 电力与距离平方成反比是库仑定律的主要内容．对此，迄今仍有人进行精确的实验检验．试证明，若电力反平方律是精确的，则孤立带电导体球壳达到静电平衡时，其电量将均匀分布在外球面上，球壳内电场强度处处为零．

【分析】 库仑定律不仅是静电学而且是整个电磁学的基础，因此电力是否精确地与距离平方成反比，精度如何，一直是引人注目的重要课题．显然，诸如当年库仑扭秤实验之类的直接测量，难以达到很高的精度．卡文迪许和麦克斯韦提出了精确验证电力反平方律的方法，并设计完成了相应的间接示零实验，一直沿用至今．本题就是卡文迪许－麦克斯韦实验的基本想法：若电力是严格的反平方律力，则带电导体球壳内表面不带电；反之，内表面应带电．麦克斯韦从理论上导出了内表面电量与球壳电量、δ（偏离反平方律的修正数）、几何因素的定量关系，于是即可由实验确定 δ 应小到什么程度．

为了证明 $\delta=0$ 时，带电球壳内部处处场强为零，可采用反证法．即设 $\delta\neq0$，计算球内（不在球心处）任一微小点电荷所受电力，然后得出 $\delta=0$ 时的结果．由于问题的对称性，球壳上的电荷分布是均匀的．

【解】 如图，设带电球壳的面电荷密度为 σ，由对称性，σ 为常量．设球内任一点（非球心 O）有点电荷 Q．设电力偏离反平方律的修正数为 δ，设 σ 与 Q 同号．则球面上任意一对面元 dS_1 和 dS_2 上的电荷对 Q 的作用力为

$$df = k\frac{\sigma dS_1 Q}{r_1^{\alpha}} - k\frac{\sigma dS_2 Q}{r_2^{\alpha}} = k\sigma Q\left(\frac{dS_1}{r_1^{\alpha}} - \frac{dS_2}{r_2^{\alpha}}\right)$$



电图 1-4-1

式中

$$\alpha = 2 + \delta$$

由于 dS_1 和 dS_2 对 Q 点所张的立体角相同，均为

$$d\Omega = \frac{dS_1\cos\theta}{r_1^2} = \frac{dS_2\cos\theta}{r_2^2}$$

代入 df 表达式，得

$$df = \frac{k\sigma Q d\Omega}{\cos\theta}\left(\frac{1}{r_1^{\alpha-2}} - \frac{1}{r_2^{\alpha-2}}\right) = \frac{k\sigma Q d\Omega}{\cos\theta}\left(\frac{1}{r_1^{\delta}} - \frac{1}{r_2^{\delta}}\right)$$

如图，$r_1 < r_2$．由上式，当 $\alpha = 2, \delta = 0$ 时，$df = 0$；当 $\alpha > 2, \delta > 0$ 时，$df \neq 0$，$\boldsymbol{df}$ 由 Q 点指向较大较远的 dS_2；当 $\alpha < 2, \delta < 0$ 时，$df \neq 0$，$\boldsymbol{df}$ 由 Q 点指向较小较近的 dS_1．

对于整个球壳，总可以按上述方法分成一对对面元．由于对称性，当 $\alpha > 2, \delta > 0$ 时，点电荷 Q 所受合力 $f \neq 0$，$\boldsymbol{f}$ 的方向由 Q 点指向球心 O；当 $\alpha < 2, \delta < 0$ 时，$f \neq 0$，$\boldsymbol{f}$ 的方向由球心 O 指向 Q 点．

由此可见，$\delta = 0$ 与 $\delta \neq 0$ 是根本不同的．当 $\delta = 0$ 时，球壳内各点，球壳内表面处处场强为零，球壳内表面不带电．当 $\delta \neq 0$ 时，除球心外，各点场强均不为零，球壳内表面将带电．

【题 5】 在 xy 平面上有一以坐标原点为圆心，以 R 为半径的带电圆环．电荷线密度的分布为：$y < 0, \lambda = \lambda_0$；$y > 0, \lambda = -\lambda_0$．试求 z 轴（通过圆环的圆心，与圆环所在平面垂直的轴）上的场强分布．

【分析】 关键在于对称性分析．如图所示，在 z 轴上任取一点，则在 $y < 0$ 处的 λ_0 半圆环在 z 点的场强矢量应位于 yz 平面（即无 x 分量）并指向斜上方，这是因为 λ_0 半圆环相对 x 轴而言是对称的，且 $\lambda_0 > 0$．同样，在 $y > 0$ 处的 $-\lambda_0$ 半圆环在 z 点的场强矢量也应位于 yz 平面并指向斜下方．由于两个半圆环相对 x 轴对称，带电均匀且相同，只是一正一负，因此两个半圆环在 z 点的场强矢量的大小应相同，两个场强矢量的 z 分量抵消．于是得出，z 轴与任一点的电场强度 $\boldsymbol{E} = E_y\boldsymbol{j}$，只有 y 分量，E_y 是 $+\lambda_0$ 半圆环贡献的两倍．

【解】 如图，在 $+\lambda_0$ 半圆环上任取线元 $dl = Rd\theta$，它在 z 点的电场强度 $d\boldsymbol{E}$ 的方向沿 dl 与 z 点的连线指向斜上方，大小为

$$dE = \frac{\lambda_0 R d\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

式中

$$r = \sqrt{R^2 + z^2}$$

dE 在 xy 平面上的投影为 dE_r，其方向跟 O 与 dl 的连线平行，其大小为

$$dE_r = dE\sin\alpha = \frac{R}{r}dE$$

dE_r 在 y 轴的投影为

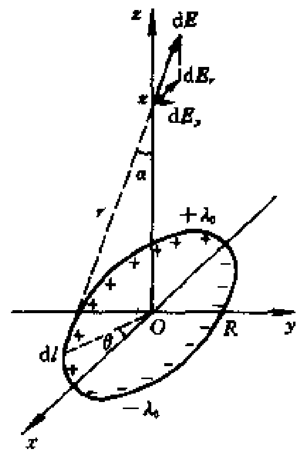
$$dE_y = dE_r\sin\theta = \frac{\lambda_0 R^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sin\theta d\theta$$

$+\lambda_0$ 半圆环对 E_y 的总贡献为

$$E_{y,+} = \int dE_y = \frac{\lambda_0 R^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\int_0^\pi \sin\theta d\theta = \frac{\lambda_0 R^2}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$

因此，整个带电圆环在 z 点的场强为

$$\boldsymbol{E} = (0, E_y, 0) = (0, 2E_{y,+}, 0) = \left(0, \frac{\lambda_0 R^2}{\pi\varepsilon_0 r^3}, 0\right)$$



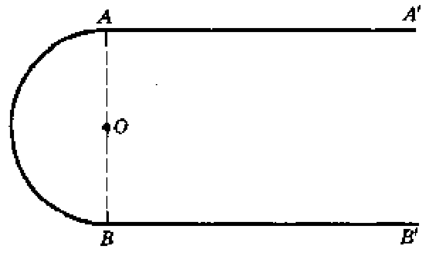
电图 1－5－1

【题 6】 一无限长均匀带电细线弯成如电图 1－6－1 所示的平面图形，其中 $\overset{\frown}{AB}$ 是半圆弧，AA' 和 BB' 是两平行直线，A' 和 B' 向右端无限延伸．试求圆心 O 处的电场强度．

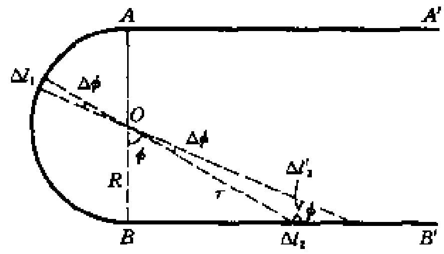
【解】 本题求电场强度，然而竟未给出电荷线密度以及圆半径等通常必不可少的已知条件，明显地暗示所求 O 点的场强似应为零，否则便无从求解．

均匀带电细线由半圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 及两平行半无限长直线 AA' 和 BB' 构成．显然，它在平面上应产生确定的非零电场强度分布（在整个空间亦应如此）．但 O 点似乎是平面中唯一具有某种对称性的特殊位置，在 O 点的电场强度为零是可能的，并非不合理．

O 点的场强是四部分贡献的矢量和，即左上 $\frac{1}{4}$ 圆弧、左下 $\frac{1}{4}$ 圆弧、上面的半无限长直线 AA'、下面的半无限长直线 BB'，它们在 O 点产生的电场强度分别指向右下方、右上方、左上方、左下方（假设细线带正电），相互抵消是确有可能的．



电图 1－6－1



电图 1－6－2

为了检验上述猜测是否正确，如电图 1－6－2 所示，在左上 $\frac{1}{4}$ 圆弧中任取弧元 Δl_1，相应地在 BB' 中取线元 Δl_2．Δl_1 和 Δl_2 对 O 点的张角 $\Delta\phi$ 相同．显然．当 Δl_1 遍及左上 $\frac{1}{4}$ 圆弧时，Δl_2 相应地遍及整个 BB' 直线．左下 $\frac{1}{4}$ 圆弧与 AA' 类似．

现在来看 Δl_1 和 Δl_2 在 O 点产生的电场强度 $\Delta \boldsymbol{E}_1$ 与 $\Delta \boldsymbol{E}_2$ 的关系．显然，$\Delta \boldsymbol{E}_1$ 与 $\Delta \boldsymbol{E}_2$ 刚好反向．关键是其大小是否相等．如电图 1－6－2，

$$\Delta l_1 = R\Delta\phi$$

式中 R 是半圆弧的半径．设细线中电荷线密度为 λ，则

$$\Delta E_1 = k\frac{\Delta Q_1}{R^2} = k\frac{\lambda\Delta l_1}{R^2} = k\frac{\lambda\Delta\phi}{R}$$

其中 ΔQ_1 是 Δl_1 上的电量．类似地，若 Δl_2 上的电量为 ΔQ_2，则

$$\Delta E_2 = k\frac{\Delta Q_2}{r^2} = k\frac{\lambda\Delta l_2}{r^2}$$

式中 r 是 Δl_2 到 O 点的距离．由电图 1－6－2，不难发现下述几何关系

$$\Delta l_2 = \frac{\Delta l'_2}{\cos\phi},\quad \Delta l'_2 = r\Delta\phi,\quad \cos\phi = \frac{R}{r}$$

代入，得

$$\Delta E_2 = k\frac{\lambda\Delta\phi}{R}$$

故

$$\Delta E_2 = \Delta E_1$$

可见，任意弧元 Δl_1 及相应的线元 Δl_2 在 O 点产生的电场强度 $\Delta \boldsymbol{E}_1$ 与 $\Delta \boldsymbol{E}_2$ 刚好抵消．由于 Δl_1 任选，且当 Δl_1 遍及半圆弧时，Δl_2 刚好遍及 AA' 及 BB'，因此，圆心 O 处的电场强度应为零，即

$$\boldsymbol{E}_0 = 0$$

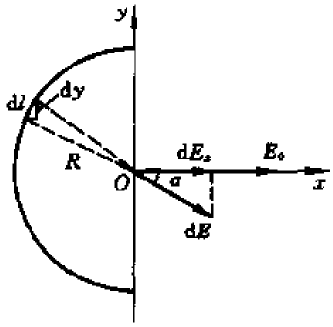
【题 7】 半径为 R 的半圆环均匀带电，电荷线密度为 λ，试求圆心处的电场强度．

【分析】 由本章题 6 可知，均匀带电的四分之一圆周在圆心处的电场强度，同与它在端点相切的半无限长直线（均匀带电且电荷线密度相同）在圆心处的电场强度刚好抵消，即相等、反向．因此均匀带电半圆环在圆心的电场强度，可由与它两端点相切的两条平行半无限长直线在圆心处的电场强度求出．后者由高斯定理容易解出．这是本题的一种解法．

另一种方法，是直接计算半圆周各弧元电荷在圆心处的电场强度，再用场强叠加原理求其矢量和．可充分利用题目的对称性简化计算．

下面只给出第二种解法．

【解】 如图，以圆心 O 为原点建立 x 轴和 y 轴．在半圆上任取弧元 $\mathrm{d}l$，它在 O 点的电场强度 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 已在图中画出．因对称性，各 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 的 y 分量互相抵消，x 分量合成 O 点的电场强度 $\boldsymbol{E}_0$．



电图 1－7－1

$\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 的 x 分量为

$$\mathrm{d}E_x = \frac{\lambda\mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\alpha$$

以弧元 $\mathrm{d}l$ 为斜边作成一个小直角三角形，两直角边分别与 x 轴和 y 轴平行．于是，

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}l\cos\alpha$$

dy 即为弧元 dl 在 y 轴上的投影．半圆环在圆心 O 的电场强度指向 x 方向，即

$$E_o = E_{ox} = \sum dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\sum dy$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R^2}2R = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

【题 8】 在空间 A 点有电量为 $5Q$ 的固定点电荷，在 B 点有电量为 $12Q$ 的固定点电荷．A 点和 B 点相距 $13a$，空间另一 C 点与 A 点和 B 点分别相距 $5a$ 和 $12a$．

1．以 C 点为球心，以 $r = a$ 为半径作一球．试求在该球区域内，静电场电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的平均值

$$\bar{\boldsymbol{E}} = \frac{\sum\limits_i \boldsymbol{E}_i \Delta V_i}{\sum\limits_i \Delta V_i}$$

的大小 $|\bar{\boldsymbol{E}}|$，式中 $\boldsymbol{E}_i$ 是在体积元 ΔV_i 处的电场强度．

2．以 C 点为球心，以 $r = 10a$ 为半径作一球．试求在该球区域内，静电场电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的平均值的大小 $|\bar{\boldsymbol{E}}|$．

【分析】 以 C 点为中心的球形区域内任一点的电场强度是，在 A 点和 B 点的点电荷在该点的电场强度的矢量和．球形区域内的平均电场强度 $|\bar{\boldsymbol{E}}|$ 是 A 点和 B 点的点电荷在该区域内的平均场强的矢量和．因此，问题归结为求点电荷在球形区域内的平均电场强度．第 1 问和第 2 问的区别在于，前者的球形区域较小，A 点和 B 点均在球外，后者的球形区域较大，A 点在球内，B 点在球外．

为求任一点电荷 Q 在某球形区域内的平均场强 $|\bar{\boldsymbol{E}}|$，可以设想在该球形区域内有均匀体电荷分布，电荷密度为 ρ，总电量为 q．则点电荷 Q 对球电荷的作用力 $\boldsymbol{F}_q$ 应为 Q 对球内各个 $\Delta q_i = \rho\Delta V_i$ 作用力的矢量和，即等于 q 与 $\bar{\boldsymbol{E}}$ 的乘积 $\boldsymbol{F}_q = q\bar{\boldsymbol{E}}$．把球电荷 q 对点电荷 Q 的作用力表为 $\boldsymbol{F}_Q$，则因 $\boldsymbol{F}_q$ 与 $\boldsymbol{F}_Q$ 为一对作用力与反作用力，故 $\boldsymbol{F}_Q = -\boldsymbol{F}_q$．$\boldsymbol{F}_Q$ 容易求得，于是 $\boldsymbol{F}_q$ 与 $\bar{\boldsymbol{E}}$ 均可求得．

以上讨论与点电荷 Q 是否在球形区域内无关，即无论 Q 在球外或球内，上述 $\boldsymbol{F}_q = q\bar{\boldsymbol{E}}$ 及 $\boldsymbol{F}_q = -\boldsymbol{F}_Q$ 的关系均成立．若 Q 在球外，$\boldsymbol{F}_Q$ 相当于 q 集中在球心 O 点对 Q 的作用力．若 Q 在球内，则 Q 与球心 O 点的距离 R 小于球半径 r 时，$\boldsymbol{F}_Q$ 包括两部分．其一是半径为 R 的小球电荷对 Q 的作用力，这相当于 ρV_R（V_R 是半径为 R 的小球体积）集中在球心 O 点对 Q 的作用力；另一是内、外半径为 R 和 r 的球壳电荷对 Q 的作用力，应为零．

【解】 设点电荷 Q 在一球形区域内的平均场强为 $\bar{\boldsymbol{E}}$．设 Q 与球心 O 的距离为 R_{QO}，球内均匀分布着电荷，电荷体密度为 ρ，总电量为 q．则当 Q 在球外时，球内电荷 q 对点电荷 Q 的作用力 $\boldsymbol{F}_Q$ 为

$$\boldsymbol{F}_Q = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R_{OQ}^3}\boldsymbol{R}_{OQ} \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{R}_{OQ}$ 是球心 O 点到点电荷 Q 的距离．由牛顿第三定律，点电荷 Q 对球电荷 q 的作用力 $\boldsymbol{F}_q$ 为

$$\boldsymbol{F}_q = -\boldsymbol{F}_Q = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R_{OQ}^3}\boldsymbol{R}_{OQ} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R_{QO}^3}\boldsymbol{R}_{QO} = q\boldsymbol{E}_0 \tag{2}$$

式中

$$\boldsymbol{E}_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_{QO}^3}\boldsymbol{R}_{QO} \tag{3}$$

$\boldsymbol{F}_q$ 是点电荷 Q 对球内各元电荷 $\Delta q_i = \rho\Delta V_i$ 作用力的矢量和．设 Q 在 Δq_i 处的电场强度为 $\boldsymbol{E}_i$，则

$$\boldsymbol{F}_q = \sum_i \Delta q_i \boldsymbol{E}_i = \sum_i \rho\Delta V_i \boldsymbol{E}_i = \sum_i \frac{q}{V}\Delta V_i \boldsymbol{E}_i = q\frac{\sum_i \boldsymbol{E}_i\Delta V_i}{\sum_i \Delta V_i}$$

式中 $V = \sum_i \Delta V_i$ 是球的体积．因

$$\bar{\boldsymbol{E}} = \frac{\sum_i \boldsymbol{E}_i\Delta V_i}{\sum_i \Delta V_i} \tag{4}$$

故

$$\boldsymbol{F}_q = q\bar{\boldsymbol{E}} \tag{5}$$

由(2)、(3)、(5)式，得

$$\bar{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_{QO}^3}\boldsymbol{R}_{QO} \tag{6}$$

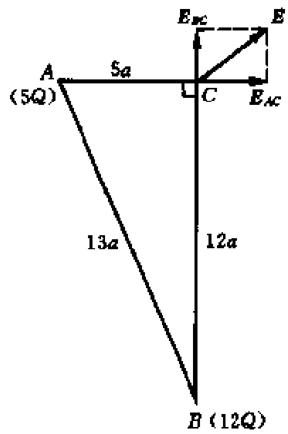
可见，当点电荷 Q 在球外时，它在球形区域内的平均电场强度即为它在球心处的电场强度，与球半径的大小无关．

若点电荷 Q 在球内，设 Q 与球心距离为 R（即上述 R_{QO}），并设球半径为 r（$r > R$），则球电荷 q 对点电荷 Q 的作用力 $\boldsymbol{F}_Q$，等于半径为 R 的小球电荷 ρV_R（V_R 是小球体积）对 Q 的作用力，与内、外半径为 R、r 的带电球壳对 Q 的作用力之和，因后者为零，故

$$\boldsymbol{F}_Q = \frac{(\rho V_R)Q}{4\pi\varepsilon_0 R_{OQ}^3}\boldsymbol{R}_{OQ} \tag{7}$$

当 Q 在球内时，$\boldsymbol{F}_q = -\boldsymbol{F}_Q$ 以及 $\boldsymbol{F}_q = q\bar{\boldsymbol{E}}$ 的关系仍成立．故当 Q 在球内时，

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{E}} &= \frac{\boldsymbol{F}_q}{q} = -\frac{\boldsymbol{F}_Q}{q} = -\frac{1}{q}\cdot\frac{\rho V_R Q}{4\pi\varepsilon_0 R_{OQ}^3}\boldsymbol{R}_{OQ} \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_{QO}^3}\boldsymbol{R}_{QO}\cdot\frac{1}{q}\cdot\frac{q}{\frac{4}{3}\pi r^3}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 \\ &= \left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_{QO}^3}\boldsymbol{R}_{QO}\right]\frac{R^3}{r^3} = \frac{R^3}{r^3}\boldsymbol{E}_0 < \boldsymbol{E}_0\end{aligned}$$



电图 1－8－1

可见，当 Q 在球内时，它在球形区域内的平均电场强度等于 Q 在球心处的电场强度 $\boldsymbol{E}_0$ 乘上 $\frac{R^3}{r^3}$ 因子，其中 r 是球半径，$R = R_{QO}$ 是 Q 与球心 O 的距离．

1. 以 C 为球心，$r = a$ 为半径作球时，A 点和 B 点均在球外，

$$\bar{\boldsymbol{E}} = \bar{\boldsymbol{E}}_A + \bar{\boldsymbol{E}}_B = \boldsymbol{E}_{AC} + \boldsymbol{E}_{BC}$$

如图所示，因 ABC 为直角三角形，$\boldsymbol{E}_{AC} \perp \boldsymbol{E}_{BC}$，故

$$|\overline{\boldsymbol{E}}| = \sqrt{E_{AC}^2 + E_{BC}^2} = \sqrt{\left(\frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0 R_{AC}^2}\right)^2 + \left(\frac{Q_B}{4\pi\varepsilon_0 R_{BC}^2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\left[\frac{5Q}{(5a)^2}\right]^2 + \left[\frac{12Q}{(12a)^2}\right]^2} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{13Q}{60a^2}$$

2. 以 C 为球心，$r = 10a$ 为半径作球时，A 点在球内，B 点在球外，故

$$\overline{\boldsymbol{E}} = \overline{\boldsymbol{E}}_A + \overline{\boldsymbol{E}}_B = \boldsymbol{E}_{AC}\frac{(5a)^3}{(10a)^3} + \boldsymbol{E}_{BC}$$

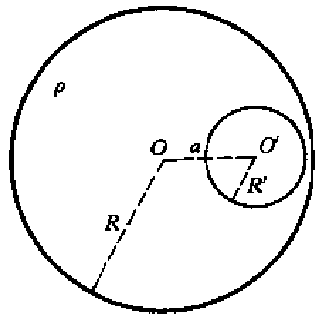
即

$$|\overline{\boldsymbol{E}}| = \sqrt{\left[\frac{(5a)^3}{(10a)^3}E_{AC}\right]^2 + E_{BC}^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{Q}{5a^2}\right)^2 + \left(\frac{Q}{12a^2}\right)^2}$$

$$= \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{\sqrt{109}}{120a^2}Q < \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{13Q}{60a^2}$$

【题9】 如电图1-9-1所示，在半径为 R、体电荷密度为 ρ 的均匀带电球体内部挖去半径为 R' 的一个小球，小球球心 O' 与大球球心 O 相距为 a. 试求 O' 的电场强度，并证明空腔内电场均匀 .



电图 1-9-1

【分析】 把挖去空腔的带电球看作由带电大球(R,ρ)与带异号电的小球$(R',-\rho)$构成 . 由高斯定理求出它们各自在 O' 的电场强度，再叠加即得 $\boldsymbol{E}_{O'}$. 这是利用不具有对称性的带电体的特点，把它凑成由若干具有对称性的带电体组成，使问题得以简化 .

在小球内任取另一点 P，用同样方法求出 $\boldsymbol{E}_p$，比较 $\boldsymbol{E}_p$ 和 $\boldsymbol{E}_{O'}$，即可证明空腔内电场是均匀的 . 采用矢量表述，可使证明简单明确 . 这是本题的启示 .

【解】 设均匀带电大球（无空腔）在 O' 点的电场强度为 $\boldsymbol{E}_{大球,O'}$，作以 O 点为中心以 a 为半径的球形高斯面，由静电场的高斯定理，得

$$\oiint \boldsymbol{E}_{大球,O'}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = (E_{大球,O'})4\pi a^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\frac{4\pi}{3}a^3\rho$$

故

$$\boldsymbol{E}_{大球,O'} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{a}$$

式中 $\boldsymbol{a}$ 是从 O 点到 O' 点的矢量 .

同样，均匀带异号电的小球$(R',-\rho)$在球心 O' 点的电场强度为

$$\boldsymbol{E}_{小球,O'} = 0$$

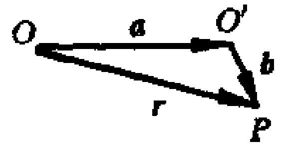
O' 点的电场强度 $\boldsymbol{E}_{O'}$ 为两者之和，即

$$E_{O'} = E_{大球,O'} + E_{小球,O'} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}a$$

如电图 1－9－2 所示，在小球内任取另一点 P，设 $O'P$ 为 $\boldsymbol{b}$，OP 为 $\boldsymbol{r}$，则 P 点的电场强度 $\boldsymbol{E}_P$ 为

$$\boldsymbol{E}_P = \boldsymbol{E}_{大球,P} + \boldsymbol{E}_{小球,P} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r} + \frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{b}$$

$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{b}) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{a}$$



电图 1－9－2

可见

$$\boldsymbol{E}_P = \boldsymbol{E}_{O'}$$

因 P 点任取，故球形空腔内的电场是均匀的．

【讨论】 值得注意的是，在均匀带电的介质球(大球)中完整地挖去一个球形空腔(小球)，即使小球所在处成为无外加电荷的“电荷洞”，又使小球所在处成为无介质的“介质洞”．“电荷洞”中任一点的电场强度可看作带正电大球与带负电小球在该点产生的电场强度之和，利用 $\boldsymbol{D}$ 的高斯定理和 $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$ 得出“电荷洞”中各点的电场强度是均匀的，为 $\boldsymbol{E}_1 = \frac{1}{3\varepsilon}\rho\,\boldsymbol{a}$，式中 ε 是介质的电容率(介电常数)，$\boldsymbol{a}$ 是大球和小球中心的距离，ρ 是体电荷密度．$\boldsymbol{E}_1$ 是考虑到小球所在处仍有介质的结果．再挖去介质，使小球所在处成为“介质洞”，由于有介质时极化电荷的影响是使小球所在处的电场强度减小，且小球所在处介质均匀极化，因此挖去“介质洞”后该处的电场强度应增大 ε_r 倍，为 $\boldsymbol{E} = \varepsilon_r\boldsymbol{E}_1 = \frac{1}{3\varepsilon_0}\rho\,\boldsymbol{a}$，与本题答案一致．

顺便指出，$\boldsymbol{E} = \frac{1}{3\varepsilon_0}\rho\boldsymbol{a}$ 的答案经验证，符合静电场的方程和边条件，是唯一正确的解．

【题 10】 如电图 1－10－1 所示，把半径为 R 的球体切为八等份，取其中一份，使之均匀带电，电荷体密度为 ρ．试求此八分之一带电球体在球心 O 处的电场强度大小 E_0．

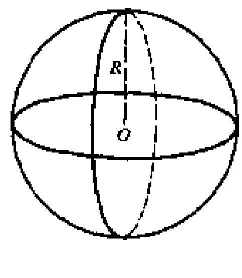
【分析】 带电球体可以看作是许多带电球面构成的．因此，求解本题时，可先讨论八分之一均匀带电球面在球心的电场强度，然后再通过叠加，计算八分之一均匀带电球体在球心的电场强度．

为了充分利用对称性，可将四个八分之一均匀带电球面拼成一个均匀带电半球面．通过空间对称性分析，设法建立每个八分之一均匀带电球面在球心的电场强度与均匀带电半球面在球心的电场强度之间的大小关系．

本章题 7 得出，均匀带电半圆在圆心的电场强度大小与半圆在直径方向的投影成正比，即与圆的直径成正比．由此产生联想，猜到均匀带电半球面在球心的电场强度大小与半球面在底平面上的投影成正比，即与底圆的面积成正比．

根据上述思路，本题即可求解．

顺便指出，本题是专为训练解题者如何将看似不对称的问题转化为对称的问题而设置的，因此，在求解过程中尽可能不使用积分运算．



电图 1－10－1

【解】 先讨论半径为 r、电荷面密度为 σ(σ 为常量)的半球面在球心 O 的电场强度．

如电图 1－10－2，由于对称性，均匀带电半球面在球心 O 的电场强度 $\boldsymbol{E}''_0$ 必定沿 x 方向．因此，$\boldsymbol{E}''_0$ 可由半球面上各部分电荷在 O 点的电场强度的 x 分量求和得出．

在半球面上任取面积为 $\mathrm{d}S$ 的面元，其上的电量为 $\sigma\mathrm{d}S$，它在 O 点产生的电场强度表为 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$．如电图 1－10－2，将半球面绕 x 轴旋转，总可以使得 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 刚好落在电图 1－10－2 的纸平面上，于是相应的面元 $\mathrm{d}S$ 在电图 1－10－2 中便可用一小段圆弧代表，整个半球面相应地用半圆代表．设电场强度 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 与 x 轴的夹角为 ϕ，则它的 x 分量 $\mathrm{d}E_x$ 为

$$\mathrm{d}E_x = \mathrm{d}E\cos\phi = \frac{\sigma\mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\phi$$

由于面元极小，可视为平面的一部分，根据立体几何中的“面积投影定理”，$\mathrm{d}S$ 在半球底圆面上的投影 $\mathrm{d}S_{/\!/}$ 为

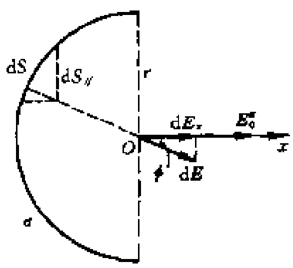
$$\mathrm{d}S_{/\!/} = \mathrm{d}S\cos\phi$$

于是

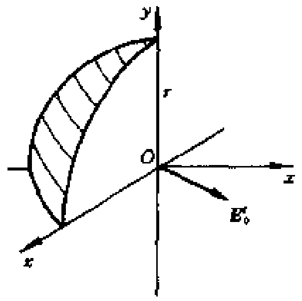
$$\mathrm{d}E_x = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}S_{/\!/}$$

均匀带电半球面在 O 点的电场强度 $\boldsymbol{E}''_0$ 的大小，等于各面元在 O 点电场强度的 x 分量之和，即

$$E''_0 = \sum\mathrm{d}E_x = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sum\mathrm{d}S_{/\!/}$$



电图 1－10－2



电图 1－10－3

其中 $\sum\mathrm{d}S_{/\!/}$ 就是半球面在底圆面上的投影，即为底圆面积，故

$$\sum\mathrm{d}S_{/\!/} = \pi r^2$$

代入，得

$$E''_0 = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$

上式表明，均匀带电半球面在球心 O 点的电场强度的大小与其半径的大小无关．

半球面可由四个八分之一球面拼成．每一个均匀带电的八分之一球面在球心 O 的电场强度方向对称，大小相同，它们的矢量和就是上面解出的 $\boldsymbol{E}''_0$．如电图 1－10－3 所示，一个八分之一球面在 O 点的电场强度表为 $\boldsymbol{E}'_0$，则 $\boldsymbol{E}'_0$ 的 x 分量 $\boldsymbol{E}'_{0x}$ 与 $\boldsymbol{E}''_0$ 的大小 E''_0 之间应有下述关系，

$$E''_0 = 4E'_{0x}$$

由电图1－10－3，因对称性，$\boldsymbol{E}'_0$与x、y、z轴的夹角应相同，即$\boldsymbol{E}'_0$的三个分量$\boldsymbol{E}'_{0x}$、$\boldsymbol{E}'_{0y}$、$\boldsymbol{E}'_{0z}$应相同．因此，$\boldsymbol{E}'_0$与$\boldsymbol{E}'_{0x}$的关系相当于立方体对角线与边长的关系，为

$$E'_0 = \sqrt{3}E'_{0x}$$

由以上三式，得

$$E'_0 = \frac{\sqrt{3}\sigma}{16\varepsilon_0}$$

这就是均匀带电的电荷面密度为σ的八分之一球面在其球心O的电场强度$\boldsymbol{E}'_0$的大小．上式表明，$\boldsymbol{E}'_0$与球面半径的大小无关．

最后，把半径为R、电荷体密度为ρ的八分之一球体(ρ为常量)，看作由一系列很薄的八分之一球壳组成．各球壳的内半径统一表为r，厚度表为$\mathrm{d}r$，面积表为$S(r)$，其中r的变化范围为从O到R，则球壳的体积为

$$\mathrm{d}V = S(r)\mathrm{d}r$$

球壳所带电量为

$$\mathrm{d}Q = \rho\mathrm{d}V = \rho S(r)\mathrm{d}r$$

把很薄的八分之一球壳当作八分之一球面，则球面的电荷面密度应为

$$\sigma(r) = \frac{\mathrm{d}Q}{S(r)} = \rho\mathrm{d}r$$

由上面的结果，这些八分之一球面在球心O的电场强度的大小为

$$\mathrm{d}E_0 = \frac{\sqrt{3}\sigma(r)}{16\varepsilon_0}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\rho\mathrm{d}r}{16\varepsilon_0}$$

所有这些$\mathrm{d}\boldsymbol{E}_0$的方向相同，因此，均匀带电的八分之一球体在球心$O$的电场强度的大小为

$$E_0 = \sum\mathrm{d}E_0 = \frac{\sqrt{3}\rho}{16\varepsilon_0}\sum_{r=0}^{R}\mathrm{d}r = \frac{\sqrt{3}\rho R}{16\varepsilon_0}$$

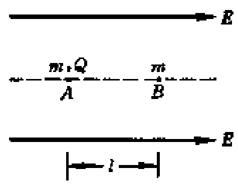
上式表明，E_0与球半径R成正比．

【题11】 在惯性系S中有匀强电场$\boldsymbol{E}$，其方向如图所示．在电场中与$\boldsymbol{E}$平行的一条几何直线(图中画虚线)上，有两个静止的小球A和B．两小球的质量均为m，A球所带电量为$Q(Q>0)$，B球不带电，开始时两球相距为l．在电场的作用下，A球开始沿直线运动，并与B球发生弹性正碰撞，从而使B球也参与运动．设在各次碰撞过程中，A球和B球之间并无电量的转移．设万有引力可略去不计．

试证明，A球与B球相邻两次碰撞之间的时间间隔相同，并求出该时间间隔T．

【分析】 在惯性系S中，带电小球A在电场力的作用下，从静止开始沿电场方向(即向右)以加速度a作匀加速直线运动，经过t的时间，走过l的距离后，速度达到v时，与静止的不带电小球B相碰，这是第一次碰撞．由于两球质量相同且为弹性正碰撞，碰后交换速度，即A球静止，B球

以 v 沿电场方向向右运动．碰后，B 球以 v 作匀速直线运动，A 球则再次从静止开始，以 a 作匀加速直线运动，先加速到 v，尔后继续加速直至追上 B 球，发生第二次碰撞．碰后依然交换速度，然后 A 球以 v 开始加速运动，B 球则以 v_1(A 球追上 B 球作第二次碰撞前 A 球的速度）作匀速运动，直至 A 球追上 B 球，发生第三次碰撞．如此等等，无须赘述．根据以上分析，可以逐一计算第一次与第二次碰撞之间的时间间隔，第二次与第三次碰撞之间的时间间隔，等等，并注意计算结果的规律性，即可完成本题的证明．但这种做法太繁，有没有更简明的证法呢?



电图 1 - 11 - 1

不难发现，在惯性系 S 中，在任意两次相邻的碰撞之间，A 球总是以相同的加速度 a 作匀加速直线运动，B 球则总是作匀速直线运动，但是，在不同次碰撞后，A 球的初、终速度以及 B 球的速度有所不同，而这正是计算的麻烦所在．

由此想到，在第一次碰撞后，若改取随 B 球一起运动的惯性系 S_1，则在 S_1 系中，B 球静止；A 球以初速 v 向左(与 $\boldsymbol{E}$ 反向）运动，而向右的加速度 a 不变，即 A 球以初速 v 向左以 a 作匀减速运动(注意，在不同惯性系中，A 球的加速度相同)．这样，经过 t 时间后，A 球速度减为零，与 B 球相距 l(上述 v, a, t, l 的含义见第一段)．然后，A 球再从静止向右以 a 加速运动，再经 t 时间后，速度达到 v，走过 l 的距离，与 B 球第二次碰撞．所以，第一次和第二次碰撞之间的时间间隔是 $2t$．第二次碰撞后，A 球与 B 球仍交换速度，即在 S_1 系中，B 球以 v 向右运动，A 球静止．如法炮制，再改取随 B 球一起运动的惯性系 S_2，就会出现与上面完全相同的情形．重复上述讨论，可知 A 球与 B 球将再经 $t + t = 2t$ 的时间后，第三次碰撞，即第二次和第三次碰撞之间的时间间隔亦是 $2t$．总之，A 球与 B 球任意两次相邻碰撞之间的时间间隔是相同的，均为 $2t$．

把选定的作为参照的惯性系，从 S 系变换到 S_1 系，再变换到 S_2 系，等等，究竟起了什么作用呢?它实际上是把在 S 系中经各次碰撞后，A 球的不同初速和终速的匀加速直线运动以及 B 球的不同速度的匀速直线运动，依次变换到 S_1 系和 S_2 系等等．结果是出现了雷同的简单情形，即在 S_1 和 S_2 系中，B 球总是静止，A 球则先以 v 反向减速为零，然后再加速返回作下一次碰撞．于是问题迎刃而解．由此题，可以体会参照系变换的威力以及如何变换才能使问题简化．

【解】 A 球带电 $Q > 0$，在电场力 $Q\boldsymbol{E}$(指向右方）的作用下，其加速度的方向指向右方，即与 $\boldsymbol{E}$ 同向，加速度的大小为

$$a = \frac{QE}{m}$$

在 S 系中，A 球从静止开始，以 a 作匀加速直线运动，经 t 时间，走过 l 的路程，速度达到 v，与 B 球第一次碰撞，

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2ml}{QE}}$$

$$v = at = \sqrt{\frac{2QEl}{m}}$$

碰后，A 球与 B 球交换速度，即在 S 系中，A 球静止，B 球以 v 向右匀速直线运动．

变换到随 B 球一起运动的惯性系 S_1，则在 S_1 系中，第一次碰撞后，B 球静止，A 球以 v 向左减速运动，经 t 时间后，A 球速度减为零，与 B 球相距 l，然后 A 球从静止加速返回，又经 t 时间，

速度增为 v(向右),走过 l 路程,与B球第二次碰撞．故第一次与第二次碰撞之间的时间间隔为

$$T = 2t = 2\sqrt{\frac{2ml}{QE}}$$

第二次碰撞后,再变换到随B球一起运动的惯性系 S_2,同样的讨论得出,第二次与第三次碰撞之间的时间间隔也是上述 T. 如此重复,可知A球和B球任意两次相邻碰撞之间的时间间隔相同,均为 T.

【题12】 在 $-d \leqslant x \leqslant d$ 的空间区域内,电荷体密度 $\rho > 0$ 为常量．其他区域均为真空．若在 $x = 2d$ 处将质量为 m、电量为 $q(q < 0)$ 的带电质点自静止释放．试问经多长时间它能到达 $x = 0$ 位置．设带电质点只受电力,其余引力、阻力等均可忽略．

【分析】 带电质点的运动决定于所受电力,首先要弄清楚电场的分布．从 $-d$ 到 d 的全部有电荷区域相当于无穷大均匀带电平板,其面电荷密度可由 ρ 和 d 得出,它在 $x > d$ 区域(以及 $x < -d$ 区域)产生均匀电场,因此带电质点从 $2d$ 到 d 的运动是初速为零的匀加速直线运动,所需时间 t_1 易求．

当带电质点进入 $0 \leqslant x \leqslant d$ 区域,例如到达其中任意位置 x 时,可将全部有电荷的区域分为从 $-d$ 到 x 的区域 Ⅰ 以及从 x 到 d 的区域 Ⅱ．它们相当于两个无穷大均匀带电平板,区域 Ⅰ 与区域 Ⅱ 对带电质点的作用力反向,前者较大后者较小,随着带电质点不断接近 $x = 0$,前者减小后者增大(均指绝对值),换言之,在 $0 \leqslant x \leqslant d$ 区域,带电质点受到变力的作用,继续加速．

由于从 $-d$ 到 x 的区域 Ⅰ 和从 x 到 d 的区域 Ⅱ 相当于两个无穷大均匀带电平板,前者的面电荷密度 σ_{I} 与 ρ 和 $(d+x)$ 成正比,后者的 σ_{II} 则与 ρ 和 $(d-x)$ 成正比,x 点的电场强度是两者之和,应与 x 成正比且指向 x 减小的方向．因此,带电质点从 d 到0受到的非均匀电力是线性回复力,带电质点应作简谐振动,由此从 d 到0所需时间 t_2 可求．

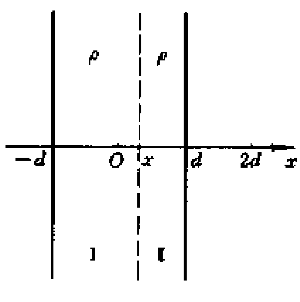
在求解时,请注意两阶段的"衔接"．由于带电质点到达 $x = d$ 处的速度不为零,在写出简谐振动表达式时,应注意时间零点的选择及相应的初始条件,不要搞错．

【解】 设 $x > d$ 区域的电场强度为 $\boldsymbol{E}_1$,从 $-d$ 到 d 的全部有电荷的区域相当于无穷大均匀带电平板,在平板上取单位面积 $S_0 = 1$,则带电平板的面电荷密度为

$$\sigma = 2dS_0\rho = 2d\rho$$

于是 $\boldsymbol{E}_1$ 的方向指向 x 轴的正方向,大小为

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho d}{\varepsilon_0}$$



电图 1-12-1

设 $0 \leqslant x \leqslant d$ 区域的电场强度为 $\boldsymbol{E}_2$．如图,把从 $-d$ 到 d 的全部有电荷的区域分为从 $-d$ 到 x 的区域 Ⅰ 和从 x 到 d 的区域 Ⅱ．区域 Ⅰ 和区域 Ⅱ 分别相当于面电荷密度为

$$\sigma_{\text{I}} = (d+x)\rho \quad \text{和} \quad \sigma_{\text{II}} = (d-x)\rho$$

的无穷大均匀带电平板,它们在 x 点的电场强度 $\boldsymbol{E}_{\text{I}}$ 的方向指向 x 轴正方向,$\boldsymbol{E}_{\text{II}}$ 的方向指向 $x = 0$ 点,其大小分别为

$$E_{\text{I}} = \frac{\sigma_{\text{I}}}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho(d+x)}{2\varepsilon_0},\quad E_{\text{II}} = \frac{\sigma_{\text{II}}}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho(d-x)}{2\varepsilon_0}$$

因此，x 点的电场强度为

$$\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{E}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{E}_{\mathrm{II}}$$

$\boldsymbol{E}_2$ 的方向指向 x 轴的正方向，其大小为

$$E_2 = E_{\mathrm{I}} - E_{\mathrm{II}} = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}$$

由此可见，$x > d$ 区域的 $\boldsymbol{E}_1$ 是均匀电场，带电质点作匀加速直线运动．$0 \leqslant x \leqslant d$ 区域的 $\boldsymbol{E}_2$ 是非均匀电场，它对带电质点的作用力是线性回复力，带电质点作简谐振动．

带电质点 $q(q<0)$ 在 $x = 2d$ 到 $x = d$ 区域受电场 $\boldsymbol{E}_1$ 的作用力 $\boldsymbol{F}_1$，其方向指向 $x = 0$ 点，其大小为

$$F_1 = -qE_1 = -\frac{q\rho d}{\varepsilon_0}$$

带电质点的加速度为

$$a_1 = \frac{F_1}{m} = -\frac{q\rho d}{\varepsilon_0 m}$$

从 $x = 2d$ 点静止出发，经匀加速直线运动到达 $x = d$ 点所需的时间为

$$t_1 = \sqrt{\frac{2d}{a_1}} = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 m}{-q\rho}}$$

到达 $x = d$ 点时的速度 $\boldsymbol{v}_1$ 的方向指向 $x = 0$ 点，其大小为

$$v_1 = a_1 t_1 = \sqrt{\frac{-2q\rho}{\varepsilon_0 m}}d$$

带电质点从 $x = d$ 到 $x = 0$ 受到的作用力 $\boldsymbol{F}_2$ 的方向指向 $x = 0$ 点，其大小为

$$F_2 = qE_2 = \frac{q\rho}{\varepsilon_0}x = -kx$$

式中

$$k = -\frac{q\rho}{\varepsilon_0} > 0$$

可见 F_2 是线性回复力，带电质点在它的作用下作简谐振动．其位移与时间 t'（注意，t' 的零点取 t_1 时刻，即取带电质点到达 $x = d$ 处的时刻为 t' 的零点）的关系为

$$x = A\cos(\omega t' + \varphi)$$

式中圆频率 ω 为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{-q\rho}{\varepsilon_0 m}}$$

简谐振动的初始条件为

$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi = d \\ v_0 = -A\omega\sin\varphi = -v_1 = -\sqrt{\dfrac{-2q\rho}{\varepsilon_0 m}}d \end{cases}$$

由此得出

$$\tan\varphi = -\frac{v_0}{\omega x_0} = \sqrt{2}$$

φ 可在第 Ⅰ 和第 Ⅲ 象限取值,因

$$\cos\varphi = \frac{d}{A} > 0$$

故 φ 应在第 Ⅰ 象限取值,为

$$\varphi = \arctan\sqrt{2}$$

带电质点从 $x = d$ 到 $x = 0$ 所需时间 t_2 应满足

$$x(t_2) = A\cos(\omega t_2 + \varphi) = 0$$

故

$$\omega t_2 + \varphi = \frac{\pi}{2}$$

或

$$t_2 = \frac{1}{\omega}(\frac{\pi}{2} - \varphi) = (\frac{\pi}{2} - \arctan\sqrt{2})\sqrt{\frac{\varepsilon_0 m}{-q\rho}}$$

因

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\sqrt{2} = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$$

故

$$t_2 = (\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3})\sqrt{\frac{\varepsilon_0 m}{-q\rho}}$$

因此,带电质点从 $x = 2d$ 到 $x = 0$ 所需的时间为

$$t = t_1 + t_2$$

$$= (\sqrt{2} + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3})\sqrt{\frac{\varepsilon_0 m}{-q\rho}} = 2.03\sqrt{\frac{\varepsilon_0 m}{-q\rho}}$$

【题 13】 在半径为 R 的细圆环上分布着不能移动的正电荷,总电量为 Q.

1. 如果某个点电荷 $Q_1(\neq 0)$ 可在环中指定直径 AOB 线段内作匀速直线运动．试确定圆环上电荷线密度 λ 的分布．

2. 取 x 轴沿直径 AOB,原点 O 在环中心．将第一问中的点电荷 Q_1 放在与 O 点相距 r_1 的 x 左半轴上某点．设电量 Q_1 的绝对值为 Q 的 ν 倍．能否在 x 右半轴上再放一个非零电量的点电荷 Q_2,使得这两个点电荷及圆环均可保持不动．设两点电荷都不与环接触,设环的质量分布均匀．试求 Q_2 及其位置．

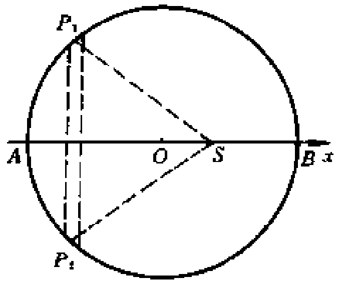
3. 把上述两个点电荷 Q_1 和 Q_2 固定在第二问中确定的位置上,同时改变它们的电荷符号但保持电量大小不变．再使环(所带电量 Q 及分布均不变)沿 x 轴的正方向平移一小量 δ,然后静止地释放．试定量讨论环的运动．设环的质量为 m.

在求解本题时,只需考虑电荷间的库仑作用,其他相互作用均可略．

提示:把所求的圆环上电荷分布与球面上均匀电荷分布相联系．

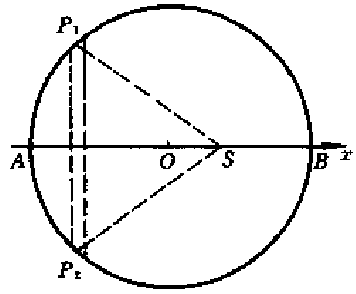
【分析】 1. 为使点电荷 Q_1 能沿环中某直径 AOB 作匀速直线运动，要求在 AOB 上各点的电场强度均为零，这就是确定圆环上电荷分布的根据和条件．

求解的关键在于有所联想，即能把所求的圆环上电荷分布与球面上均匀的电荷分布相联系．



球面

电图 1－13－1



圆环

电图 1－13－2

如所周知，若电量 Q 均匀分布在半径为 R 的球面上，如电图 1－13－1 所示，则球内的电场强度处处为零，直径 AOB 上任一点的电场强度当然也是零．如电图 1－13－1，用一系列与 AOB 垂直的平行平面，把球面分割成一系列环状小带（电图 1－13－1 中的 P_1P_2 就是环状小带之一）．由于对称性，任一小带在直径 AOB 上任一点 S 产生的电场强度方向应沿 x 轴，由电场强度叠加原理，全部环状小带在 S 点产生的电场强度之和为零．

本题的电荷 Q 分布在半径为 R 的圆环上而不是在球面上．但可以设想，如电图 1－13－2，如果在圆环上相应地任意取 P_1 和 P_2 两线元（P_1P_2 与直径 AOB 垂直），并且使 P_1 和 P_2 两线元所带的电量即为均匀带电球面相应环状小带的上半带和下半带所带的电量（相当于把环状小带上半带和下半带的电量分别集中在 P_1 和 P_2 两线元上），则圆环的 P_1 和 P_2 两线元在 S 点产生的电场强度应与均匀带电球面相应环状小带在 S 点产生的电场强度相同．按这种办法，把半径为 R、电量为 Q 的均匀带电球面各环状小带上的电量，分配在半径为 R、电量为 Q 的圆环的各相应线元上．则按此电荷分布的圆环在直径 AOB 上产生的电场强度，与均匀带电球面在 AOB 上产生的电场强度相同，即 AOB 上各点的电场强度均为零，满足第一问的要求．

同样，按上述电荷分布的圆环在环外 AOB 延长线上各点产生的电场强度，也应等于均匀带电球面在该点产生的电场强度．由于这些点在球外，其电场强度即为在 O 点的点电荷 Q 在该点产生的电场强度．

2. 本题涉及三个带电体，电量为 Q 的圆环，其电荷分布已在第一问中求出，点电荷 Q_1 和 Q_2，Q_1 和 Q_2 均在沿直径 AOB 的 x 轴上，要求三者都静止不动．显然，Q_1 与 Q_2 均只能在环外，若 Q_1 在环内，由第一问，圆环 Q 对 Q_1 的作用力为零，但 Q_2 对 Q_1 的作用力不为零，故 Q_1 不可能静止．Q_2 同理．又因 Q_1 和 Q_2 不与环接触，即不在环上，故 Q_1 和 Q_2 均在环外，它们与环中心 O 的距离 r_1 和 r_2 均应大于环半径 R．

由于圆环在环外的电场强度相当于 Q 集中在 O 点时产生的电场强度．因此，Q、Q_1、Q_2 的相互作用，相当于三个共线的点电荷之间的相互作用．

题设 Q_1 和 Q_2 在 Q 的两侧，又设 $Q > 0$，为了使三者都静止不动，唯一的可能是 $Q_1 < 0$ 及

$Q_2<0$，即均带负电．于是问题可解．

3．根据所设条件，由圆环稍稍平移时所受作用力为线性回复力，可知圆环将围绕平衡位置作简谐振动．

【解】 1．根据分析，为使带电圆环在直径 AOB 上电场强度处处为零，如电图 1－13－3，圆环上任一线元 $R\mathrm{d}\varphi$ 所带电量 $\mathrm{d}Q$ 应等于半径亦为 R、电量亦为 Q 的均匀带电球面相应环状小带所带电量之半，即

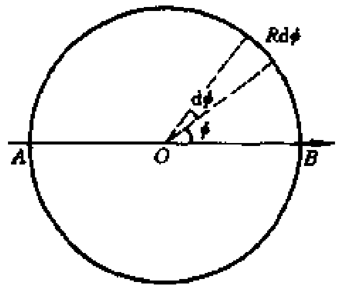
$$\mathrm{d}Q=\frac{1}{2}\sigma\,\mathrm{d}S=\frac{1}{2}\cdot\frac{Q}{4\pi R^2}\cdot 2\pi R^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{Q}{4}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

式中 $\sigma=\dfrac{Q}{4\pi R^2}$ 是均匀带电球面的面电荷密度，$\mathrm{d}S$ 是球面上环状小带的面积．

因此，圆环上电荷线密度的分布应为

$$\lambda=\lambda(\varphi)=\frac{\mathrm{d}Q}{R\mathrm{d}\varphi}=\frac{1}{4R}Q\sin\varphi$$

式中 R 是环半径，Q 是环上总电量，φ 如电图 1－13－3 所示．



电图 1－13－3



电图 1－13－4

2．根据分析，相当于三个共线的点电荷相互作用达到平衡，如电图 1－13－4 所示．其中 $Q>0$，$-Q_1<0$，$-Q_2<0$（Q_1 和 Q_2 都表示电量的绝对值），$-Q_1$ 和 $-Q_2$ 分别在 Q 的两侧．在电图 1－13－4 中，把 $-Q_1$ 与 Q，$-Q_2$ 与 Q，$-Q_1$ 与 $-Q_2$ 之间的作用力分别表为 F_1，F_2，F_3，它们的方向已在电图 1－13－4 中标明．

三点电荷均静止不动，要求

$$F_1=F_2=F_3$$

其中

$$F_1=\frac{Q_1Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2},\quad F_2=\frac{Q_2Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}$$

$$F_3=\frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0(r_1+r_2)^2}$$

故

$$\frac{Q_1Q}{r_1^2}=\frac{Q_2Q}{r_2^2}=\frac{Q_1Q_2}{(r_1+r_2)^2}$$

因题设

$$Q_1=\nu Q$$

代入，得

$$\frac{\nu Q}{r_1^2}=\frac{Q_2}{r_2^2}=\frac{\nu Q_2}{(r_1+r_2)^2}$$

由后一等式解出

$$r_2=\frac{r_1}{\sqrt{\nu}-1}$$

代入前一等式，得

$$Q_2=\frac{{r_2}^2}{{r_1}^2}Q_1=\frac{\nu}{(\sqrt{\nu}-1)^2}Q$$

因 $r_2>R$，Q_2 有限，由以上两式可知，ν 应满足

$$\nu<\left(1+\frac{r_1}{R}\right)^2,\nu\neq 1$$

因此，仅当 $r_1>R$，Q_1 为负电荷，且 ν 满足上式时，才能在 O 点右侧 x 轴上距离 O 点为 $r_2=\frac{r_1}{\sqrt{\nu}-1}$ 处，放上电量为 $Q_2=\frac{\nu Q}{(\sqrt{\nu}-1)^2}$ 的负电荷，使得这两个点电荷以及带电圆环 Q 均静止不动．

3．现在 Q、Q_1、Q_2 均为正电荷，Q 与 Q_1 和 Q_2 的距离分别为 r_1 和 r_2，Q_1 和 Q_2 固定，Q 平衡．当圆环 Q 沿 x 轴正向偏离小量 x 时，所受作用力为

$$\begin{aligned}F_x&=\frac{Q_1Q}{4\pi\varepsilon_0(r_1+x)^2}-\frac{Q_2Q}{4\pi\varepsilon_0(r_2-x)^2}\\&=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q_1}{{r_1}^2\left(1+\frac{x}{r_1}\right)^2}-\frac{Q_2}{{r_2}^2\left(1-\frac{x}{r_2}\right)^2}\right]\end{aligned}$$

式中

$$\left(1+\frac{x}{r_1}\right)^{-2}\approx 1-\frac{2x}{r_1}$$

$$\left(1-\frac{x}{r_2}\right)^{-2}\approx 1+\frac{2x}{r_2}$$

$$\frac{Q_1}{{r_1}^2}=\frac{Q_2}{{r_2}^2}$$

$$r_2=\frac{r_1}{\sqrt{\nu}-1}$$

代入，得

$$F_x=-kx$$

其中

$$k=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r_1^3}+\frac{Q_2}{r_2^3}\right)=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\nu Q}{r_1^3}+\frac{\nu Q(\sqrt{\nu}-1)}{r_1^3}\right]=\frac{\nu\sqrt{\nu}Q^2}{2\pi\varepsilon_0r_1^3}$$

可见，当圆环从平衡位置 O 沿 x 轴有小偏离 x 时，将在线性回复力 $F_x=-kx$ 的作用下围绕 O 点作简谐振动，其振幅为初始的位移 δ，其圆频率 ω 和周期 T 分别为

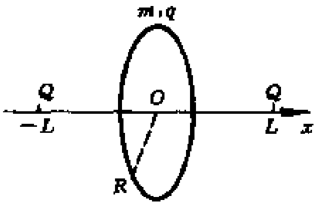
$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{\nu\sqrt{\nu}Q^2}{2\pi\varepsilon_0 r_1{}^3 m}}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 r_1{}^3 m}{\nu\sqrt{\nu}Q^2}}$$

【题14】 如图，在半径为 R、质量为 m 且均匀分布的细圆环上，均匀地分布着总电量为 q 的正电荷．在通过圆环中心 O 点且垂直于圆环平面的 x 轴上有两个固定的点电荷，它们分别在圆环的两侧，与环心的距离均为 L，各带有电量为 Q 的正电荷．设圆环只能沿 x 轴平动．显然，在上述条件下，圆环处于平衡位置．

1．试讨论该平衡位置的稳定性(即在什么情况下为稳定平衡位置，在什么情况下为不稳定平衡位置)．

2．若该位置是稳定平衡位置．试求圆环在其附近作微小振动的周期．



电图 1－14－1

【分析】 本题讨论带电体所处平衡位置的稳定性，是电学与力学的综合题．

在讨论带电圆环所受电场力时，应考虑环上的电荷分布．在讨论圆环受力运动时，因仅限于平动，可将环看作质点．如图，取圆环中心 O 为坐标原点，取垂直环平面且通过两点电荷的轴线为 x 轴．显然，带电圆环所受两点电荷电力的合力为保守力，相应地可引入势能．当圆环沿 x 轴平动，使环心处于任意 x 位置时，它所受的电力合力 F_x 及相应的势能 $E_p(x)$ 的关系为

$$F_x=-\frac{dE_p(x)}{dx}=-E'_p(x)$$

式中的一撇表示对 x 的微商，下同．

在力学中曾指出，由势能曲线 $E_p(x)$ 即可确定平衡位置及其是否稳定．平衡位置 x 由 $E'_p(x)=0$，即由 $F_x=0$ 确定．若平衡位置 x 满足 $E''_p(x)>0$，即 $F'_x<0$，则为稳定平衡位置．若平衡位置 x 满足 $E''_p(x)<0$，即 $F'_x>0$，则为不稳定平衡位置．若平衡位置 x 满足 $E''_p(x)=0$，即 $F'_x=0$，当(a)若在平衡位置两侧均有 $E''_p(x)>0$，即 $F'_x<0$，则为稳定平衡位置；(b)若在平衡位置两侧中至少有一侧为 $E''_p(x)<0$，即 $F'_x>0$，则为不稳定平衡位置．

这就是确定平衡位置，讨论其是否稳定的根据．本题即可据此分析求解．

【解】 1．如图，带电圆环在右侧点电荷 Q 处的电场强度指向正 x 方向，在左侧点电荷 Q 处的电场强度指向负 x 方向，其大小均为

$$\frac{qL}{4\pi\varepsilon_0(L^2+R^2)^{3/2}}$$

因而两个点电荷所受带电圆环的电力(排斥力)均为

$$\frac{qQL}{4\pi\varepsilon_0(L^2+R^2)^{3/2}}$$

由牛顿第三定律，带电圆环所受两个点电荷的电力(排斥力)亦如上式．因两力反向，抵消，故带电圆环在图中的 $x=0$ 位置是平衡位置．

当带电圆环沿 x 轴平动，使环心在 x 位置时，它所受两点电荷电力的合力为

$$F_x = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{L+x}{[(L+x)^2+R]^{3/2}} - \frac{L-x}{[(L-x)^2+R^2]^{3/2}}\right\}$$

显然，在平衡位置 $x = 0$，有

$$F_{x=0} = 0$$

为了讨论平衡位置 $x = 0$ 的稳定性，计算 F'_x，得

$$F'_x = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{2(L+x)^2-R^2}{[(L+x)^2+R^2]^{5/2}} + \frac{2(L-x)^2-R^2}{[(L-x)^2+R^2]^{5/2}}\right\}$$

在 $x = 0$ 处，有

$$F'_{x=0} = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{2L^2-R^2}{(L^2+R^2)^{5/2}} + \frac{2L^2-R^2}{(L^2+R^2)^{5/2}}\right\}$$

$$= -\frac{qQ(2L^2-R^2)}{2\pi\varepsilon_0(L^2+R^2)^{5/2}}$$

下面分几种情况进行讨论 .

(*a*) 若 $R = 0$，则

$$F'_{x=0} = -\frac{qQ}{\pi\varepsilon_0 L^3} < 0$$

$x = 0$ 总是稳定平衡位置 .

(*b*) 若 $R > 0$

(ⅰ) 若 $L > \frac{R}{\sqrt{2}}$，则

$$F'_{x=0} < 0$$

$x = 0$ 为稳定平衡位置 .

(ⅱ) 若 $L < \frac{R}{\sqrt{2}}$，则

$$F'_{x=0} > 0$$

$x = 0$ 为不稳定平衡位置 .

(ⅲ) 若 $L = \frac{R}{\sqrt{2}}$，则

$$F'_{x=0} = 0$$

为判定平衡位置 $x = 0$ 是否稳定，需要进一步讨论在 $x = 0$ 位置两侧 F'_x 的正、负 . 为此，将 $R^2 = 2L^2$ 代入 F'_x 的表达式，得

$$F'_x = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{4Lx+2x^2}{(3L^2+2Lx+x^2)^{5/2}} + \frac{-4Lx+2x^2}{(3L^2-2Lx+x^2)^{5/2}}\right\}$$

$$= -\frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x}{(3L^2)^{5/2}}\left\{\frac{2L+x}{\left(1+\frac{2Lx+x^2}{3L^2}\right)^{5/2}} - \frac{2L-x}{\left(1+\frac{-2Lx+x^2}{3L^2}\right)^{5/2}}\right\}$$

因 x 为小量，有

$$\frac{2L+x}{\left(1+\frac{2Lx+x^2}{3L^2}\right)^{5/2}}=(2L+x)\left[1-\frac{5}{2}\left(\frac{2Lx+x^2}{3L^2}\right)\right]$$

$$=(2L+x)(1-\frac{5x}{3L})=2L-\frac{7}{3}x$$

$$\frac{2L-x}{\left(1+\frac{-2Lx+x^2}{3L^2}\right)^{5/2}}=(2L-x)\left[1-\frac{5}{2}\left(\frac{-2Lx+x^2}{3L^2}\right)\right]$$

$$=(2L-x)(1+\frac{5x}{3L})=2L+\frac{7}{3}x$$

代入 F'_x,得

$$F'_x=-\frac{qQx}{18\sqrt{3}\pi\varepsilon_0L^5}[(2L-\frac{7}{3}x)-(2L+\frac{7}{3}x)]=\frac{7qQx^2}{27\sqrt{3}\pi\varepsilon_0L^5}$$

可见,在 $x=0$ 两侧附近,均为

$$F'_x>0$$

因此,$x=0$ 为不稳定平衡位置.

综合以上讨论,结论可归纳如下.

若 $R=0$, $x=0$ 为稳定平衡位置

若 $R>0$,若 $\begin{cases}L>\frac{R}{\sqrt{2}}, & x=0\text{ 为稳定平衡位置}\\ L=\frac{R}{\sqrt{2}}, & x=0\text{ 为不稳定平衡位置}\\ L<\frac{R}{\sqrt{2}}, & x=0\text{ 为不稳定平衡位置}\end{cases}$

2. 以上得出的 $x=0$ 为稳定平衡位置的两种情况,可合并为下述条件,即

$$\begin{cases}L>\frac{R}{\sqrt{2}}\\ R\geqslant 0\end{cases}$$

当带电圆环从平衡位置 $x=0$ 沿 x 轴有小偏移 x 时,所受作用力 F_x 为

$$F_x=\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{L+x}{(L^2+R^2+2Lx)^{3/2}}-\frac{L-x}{(L^2+R^2-2Lx)^{3/2}}\right]$$

$$=\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0(L^2+R^2)^{3/2}}\left\{(L+x)\left[1+\frac{2Lx}{(L^2+R^2)}\right]^{-\frac{3}{2}}-(L-x)\left[1-\frac{2Lx}{(L^2+R^2)}\right]^{-\frac{3}{2}}\right\}$$

$$=\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0(L^2+R^2)^{3/2}}\left\{(L+x)\left[1-\frac{3Lx}{(L^2+R^2)}\right]-(L-x)\left[1+\frac{3Lx}{(L^2+R^2)}\right]\right\}$$

$$=\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0(L^2+R^2)^{3/2}}\left\{\left[L+x-\frac{3L^2x}{(L^2+R^2)}\right]-\left[L-x+\frac{3L^2x}{(L^2+R^2)}\right]\right\}$$

$$=-\frac{qQ(2L^2-R^2)}{2\pi\varepsilon_0(L^2+R^2)^{5/2}}x$$

即

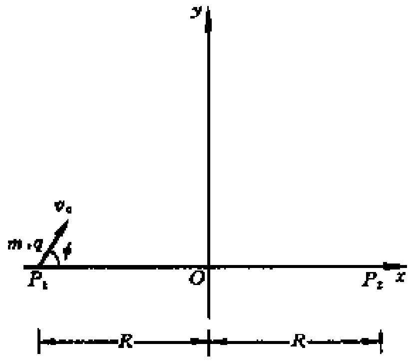
$$F_x = -kx$$

$$k = \frac{qQ(2L^2 - R^2)}{2\pi\varepsilon_0(L^2 + R^2)^{5/2}}$$

这是一个线性回复力，故圆环将围绕稳定的平衡位置 $x = 0$ 作简谐振动，其振动周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0(L^2 + R^2)^{\frac{5}{2}} m}{qQ(2L^2 - R^2)}}$$

【题 15】 如电图 1－15－1 所示，质量均为 m、电量均为 q（$q > 0$）的一簇带电粒子，从 P_1 点以相同速率 v_0 在 xy 平面内向右上方各方向射出，即 ϕ 角在（0，$\frac{\pi}{2}$）范围内．试在 xy 平面内设计一个电场区域，使这些带电粒子能全部会聚于 P_2 点．P_1 和 P_2 在 x 轴的两侧，与原点 O 的距离均为 R．设带电粒子间的相互作用以及引力可略．



电图 1－15－1

【分析】 为了使带电粒子能会聚到 P_2 点，外加电场对带电粒子的作用力应能使各带电粒子经不同的弯曲轨道到达同一点 P_2．于是联想到重力场对斜抛物体的作用，可以达到类似的目的．由此，首先想到，设计的外加电场应是与重力场类似的方向向下的匀强电场．

注意到，在重力场中以相同速率不同抛射角抛出的物体，其水平（x 方向）射程是不同的，并不能落到同一点 P_2 上．这是重力场无处不在的结果．因此，如果电图 1－15－1 中 xy 上半平面处处都有匀强电场，带电粒子就不会都在 P_2 点会聚．为使带电粒子都会聚在 P_2 点，匀强电场应有适当的边界，即使带电粒子进入电场区域前和离开电场区域后，都作匀速直线运动，在电场区域内则作类似于斜抛的运动，使之弯折，这样才能满足本题的要求．因此，本题的关键是确定匀强电场的边界．由于 P_1 和 P_2 相对 y 轴对称，电场的边界也应相对 y 轴对称，只要确定右侧边界即可．

应该指出，电场区域的设计并非唯一，本题给出的是一种比较简单的设计方案．至于所设计匀强电场区域能否实现，则不在本题讨论范围之内．

【解】 设计的匀强电场区域如电图 1－15－2 所示．电图 1－15－2 中的实线代表电场区域的边界线，它相对 y 轴对称，其中的电场 $\boldsymbol{E}$ 与 y 轴反向．带电粒子的轨道在电图 1－15－2 中用虚线表示，在场区外的轨道是直线，在场区内的轨道类似于重力场中的斜抛曲线．

设匀强电场的电场强度大小取为 E，则带电粒子在场区内受电力 qE，方向向下，产生的加速度方向向下，大小为

$$a = \frac{qE}{m}$$

于是带电粒子在场区内沿抛物线轨道运动．如电图 1－15－2，在场区边界上任取一点（x，y），其中 x 应为经过该点的带电粒子斜抛轨道的半射程．设带电粒子走完这段半射程需时间 t，则有

$$x = (v_0\cos\phi)t$$

及

$$v_0\sin\phi = at$$

联立，消去 t，得

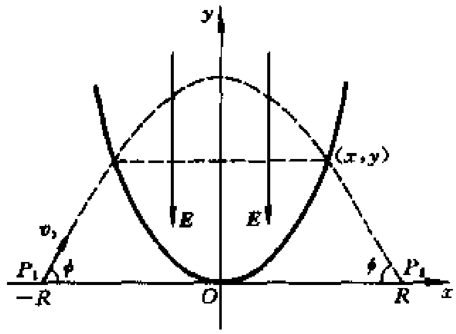
$$\sin\phi\cos\phi = \frac{ax}{v_0^{\,2}}$$

由电图 1－15－2，不难看出有以下几何关系，

$$\sin\phi = \frac{y}{\sqrt{y^2+(R-x)^2}},\quad \cos\phi = \frac{R-x}{\sqrt{y^2+(R-x)^2}}$$

由以上三式，得

$$v_0^{\,2}y(R-x) = ax[y^2+(R-x)^2],x\geqslant 0$$



电图 1－15－2

这就是匀强电场区域的右半边界．由对称性，以 $-x$ 代替上式中的 x，即得匀强电场的左半边界为

$$v_0^{\,2}y(R+x) = -ax[y^2+(R+x)^2],x\leqslant 0$$

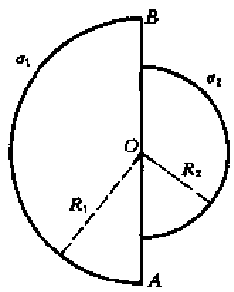
在以上两式中的 a 由场强 E 确定，为

$$a = \frac{qE}{m}$$

【题16】 如图，两个同心的半球面相对放置，半径分别为 R_1 与 $R_2(R_1>R_2)$，都均匀带电，电荷面密度分别为 σ_1 与 σ_2．试求大的半球底面圆直径 AOB 上的电势分布．

【分析】 用电势叠加原理可以直接求解，但需作积分，颇为麻烦．

由于均匀带电球面内电场强度处处为零，球面外任一点的电场强度等于全部电荷集中在球心时在该点的电场强度，故球面内电势恒定，球面外电势与到球心的距离成反比，连续分布，容易求出．



电图 1－16－1

显然，均匀带电球面在球内、外任一点的电势，是两个半球面贡献之和，因电势是标量，半球面在任一点的电势应为球面在该点的电势之半．于是可解．

本题再次表明，分析题目的对称性并恰当地加以利用，是何等重要．

【解】 半径为 R_1，电荷面密度为 σ_1 的完整均匀带电大球面在球内（包括直径 AOB）的电势恒定，表为 U'_1，则

$$U'_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{4\pi R_1^{\,2}\sigma_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0}$$

半个大球面在 AOB 上的电势 U_1 应为 U'_1 之半，即

$$U_1 = \frac{1}{2}U'_1 = \frac{\sigma_1 R_1}{2\varepsilon_0}$$

半径为 R_2，电荷面密度为 σ_2 的完整均匀带电小球面在球内的电势恒定，在球外的电势与该处到球心的距离成反比．把完整小球面在 AOB 上各点的电势表为 U'_2，则

$$U'_2 = \begin{cases} \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}, & r\leqslant R_2 \\[2ex] \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}, & R_2<r\leqslant R_1 \end{cases}$$

式中

$$Q_2 = 4\pi R_2^{\,2}\sigma_2$$

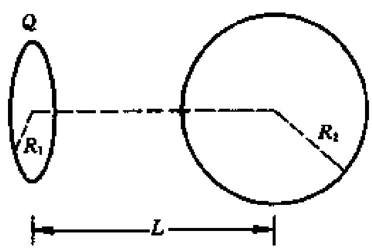
半个小球面在 AOB 上的电势 U_2 等于上述 U'_2 之半，即

$$U_2 = \frac{1}{2}U'_2 = \begin{cases} \dfrac{\sigma_2 R_2}{2\varepsilon_0}, & r \leqslant R_2 \\ \dfrac{\sigma_2 R_2^{\,2}}{2\varepsilon_0 r}, & R_2 < r \leqslant R_1 \end{cases}$$

故 AOB 上各点的电势为

$$U = U_1 + U_2 = \begin{cases} \dfrac{\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2}{2\varepsilon_0}, & r \leqslant R_2 \\ \dfrac{1}{2\varepsilon_0}\left(\sigma_1 R_1 + \dfrac{\sigma_2 R_2^{\,2}}{r}\right), & R_2 < r \leqslant R_1 \end{cases}$$

【题 17】 如电图 1-17-1，半径为 R_1 的圆环上带有电量 Q，在它的右边有半径为 R_2 的不带电的球面，球心与环心的间距为 L，球心与环心的连线和圆环平面垂直．试求球面上的平均电势 $\overline{U}$．



电图 1-17-1

【分析】 由电势叠加原理，圆环电荷在球面上的电势分布，是环上各元电荷在球面上电势分布的叠加．环上各元电荷在球面上的电势分布与各元电荷在环上的位置有关．但在本题中，圆环与球面的相对位置存在着某种对称性，不难看出，环上某元电荷在球面上电势分布的平均值与该元电荷在环上的位置无关．因而，圆环电荷在球面上电势分布的平均值，应等于把全部圆环上的电荷 Q 集中在环上任一点（成为点电荷 Q）时，在球面上的平均电势．

计算点电荷 Q 在球面上平均电势 $\overline{U}$ 的方法并不唯一．通常的方法是把球面分割成一系列窄的球带，使这些球带所在的平面和点电荷与球心的连线垂直，于是每一个球带等电势，再积分求平均得出 $\overline{U}$．下面将要介绍的，是充分利用题目对称性的简化计算方法．

设两个点电荷 Q_1 和 Q_2 相距 r，则 Q_2 的电场在 Q_1 所在处的电势为

$$U_1 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Q_1 相对 Q_2 所具有的电势能为

$$W_1 = Q_1 U_1 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

同样，Q_1 的电场在 Q_2 所在处的电势为

$$U_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Q_2 相对 Q_1 所具有的电势能为

$$W_2 = Q_2 U_2 = \frac{Q_2 Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

显然，

$$W_1 = W_2$$

其实，W_1、W_2 并非分别属 Q_1、Q_2 所有，它们就是由 Q_1 和 Q_2 组成的带电体系的电势能 W，即

$$W = W_1 = W_2$$

对于任何两个带电体组成的带电体系也是如此．为了计算带电体系的电势能 W，可以计算带电体 Ⅰ 在 Ⅱ 的电场中的电势能 W_1，也可以计算带电体 Ⅱ 在 Ⅰ 的电场中的电势能 W_2，因为总有 $W = W_1 = W_2$.

对于本题，代表圆环电荷的点电荷 Q 可作为带电体 Ⅰ．设想球面带电，它就是带电体 Ⅱ，为了方便，设球面电荷均匀分布，电荷面密度 σ 为常量．于是，球面电荷的电场在 Q 所在处的电势 U_1 以及 Q 相对球面电荷的电势能 W_1 均易求．W_1 等于球面电荷相对点电荷 Q 的电势能 W_2（即 $W_2 = W_1$），而 W_2 又是球面上各面元电荷 $\sigma \mathrm{d}S$ 与点电荷 Q 在各该面元上的电势 U 的乘积之和，即

$$W_2 = \sum(\sigma \mathrm{d}S)U$$

由于假设球面电荷均匀分布，σ 为常量，故

$$W_2 = \sigma\sum U\mathrm{d}S$$

点电荷 Q 在球面上的平均电势 $\bar{U}$ 的定义为

$$\sum U\mathrm{d}S = \bar{U}S_{球面}$$

总之，先算出 W_1，它就是 W_2，于是 $\bar{U}$ 可求．

【解】 根据电势叠加原理，球面上的电势是圆环上各元电荷在球面上电势的叠加，球面电势的平均值仍有此叠加关系．圆环上任一元电荷在球面上的电势分布虽与该元电荷在圆环上的位置有关，但在本题中，因圆环与球面系统的对称性，圆环上任一元电荷在球面上的平均电势，与该元电荷在圆环上的位置无关．因此，无论将元电荷从圆环上原来位置移到环上任何别的位置，都不会影响球面上的平均电势．于是，可将圆环上的全部电荷 Q 都集中到环上任意某点，计算该点电荷 Q 在球面上的平均电势即可．

如电图 1-17-2，点电荷 Q 与球心的距离为

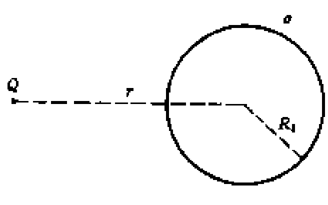
$$r = \sqrt{R_1{}^2 + L^2}$$

设想半径为 R_2 的球面上均匀分布着电荷，电荷面密度为 σ．点电荷 Q 在球面上的电势分布表为 U，则球面电荷在点电荷 Q 的电场中所具有的电势能为

$$W = \sum(\sigma \mathrm{d}S)U = \sigma\sum U\mathrm{d}S$$

式中 $\mathrm{d}S$ 是球面上面元的面积．球面上的平均电势 $\bar{U}$ 的定义为

$$\bar{U} = \frac{\sum U\mathrm{d}S}{S_{球面}}$$



电图 1-17-2

故

$$\bar{U} = \frac{W}{\sigma S_{球面}} = \frac{W}{Q_{球面}}$$

式中 $Q_{球面}$ 是球面上的总电量．上式表明，为求 $\bar{U}$，需计算点电荷 Q 和带电球面 $Q_{球面}$ 系统的电势能 W.

球面电荷 $Q_{球面}$ 在点电荷 Q 的电场中所具有的电势能 W，等于点电荷 Q 在球面电荷 $Q_{球面}$ 的电场中所具有的势能．后者应为

$$W = QU_Q$$

式中 U_Q 是球面电荷 $Q_{球面}$ 的电场在点电荷 Q 所在位置的电势，为

$$U_Q = \frac{Q_{球面}}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

代入，得

$$W = \frac{QQ_{球面}}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

代入 $\overline{U}$ 表达式，得出点电荷 Q 在球面上的平均电势为

$$\overline{U} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R_1{}^2 + L^2}}$$

它就是圆环电荷在半径为 R_2 的球面上的平均电势．

【题18】 地面上有一固定的点电荷A，在A的正上方有一带电小球B，B在重力和A的库仑斥力的作用下，在A上方$\frac{H}{2}$到 H 之间作往返的自由振动．试求B运动的最大速率 v_{max}．

【分析】 此题初看似无从下手，因为A和B的电量 Q 和 q 以及B的质量 m 均未给出．正因如此，也就提醒解题者，v_{max} 可能只与重力加速度 g 和高度 H 有关．换言之，Q 和 q 与 m 之间可能存在某种关系．由题设，B在 H 处和$\frac{H}{2}$处的动能均为零，因而B在 H 处的总势能（重力势能与电势能之和）$mgH + \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 H}$ 应等于B在$\frac{H}{2}$处的总势能 $mg\frac{H}{2} + \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0(\frac{H}{2})}$，即

$$mgH + \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 H} = mg\frac{H}{2} + \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0(\frac{H}{2})}$$

这就是 Q，q 与 m 之间的转换关系．

v_{max} 应是B在受力为零处的速率，利用上述关系，找出B受力为零的位置，即可求出 v_{max}．

【解】 B受A的库仑斥力，设 B 带电 q，A带电 Q，则 q 与 Q 应同号，设B的质量为 m．因B在 H 和$\frac{H}{2}$高度处的动能为零，故B在这两处的总势能应相等，为

$$mgH + \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 H} = mg\frac{H}{2} + \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0(\frac{H}{2})}$$

即

$$\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{1}{2}mgH^2$$

设在离地面高度为 h 处，B受力为零，则

$$mg = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 h^2}$$

由以上两式，得出

$$h = \frac{H}{\sqrt{2}}$$

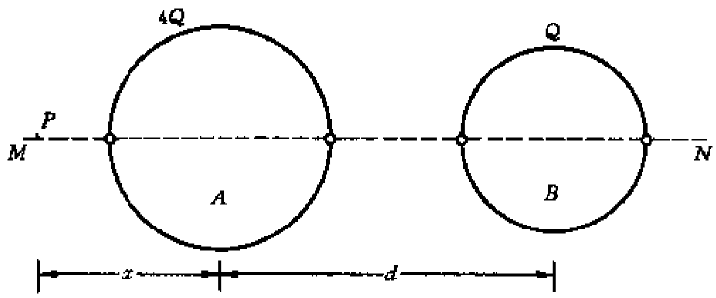
B在 h 处的运动速率最大，即为 $v_{\max}$，由能量守恒，有

$$mgh + \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 h} + \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = mgH + \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 H}$$

由以上两式，解出

$$v_{\max} = \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})gH}$$

【题 19】 如图所示，两个固定的均匀带电球面A和B分别带电 $4Q$ 和 $Q(Q>0)$. 两球心之间的距离 d 远大于两球的半径，两球心的连线 MN 与两球面的相交处都开有足够小的孔，因小孔而损失的电量可以忽略不计．一带负电的质点静止地放置在A球左侧某处 P 点，且在 MN 直线上．设质点从 P 点释放后刚好能穿越三个小孔，并通过B球球心．试求质点开始时所在的 P 点与A球球心的距离 x 应为多少？



电图 I－19－1

【分析】 质点从 P 点释放到第一小孔(A球左侧小孔)期间，因质点带负电，A球和B球均带正电，故A球和B球电场对质点的作用力为电引力，方向向右，使质点从 P 点由静止开始沿 MN 直线向右加速运动．质点从第一小孔到第二小孔(A球右侧小孔)期间，因进入A球，且A球均匀带电，故A球的电场为零，对质点无作用；B球电场对质点的作用仍为电引力，方向向右，质点沿 MN 向右进一步加速．质点从第二小孔到第三小孔(B球左侧小孔)期间，A球电场对质点的作用为电引力，但方向向左；B球电场对质点的作用亦为电引力，但方向向右．由于题设A球和B球的间距远大于两球的半径，不难设想，当质点离A球(即离第二小孔)较近时，A球电场的向左电引力将大于B球电场的向右电引力，合力向左，为阻力，使质点沿 MN 减速．当质点离B球(即离第三小孔)较近时，B球电场的向右电引力将大于A球电场的向左电引力，合力向右，为推力，使质点沿 MN 加速．所以在A球和B球之间(确切地说，在第二小孔与第三小孔之间)有一个质点所受合力为零的特殊位置——称为 S 点．因A球带电 $4Q$，B球带电 Q，S 点应离第二小孔较远，而离第三小孔较近．简言之，质点从第二小孔到 S 点期间，减速；从 S 点到第三小孔期间，加速．如果质点在到达 S 点之前，已减速为零，则将沿 NM 返回(向左运动)．因此，为了使质点能到达B球球心，第一个必要条件是，质点必须通过 S 点，即质点在 S 点的速度至少应大于零或至少等于零．若质点能通过 S 点，则如上述，从 S 点到第三小孔期间，质点沿 MN 向右加速．

质点从第三小孔到B球球心期间，因在B球内，B球电场为零，对质点无作用．但A球电场对质点的作用力仍为向左的电引力，质点减速．因此，为使质点在通过 S 点后还能通过B球球心，第二个必要条件是，质点在B球球心处的速度应大于零或至少等于零．如果质点能到达 S 点，便必定能通过B球球心，则上述两个条件归结为第一个条件．

在作了上述详尽的定性物理分析之后，进一步的问题是，如何恰当而简便地表述上述条件呢?不难看出，在本题中，固定的A球和B球以及运动的带电质点构成一个带电体系．全部过程无非是带电质点在静电场中运动而已．带电质点动能(速度)的增加或减少，来源于静电场力对它作了正功或负功，即来源于带电体系静电能(电势能)的减少或增加．换言之，带电体系的电势能与带电质点的动能之和，在该质点运动过程中守恒．因此，质点刚好能通过 S 点(即在 S 点质点的动能或速度为零)的条件可表为，质点在 P 点和 S 点时，带电体系的电势能相等(注意，质点在 P 点静止)．同样，若质点在 S 点时带电体系的电势能大于(或等于)质点在B球球心时带电体系的电势能，则表明质点若能通过 S 点，就必定能通过(或刚好到达)B球球心．

【解】 根据分析，在 MN 直线上在A球和B球之间有一个 S 点，带电质点在 S 点受力为零．设 S 点与A球和B球球心的距离分别为 r_1 和 r_2，则

$$k\frac{4Q}{r_1^2} = k\frac{Q}{r_2^2}$$

$$r_1 + r_2 = d$$

式中 $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$，下同．由以上两式，解出

$$\begin{cases} r_1 = \frac{2}{3}d \\ r_2 = \frac{d}{3} \end{cases}$$

带电质点从 P 点静止释放后，刚好能够到达 S 点的条件是，它在 P 点和 S 点的电势能相等，即

$$k = \frac{4Q(-q)}{x} + k\frac{Q(-q)}{x+d} = k\frac{4Q(-q)}{r_1} + k\frac{Q(-q)}{r_2}$$

式中 $-q(q>0)$ 是带电质点的电量．上式即为

$$\frac{4}{x} + \frac{1}{x+d} = \frac{4}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

把上面解出的 r_1 和 r_2 代入，得

$$\frac{4}{x} + \frac{1}{x+d} = \frac{9}{d}$$

解出

$$x = \frac{2}{9}(\sqrt{10} - 1)d$$

为了判断带电质点刚好到达 S 点后，能否通过B球球心，需比较它在 S 点的电势能 W_S 与它在B球球心处的电势能 W_B 的大小．因

$$W_S = k\frac{4Q(-q)}{r_1} + k\frac{Q(-q)}{r_2} = -kQq\left(\frac{4}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = -k\frac{9Qq}{d}$$

$$W_B = k\frac{4Q(-q)}{d} + k\frac{Q(-q)}{R_B} = -kQq\left(\frac{4}{d} + \frac{1}{R_B}\right)$$

式中 R_B 为 B 球半径．由题设

$$R_B \ll d$$

故

$$\frac{4}{d} + \frac{1}{R_B} > \frac{9}{d}$$

即

$$W_B > W_S$$

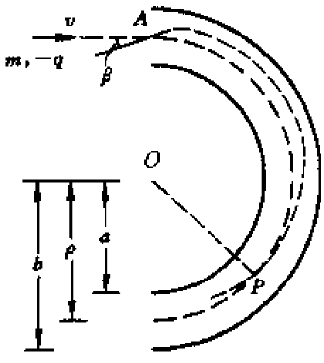
因此，带电质点只要能到达 S 点，就必定能通过 B 球球心．于是，所求开始时 P 点与 A 球球心的距离 x 即为上述结果，即

$$x = \frac{2}{9}(\sqrt{10} - 1)d$$

【题 20】 半径分别为 a 和 b 的两个同轴无限长半圆柱面如图所示．设在这两个半圆柱面之间有静电场，其电势分布为 $k\ln\frac{b}{r}$，其中 k 为某常数，r 是到轴的垂直距离，质量为 m，电量为 $-q(q>0)$ 的粒子以初速 $\boldsymbol{v}$ 从图中所示的左方射入，$\boldsymbol{v}$ 既与圆柱面的轴垂直，又与入射处圆柱截面的直径垂直，入射点与轴的距离为 ρ．

1．试问在什么条件下，粒子能沿半圆轨道运动．

2．若入射方向与原设计方向有很小的偏向角 β，如图所示，那么粒子轨道也将偏离原来的半圆轨道，设两个轨道的交点为 P．试证明，对于很小的偏向角 β，P 点的位置与 β 无关，并求出 P 点的方位角 $\angle AOP$ 的大小．



电图 1－20－1

【分析】 先看静电场的分布．题设电势 $U(r) = k\ln\frac{b}{r}$，故等势面是以半圆柱的轴为轴的半圆柱面，在图中（与轴垂直的截面）是一系列的半圆．因 r 小处 $U(r)$ 大，故电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的方向与半圆柱的轴垂直，在图中沿径向从 O 点向外，当带负电粒子沿着既与轴垂直又与入射处直径垂直的方向进入静电场后，所受静电力指向 O 点，并与粒子速度方向垂直．它提供了向心力，使粒子有可能作圆周运动，由此可得出此时粒子入射速度的大小．

入射方向偏离后（仍与半圆柱的轴垂直），粒子所受静电力仍指向 O 点，但不再与粒子速度垂直，粒子将在垂直轴的平面内沿一般的平面曲线轨道运动．由于静电力是保守力，粒子沿轨道运动时，能量守恒，即动能与静电势能之和守恒．（注意，粒子的速度包括切向速度和径向速度两部分．）又因静电力指向 O 点，为有心力，故粒子沿轨道运动时，对 O 点的角动量守恒．据此，可列出粒子的运动方程．

由于偏向角 β 很小，粒子的平面曲线轨道与圆轨道（$r=\rho$）的偏离也很小，即 $r=\rho+\delta$，其中 δ 小扰动量．于是可得出 δ 遵循的方程．它表明粒子除基本上沿圆轨道运动外，还有径向运

动．由 δ 的方程得出粒子沿径向的运动是简谐振动．由于 $OP = OA = \rho$，这要求粒子从 A 点到 P 点所需的时间应等于径向简谐振动的半周期．于是可求出在这段时间内粒子转过的角度 $\angle AOP$．在小扰动条件下简谐振动的周期与 β 无关，表明 P 点的位置与 β 无关．

【解】 1．由题设，电势分布为

$$U(r) = k\ln\frac{b}{r}$$

故电场强度 $\boldsymbol{E}$ 沿径向从 O 点向外，其大小为

$$E(r) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} = \frac{k}{r}$$

带电粒子垂直直径射入，为使其沿半径为 ρ 的半圆轨道运动，要求

$$qE = \frac{mv^2}{\rho}$$

即要求带电粒子的入射速度为

$$v = \sqrt{\frac{qk}{m}}$$

2．当粒子的入射方向与轴垂直，但不与入射处的直径垂直，而稍有偏离时，粒子在与轴垂直的平面内沿一般的平面曲线轨道运动，其动能为

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(\omega r)^2$$

式中 $\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ 是粒子的径向速度，$\omega = \dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ 是粒子的角速度，ωr 是粒子的切向速度．粒子的静电势能为

$$E_p = (-q)U = -qk\ln\frac{b}{r}$$

因静电力是保守力，粒子沿平面曲线轨道运动时，能量守恒，即

$$E_k + E_p = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(\omega r)^2 - qk\ln\frac{b}{r} = E_0 \tag{1}$$

式中 E_0 为常量．因静电力指向 O 点，为有心力，故粒子沿平面曲线轨道运动时，对 O 点的角动量守恒，即

$$mr^2\omega = L_0$$

式中 L_0 为常量．上式亦可写为

$$\frac{1}{2}m(\omega r)^2 = \frac{L_0^2}{2mr^2} \tag{2}$$

L_0 即为开始时的角动量 $m\rho v\cos\beta$，因偏向角 β 很小，故有

$$L_0 = m\rho v\cos\beta \approx m\rho v$$

由(1)、(2)式，得

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{2mr^2} + kq\ln\frac{r}{b} = E_0$$

对 t 求导，得

$$m\dot{r}\ddot{r} - \frac{L_0^2}{mr^3}\dot{r} + \frac{kq}{r}\dot{r} = 0$$

即

$$m\ddot{r} - \frac{L_0^2}{mr^3} + \frac{kq}{r} = 0 \tag{3}$$

这就是粒子沿平面曲线轨道的运动方程．当偏离角 β 为零，即当粒子沿圆轨道运动时，有

$$r = \rho, \quad \ddot{r}\Big|_{r=\rho} = 0$$

代入(3)式，得

$$-\frac{L_0^2}{m\rho^3} + \frac{kq}{\rho} = 0 \tag{4}$$

当偏向角 β 为小量时，粒子的径向位移 r 等于 ρ 加上一个小扰动量 δ，即

$$r = \rho + \delta \tag{5}$$

代入(3)式，得

$$m\ddot{\delta} - \frac{L_0^2}{m(\rho+\delta)^3} + \frac{kq}{\rho+\delta} = 0$$

即

$$m\ddot{\delta} - \frac{L_0^2}{m\rho^3}\left(1 - \frac{3\delta}{\rho}\right) + \frac{kq}{\rho}\left(1 - \frac{\delta}{\rho}\right) = 0$$

利用(4)式，得

$$m\ddot{\delta} + \frac{3L_0^2}{m\rho^4}\delta - \frac{kq}{\rho^2}\delta = 0$$

把 $L_0 = m\rho v, v^2 = \frac{k\rho}{m}$ 代入，得

$$\ddot{\delta} + \frac{2v^2}{\rho^2}\delta = 0 \tag{6}$$

这就是径向扰动量 δ 的方程，它表明在偏向角 β 为小量的条件下，粒子除基本上作圆运动（半径为 ρ）外，还沿径向作简谐振动，振动的圆频率为

$$\omega_\delta = \frac{\sqrt{2}v}{\rho}$$

粒子绕半径为 ρ 的圆轨道运动时，其角速度为

$$\omega_\theta = \frac{v}{\rho}$$

故 ω_δ 与 ω_θ 的关系为

$$\omega_\delta = \sqrt{2}\omega_\theta$$

粒子从 $r = \rho$ 的 A 点入射，到达 P 点时第一次恢复 $r = \rho$，这要求粒子从 A 点到 P 点所需的时间 t 刚好是 δ 作简谐振动的半周期，即

$$t = \frac{1}{2}T_\delta = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega_\delta} = \frac{\pi}{\sqrt{2}\omega_\theta}$$

在 t 时间内，粒子转过的角度为

$$\angle AOP \approx \omega_\theta t = \omega_\theta \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2}\omega_\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} = 127^\circ$$

可见 P 点的位置与小偏向角 β 无关．

【题 21】 在平面上有一段长为 l 的均匀带电直线 AB，在该平面取直角坐标 Oxy，原点 O 为 AB 中点，AB 沿 x 轴，y 轴与 x 轴垂直．

1．试证明，该平面上任一点 P 的电场强度方向沿 $\angle APB$ 的角平分线．

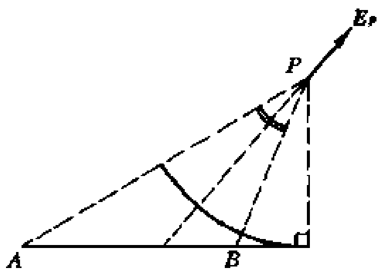
2．试求该平面上的电场线方程．

3．试求该平面上的等势线方程．

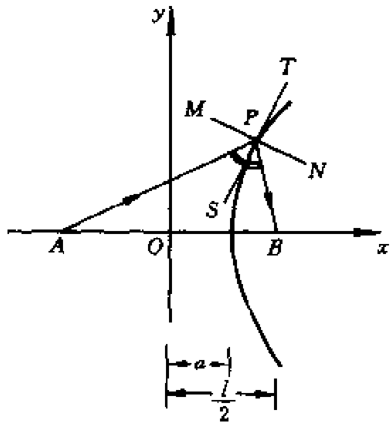
【分析】 本题是两位学生受本章题 6 的启发，经讨论引申后编制的．

由本章题 6，均匀带电直线在任一点 P 的电场强度，与相应的一段均匀带电圆弧在 P 点的电场强度相同．以此为基础，第一问即可求解．

本题第二问和第三问是为了训练解题者的联想能力而设置的．利用第一问的结论，对几种熟知的平面曲线作尝试性的考察后，不难发现，在平面上的电场线是双曲线，等势线是椭圆．



电图 1－21－1



电图 1－21－2

【解】 1．如电图 1－21－1，仿照本章题 6 可以证明（过程从略），均匀带电直线 AB 在任一点 P 的电场强度与相应的圆弧（在电图 1－21－1 中画实线）在 P 点的电场强度相同．该圆弧以 P 点为圆心，以 P 点到直线 AB 的垂直距离为半径，圆弧对 P 点的张角等于直线 AB 对 P 点的张角，即为 $\angle APB$，圆弧上均匀带电，其电荷线密度与 AB 直线的电荷线密度相同．显然，由对称性，该圆弧在 P 点的电场强度方向应沿 $\angle APB$ 的角平分线．

2．如电图 1－21－2，在以 A 和 B 为两焦点的双曲线上任取一点 P，过 P 点作该双曲线的切线 SPT 和法线 MPN（SPT 与 MPN 垂直）．由双曲线的光学性质可知，从 A 点到 P 点的入射光线，经镜面 MPN 反射后，必定经过 B 点，即入射角 $\angle APS$ 等于反射角 $\angle BPS$，换言之，SPT 即为 $\angle APB$ 的角平分线．

若 AB 均匀带电，由第 1 问，任一点 P 的电场强度方向应沿 $\angle APB$ 的角平分线，即应沿双曲线在 P 点的切线 SPT 的方向．因此，在该平面上的电场线，就是以 A 和 B 为两焦点的双曲线族，

其方程为

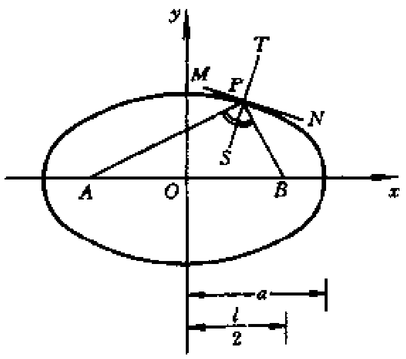
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\frac{l^2}{4}-a^2}=1$$

式中 l 是 AB 的长度，a 是双曲线顶点与坐标原点 O 的距离．a 是可调参量，其取值范围为

$$\frac{l}{2}>a>0.$$

3. 如电图 1－21－3，以 A 和 B 为两焦点作椭圆，由椭圆的光学性质可知，从 A 点到椭圆上任一点的入射光线经椭圆反射后必定经过 B 点．过 P 点作椭圆的切线 MPN 和法线 SPT，则入射角 $\angle APS$ 应等于反射角 $\angle BPS$.

若 AB 均匀带电，由第一问，任一点 P 的电场强度方向应沿 $\angle APB$ 的角平分线，即应沿椭圆在 P 点的法线 SPT 的方向．因此，通过 P 点的等势线的方向应为与 SPT 垂直的切线 MPN 的方向．换言之，在该平面上的等势线，就是以 A 和 B 为两焦点的椭圆族，其方程为



电图 1－21－3

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-\frac{l^2}{4}}=1$$

式中 l 是 AB 的长度，a 是椭圆的半长轴，a 是可调参量，其取值范围为

$$a>\frac{l}{2}$$

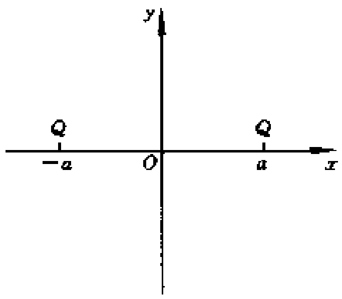
【本题是 1994 年北京大学物理试验班的学生罗迟雁和倪彬编制的．试验班是为了培训、选拔参加 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛）的中国代表队而设立的．】

【题 22】 如电图 1－22－1，在 x 轴的 $-a$ 和 a 两点分别放置电量均为 Q 的点电荷．

试求：1. 在 xy 平面上，电场强度相对坐标原点 O 为径向的点的轨迹．

2. 在 xy 平面上，电场强度相对坐标原点 O 为切向的点的轨迹．

（注：所谓径向或切向，均指电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的方向相对原点 O 沿径向或切向，并非 $\boldsymbol{E}$ 的径向或切向分量．）



电图 1－22－1

【分析】 不难看出，在 x 轴上各点的电场强度方向均沿 x 轴，即均沿径向（$x=0$ 点的电场强度为零，$x=\pm a$ 点的电场强度为无穷大，除外）．在 y 轴上各点的电场强度方向均沿 y 轴，亦即均沿径向．所以，x 轴以及 y 轴是电场强度沿径向的点的轨迹．然而，是否存在其他电场强度沿径向的点，是否存在电场强度沿切向的点，它们的轨迹如何，难以直观地察觉．

在 xy 平面上，某点的电场强度相对原点 O 沿径向，要求该点电场强度的 x 分量与 y 分量之比等于该点的 x 坐标与 y 坐标之比，即要求 $\frac{E_x}{E_y}=\frac{x}{y}$．类似地，在 xy 平面上，某点的电场强度相对

原点 O 沿切向，则要求 $-\frac{E_x}{E_y}=\frac{y}{x}$. 在 xy 平面上各点的电势 $U(x,y)$ 易求，由 $E_x=-\frac{\partial U}{\partial x}$ 及 $E_y=-\frac{\partial U}{\partial y}$ 可以得出 E_x 及 E_y，结合电场强度沿径向或切向的要求，即可分别确定它们的轨迹 .

【解】 在 xy 平面上，任一点 (x,y) 的电势 $U(x,y)$ 为

$$U(x,y)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}\right]$$

因

$$\boldsymbol{E}=-\nabla U$$

故

$$E_x=-\frac{\partial U}{\partial x},E_y=-\frac{\partial U}{\partial y}$$

把 U 代入，得

$$E_x=-\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{x-a}{[(x-a)^2+y^2]^{3/2}}+\frac{x+a}{[(x+a)^2+y^2]^{3/2}}\right\}$$

$$E_y=-\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{y}{[(x-a)^2+y^2]^{3/2}}+\frac{y}{[(x+a)^2+y^2]^{3/2}}\right\}$$

在 xy 平面上，径向电场强度点应满足

$$\frac{E_y}{E_x}=\frac{y}{x}$$

即

$$\frac{E_y}{E_x}=\frac{y\{[(x+a)^2+y^2]^{3/2}+[(x-a)^2+y^2]^{3/2}\}}{(x-a)[(x+a)^2+y^2]^{3/2}+(x+a)[(x-a)^2+y^2]^{3/2}}=\frac{y}{x}$$

因此，径向电场强度点的轨迹是

$$y=0,\text{即 } x \text{ 轴}(x=0,x=\pm a \text{ 点除外}) \tag{1}$$

以及

$$\begin{aligned}&x[(x+a)^2+y^2]^{3/2}+x[(x-a)^2+y^2]^{3/2}\\&\quad=(x-a)[(x+a)^2+y^2]^{3/2}+(x+a)[(x-a)^2+y^2]^{3/2}\end{aligned}$$

即

$$x=0,\text{即 } y \text{ 轴}(y=0 \text{ 点除外}) \tag{2}$$

及

$$(x+a)^2+y^2=(x-a)^2+y^2 \tag{3}$$

以上(1)、(2)、(3) 式，就是在 xy 平面上径向电场强度点的轨迹方程 .

切向电场强度点应满足

$$-\frac{E_y}{E_x}=\frac{x}{y}$$

把 E_x 和 E_y 代入，得

$$\begin{aligned}&y^2\{[(x+a)^2+y^2]^{3/2}+[(x-a)^2+y^2]^{3/2}\}\\&\quad=-x\{(x-a)[(x+a)^2+y^2]^{3/2}+(x+a)[(x-a)^2+y^2]^{3/2}\}\end{aligned}$$

$$= -x^2\{[(x+a)^2+y^2]^{3/2}+[(x-a)^2+y^2]^{3/2}\}$$
$$+xa\{[(x+a)^2+y^2]^{3/2}-[(x-a)^2+y^2]^{3/2}\}$$

即

$$(x^2+y^2)\{[(x+a)^2+y^2]^{3/2}+[(x-a)^2+y^2]^{3/2}\}$$
$$=xa\{[(x+a)^2+y^2]^{3/2}-[(x-a)^2+y^2]^{3/2}\}$$

即

$$[xa-(x^2+y^2)][(x+a)^2+y^2]^{3/2}=[xa+(x^2+y^2)][(x-a)^2+y^2]^{3/2}$$

或

$$\frac{xa-(x^2+y^2)}{xa+(x^2+y^2)}=\frac{[(x-a)^2+y^2]^{3/2}}{[(x+a)^2+y^2]^{3/2}} \tag{4}$$

(4) 式就是在 xy 平面上切向电场强度点的轨迹方程，它仅当 $xa>(x^2+y^2)$ 时才可能有解．

【题 23】 线电荷密度分别为 λ 和 $-\lambda$（$\lambda=$ 常量）的两平行无限长带电直线相距 $2a$．试求等势面和电场线的空间分布．

【分析】 根据两平行无限长均匀带电直线的对称性，可知等势面是一系列柱面，其母线与带电直线平行，空间任一点电场强度的方向必在与带电直线垂直的平面上．因此，只需讨论与带电直线垂直的 xy 平面上的等势线与电场线分布即可．

在 xy 平面上取电势零点，写出任一点 (x,y) 的电势 U 的表达式，由 $U=$ 常量即可确定 xy 平面上等势线的轨迹方程．

在 (x,y) 点，等势线的切线斜率为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，等势线的法线斜率等于其切线斜率的负倒数即为 $-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$，由于电场线与等势线垂直，在 (x,y) 点等势线的法线斜率即为该点电场线的切线斜率．由电场线切线斜率的表达式即可得出电场线的轨迹方程．

【解】 取 xyz 坐标系，使两带电直线分别位于 $x=\pm a, y=0$，且与 z 轴平行，即 xy 平面与两带电直线垂直．由对称性，只需讨论 xy 平面的等势线与电场线分布．

取原点 $x=0, y=0$ 为电势零点，则 xy 平面上任一点 (x,y) 的电势为

$$U=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{[(x-a)^2+y^2]^{\frac{1}{2}}}+\frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{[(x+a)^2+y^2]^{\frac{1}{2}}}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}$$

等势线满足

$$U=\text{常量}$$

令

$$\alpha=\mathrm{e}^{\frac{4\pi\varepsilon_0 U}{\lambda}}>0$$

且 α 为常量，则等势线的轨迹方程为

$$(x+a)^2+y^2=\alpha[(x-a)^2+y^2]$$

即

$$x^2-2\frac{\alpha+1}{\alpha-1}ax+y^2=-a^2 \tag{1}$$

或

$$\left(x-\frac{\alpha+1}{\alpha-1}a\right)^2+y^2=\left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}a\right)^2 \tag{2}$$

因此，在 xy 平面上，等势线是一系列以$\left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}a,0\right)$为圆心，以$\left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{|\alpha-1|}a\right)$为半径的圆（当 U 取不同常量时，α 为不同的常量）．当 $U>0$，即 $1<\alpha<\infty$ 时，圆在右半平面；当 $U=0$，即 $\alpha=1$ 时，圆退化为 y 轴直线；当 $U<0$，即 $0<\alpha<1$ 时，圆在左半平面．在 xy 平面的等势线如图中实线所示．在全空间，等势面是一系列圆柱面，其母线与 z 轴平行，其截面为上述各个圆．

在任一点(x,y)，等势线的切线斜率为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，等势线的法线斜率为$-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$. 因电场线与等势线垂直，故在$(x,y)$点，电场线的切线斜率等于该点等势线的法线斜率，即

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{\text{电场线}}=\left(-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)_{\text{等势线}}$$

由(2)式得出

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)_{\text{等势线}}=\frac{-y}{x-\frac{\alpha+1}{\alpha-1}a}$$

由(1)式解出$\frac{\alpha+1}{\alpha-1}$，代入上式，得

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)_{\text{等势线}}=\frac{-2xy}{x^2-y^2-a^2} \tag{3}$$

故电场线的切线斜率为

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{\text{电场线}}=\frac{2xy}{x^2-y^2-a^2}$$

把它写成

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{\text{电场线}}=\frac{-2yx}{y^2-x^2-(-a^2)} \tag{4}$$

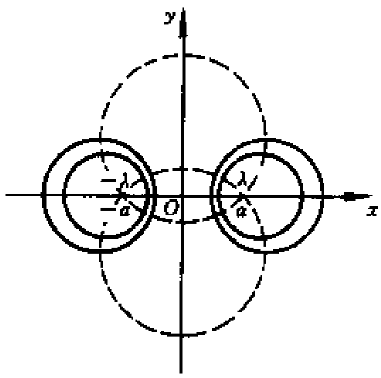
本来，对(4)式积分即可得出电场线的轨迹方程．但当将(4)式与(3)式比较时发现，两式相当，若将(4)式的 x 与 y 互换，a^2 换为 $-a^2$，即得(3)式．因(3)式的解是(1)式，故只需将(1)式中的 x 和 y 互换，a^2 换成 $-a^2$，就可以得出电场线的方程．电场线方程为

$$y^2-2\frac{\alpha'+1}{\alpha'-1}ay+x^2=a^2 \tag{5}$$

式中 $\alpha'=$ 常量，这是新的参量．由(5)式，电场线的轨迹方程也可改写为

$$\left(y-\frac{\alpha'+1}{\alpha'-1}a\right)^2+x^2=\left[\frac{\sqrt{2(\alpha'^2+1)}}{\alpha'-1}a\right]^2 \tag{6}$$

由(5)式和(6)式求导即可验证它们与(4)式是相符的．由(6)式可知，在 xy 平面内，电场线是以$\left(0,\frac{\alpha'+1}{\alpha'-1}a\right)$为圆心，以



电图 1－23－1

$\dfrac{\sqrt{2(\alpha'^2+1)}}{|\alpha'-1|}a$ 为半径的一系列圆．这些圆都通过(a,O)点和$(-a,O)$点．电场线如图中虚线所示．

【题 24】 已知真空中电场的能量密度为 $w_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2$. 试求:1. 均匀带电球面(电量为 Q,半径为 R)的球面上的电场强度值．2. 带电球面上的表面张力系数 σ.

【分析】 均匀带电球面内、外的电场强度,用高斯定理不难求出．但当将高斯面取在球面上时,因带电面的模型已失效,无法确定高斯面所包围的电量,结果是不确定的．

利用场能密度公式,设想将半径为 R 的带电球面缓慢地收缩到半径为$(R-\mathrm{d}R)$,则因原球外(R 外)的场及场能不变,故电场力所作的功应转变为附加的半径为 R 和$(R-\mathrm{d}R)$之间区域的场能．电场力的功与球面上的电场强度有关,R 到$(R-\mathrm{d}R)$区域的场能则与收缩后球外的电场强度有关,于是可求出球面上的电场强度．

由带电球面在球面上的电场强度,可知球面上某带电面元所受的电场力,它是靠带电球面上的表面张力来平衡的．于是带电球面的表面张力系数可求．

【解】 设带电球面在球面上的电场强度为 $\boldsymbol{E}_R$,由对称性分析,其方向沿径向,当 $Q>0$时,$\boldsymbol{E}_R$ 的方向沿径向指向球外．

把带电球面从半径为 R 缓慢地收缩到半径为$(R-\mathrm{d}R)$,则电场力作功为

$$\mathrm{d}w=QE_R\mathrm{d}R \tag{1}$$

式中 E_R 是球面上的电场强度．球半径减小 $\mathrm{d}R$ 后,R 外的电场及场能不变,上述电场力的功应转变为被收缩区域的电场能,为

$$\mathrm{d}w=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^24\pi R^2\mathrm{d}R \tag{2}$$

式中 E 是已经收缩的带电球面之外 R 处的电场强度,由高斯定理,得

$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0R^2} \tag{3}$$

由(1)、(2)、(3)式,得

$$E_R=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0R^2}=\frac{1}{2}(E_{内}+E_{外})$$

式中 $E_{内}$ 是带电球面内的电场强度,$E_{外}$ 是球外附近的电场强度,$E_{内}=0,E_{外}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0R^2}$.

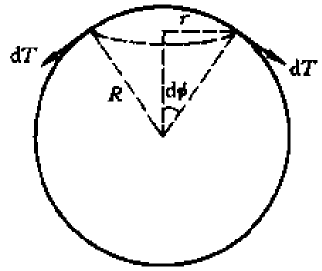
如图,在带电球面上取半径为

$$r=R\sin(\mathrm{d}\varphi)$$

的小球帽,它受到的电场力为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}F&=E_R\mathrm{d}q\\&=E_R\sigma_e\pi r^2=E_R\sigma_e\pi R^2\sin^2(\mathrm{d}\varphi)=E_R\sigma_e\pi R^2(\mathrm{d}\varphi)^2\end{aligned}$$

式中 σ_e 是球面的面电荷密度,πr^2 是小球帽面积(近似).$\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 的方向沿径向指向球外．



电图 1－24－1

电场力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 是靠小球帽周边的表面张力的径向分量平衡的,即

$$dF = dT\sin(d\varphi) = dTd\varphi$$

故

$$dT = E_R \sigma_e \pi R^2 d\varphi$$

表面张力系数为

$$\sigma = \frac{dT}{2\pi r} = \frac{E_R \sigma_e \pi R^2 d\varphi}{2\pi R\sin(d\varphi)} = \frac{1}{2}E_R \sigma_e R$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}\cdot\frac{Q}{4\pi R^2}R = \frac{Q^2}{64\pi^2\varepsilon_0 R^3}$$

【题25】 有1998个半径相同的导体球，各球均带有相同的正电荷，彼此不接触．试证明，在静电平衡时，至少有一个导体球的表面处处无负电荷．

【分析】 本题除导体球的个数外，并未给出任何其他可供定量演算的已知量，且导体球竟有1998个之多，也不像定量推证的依据．由此，猜测本题似可采用定性分析的办法予以证明．

细审题意，定性分析的有关依据应为：正电荷发出电场线，负电荷聚敛（或吸收）电场线；无穷远处既可发出也可聚敛电场线；电场线的方向指向电势降低的方向；静电平衡时导体为等势体．

下面就以此为线索，着手求解本题．

【解】 各球达到静电平衡后，每球均为等势体．比较各球电势，总可以至少找到一个A球，其电势不低于其他球的电势．若A球球面某处有负电荷，则必有电场线聚敛该处．

1．若此电力线发自其他某些球面的正电荷，则A球的电势应低于那些球的电势，与A球电势不低于其他球电势的假设矛盾，因而是不可能的．

2．若此电场线来自无穷远，则A球电势应低于无穷远处的电势，从而所有其他球的电势也都低于无穷远处的电势．比较其他球的电势，总可以至少找到一个B球，其电势不高于剩余各球．于是B球正电荷发出的电力线不能到达无穷远，否则与B球电势低于无穷远处电势矛盾；B球正电荷发出的电场线也不能到达剩余各球，否则与B球电势不高于剩余各球电势矛盾；B球正电荷发出的电场线更不能到达A球；否则与A球电势不低于B球电势矛盾．总之，B球正电荷发出的电场线没有去处，这当然是不合理的．

综上，A球球面上不可能有负电荷．即在达到静电平衡后，比较各球电势，其中不低于其他球电势的那个A球（至少有一个），其表面应处处无负电荷．

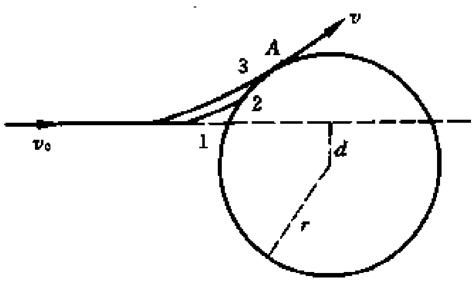
显然，在以上论证中，并未涉及各导体球半径的大小，所带正电荷的多少，以及导体球的数目，甚至也未涉及是否球形，其实这些都与结论无关．

【题26】 质子加速器使每个质子得到的动能为E．很细的质子束从加速器射向一个远离加速器的半径为r的金属球，并留在球上．球的中心并不处在加速器发射出的质子运动方向的直线上，而与该直线的垂直距离为d，且$d < r$．试问加速器工作足够长时间后，球能充电到多高的电势？

计算时，可取$E = 2\text{kev}$和$d = \frac{r}{2}$．又，若把质子换成电子，将会发生什么变化？

【分析】 如图，质子射到金属球上，把自己的电荷传给金属球，使金属球逐渐充电．带了电的金属球对再射来的质子有排斥作用，导致质子的轨迹不断有所改变．图中的直线1是射来的第一

个质子，因球尚未带电，故为直线．随着质子不断射来，球不断充电，对后继质子的电斥力不断增大，使各质子的轨迹逐渐向上偏，但仍均打在球内，在图中统一用曲线 2 表示．质子轨迹向上偏离到一定程度后，将与金属球相切，这就是图中的曲线 3 了．此后射来的质子将不再打在球上，即球不再继续充电了，本题所求的就是这时球的电势 U．



电图 1 - 26 - 1

考虑质子沿图中曲线 3 的轨迹运动．设质子从加速器射出的初速为 v_0，因远离带电金属球，静电势能为零(即规定离球远处的电势为零)，故质子从加速器获得的 E 全部是动能，即 $E=\frac{1}{2}mv_0^2$．当质子沿着与金属球相切的轨迹 3 移近金属球时，受静电力的排斥作用，动能减小，静电势能增加．设质子达到与球相切的 A 点时的速度为 v，动能为 $\frac{1}{2}mv^2$．若质子在 A 点的静电势能为 eU，则 U 即为球充电的最高电势，故质子在 A 点的能量为 $(eU+\frac{1}{2}mv^2)$．对于质子和带电金属球系统，无外界作用，内力(静电力)为保守力，故系统的能量守恒．这是一个重要的关系．

当质子沿轨迹运行时，受到的静电力沿金属球的径向．这是因为球表面电荷的分布是均匀的，单个靠近球的质子不会改变球上已经聚集的电荷的均匀分布，从而整个球电荷对质子的作用就如同这些电荷都集中在球心一样．(由于质子电荷与经不断充电后的整个球电荷相比是非常小的，由于质子束密度很小，认为球表面电荷均匀分布是合理的．)因此，当质子沿轨迹 3 运行时，对于球中心，其角动量守恒．于是可解．

需要注意的是，轰击金属球的粒子，可能从球上打出电子．在用质子充电时，打出电子只是加速球的充电过程．若用电子束充电，打出电子则是球的放电．当球捕获的电子数和从中打出的电子数达到动态平衡时，球的充电过程停止．相应的临界轨迹将不是图中与球相切的轨迹了，而可能是与它很接近的轨迹 2．因而，用电子束充电时，金属球的电势(绝对值)将稍低于用质子束充电的结果．

【解】 设质子从加速器射出时的速度为 v_0，取离带电金属球很远处的电势为零，则质子射出时的能量为

$$E=\frac{1}{2}mv_0^2 \tag{1}$$

式中 m 是质子质量．当金属球充电到最高电势 U 时，质子沿图中轨迹 3 与球相切而过．质子在切点 A 的能量为

$$E_A=eU+\frac{1}{2}mv^2 \tag{2}$$

式中 v 是质子在 A 点的速度，e 是质子电量．当质子沿轨迹 3 运行时，质子和带电金属球系统的能量守恒，故

$$E=E_A \tag{3}$$

质子沿轨迹 3 运行时，所受静电力沿球的径向，因此，对于球中心，质子的角动量守恒，有

$$mv_0d=mvr \tag{4}$$

由以上四式，解出

$$U=\left(1-\frac{d^2}{r^2}\right)\frac{E}{e}$$

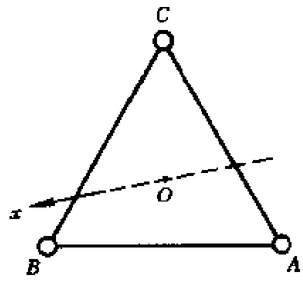
把有关数据代入，得

$$U=\left(1-\frac{1}{4}\right)\frac{2}{e}\ \text{keV}=1\ 500\ \text{V}$$

【题 27】 如电图 1-27-1 所示，导体球 A、B 和 C 的半径分别为 2 cm、2 cm 和 3 cm，它们的球心构成边长为 50 cm 的等边三角形 ABC．开始时，A、B、C 三球各带电荷 12×10^{-9} C、24×10^{-9} C、30×10^{-9} C，试求 B 球电势的近似值，并估算所用近似方法产生的误差．

若将三球用导线彼此相连，忽略连接后导线上的电荷分布，试求各球所带电量．

设 Ox 轴通过 $\triangle ABC$ 的中心，并垂直于 $\triangle ABC$ 所在平面．试计算导线将三球连接后，在 Ox 轴上与 O 点的距离等于 CO 的那一点的电场强度．



电图 1-27-1

【分析】 三个导体球(未连接)达到静电平衡后，分别为等势体，各球的电势即为其球心的电势．由于三球相互感应，球面电荷不会均匀分布，这就是精确计算的困难．然而，注意到三球的半径远小于其球心的间距．因此，在计算某球面电荷对另一球球心电势的贡献时，可近似认为前者的电荷集中在球心．至于球面电荷对本球球心电势的贡献，则与球面电荷是否均匀分布无关．由此，B 球电势可近似求解，并可同时对误差作出估计．

三球用导线相连后，电荷将重新分配，三球分得的电量是三个未知量．总电荷守恒，这是一个方程．A 球与 B 球大小相同、位置对称，电量应相同，这是又一方程．A 球与 C 球电势相等，这是第三个方程．于是可解．

为计算三球相连后球外某处的场强，仍可将不均匀分布的球面电荷近似处理为集中在球心，条件是该处与三球的距离应远大于球半径．

【解】 三球未连接，达到静电平衡．B 球为等势体，其电势可用 B 球球心的电势表示．B 球的电荷分布在球面上，不均匀，它们对 B 球球心电势的贡献，相当于将全部球面电荷集中到球面上任一点后对 B 球球心的电势贡献．A 球和 C 球球面电荷的分布也不均匀，但因球半径远小于 A 球和 C 球与 B 球球心的间距，故可近似将球面电荷集中到球心．于是，B 球电势为

$$U_B=\frac{Q_B}{4\pi\varepsilon_0R_B}+\frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0r_{AB}}+\frac{Q_C}{4\pi\varepsilon_0r_{CB}}$$

式中 R_B 是 B 球半径，r_{AB} 和 r_{CB} 分别是 A 球和 C 球球心与 B 球球心的间距．将有关数据代入，得

$$U_B=1.154\times10^4\text{V}$$

上述计算的误差来自将 A 球和 C 球的不均匀球面电荷近似地集中在球心．即在上式中 r_{AB} 的误差 Δr_{AB} 最大为 1cm，同样，Δr_{CB} 最大为 1.5cm．这种误差有正有负，总的累计误差可认为是各误差绝对值之和与系数 $\alpha(0<\alpha<1)$ 的乘积．若 A 球与 C 球的球面电荷均匀分布，则 $\alpha=0$；若 A 球与 C 球的球面电荷分别集中在距 B 球最近或最远处，则 $\alpha=1$；在本题中，不妨取中间值，

即取 $\alpha = \frac{1}{2}$. 作为误差的量级估算，可近似取 $\Delta r_{AB} = \Delta r_{CB} = \Delta r = 1\text{cm}$. 又因 $r_{AB} = r_{CB} = r$，于是，可估算误差如下

$$\Delta U_{\rm B} = \alpha\left|\frac{Q_{\rm A}+Q_{\rm C}}{4\pi\varepsilon_0(r\pm\Delta r)} - \frac{Q_{\rm A}+Q_{\rm C}}{4\pi\varepsilon_0 r}\right|$$

$$= \frac{Q_{\rm A}+Q_{\rm C}}{8\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\Delta r}{r(r\pm\Delta r)} \approx \frac{Q_{\rm A}+Q_{\rm C}}{8\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\Delta r}{r^2} = 7\ \text{V}$$

可见，误差约为千分之一，并不很大 .

三球连接后，所带电量设为 $Q'_{\rm A}, Q'_{\rm B}, Q'_{\rm C}$. 因电荷守恒，有

$$Q'_{\rm A} + Q'_{\rm B} + Q'_{\rm C} = 66\times10^{-9}\ \text{C} \tag{1}$$

因 A 球与 B 球大小相同位置对称，故有

$$Q'_{\rm A} = Q'_{\rm B} \tag{2}$$

采用上面计算 $U_{\rm B}$ 时的近似方法，则连接后 A 球和 C 球的电势应分别为

$$U'_{\rm A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q'_{\rm A}}{R_{\rm A}} + \frac{Q'_{\rm B}}{r_{BA}} + \frac{Q'_{\rm C}}{r_{CA}}\right)$$

$$U'_{\rm C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q'_{\rm C}}{R_{\rm C}} + \frac{Q'_{\rm A}}{r_{AC}} + \frac{Q'_{\rm B}}{r_{BC}}\right)$$

因 A 球与 C 球相连，电势相同，故

$$U'_{\rm A} = U'_{\rm C}$$

由以上三式，得

$$\frac{Q'_{\rm A}}{R_{\rm A}} + \frac{Q'_{\rm B}}{r_{BA}} + \frac{Q'_{\rm C}}{r_{CA}} = \frac{Q'_{\rm C}}{R_{\rm C}} + \frac{Q'_{\rm A}}{r_{AC}} + \frac{Q'_{\rm B}}{r_{BC}} \tag{3}$$

联立(1)、(2)、(3) 式，解出

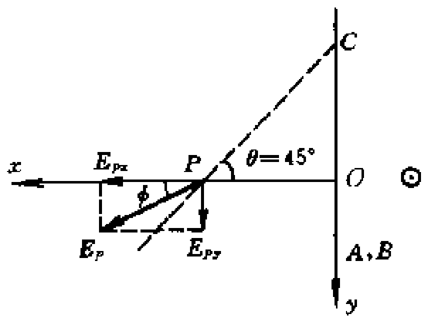
$$Q'_{\rm A} = Q'_{\rm B} = 18.685\times10^{-9}\ \text{C},$$
$$Q'_{\rm C} = 28.63\times10^{-9}\ \text{C}$$

取 $Oxyz$ 坐标如电图 1－27－2 所示 . 在电图 1－27－2 中，$\triangle ABC$ 已被它在 y 轴上的投影线段所代替 . 所求的 P 点在 x 轴上，其电场强度可表为

$$\boldsymbol{E}_{\rm P} = (E_{Px}, E_{Py}, E_{Pz})$$

由题设，如电图 1－27－2

$$OP = OC = \frac{50}{\sqrt{3}}\ \text{cm}$$



电图 1－27－2

因 $Q'_{\rm C}$ 对 E_{Pz} 无贡献，因 $Q'_{\rm A}$ 和 $Q'_{\rm B}$ 大小相等位置对称，它们对 E_{Pz} 的贡献刚好抵消，于是，得

$$E_{Pz} = 0$$

在计算 E_{Px} 和 E_{Py} 时，均近似地将非均匀分布的球面电荷集中到球心 . 如电图 1－27－2，由于对称性，$Q'_{\rm A}$ 和 $Q'_{\rm B}$ 对 E_{Px} 的贡献等同于把它们移到 C 点对 E_{Px} 的贡献，故有

$$E_{Px} = \frac{Q'_A + Q'_B - Q'_C}{4\pi\varepsilon_0 r_{cP}^2}\cos\theta$$

如电图 2 - 27 - 2，

$$\theta = 45°$$

$$r_{cP} = \sqrt{2}OC = 40.82\ \text{cm}$$

把有关数据代入，得

$$E_{Px} = 2.52 \times 10^3\ \text{V/m}$$

由对称性，从 Q'_C 中取出 18.685×10^{-9} C($= Q'_A = Q'_B$) 的电量，它与 Q'_A 和 Q'_B 对 E_{Py} 的合贡献为零．因而所求的 E_{Py} 即为 Q'_C 中剩余的 Q''_C($= Q'_C = Q'_A = 9.945 \times 10^{-9}$ C) 在 P 点电场强度的 y 分量，即

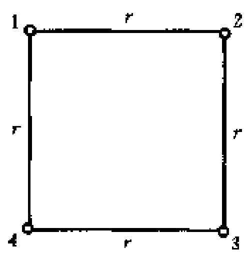
$$E_{Py} = \frac{Q''_C}{4\pi\varepsilon_0 r_{cP}^2}\sin\theta = 0.38 \times 10^3\ \text{V/m}$$

总之，$\boldsymbol{E}_P$ 在 xy 平面上，它的大小 E_P 以及 $\boldsymbol{E}_P$ 与 x 轴的夹角 ϕ 为，

$$E_P = \sqrt{E_{Px}^2 + E_{Py}^2} = 2.55 \times 10^3\ \text{V/m}$$

$$\phi = \arctan\frac{E_{Py}}{E_{Px}} = 8.55°$$

【题 28】 如电图 1 - 28 - 1 所示，在真空中有四个半径均为 a 的不带电的相同导体球，球心分别位于边长为 r 的正方形的四个顶点之上，$r \gg a$．现让球 1 带 Q 的电荷($Q > 0$)，然后取一细金属丝，它的一端固定在球 1 上，另一端分别依次与球 2、3、4 接触．设每次接触的时间都足够长，使它们达到静电平衡后，再断开．设分布在细金属丝上的电荷可忽略不计．试求四小球最后所带电量 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4．



电图 1 - 28 - 1

【分析】 球 1 与球 2 经金属丝接触达到平衡后，因位置对称，又球 3 与球 4 上虽有感应电荷分布，但因电量为零且因 $a \ll r$，对球 1 和球 2 的电量并无影响，故球 1 与球 2 带电应相等，各为 $\frac{Q}{2}$．断开后，球 2 带电 $\frac{Q}{2}$ 不变．

球 1 与球 3 接触达到平衡后，带电 $\frac{Q}{2}$ 的球 2 对它们是有影响的，但因球 1 与球 2 相对球 3 的位置对称，故再次平分电量，各为 $\frac{Q}{4}$．断开后，球 3 带电 $\frac{Q}{4}$ 不变．

球 1 与球 4 接触达到平衡后，球 2 与球 3 虽位置相当但带电量不同，对球 1 和球 4 的影响将有所不同，因此球 1 与球 4 并不处于对称位置，电量不会再次简单地平分，球 1 与球 4 接触达到平衡的条件是电势相等，即 $U_1 = U_4$．无论 U_1 还是 U_4，都是四个带电球在球 1 与球 4 球心处产生的电势之和(所谓球 2 和球 3 对球 1 与球 4 的“影响”，即在于对 U_1 与 U_4 有贡献)．利用 $r \gg a$ 的条件及平衡后电荷分布在导体球表面上这一特征，即可求解．

【解】 球 1 与球 2 接触达到平衡后，分别带电

$$Q'_1 = Q_2 = \frac{Q}{2}$$

断开后，球 2 带电 $Q_2=\dfrac{Q}{2}$ 不变．

球 1 与球 3 接触达到平衡后，因相对带电的球 2 处于对称位置，故分别带电

$$Q''_1=Q_3=\frac{Q'_1}{2}=\frac{Q}{4}$$

断开后，球 3 带电 $Q_3=\dfrac{Q}{4}$ 不变．

球 1 与球 4 接触达到平衡后，相对于带电$\dfrac{Q}{2}$的球 2 以及带电$\dfrac{Q}{4}$的球 3，并不处于对称位置，但电势相等．设平衡后球 1 与球 4 的电量分别为 Q_1 与 Q_4，电势分别为 U_1 与 U_4，则有

$$Q_1+Q_4=Q''_1=\frac{Q}{4},\quad U_1=U_4$$

其中 U_1 与 U_4 分别是 Q_1、Q_2、Q_3、Q_4 在球 1 与球 4 处产生的电势之和．Q_1 分布在球 1 表面(不均匀)，因球 1 是导体球，故 Q_1 对 U_1 的贡献等于它在球 1 的球心处的电势，为$\dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 a}$．因 $r\gg a$，Q_2、Q_3、Q_4 对 U_1 的贡献可利用点电荷的电势公式．U_4 完全类似．于是有

$$U_1=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 a}+\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{2}r}+\frac{Q_4}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$U_4=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{2}r}+\frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{Q_4}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

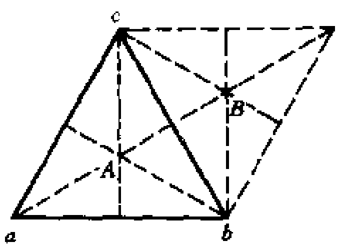
联立以上四式，解出 Q_1 和 Q_4．连同上面解出的 Q_2 和 Q_3，得

$$\begin{cases}Q_1=\left[1-\dfrac{(\sqrt{2}-1)a}{\sqrt{2}(r-a)}\right]\dfrac{Q}{8}\approx\left[1-\dfrac{(\sqrt{2}-1)a}{\sqrt{2}r}\right]\dfrac{Q}{8}\\ Q_2=\dfrac{Q}{2}\\ Q_3=\dfrac{Q}{4}\\ Q_4=\left[1+\dfrac{(\sqrt{2}-1)a}{\sqrt{2}(r-a)}\right]\dfrac{Q}{8}\approx\left[1+\dfrac{(\sqrt{2}-1)a}{\sqrt{2}r}\right]\dfrac{Q}{8}\end{cases}$$

显然，有

$$Q_1+Q_2+Q_3+Q_4=Q$$

【题 29】 如图所示，三根等长的带电绝缘细棒首尾相接构成三角形，其中电荷的分布如同绝缘棒都换成等长导体棒且已达到静电平衡时的电荷分布．测得图中 A 点和 B 点的电势分别为 U_A 和 U_B．假设若将 ab 棒取走，并不影响 ac 及 bc 两棒的电荷分布．试求此时 A 点和 B 点的电势．



电图 1－29－1

【分析】 三绝缘细棒中的电荷分布如同导体棒静电平衡后的电荷分布，所以各棒电荷虽非均匀但都是自身左右对称分布的．由对称性，三棒各自对 A 点电势的贡献应相同．由对称性，bc 棒对 A 点和 B 点电势的贡献应相同．由对称性，ac 棒与 ab 棒各自对 B 点电势的贡

献应相同．根据上述对称性分析，加上三棒共存时已知的 U_A 和 U_B，即可求出除去 ab 棒后，A 点和 B 点的电势．

【解】 由对称性，三棒各自对 A 点电势的贡献相同，表为 U_x，故有

$$U_A = 3U_x \tag{1}$$

由对称性，bc 棒对 A 点和 B 点电势的贡献相同，故 bc 棒对 B 点电势的贡献也应是 U_x．由对称性，ab 棒和 ac 棒各自对 B 点电势的贡献相同，表为 U_y．于是，由电势叠加原理，有

$$U_B = U_x + 2U_y \tag{2}$$

联立(1)、(2) 式，解出

$$U_x = \frac{1}{3}U_A$$

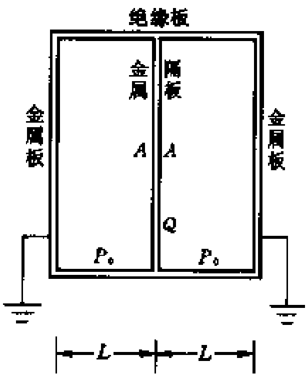
$$U_y = \frac{1}{2}U_B - \frac{1}{6}U_A$$

因此，ab 棒取去后，A 点和 B 点的电势应分别为

$$U'_A = 2U_x = \frac{2}{3}U_A$$

$$U'_B = U_x + U_y = \frac{1}{6}U_A + \frac{1}{2}U_B$$

【题 30】 如电图 1－30－1 所示，恒温的矩形盒内装有理想气体，当隔板将盒等分为二时，两侧气体压强均为 P_0．当隔板平行移动时，无摩擦，不漏气，两侧气体经历准静态过程．隔板是面积为 A 的金属板，带电量为 Q，矩形盒上与它平行的两块板也是金属板，面积也为 A，相距为 $2L$，固定，并接地．隔板两侧的电场均匀．盒的其余部分是不导电的绝缘板．



电图 1－30－1

1．试求隔板的平衡位置．

2．试讨论平衡是否稳定．

【分析】 当隔板在中央时，两侧气体所施压力的合力为零，两金属板所施电力的合力亦为零，故中央是隔板的一个平衡位置．

当隔板平行右移时，左侧气体等温膨胀，压强减小，右侧气体等温压缩，压强增大，两侧气体所施压力的合力不为零，指向左方．隔板从中央右移越多，气体合力越大．

再看电力．因两侧金属板接地，电势均为零，故隔板与左金属板之间的电势差等于隔板与右金属板之间的电势差，与隔板的位置无关．当隔板右移时，与左板距离加大，与右板距离缩小，电势差相等、电场均匀(题设)表明右侧场强大于左侧，这是隔板两表面上电荷重新分配的结果．于是，隔板右表面的面电荷密度应大于左表面，从而右金属板施予隔板的电力(吸引力) 应大于左金属板施予隔板的电力(吸引力)，即隔板所受电力的合力不为零，且指向右方．

因此，除中央外，隔板在右侧还可能有平衡位置，当隔板左移时，可作类似的分析，故左侧相应的也可能有平衡位置．总之，隔板的平衡位置，是指隔板所受气体合力与电力合力之和为零的位置．

平衡是否稳定，取决于隔板受扰动稍稍偏离平衡位置后，隔板所受气体合力与电力合力之和

是否与扰动反向，能否消除扰动．若能消除扰动，使隔板回到平衡位置，则平衡是稳定的．若扰动增长，无法回复，则平衡是不稳定的．因此，为了讨论平衡的稳定性，应画出气体合力与电力合力随隔板位置变化的曲线，并逐个讨论各个平衡位置是否稳定．

【解】 如电图 1－30－1，取 x 轴指向右方，原点在中央，设隔板从中央右移到 x 处，则左侧和右侧气体对隔板的压力分别为

$$\begin{cases} F_{\text{气},\text{左}} = p_{\text{左}}A = \dfrac{p_0V_0}{V_{\text{左}}} = \dfrac{L}{L+x}p_0A,\text{指向右方} \\ F_{\text{气},\text{右}} = p_{\text{右}}A = \dfrac{p_0V_0}{V_{\text{右}}} = \dfrac{L}{L-x}p_0A,\text{指向左方} \end{cases} \tag{1}$$

式中用到等温过程方程 $p_0V_0 = p_{\text{左}}V_{\text{左}} = p_{\text{右}}V_{\text{右}}$．隔板右移到 x 处时所受气体合力为

$$F_{\text{气}} = F_{\text{气},\text{右}} - F_{\text{气},\text{左}} = 2p_0LA\frac{x}{L^2-x^2},\text{指向左方} \tag{2}$$

设隔板右移到 x 处时，隔板左表面和右表面的面电荷密度分别为 $\sigma_{\text{左}}$ 和 $\sigma_{\text{右}}$，则

$$\sigma_{\text{左}} + \sigma_{\text{右}} = \frac{Q}{A} \tag{3}$$

因静电感应，接地的左金属板和右金属板的面电荷密度应分别为 $-\sigma_{\text{左}}$ 和 $-\sigma_{\text{右}}$，故隔板左侧和右侧的电场强度分别为

$$\begin{cases} E_{\text{左}} = \dfrac{\sigma_{\text{左}}}{\varepsilon_0} \\ E_{\text{右}} = \dfrac{\sigma_{\text{右}}}{\varepsilon_0} \end{cases} \tag{4}$$

因隔板与左金属板之间的电势差等于隔板与右金属板之间的电势差，且电场均匀，故有

$$E_{\text{左}}(L+x) = E_{\text{右}}(L-x) \tag{5}$$

由(3)、(4)、(5)式，解出

$$\begin{cases} \sigma_{\text{左}} = \dfrac{L-x}{L}\cdot\dfrac{Q}{2A} \\ \sigma_{\text{右}} = \dfrac{L+x}{L}\cdot\dfrac{Q}{2A} \end{cases} \tag{6}$$

于是，隔板受左和右金属板的电力分别为

$$\begin{cases} F_{\text{电},\text{左}} = Q_{\text{左}}E'_{\text{左}} = \sigma_{\text{左}}A\dfrac{\sigma_{\text{左}}}{2\varepsilon_0} = \dfrac{1}{2\varepsilon_0}\sigma_{\text{左}}^2A = \dfrac{(L-x)^2Q^2}{8\varepsilon_0L^2A} \\ F_{\text{电},\text{右}} = Q_{\text{右}}E'_{\text{右}} = \sigma_{\text{右}}A\dfrac{\sigma_{\text{右}}}{2\varepsilon_0} = \dfrac{1}{2\varepsilon_0}\sigma_{\text{右}}^2A = \dfrac{(L+x)^2Q^2}{8\varepsilon_0L^2A} \end{cases} \tag{7}$$

式中 $Q_{\text{左}} = \sigma_{\text{左}}A$ 是隔板左表面的电量，$Q_{\text{右}} = \sigma_{\text{右}}A$ 是隔板右表面的电量．$E'_{\text{左}}$ 是左金属板在 $Q_{\text{左}}$ 处的场强，而(4)、(5)式中的 $E_{\text{左}}$ 是隔板左表面电量与左金属板电量共同产生的场强．$E'_{\text{右}}$ 与 $E_{\text{右}}$ 的含义类似．故有

$$\begin{cases} E'_{\text{左}} = \dfrac{1}{2}E_{\text{左}} \\ E'_{\text{右}} = \dfrac{1}{2}E_{\text{右}} \end{cases}$$

在(7)式中，$F_{电,左}$ 指向左方，$F_{电,右}$ 指向右方，故隔板所受电力的合力为

$$F_{电}=F_{电,右}-F_{电,左}=\frac{Q^2}{8\varepsilon_0L^2A}[(L+x)^2-(L-x)^2]$$

$$=\frac{Q^2}{2\varepsilon_0LA}x\text{，指向右方} \tag{8}$$

平衡条件是

$$F_{气}=F_{电} \tag{9}$$

把(2)、(8)式代入上式，得

$$x\left(\frac{Q^2}{4\varepsilon_0LA^2}-\frac{p_0L}{L^2-x^2}\right)=0 \tag{10}$$

因此，隔板的平衡位置是

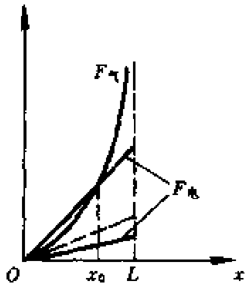
$$\begin{cases}x=0\\ x=\pm L\sqrt{1-\dfrac{4\varepsilon_0p_0A^2}{Q^2}}=\pm x_0\end{cases} \tag{11}$$

当 $Q^2>4\varepsilon_0p_0A^2$ 时，有三个平衡位置，即 $x=0$ 与 $x=\pm x_0$. 当 $Q^2<4\varepsilon_0p_0A^2$ 时，只有一个平衡位置，$x=0$.

作 $F_{气}(x)$ 与 $F_{电}(x)$（均取绝对值）曲线如电图1-30-2. 图中只画出 $x>0$ 部分的曲线，$x<0$ 的另一半与之对称. 在 $x=0$ 处，$F_{气}(x)$ 和 $F_{电}(x)$ 曲线的斜率分别为

$$\frac{d}{dx}\left[2p_0LA\frac{x}{L^2-x^2}\right]_{x=0}=\frac{2p_0A}{L}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{Q^2}{2\varepsilon_0LA}x\right]_{x=0}=\frac{Q^2}{2\varepsilon_0LA}$$



电图 1-30-2

当 $\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0LA}>\dfrac{2p_0A}{L}$，即当 $Q^2>4\varepsilon_0p_0A^2$ 时，两曲线有三个交点 $x=0$ 与 $x=\pm x_0$，即有三个平衡位置. 这相当于 $F_{电}$ 直线的斜率 $\left(\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0LA}\right)$ 大于 $F_{气}$ 曲线在 $x=0$ 的斜率 $\left(\dfrac{2p_0A}{L}\right)$，$F_{电}$ 直线如电图1-30-2中较高的斜实线所示，$F_{气}$ 曲线在 $x=0$ 的斜率在电图1-30-2中用虚的斜直线表示.

当 $\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0LA}<\dfrac{2p_0A}{L}$，即当 $Q^2<4\varepsilon_0p_0A^2$ 时，两曲线只有一个交点 $x=0$，即只有一个平衡位置. 这时 $F_{电}$ 直线如电图1-30-2中较低的斜直线所示，即低于 $F_{气}$ 曲线在 $x=0$ 的斜率.

总之，前者有三个平衡位置，后者只有一个平衡位置，应分别讨论其稳定性.

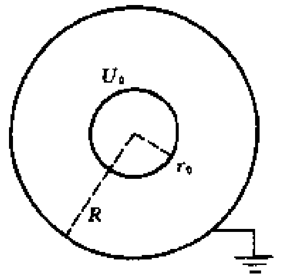
设 $Q^2>4\varepsilon_0p_0A^2$，对于平衡位置 $x=0$，若有扰动使隔板稍稍右移 $x>0$，则因 $|F_{电}|>|F_{气}|$，隔板所受合力指向右方，扰动扩大，故 $x=0$ 是不稳定的平衡位置（左移同理）. 对于平衡位置 $x=x_0$，若有扰动使隔板稍稍右移 $x>x_0$. 则因 $|F_{电}|<|F_{气}|$，合力指向左方，使隔板回复到 x_0，扰动消除，故 $x=x_0$ 是稳定的平衡位置. 同理，$x=-x_0$ 也是稳定的平衡位置.

设 $Q^2<4\varepsilon_0p_0A^2$，对于唯一的平衡位置 $x=0$，若有扰动使隔板稍稍右移 $x>0$，则因

$|F_{电}| < |F_{气}|$,合力指向左方,扰动消除,隔板回复到 $x = 0$,故 $x = 0$ 是稳定的平衡位置．

本题有趣之处正在于,当 $Q^2 > 4\varepsilon_0 p_0 A^2$ 时,$x = 0$ 是不稳定的平衡位置;而当 $Q^2 < 4\varepsilon_0 p_0 A^2$ 时,$x = 0$ 却是稳定的平衡位置．

【题 31】 如图所示,在半径为 R 的接地金属圆柱面的中央放有一根半径为 r_0 的同轴细长导线,导线处于正的高电势 U_0. 于是导线外侧附近介质原子被电离成自由电子与正离子,其中自由电子即被导线吸附,正离子则离开导线径向地运动．设正离子的径向迁移率(径向速度与电场强度的比值)为常数 w,且迁移过程中正离子始终围绕导线形成均匀的圆柱形薄层．



电图 1－31－1

1. 试证明,作为时间 t(从正离子在导线外侧附近形成的时刻开始计时)的函数,正离子的径向位置 r 可表为

$$r^2 = k(t + t_0)$$

并求出常量 k 和 t_0(略去由于介质电离造成的电场变化).

2. 设全部正离子电量为 Q,为了使导线电势保持原来的 U_0 不变,需给导线补充电量 Q^*．试导出 Q^* 与时间 t 的关系．

【分析】 正离子径向位置随时间的变化 $r(t)$ 取决于它的径向速度．因径向速度与电场强度之比即迁移率 w 已知,故 $r(t)$ 取决于电场强度 $E(r)$. 利用导线与圆柱面之间的电势差求出 $E(r)$,于是第一问可解．

因介质电离,在导线表面吸附的电子以及在 $r(t)$ 处的正离子要产生附加的径向电场,使导线与圆柱面之间有附加的电势差．为保持导线的电势,需补充电荷,以便消除附加的电势差．

【解】 1. 正离子的径向迁移率为

$$w = \frac{v_r}{E(r)} = \frac{\frac{dr}{dt}}{E(r)} \tag{1}$$

式中 $v_r = \frac{dr}{dt}$ 是正离子的径向速度,$E(r)$ 是径向电场．设导线上的线电荷密度为 λ,则

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \tag{2}$$

导线与接地圆柱面之间的电势差为

$$U_0 = \int_{r_0}^{R} E(r)dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R}{r_0} \tag{3}$$

把由(3)式得出的 λ 代入(2)式,得

$$E(r) = \frac{U_0}{r\ln\frac{R}{r_0}}$$

把上式代入(1)式,得

$$\frac{dr}{dt} = \left(\frac{wU_0}{\ln\frac{R}{r_0}}\right)\frac{1}{r}$$

或

$$r\mathrm{d}r=\frac{wU_0}{\ln\frac{R}{r_0}}\mathrm{d}t$$

积分

$$\int_{r_0}^{r} r\mathrm{d}r = \frac{wU_0}{\ln\frac{R}{r_0}}\int_0^t \mathrm{d}t$$

得

$$r^2=\frac{2wU_0}{\ln\frac{R}{r_0}}t+r_0{}^2$$

$$=\frac{2wU_0}{\ln\frac{R}{r_0}}\left(t+\frac{\ln\frac{R}{r_0}}{2wU_0}r_0{}^2\right)=k(t+t_0)$$

式中

$$k=\frac{2wU_0}{\ln\frac{R}{r_0}}$$

$$t_0=\frac{r_0{}^2\ln\frac{R}{r_0}}{2wU_0}=\frac{r_0{}^2}{k}$$

2. 介质电离后，导线表面因吸附电子而附加的电荷为 $-Q$，在 $r(t)$ 处正离子的电量为 Q，它们产生的附加电场为

$$E'(\rho)=\begin{cases}-\dfrac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0\rho}, & r_0<\rho<r\\ 0, & \rho>r\end{cases}$$

式中负号表示电场强度指向导线，式中

$$\lambda'=\frac{Q}{l}$$

l 是柱长．$E'(\rho)$在导线与接地圆柱面之间产生的附加电势差为

$$U'=\int_{r_0}^{R}E'(\rho)\mathrm{d}\rho=-\frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{r_0}$$

为了消除 U'，保持导线与圆柱面之间的电势差仍为 U_0，需在导线上补充正电荷 Q^*，它的线密度为

$$\lambda^*=\frac{Q^*}{l}$$

所产生的附加电势差应为 $-U'$，即

$$-U'=\frac{\lambda^*}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R}{r_0}$$

把上面的 U'代人，得

$$\frac{\lambda^*}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R}{r_0}=\frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{r_0}$$

即

$$\frac{Q^*}{l}\ln\frac{R}{r_0}=\frac{Q}{l}\ln\frac{r}{r_0}$$

故

$$Q^*=\frac{Q\ln\frac{r}{r_0}}{\ln\frac{R}{r_0}}=\frac{Q\ln\frac{r^2}{r_0{}^2}}{2\ln\frac{R}{r_0}}$$

把 $r^2=k(t+t_0)$及 $r_0{}^2=kt_0$ 代人上式，得

$$Q^*=\frac{Q\ln\frac{t+t_0}{t_0}}{2\ln\frac{R}{r_0}}$$

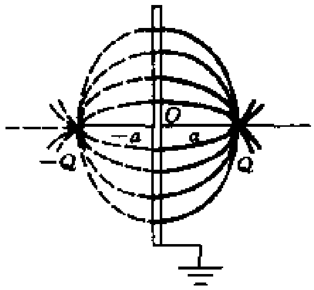
式中的 t_0 已在第 1 问中求出．

【题 32】 圆形导体薄板的半径为 R，在其中轴线上与圆板中心 O 相距为 a 处有一个静止的点电荷 Q．设 $a\ll R$，忽略边缘效应．

1．导体板接地，试求导体板上的电荷分布．

2．导体板不接地，带有电量 Q_0，试求导体板上的电荷分布．

【分析】 如电图 1－32－1 所示，导体板接地时，在点电荷的作用下，导体板的右表面出现感应电荷．但感应电荷的分布及电量均未知，也无法用通常的场强叠加原理与高斯定理来计算电场强度．



电图 1－32－1

然而，由于导体面是等势面，电场线应与它正交．导体面上的感应电荷使得从点电荷 Q 发出的电场线终止在它上面．因而电场线的分布大致如电图 1－32－1 右半的实线所示．它与电偶极子产生的电场十分相似(电偶极子的电场还应包括电图 1－32－1 左半用虚线画出的)．换言之，导体板上感应电荷对右半电场的影响，可以用在 $-a$ 处的点电荷 $-Q$ 代替．于是电场强度容易求出．这当然是由猜测提出的尝试解，容易验证，它满足静电场的基本方程和边条件，因此，根据唯一性定理，尝试解就是实际所求的解．

这种方法叫做静电镜像法，简称镜像法或电像法．其实质是用虚设的电荷来等效地代替实际导体面或介质面上的感应电荷．导体面好像一面镜子，虚电荷就是原有的电荷在“镜”中的“像”．虚电荷的位置和电量应结合问题的具体条件由电场线的分布状况猜测出来．镜像法是求解一类静电问题的简便方法，其根据是唯一性定理．

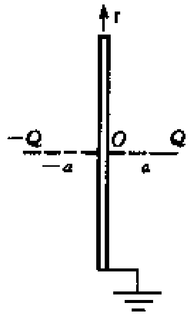
由求出的接地导体板右表面外的电场强度分布，用高斯定理即可求出导体板右表面感应电荷的分布及电量(应为 $-Q$)．

导体板不接地并带电 Q_0 的情形，与上述讨论相类似．为使从点电荷 Q 发出的电场线垂直

地中止在导体板右表面，要求右表面上具有第1问得出的电荷分布及电量 $-Q$. 但现在导体板的总电量为 Q_0，这样，除上述 $-Q$ 外，还剩余 (Q_0+Q) 的电量，它们应均匀地分布在导体的左、右两表面上，才能确保导体板内的电场强度为零，于是第2问可解．

【解】 1. 如电图1－32－2所示，导体板接地，右表面感应电荷对右半电场的贡献，可以用位于左侧 $-a$ 处电量为 $-Q$ 的虚点电荷代替．因此，导体板右表面外附近与中心 O 相距 r 处的电场强度（相当于电偶极子中垂面上的电场强度）$\boldsymbol{E}(r)$ 与板面垂直，方向向左，其大小为

$$E(r)=\frac{Qa}{2\pi\varepsilon_0(r^2+a^2)^{3/2}}$$



电图1－32－2

导体板右表面上的面电荷密度为

$$\sigma(r)=\varepsilon_0\boldsymbol{E}(r)\cdot\boldsymbol{n}=\frac{-Qa}{2\pi(r^2+a^2)^{3/2}}$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 是导体板右表面法线方向的单位矢量，指向右方．

因 $R\gg a$，导体板右表面上总的感应电荷为，

$$\int_0^R\sigma(r)2\pi r\mathrm{d}r=-Q\left[1-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{a}\right)^2}}\right]\approx-Q$$

若 R 为无穷大，则板上的感应电荷严格等于 $-Q$.

2. 导体板不接地，带电量 Q_0. 为了使得从点电荷 Q 发出的电场线能垂直地中止在导体板右表面上，右表面上应有上述按 $\sigma(r)$ 分布的电量为 $-Q$ 的感应电荷．由于导体板总电量为 Q_0，除 $-Q$ 感应电荷外，剩余的电量为

$$Q_0-(-Q)=Q_0+Q$$

这个 (Q_0+Q) 的电量应均匀分布在导体板的左、右两个表面上，面电荷密度为

$$\sigma=\frac{Q_0+Q}{2\pi R^2}$$

因此，导体板右表面和左表面的面电荷密度分别为

$$\sigma_{右}(r)=\sigma(r)+\sigma=\frac{Q_0+Q}{2\pi R^2}-\frac{Qa}{2\pi(r^2+a^2)^{3/2}}$$

$$\sigma_{左}(r)=\sigma=\frac{Q_0+Q}{2\pi R^2}$$

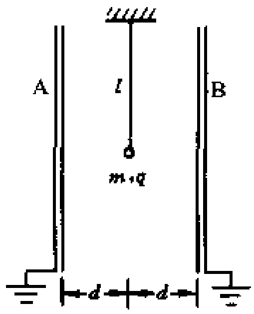
$\sigma_{右}(r)$ 和 $\sigma_{左}(r)$ 以及点电荷 Q 使导体板内电场强度处处为零．

【题33】 如电图1－33－1所示，两块足够大的接地导体平面A和B平行竖直放置，相距 $2d$，$d=10$ cm. 在两板之间的中央位置，用长 $l=1$ m的绝缘细线悬挂一个质量 $m=0.1$ g，电量 $q=5\times10^{-9}$ C的小摆球．让小摆球稍稍偏离平衡位置后释放，使之小角度摆动．忽略各种电磁阻尼和空气阻尼．试求小球的摆动周期 T.

【分析】 摆球的运动轨迹是圆弧，在摆角很小时，可近似为在水平面的直线．

当摆球在中央位置时，因摆球带电，两接地导体板上会产生非均匀分布的感应电荷，由静电镜像法（参看本章题32），感应电荷对带电摆球的作用可等效为一系列镜像点电荷的水平作用

力，由对称性，这些力相互抵消，摆球在中央位置受力平衡．当摆球稍稍偏离平衡位置时，一方面摆线张力的水平分量要使摆球回到中央平衡位置（摆线张力的竖直分量与重力抵消），另一方面各镜像点电荷的位置将随之发生变化，它们对带电摆球的静电作用力仍近似沿水平方向，但彼此不再抵消，即电力的合力不再为零．上述摆线张力的水平分量及沿水平方向的电力合力之和就是摆球所受的沿水平方向的回复力，它使摆球在水平方向往复振动．

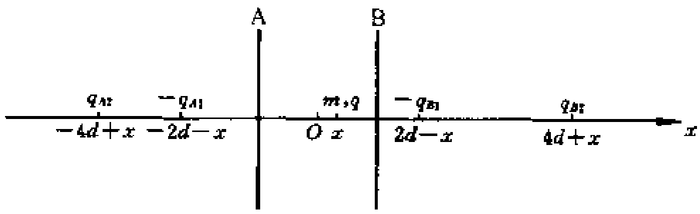


电图 1－33－1

随着带电摆球的运动，导体平板中的感应电荷会有相应的迁移，严格说来已不属于静电问题，但因小角度摆动比较缓慢，可近似当作静电问题处理．感应电荷的迁移运动必定会导致相应的能量损失，此即电磁阻尼，故严格说来摆球将作阻尼振动．因题设电磁阻尼很小，可略，无需涉及．

【解】 当带电摆球在 A、B 之间的中央位置时，为使接地导体板 A 的电势为零，需在 A 左侧 d 处对称地有一电量为 $-q$ 的镜像点电荷，记为 $-q_{A1}$；为使 B 电势为零，需在 B 右侧 d 处对称地有一电量为 $-q$ 的镜像点电荷，记为 $-q_{B1}$．由于 $-q_{B1}$ 对 A 的非零电势贡献，为使 A 的电势仍为零，需在 A 左侧 $3d$ 处再对称地有电量为 q 的镜像点电荷，记为 q_{A2}．同样，由于 $-q_{A1}$ 对 B 的非零电势贡献，为使 B 的电势仍为零，需在 B 右侧 $3d$ 处再对称地有电量为 q 的镜像点电荷，记为 q_{B2}．同样，为了消除 q_{B2} 对 A 和 q_{A2} 对 B 的非零电势贡献，又需再有一对镜像点电荷 $-q_{A3}$，$-q_{B3}$．如此继续下去，形成左、右对称的镜像点电荷的无限系列．

当带电摆球偏离中央位置时，也有相应的左、右无限系列的镜像点电荷．为了讨论方便，取摆球的中央位置为原点，取水平向右为 x 轴．则当带电摆球在 x 位置时，各镜像点电荷的位置如电图 1－33－2 所示．



电图 1－33－2

各镜像点电荷（简称电荷）的位置及其与带电摆球之间的距离（简称距离）详如下表．

电荷	$-q_{A1}$	$-q_{B1}$	q_{A2}	q_{B2}	$-q_{A3}$	$-q_{B3}$	q_{A4}	q_{B4}	…
位置	$-2d-x$	$2d-x$	$-4d+x$	$4d+x$	$-6d-x$	$6d-x$	$-8d+x$	$8d+x$	…
距离	$2d+2x$	$2d-2x$	$4d$	$4d$	$6d+2x$	$6d-2x$	$8d$	$8d$	…

这些镜像点电荷对带电摆球静电作用力的合力为

$$F_{x1}=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\left[\frac{1}{(2d-2x)^2}+\frac{1}{(4d)^2}+\frac{1}{(6d-2x)^2}+\frac{1}{(8d)^2}+\cdots\right]\right.$$

$$-\left[\frac{1}{(2d+2x)^2}+\frac{1}{(4d)^2}+\frac{1}{(6d+2x)^2}+\frac{1}{(8d)^2}+\cdots\right]\Bigg\}$$

$$=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\left[\frac{1}{(2d-2x)^2}-\frac{1}{(2d+2x)^2}\right]+\left[\frac{1}{(6d-2x)^2}-\frac{1}{(6d+2x)^2}\right]+\cdots\right\}$$

因

$$|x|\ll d$$

近似得出

$$F_{x1}=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{x}{d^3}+\frac{x}{(3d)^3}+\frac{x}{(5d)^3}+\cdots\right\}=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^3}\left(1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\cdots\right)x$$

式中

$$\left(1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\cdots\right)\approx 1.052$$

把有关数据代入，得

$$F_{x1}=2.367x\text{N/m}$$

当摆球在 x 位置时，所受摆线张力的水平分量为

$$F_{x2}=-mg\frac{x}{l}=-9.8x\ \text{N/m}$$

故摆球在 x 位置时，所受沿 x 方向的合力为

$$F_x=F_{x1}+F_{x2}=-7.433x\ \text{N/m}$$

这是一个线性回复力，摆球在它的作用下围绕中央的平衡位置作简谐振动，其振动周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

式中 $k=7.433$ N/m，$m=0.1$ g，代入，得

$$T=2.3\ \text{s}$$

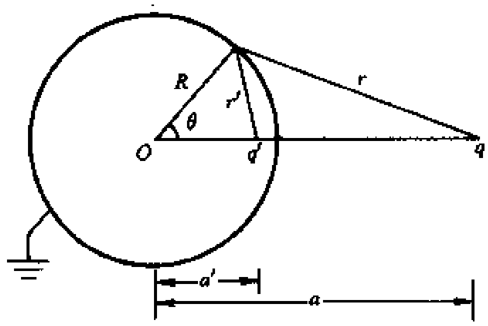
【本题是 1994 年北京大学物理试验班学生吴昉编制的．该试验班是为了培训、选拔参加 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)的中国代表队而设立的．】

【题 34】 半径为 R 的导体球带有电量 $Q(Q>0)$．今在距球心为 a 处$(a>R)$放置一个与 Q 同号的点电荷 q．为使导体球在静电平衡时受到 q 的作用力吸引，试确定 q 的取值范围．

【分析】 点电荷 q 对导体球 Q 的作用力与导体球 Q 对点电荷 q 的作用力遵循牛顿第三定律．球外点电荷 q 所受导体球 Q 的作用力取决于导体球 Q 在该点的电场强度．为此需要知道导体球上电量 Q 的分布．因静电感应，导体球上 Q 的分布是不均匀的，难于计算，但它在球外的电场强度可用镜像法来求．

如图，先把导体球接地，使其电势为零．设由于点电荷 q 的静电感应使导体表面带有不均匀分布的感应电荷 q'．根据镜像法，感应电荷 q' 在球外的电场可用虚设的点电荷 q' 代替．设虚点电荷 q' 处在球心 O 与 q 的联线上，与球心相距为 a'．根据 q 和 q' 应使接地导体球电势为零的条件，可以求出 q' 及 a' 的值．于是，接地导体球外，由 q 以及球面上感应电荷 q' 产生的场，可以等效地用 q 和虚点电荷 q' 在球外产生的场代替，后者易求．只要这样提出的尝试解满足静电场的基本方程和边条件，则根据唯一性定理，尝试解就是实际的解．

撤去导体球的接地线后，球面上感应电荷 q' 的分布不变．为了使球面上的总电量等于题设的 Q，可再加上 $(Q-q')$ 的电量．因为静电平衡时，导体球内部的电场强度为零，所以加上的 $(Q-q')$ 电量应均匀分布在导体球的表面，它在球外的场易求．[也可以用一个位于球心的虚设的点电荷 $(Q-q')$ 来代替，它们在球外产生的场相同．]



电图 1－34－1

因此，带电量为 Q 的导体球在球外点电荷 q 处的电场强度，等于在 a' 处的虚点电荷 q' 与均匀分布在导体球表面的 $(Q-q')$[或另一个位于球心的虚点电荷 $(Q-q')$]的共同贡献，不难求出．

【解】 导体球接地，其电势为零．因点电荷 q 的静电感应使球面上有感应电荷 q'．设感应电荷在球外的场可以等效地用虚设的位于 a' 的点电荷 q' 代替．如图，应有

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r'}=0$$

即

$$r'q=-rq'$$

如图，利用几何关系，得

$$q\sqrt{R^2+a'^2-2Ra'\cos\theta}=-q'\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}$$

即

$$q^2(R^2+a'^2-2Ra'\cos\theta)=q'^2(R^2+a^2-2Ra\cos\theta) \tag{1}$$

因上式对任何 θ 都成立，故上式两边 $\cos\theta$ 项的系数必须相等，即有

$$a'q^2=aq'^2 \tag{2}$$

把(2)式代入(1)式，得

$$a'=\frac{R^2}{a} \tag{3}$$

由(2)、(3)式，得

$$q'=-\frac{R}{a}q \tag{4}$$

因此，接地导体球上感应电荷在球外的场可以用位于 $a'=\dfrac{R^2}{a}$，电量为 $q'=-\dfrac{R}{a}q$ 的虚点电荷在球外的场来代替．

撤去接地线，导体球面上感应电荷 q' 的分布不变．再给导体球 $(Q-q')$ 的电量，使其总电量为

$$q'+(Q-q')=Q$$

因平衡的导体球内部电场强度为零，故 $(Q-q')$ 应均匀分布在导体球表面上．于是，总电量为 Q 的导体球在球外点电荷 q 处的电场强度为

$$E=\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0(a-a')^2}+\frac{Q-q'}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

点电荷 q 所受作用力为

$$F=\frac{q'q}{4\pi\varepsilon_0(a-a')^2}+\frac{(Q-q')q}{4\pi\varepsilon_0a^2}$$

把(3)、(4)式的 a' 和 q' 代入上式，得

$$F=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0a^2}+\left[\frac{(2a^2-R^2)R^3q}{a(a^2-R^2)^2}-Q\right]$$

当 $F>0$ 时，为斥力；当 $F<0$ 时，为吸引力．为使 $F<0$，要求上式右边方括号中的量为正值，即要求

$$q>\frac{a(a^2-R^2)^2}{(2a^2-R^2)R^3}Q$$

因此，当点电荷电量 q 的取值范围满足上式时，尽管 q 与 Q 同号，由于静电感应，其间的作用力却为吸引力．

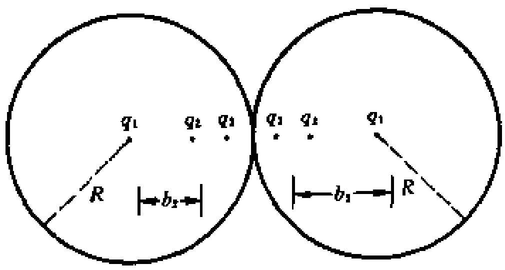
【题 35】 两个半径均为 R 的导体球相互接触形成一孤立导体．试求此孤立导体的电容．

【分析】 孤立导体的电容为 $C=\frac{Q}{U_0}$，其中 Q 是其电势达到 U_0 时所需充电的电量．如果孤立导体外形很对称，充电后表面电荷分布均匀，则孤立导体外的电场强度分布易求．于是 U_0 与 Q 的关系可知，问题得解．

本题的孤立导体不具有很强的对称性，充电后，表面电荷分布不均匀且未知，难以求出球外的电场强度分布，也无法由此找出 Q 与 U_0 的关系．

镜像法将两球面不均匀分布电荷在球外的场，同一系列虚设的点电荷对的场等效地代替．当这些点电荷对在两球面上产生的电势等于 U_0 时，这些点电荷对的电量之和即为所求的 Q.

为此，如图所示，首先在两球心虚设一对点电荷 $q_1=4\pi\varepsilon_0RU_0$（$R$ 为球半径），使每一个在球心的点电荷 q_1 在自己的球面上产生的电势为 U_0. 但这一对 q_1 同时也在对方球面上产生附加电势，因而两球面的电势大于 U_0. 为了使两球面的电势等于 U_0，需要消除附加电势，各自在对方球内适当位置 b_2 处引入第二对虚设的点电荷 q_2. 但这一对 q_2 又会在原球面上产生附加电势，为了消除附加电势，又需在原球内 b_3 处引入第三对虚设的点电荷 q_3. 如此继续，逐步调整逼近．当引入第 n 对虚设的点电荷 q_n，且当 $n\to\infty$时，孤立导体两球面上的电势均将准确地达到 U_0. 这 n 对虚设的点电荷的电量之和即为所求的 Q，Q 与 U_0 的比值就是孤立导体的电容 C.



电图 1-35-1

【解】 根据镜像法，首先在两球心处虚设一对点电荷 q_1，其电量为

$$q_1=4\pi\varepsilon_0RU_0$$

于是每个 q_1 在自己的球面上产生的电势为 U_0，但 q_1 还将在对方球面上产生附加电势．为了消除此附加电势，需在对方球内 b_2 处虚设第二对点电荷 q_2，

$$q_2=-\frac{R}{2R}q_1=-\frac{q_1}{2}$$

q_2 与球心的距离 b_2 为

$$b_2=\frac{R^2}{2R}=\frac{R}{2}$$

这样,左球心的 q_1 与右球 b_2 处的 q_2 在右球面上的电势为零，但这一对 q_2 又会在原球面上引起附加电势,为了消除这一附加电势,又需在两球内引入第三对虚设的点电荷 q_3,

$$q_3=-\frac{R}{2R-b_2}q_2=\frac{q_1}{3}$$

q_3 与各自所在球的球心相距为

$$b_3=\frac{R^2}{2R-b_2}=\frac{2}{3}R$$

关于 q_2 和 b_2 以及 q_3 和 b_3 的取值请参看本章题 34.

如此继续下去,则第 n 对虚设点电荷的电量 q_n 及其位置 b_n(即与所在球的球心的距离)应满足下述递推关系,

$$q_n=-\frac{R}{2R-b_{n-1}}q_{n-1}$$

$$b_n=\frac{R^2}{2R-b_{n-1}}$$

两式相除,得

$$b_n=-\frac{Rq_n}{q_{n-1}}$$

同理

$$b_{n-1}=-\frac{Rq_{n-1}}{q_{n-2}}$$

把以上两式代入 b_n 的递推式中,得

$$-\frac{Rq_n}{q_{n-1}}=\frac{R^2}{2R+\dfrac{Rq_{n-1}}{q_{n-2}}}$$

即

$$\frac{q_{n-1}}{q_n}+\frac{2q_{n-2}+q_{n-1}}{q_{n-2}}=0$$

或

$$\frac{1}{q_n}+\frac{2}{q_{n-1}}+\frac{2}{q_{n-2}}=0$$

已知

$$q_1=4\pi\varepsilon_0RU_0,\ q_2=-\frac{q_1}{2},$$

故

$$q_3=\frac{q_1}{3},\ q_4=-\frac{q_1}{4},\cdots$$

猜测通解为

$$q_n=(-1)^{n+1}\frac{q_1}{n}$$

验证表明，上述通解满足 q_n 与 q_{n-1} 及 q_{n-2} 之间的递推关系，合理．

当孤立导体的电势准确地达到 U_0 时，表面的总电量 Q 即为这 n 对（$n\to\infty$）虚设点电荷的电量之和，即

$$Q=\sum_{n=1}^{\infty}2q_n$$
$$=2q_1(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots)$$

利用公式

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

得

$$Q=2q_1\ln 2=8\pi\varepsilon_0 RU_0\ln 2$$

故此孤立导体的电容为

$$C=\frac{Q}{U_0}=8\pi\varepsilon_0 R\ln 2$$

【题 36】 在空间 n 个点上依次放置 n 个点电荷 $q_1,q_2,\cdots,q_n$，这些电荷在这 n 个点上产生的总电势分别记为 $U_1,U_2,\cdots,U_n$．若在这 n 个点上换成另一组点电荷 $q'_1,q'_2,\cdots,q'_n$，则相应的总电势为 $U'_1,U'_2,\cdots,U'_n$．试证明

$$\sum_{i=1}^{n}q_iU'_i=\sum_{i=1}^{n}q'_iU_i,\quad n\geqslant 2$$

由此进一步证明，真空中由一对导体构成的电容器的电容与这两个导体的带电量多少无关．

【分析】 根据点电荷的电势公式及电势叠加原理，利用数学归纳法即可证明．亦即假设上式在 $n=k$ 时成立，证明在第$(k+1)$个点上放上第$(k+1)$个点电荷时仍然成立．

电容器由两个导体构成，它们分别带有等量异号电荷，各自有一定的电势．把导体上的电荷看成是由无穷多个小块（点电荷）组成的，利用上面已经证明的公式，注意到每一个导体是等势的，即可证明电容器两导体之间的电势差与所带电量之比为常量，即电容器的电容与所带电量多少无关．换言之，电容器的电容只取决于它的几何性质．

【解】 若 $n=2$，在第 1 点，第 2 点分别放上点电荷 q_1,q_2，两点的间距表为 $r_{1,2}$，则 q_2 在第 1 点的电势 U_1 和 q_1 在第 2 点的电势 U_2 分别为

$$U_1=\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{1,2}}$$

$$U_2=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{1,2}}$$

把 q_1,q_2 换成 q'_1,q'_2，则相应的 U'_1,U'_2 为

$$U'_1=\frac{q'_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{1,2}}$$

$$U'_2=\frac{q'_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{1,2}}$$

于是

$$\sum_{i=1}^{2}q_iU'_i=q_1U'_1+q_2U'_2=\frac{q_1q'_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{1,2}}+\frac{q_2q'_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{1,2}}$$

$$\sum_{i=1}^{2}q'_iU_i=q'_1U_1+q'_2U_2=\frac{q'_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{1,2}}+\frac{q'_2q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{1,2}}$$

可见，$n=2$ 时，公式 $\sum\limits_{i=1}^{n}q_iU'_i=\sum\limits_{i=1}^{n}q'_iU_i$ 成立．

假设 $n=k$ 时，公式成立，即有

$$\sum_{i=1}^{k}q_iU'_i(k)=\sum_{i=1}^{k}q'_iU_i(k)$$

再在第 $(k+1)$ 个点先后放上 q_{k+1}，q'_{k+1}，该点前 k 个点的距离为 $r_{1,k+1}$，$r_{2,k+1}$，…，$r_{k,k+1}$，则有

$$U'_1(k+1)=U'_1(k)+\frac{q'_{k+1}}{4\pi\varepsilon_0 r_{1,k+1}}$$

……

$$U'_k(k+1)=U'_k(k)+\frac{q'_{k+1}}{4\pi\varepsilon_0 r_{k,k+1}}$$

$$U'_{k+1}(k+1)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q'_1}{r_{1,k+1}}+\cdots+\frac{q'_k}{r_{k,k+1}}\right)$$

及

$$U_1(k+1)=U_1(k)+\frac{q_{k+1}}{4\pi\varepsilon_0 r_{1,k+1}}$$

……

$$U_k(k+1)=U_k(k)+\frac{q_{k+1}}{4\pi\varepsilon_0 r_{k,k+1}}$$

$$U_{k+1}(k+1)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{1,k+1}}+\cdots+\frac{q_k}{r_{k,k+1}}\right)$$

式中 $U'_1(k+1)$ 是 k 个点电荷 $(q'_2,q'_3,\cdots,q'_{k+1})$ 在第 1 点（即 q'_1 所在处）的电势，它应等于 $(k-1)$ 个点电荷 $(q'_2,q'_3,\cdots,q'_k)$ 在该点的电势 $U'_1(k)$ 与第 $(k+1)$ 个电荷 q'_{k+1} 的贡献 $\left(\frac{q'_{k+1}}{4\pi\varepsilon_0 r_{1,k+1}}\right)$ 之和．余类似．$U'_{k+1}(k+1)$ 是 k 个点电荷 $(q'_1,q'_2,\cdots,q'_k)$ 在第 $(k+1)$ 点（即 q'_{k+1} 所在处）的电势．于是，有

$$\sum_{i=1}^{k+1}q_iU'_i(k+1)=q_1U'_1(k+1)+q_2U'_2(k+1)+\cdots+q_kU'_k(k+1)+q_{k+1}U'_{k+1}(k+1)$$

$$= q_1U'_1(k) + \frac{q_1q'_{k+1}}{4\pi\varepsilon_0 r_{1,k+1}} + q_2U'_2(k) + \frac{q_2q'_{k+1}}{4\pi\varepsilon_0 r_{2,k+1}} + \cdots$$

$$+ q_kU'_k(k) + \frac{q_kq'_{k+1}}{4\pi\varepsilon_0 r_{k,k+1}} + \frac{q_{k+1}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q'_1}{r_{1,k+1}} + \cdots + \frac{q'_k}{r_{k,k+1}}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} q_iU'_i(k) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1q'_{k+1} + q'_1q_{k+1}}{r_{1,k+1}} + \cdots + \frac{q_kq'_{k+1} + q'_kq_{k+1}}{r_{k,k+1}}\right)$$

同理可得

$$\sum_{i=1}^{k+1} q'_iU_i(k+1) = \sum_{i=1}^{k} q'_iU_i(k) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q'_1q_{k+1} + q_1q'_{k+1}}{r_{1,k+1}} + \cdots + \frac{q'_kq_{k+1} + q_kq'_{k+1}}{r_{k,k+1}}\right)$$

以上两式的等式右边第一项相等(因假设所证公式在 $n = k$ 时成立),右边第二项完全相同,因此

$$\sum_{i=1}^{k+1} q_iU'_i(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} q'_iU_i(k+1)$$

可见,若题中公式在 $n = k$ 时成立,则在 $n = (k+1)$ 时也成立,于是该公式得到证明．

构成电容器的两个导体分别表为1(正极)和2(负极),当两导体分别带电 $\pm Q$ 时,相应的电势为 U_1 和 U_2;当两导体分别带电 $\pm Q'$ 时,相应的电势为 U'_1 和 U'_2.

把导体上的电荷看成是由无穷多个小块(点电荷)组成的．根据已经证明的公式,有

$$\sum q_iU'_i = \sum q'_iU_i$$

式中的 $\sum$ 是对两个导体求和,即 $\sum = \sum\limits_1 + \sum\limits_2$．上式可写成

$$\sum_1 q_iU'_i + \sum_2 q_iU'_i = \sum_1 q'_iU_i + \sum_2 q'_iU_i$$

因为每一个导体都是等势体,故有

$$(\sum_1 q_i)U'_1 + (\sum_2 q_i)U'_2 = (\sum_1 q'_i)U_1 + (\sum_2 q'_i)U_2$$

即

$$Q_1U'_1 + Q_2U'_2 = Q'_1U_1 + Q'_2U_2$$

电容的定义为

$$C = \frac{Q}{U_2 - U_1}, \quad C' = \frac{Q'}{U'_2 - U'_1}$$

因此

$$C = C'$$

可见,电容器的电容 C 与带电量多少无关,它取决于电容器的几何性质(形状,大小,相对位置,若其中填充介质,则还与介质的性质有关).

【题 37】 如图所示,A 和 B 是两块相同的水平平行金属板,相距为 d,构成电容为 C 的平行板电容器．B 板接地,B 板中有一个小孔,开始时 A 和 B 均不带电．在 B 板小孔上方 h 处,不断有带电小液珠从静止开始自由下落(空气阻力可略),每个液珠的电量为 q,质量为 m,液珠经小孔到达 A 板后被吸收,液珠的下落保持一定的间隙,即在前一液珠被 A 板吸收并达到静电平衡后,后一液珠才继续下落．试问有多少个液珠能落到 A 板上．

【分析】 第一个液珠只受重力作用,自由下落到 A 板后,给 A 板电量 q,达到静电平衡后,q 在 A

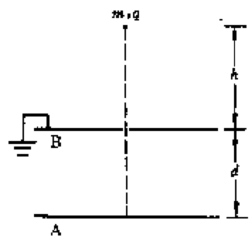
板上表面均匀分布，同时接地的B板下表面产生感应电荷 $-q$，亦均匀分布．上述 q 和 $-q$ 在A和B间产生匀强电场，使第二个液珠除受垂直向下的重力外，还要受到垂直向上的电场力（阻力）的作用．随着液珠不断落下，A和B板的电量逐渐增多，其间的匀强电场逐渐增强，减去重力后，液珠下落经过A和B板之间时所受阻力越来越大．最终，当液珠所受阻力使它到达A板的速度减为零时，则此液珠就是被A板吸收的最后一个液珠．此后落下的液珠，在到达A板之前已减速为零，将在向上阻力的作用下反弹回去，无法到达A板．

【解】 液珠从静止下落到达B板小孔时的速度为

$$v_0=\sqrt{2gh}$$

当已有 N 个液珠落到A板被吸收并达到静电平衡后，电容器被充电到

$$Q=Nq$$



电图 1－37－1

两板间的电势差为

$$U=\frac{Q}{C}$$

A和B板之间匀强电场的电场强度为

$$E=\frac{U}{d}$$

由以上三式，得

$$E=\frac{Nq}{Cd}$$

第 $(N+1)$ 个液珠经B板小孔进入电容器后，所受电场力（方向向上，为阻力）为

$$F_q=qE=\frac{Nq^2}{Cd}$$

液珠同时受到方向向下的重力 mg，当 $F_q>mg$ 时，液珠减速运动，其加速度的方向向上，大小为

$$a=\frac{F_q}{m}-g=\frac{Nq^2}{mCd}-g$$

若此加速度刚好能使液珠在电容器中经 d 的距离后减速为零，则此液珠就是能够到达A板并为电容器充电的最后一个液珠．这个要求可以表述为

$$2ad=v_0^2$$

把上面得出的 v_0 和 a 代入，得

$$\left(\frac{Nq^2}{mCd}-g\right)d=gh$$

解出

$$N=\frac{mgC(d+h)}{q^2}$$

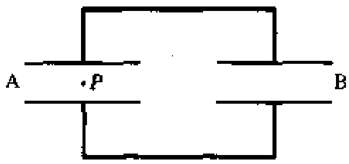
因此，当 $mgC(d+h)/q^2$ 为正整数时，能够落到A板上的带电液珠的数目为

$$\left[\frac{mgC(d+h)}{q^2}+1\right]\text{个}$$

当 $mgC(d+h)/q^2$ 不为正整数时，能够落到A板上的带电液珠的数目为

$$\text{大于}\left[\frac{mgC(d+h)}{q^2}\right]\text{的第一个正整数}$$

【题 38】 如图所示，两个相同的水平放置的平板空气电容器连接起来，充电后电容器 A 中的带电微粒 P 刚好静止地悬浮着．撤去电源，将电容器 B 的两板水平地错开，使两板相对的面积减小为原来的一半．试求此时带电微粒 P 在竖直方向运动的加速度．



电图 1－38－1

【分析】 带电微粒 P 悬浮，表明所受重力与电力达到平衡．电容器 B 的两板水平错开后，B 的电容减为原来之半，因已撤去电源，A 与 B 所带电量之和不变，但有了重新分配，以确保 A 与 B 的电压相同．由此，可算出错开后 A 中的电场．重力和错开后 A 中的电场决定了微粒运动的加速度．

【解】 设开始时，A 和 B 的电容均为 C，电量均为 Q，电压均为 U，则

$$U=\frac{Q}{C}$$

A 中电场的电场强度为

$$E=\frac{U}{d}=\frac{Q}{Cd}$$

式中 d 是两板间距．微粒 P 受重力 mg，方向竖直向下，还受电力 qE，达到平衡，故电力必竖直向上，于是

$$mg=qE$$

电容器 B 的两板水平错开，使相对面积减半，故 B 的电容减为$\frac{C}{2}$. 设错开后，A 与 B 的电量分别为 Q_A 和 Q_B. 因已撤去电源，总电量不变；因 A 和 B 按图中方式连接，电压相同；故有

$$Q_A+Q_B=2Q$$

$$\frac{Q_A}{C}=\frac{Q_B}{\frac{C}{2}}$$

解出

$$Q_A=\frac{4}{3}Q$$

因此，错开后 A 中电场强度大小为

$$E'=\frac{Q_A}{Cd}=\frac{4}{3}\frac{Q}{Cd}=\frac{4}{3}E$$

错开后，微粒 P 受重力 mg，向下；电力 qE'，向上，故有

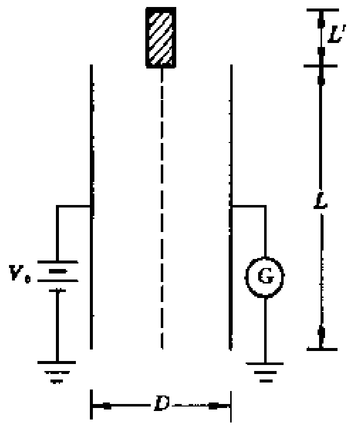
$$ma=qE'-mg=\frac{4}{3}qE-mg=\frac{1}{3}mg$$

因此，错开后，微粒 P 将以 $a=\frac{g}{3}$ 的加速度从静止开始，竖直向上加速运动．

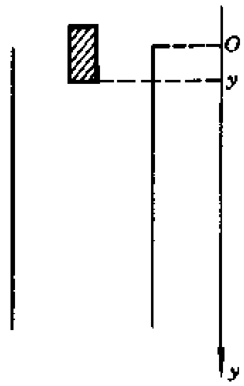
【题 39】 如电图 1－39－1 所示，一个边长为 L 的正方形平板电容器，板面竖直地串联在线路

中．线路中的直流电源确保电压稳定，为 V_0，G 是电流计．一块矩形金属板，垂直于图面方向的长度也为 L，高为 $L'(L'\ll L)$，厚为$\frac{D}{P}$（D 是电容器两板的间距，$P\gg 1$ 是一个系数）．开始时，金属板竖直地放在电容器中线（在电图 1－39－1 中用虚线表示）的正上方，其下端与电容器两板的上端对齐，然后自由落下．忽略各种边缘效应，忽略电磁力对金属板的作用．

试求电容器极板上的电量 Q 随时间 t 的变化关系，并画出流过电流计的电流 I 随时间 t 的变化图线（如电图 1－39－1，设从上到下流过电流计的电流为正，反之为负）．



电图 1－39－1



电图 1－39－2

【分析】 金属板自由下落前，由电容器的电容 C_0 及所加电压 V_0 可知极板上的电量 Q_0．

随着金属板的下落，电容发生了变化，导致极板上电量 Q 的变化．当金属板因下落而进入电容器内时，整个系统可以看作两个水平方向的电容器串联后再在竖直方向与一个电容器并联，于是整个系统的电容 C 及其变化可知，从而相应的 Q 可求．由 $C(t)$关系，可得出 $Q(t)$关系，进而得出 $I(t)$关系并作图．

【解】 如电图 1－39－2 所示，取 y 坐标竖直向下，原点 O 在电容器上端，在任意时刻 t，金属板下端的位置用 y 表示．因金属板自由下落，故有

$$y=\frac{1}{2}gt^2$$

金属板下落前，系统的电容即电容器的电容 C_0 为

$$C_0=\frac{\varepsilon_0 L^2}{D}$$

当金属下端落到任意 y 处时，系统电容为 C．C 可视为在水平方向两个电容串联后（这两个电容由金属板两表面进入电容器的那部分与相对的那部分极板构成），再在竖直方向与另一个电容并联（这个电容由两极板的剩余部分构成）．利用电容的串并联公式及题目给定的条件，不难算出

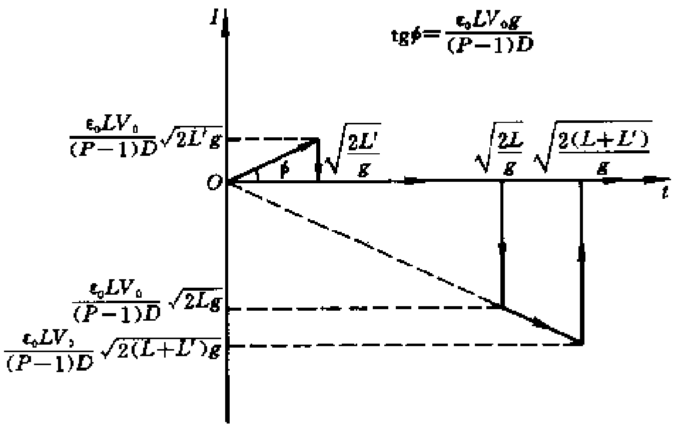
$$C=\begin{cases}\left(1+\dfrac{1}{P-1}\cdot\dfrac{y}{L}\right)C_0, & y\leqslant L'\\ \left(1+\dfrac{1}{P-1}\cdot\dfrac{L'}{L}\right)C_0, & L'<y\leqslant L\\ \left(1+\dfrac{1}{P-1}\cdot\dfrac{L+L'-y}{L}\right)C_0, & L<y\leqslant L+L'\\ C_0, & L+L'<y\end{cases}$$

相应的极板上的电量为

$$Q=CV_0$$

由以上四式，得出

$$Q=\begin{cases}\left[1+\dfrac{gt^2}{2(P-1)L}\right]\dfrac{\varepsilon_0L^2}{D}V_0, & 0<t\leqslant\sqrt{\dfrac{2L'}{g}}\\ \left[1+\dfrac{L'}{(P-1)L}\right]\dfrac{\varepsilon_0L^2}{D}V_0, & \sqrt{\dfrac{2L'}{g}}<t\leqslant\sqrt{\dfrac{2L}{g}}\\ \left[1+\dfrac{L+L'}{(P-1)L}-\dfrac{gt^2}{2(P-1)L}\right]\dfrac{\varepsilon_0L^2}{D}V_0, & \sqrt{\dfrac{2L}{g}}<t\leqslant\sqrt{\dfrac{2(L+L')}{g}}\\ \dfrac{\varepsilon_0L^2}{D}V_0, & \sqrt{\dfrac{2(L+L')}{g}}<t\end{cases}$$



电图 1-39-3

这就是所求的 $Q(t)$ 关系．式中的$\dfrac{\varepsilon_0L^2}{D}V_0=C_0V_0=Q_0$ 即为金属板自由下落前，电容器极板上的电量．

因 Q 随时间 t 变化，产生的电流为

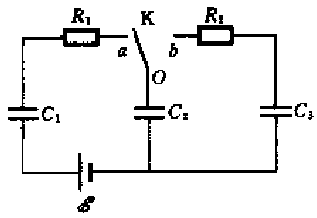
$$I=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

这就是电流计测出的电流，计算得出

$$I=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon_0 LV_0 gt}{(P-1)D}, & 0<t<\sqrt{\dfrac{2L'}{g}}\\ 0, & \sqrt{\dfrac{2L'}{g}}<t<\sqrt{\dfrac{2L}{g}}\\ -\dfrac{\varepsilon_0 LV_0 gt}{(P-1)D}, & \sqrt{\dfrac{2L}{g}}<t<\sqrt{\dfrac{2(L+L')}{g}}\\ 0, & \sqrt{\dfrac{2(L+L')}{g}}<t\end{cases}$$

$I(t)$曲线如电图 1－39－3 所示，在曲线中用箭头标明电流 I 的变化，以免与坐标轴混淆．

【题 40】 由直流电源、电容、电阻和开关 K 构成的网络如图所示，其中电源的电动势为 $\mathscr{E}$，三个电容器 C_1、C_2、C_3 的电容均为 C，两个电阻器的电阻分别为 R_1 和 R_2．开始时，三个电容器均不带电，先接通 Oa，再接通 Ob，再换接 Oa，再换接 Ob，…，如此反复换向．设每次换接前都已达到静电平衡．



电图 1－40－1

试求：1．第 n 次接通 Ob 并达到静电平衡后，各电容器两端的电压分别是多少？2．当反复换向无穷多次后，在所有电阻上消耗的总电能是多少？

【分析】 Oa 第一次接通时，C_1 与 C_2 串联，因两者电容相同，电源电压 $\mathscr{E}$ 等分，两者各得$\frac{1}{2}\mathscr{E}$．Ob 第一次接通时，C_2 与 C_3 并联，因两者电容相同，电量等分，相当于$\frac{1}{2}\mathscr{E}$的电压等分，两者各得$\frac{1}{4}\mathscr{E}$．Oa 第二次接通时，C_1 与 C_2 再次串联，因总电压比原光的 $\mathscr{E}$ 少了$\frac{1}{4}\mathscr{E}$，电源为 C_1 和 C_2 充电补充$\frac{1}{4}\mathscr{E}$，因 C_1 与 C_2 充电的电量相同，相当于$\frac{1}{4}\mathscr{E}$等分，C_1 与 C_2 各得$\frac{1}{8}\mathscr{E}$．Ob 第二次接通时，因 C_2 电压比 C_3 电压高$\frac{1}{8}\mathscr{E}$，应再次等分，C_2 与 C_3 各得$\frac{1}{16}\mathscr{E}$，即 C_2 失去$\frac{1}{8}\mathscr{E}$中的一半，C_3 则得到$\frac{1}{8}\mathscr{E}$中的一半．Oa 第三次接通时，C_3 损失的$\frac{1}{16}\mathscr{E}$，又被电源补充，因 C_1 与 C_2 串联，故补给 C_1 和 C_2 各一半，即 C_1 增加$\frac{1}{32}\mathscr{E}$，C_2 增加$\frac{1}{32}\mathscr{E}$．Ob 第三次接通时，这个$\frac{1}{32}\mathscr{E}$又被 C_2 和 C_3 等分．如此等等．经过关联地分析之后，即可求得第 n 次接通 Ob 达静电平衡后，C_1、C_2、C_3 的电压 U_{1n}、U_{2n}、U_{3n}．

由 U_{1n}、U_{2n}、U_{3n}，可以得出 $n\to\infty$时各电容的电压 U_1、U_2、U_3．从而 C_1 上的电量 Q_1 可以确定，Q_1 即为电源累计输送的电量，因而电源累计输出的功为 $W=\mathscr{E}Q_1$．另一方面，各电容贮存的电能 W_1、W_2、W_3 可由各自的电容 C 和电压 U_1、U_2、U_3 算出．W 与$(W_1+W_2+W_2)$之差，即电源所作总功与电容贮存能量之差，就是在电阻上消耗的总电能．

【解】 1．Oa 第一次接通，因 C_1 与 C_2 串联，且电容均为 C，故两者电压分别为

$$U_{11}=\frac{1}{2}\mathscr{E},U'_{21}=\frac{1}{2}\mathscr{E}$$

Ob 第一次接通，因 C_2 与 C_3 并联，且电容均为 C，故 C_2 上的电量被 C_2 与 C_3 等分，相当于 C_2 上的 $U'_{21}=\frac{1}{2}\mathscr{E}$ 电压被 C_2 与 C_3 等分，各得 $\frac{1}{4}\mathscr{E}$ 即

$$U_{21}=\frac{1}{4}\mathscr{E},\ U_{31}=\frac{1}{4}\mathscr{E}$$

Oa 第二次接通前，因 C_2 的电压已被 C_3 分去 $\frac{1}{4}\mathscr{E}$，故 C_1 与 C_2 串联的电压比电源电压 $\mathscr{E}$ 少 $\frac{1}{4}\mathscr{E}$. 接通后，电源将对 C_1 与 C_2 再充电，总电压仍为 $\mathscr{E}$，相当于补充 $\frac{1}{4}\mathscr{E}$ 电压．因 C_1 与 C_2 串联，再充电的电量同时经 C_1 与 C_2，故 C_1 与 C_2 增加的电压相同，相当于补充的 $\frac{1}{4}\mathscr{E}$ 被 C_1 与 C_2 等分，各得 $\frac{1}{8}\mathscr{E}$. 于是，C_1 与 C_2 的电压分别为

$$U_{12}=U_{11}+\frac{1}{8}\mathscr{E}=\frac{1}{2}\mathscr{E}+\frac{1}{8}\mathscr{E}$$

$$U'_{22}=U_{21}+\frac{1}{8}\mathscr{E}=\frac{1}{4}\mathscr{E}+\frac{1}{8}\mathscr{E}$$

Ob 第二次接通前，C_2 的电压比 C_3 高 $\frac{1}{8}\mathscr{E}$，接通后，因 C_2 与 C_3 并联，此 $\frac{1}{8}\mathscr{E}$ 应被 C_2 和 C_3 等分，相当于 C_2 损失 $\frac{1}{16}\mathscr{E}$，C_3 获得 $\frac{1}{16}\mathscr{E}$，即

$$U_{22}=U'_{22}-\frac{1}{16}\mathscr{E}=\frac{1}{4}\mathscr{E}+\frac{1}{16}\mathscr{E}$$

$$U_{32}=U_{31}+\frac{1}{16}\mathscr{E}=\frac{1}{4}\mathscr{E}+\frac{1}{16}\mathscr{E}$$

Oa 第三次接通前，C_1 与 C_2 串联的电压比电源电压 $\mathscr{E}$ 少 $\frac{1}{16}\mathscr{E}$. 接通后，应补充 $\frac{1}{16}\mathscr{E}$，C_1 与 C_2 各得 $\frac{1}{32}\mathscr{E}$，故 C_1 与 C_2 的电压分别为

$$U_{13}=U_{12}+\frac{1}{32}\mathscr{E}=\frac{1}{2}\mathscr{E}+\frac{1}{8}\mathscr{E}+\frac{1}{32}\mathscr{E}$$

$$U'_{23}=U_{22}+\frac{1}{32}\mathscr{E}=\frac{1}{4}\mathscr{E}+\frac{1}{16}\mathscr{E}+\frac{1}{32}\mathscr{E}$$

Ob 第三次接通前，C_2 的电压比 C_3 高 $\frac{1}{32}\mathscr{E}$，接通后，因 C_2 与 C_3 并联，此 $\frac{1}{32}\mathscr{E}$ 应被 C_2 与 C_3 等分，相当于 C_2 损失 $\frac{1}{64}\mathscr{E}$，C_3 获得 $\frac{1}{64}\mathscr{E}$，即

$$U_{23}=U'_{23}-\frac{1}{64}\mathscr{E}=\frac{1}{4}\mathscr{E}+\frac{1}{16}\mathscr{E}+\frac{1}{64}\mathscr{E}$$

$$U_{33}=U_{32}+\frac{1}{64}\mathscr{E}=\frac{1}{4}\mathscr{E}+\frac{1}{16}\mathscr{E}+\frac{1}{64}\mathscr{E}$$

按以上方法逐次分析下去，可以得出，第 n 次接通 Ob 并达到静电平衡后，C_1、C_2、C_3 上的电压分别为

$$U_{1n}=\frac{1}{2}\mathscr{E}+\frac{1}{8}\mathscr{E}+\frac{1}{32}\mathscr{E}+\frac{1}{128}\mathscr{E}+\cdots+\frac{1}{2^{2n-1}}\mathscr{E}$$

$$=\frac{1}{2}\mathscr{E}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}\right)$$

$$=\frac{\mathscr{E}}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}\mathscr{E}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$$

$$U_{2n}=\frac{1}{4}\mathscr{E}+\frac{1}{16}\mathscr{E}+\frac{1}{64}\mathscr{E}+\frac{1}{256}\mathscr{E}+\cdots+\frac{1}{2^{2n}}\mathscr{E}$$

$$=\frac{\mathscr{E}}{4}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}\right)$$

$$=\frac{\mathscr{E}}{4}\cdot\frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\mathscr{E}}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$$

$$U_{3n}=U_{2n}=\frac{\mathscr{E}}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$$

2. 当 $n\to\infty$时，C_1、C_2、C_3 的电压分别为

$$U_1=\frac{2}{3}\mathscr{E}$$

$$U_2=U_3=\frac{1}{3}\mathscr{E}$$

C_1 上的电量为

$$Q_1=CU_1=\frac{2}{3}C\,\mathscr{E}$$

Q_1 就是电源输送的总电量，故电源输出的总功为

$$W=Q_1\mathscr{E}=\frac{2}{3}C\,\mathscr{E}^2$$

C_1、C_2、C_3 贮存的电能之和为

$$W_1+W_2+W_3=\frac{1}{2}CU_1{}^2+\frac{1}{2}CU_2{}^2+\frac{1}{2}CU_3{}^2=\frac{1}{3}C\,\mathscr{E}^2$$

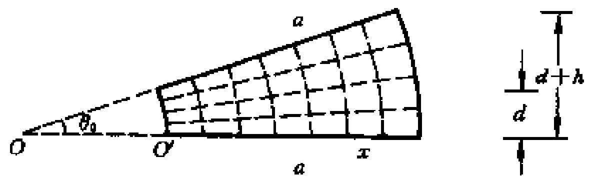
因此，在所有电阻上消耗的总电能 W' 为

$$W'=W-(W_1+W_2+W_3)=\frac{1}{3}C\,\mathscr{E}^2$$

【题 41】 两块长与宽均为 a 与 b 的导体平板在制成平行板电容器时稍有偏斜，使两板一对宽边相距为 d，另一对宽边相距为$(d+h)$，且 $h\ll d$. 若此电容器内充满了相对电容率为 ϵ_r 的电介质．试求电容器的电容．

【分析】 若两导体平板分别带电 $\pm Q$ 时，其间的电势差为 ΔU，则 $C=\frac{Q}{\Delta U}$. 因此，为了求电容 C 需找出 Q 与 ΔU 的关系，关键在于两板间的电场分布．

如图是与两板垂直的截面，O 点是两板延长后交线上的一点，θ_0 是两板的夹角(θ_0 很小)．可以近似地认为，在两板之间的等势面是一系列不同 θ 角对应的平面(图中用虚直线表示)，电场线则是与等势面正交的一系列以 O 点为中心的圆弧线(图中用虚弧线表示)，并认为在每条圆



电图 1－41－1

弧线上各点的电场强度近似相等，不同圆弧线上的电场强度稍有不同．设通过任意 x 点的圆弧线上的电场强度为 E_x，则 E_x 等于 ΔU 除以该弧线的长度．由此，E_x 随 x 的分布可知，从而 D_x 与 σ_x 随 x 的分布可知，于是 Q 和 ΔU 的关系可求，问题得解．

物理问题中若存在小量，往往意味着可以作适当的近似处理．近似处理应该合理、适当，既能使定量计算得出结果，又保留小量使人一看便知是近似的．当然，近似处理的方法通常并不唯一，这是值得注意的．本题就是一例．

【解】 如图，两导体平板之间的夹角为

$$\theta_0 = \arctan\frac{h}{a} \approx \frac{h}{a}$$

取两板交线（在图中为一点）为 O 点，它与平板近端 O' 点之间的距离为

$$OO' = \frac{d}{\theta_0} \approx \frac{ad}{h}$$

设两板分别带电 $\pm Q$，其间的电势差为 ΔU. 可以近似地认为，在两板之间的电场中，等势面是一系列不同 θ 对应的平面，与之垂直的电场线则是一系列以 O 为中心的圆弧线．近似地认为，每条圆弧线（电场线）上各点的电场强度相同，不同圆弧线上的电场强度稍有不同，把通过 x 点的圆弧线上的电场强度表为 E_x，则

$$E_x = \frac{\Delta U}{l}$$

式中 l 是两板之间在 x 处的圆弧形电场线的长度，即

$$l = (OO' + x)\theta_0 = \left(\frac{ad}{h} + x\right)\theta_0 = d + \frac{h}{a}x$$

式中 x 是从 O' 点到 x 点的距离．由以上两式，得出电场强度分布为

$$E_x = \frac{\Delta U}{l} = \frac{\Delta U}{d + \frac{h}{a}x}$$

相应的电位移矢量为

$$D_x = \varepsilon_r\varepsilon_0 E_x = \frac{\varepsilon_r\varepsilon_0\Delta U}{d + \frac{h}{a}x}$$

为了确定导体板在 x 处的自由电荷面密度 σ_x 与 D_x 的关系，可利用电位移矢量的高斯定理．作高斯面，它的一个小底面 ΔS 取在 x 处的导体板内，侧面取为由电场线围成的弯曲柱面，另一小底面 ΔS 在介质内与弯曲柱面垂直．显然，只有在介质内的小底面有电位移通量 $D_x\Delta S$，同时，高斯面所包围的自由电荷为 $\sigma_x\Delta S$，于是，由高斯定理，得出

$$\sigma_x = D_x = \frac{\varepsilon_r\varepsilon_0\Delta U}{d + \frac{h}{a}x}$$

因而导体板上从 x 到 $(x+\mathrm{d}x)$ 窄条上的电量为

$$\mathrm{d}Q = \sigma_x(b\mathrm{d}x) = \frac{\varepsilon_r\varepsilon_0\Delta U b\mathrm{d}x}{d + \frac{h}{a}x}$$

式中 b 是导体板的宽度(图中未画出). 导体板上的总电量为

$$Q = \int \mathrm{d}Q = \varepsilon_r\varepsilon_0 b\Delta U\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{d + \frac{h}{a}x} = \varepsilon_r\varepsilon_0 b\Delta U\left(\frac{a}{h}\ln\frac{d+h}{h}\right)$$

因此,电容器的电容为

$$C = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 ab}{h}\ln\frac{d+h}{h}$$

若取 $\ln(1+\frac{h}{d})\approx\frac{h}{d}$,则 $C\approx\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 ab}{h}$,与平板电容器的结果相同,没有反映两板稍有偏斜的效应. 此种近似过于粗略,不妥. 若取

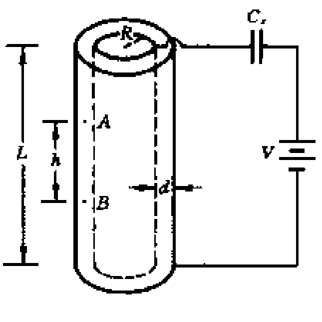
$$\ln(1+\frac{h}{d})\approx\frac{h}{d} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{d}\right)^2$$

则

$$C = \frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 ab}{h}(1 - \frac{h}{2d})$$

这是两板稍有偏斜后,电容的一级近似结果.

【题 42】 如图,两个同轴导体圆筒,内筒半径为 R,两筒间距为 d,筒高为 L,且 $L\gg R\gg d$. 内筒经未知电容 C_x 的电容器与端电压 V 足够大的直流电源的正极连接,外筒与电源的负极连接. 圆筒的中央轴在铅垂线上,筒间 A 和 B 两点的连线与中央轴平行,A 点和 B 点的间距为 h. 一个质量为 m,电量为 $-Q(Q>0)$的带电粒子从 A 点射出,其速率为 v_0,速度的方向垂直于由 A 点和筒中央轴线确定的平面. 为了使该带电粒子能经过 B 点,试求所有可供选择的 v_0 和 C_x 值.



电图 1-42-1

【分析】 带电粒子从 A 点射出后,受重力和筒间电场力的作用. 重力竖直向下,使之以 g 作匀加速直线运动. 电力在垂直中央轴的平面内(即水平面内)沿径向指向中央轴,与带电粒子的初速垂直. 为了使带电粒子能经过 B 点,要求它在垂直中央轴的平面内以 R 为半径作匀速圆周运动,另外要求带电粒子从 A 点沿 AB 到达 B 点的时间等于粒子作圆周运动所需时间的整数倍. 前者要求电力提供适当的向心力,即对 C_x 有一定要求,后者则对圆周运动的速度 v_0 有一定要求. 于是可解.

【解】 带电粒子在重力作用下从 A 点作匀加速直线运动,竖直下降到 B 点所需时间为

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

同时，带电粒子在垂直中央轴的平面内以 v_0 作匀速圆周运动一圈所需时间为

$$T=\frac{2\pi R}{v_0}$$

为使粒子能经过 B 点，要求

$$t=nT, n=1,2,\cdots$$

由以上三式，得

$$v_0=\frac{2\pi R}{T}=\frac{2\pi Rn}{t}=n\pi R\sqrt{\frac{2g}{h}} \tag{1}$$

带电粒子以 v_0 在半径为 R 的圆周上运动所需之向心力由电力提供，电力应为

$$F=\frac{mv_0^2}{R}$$

设内、外筒之间的电场强度为 E，电势差为 V_R，则

$$F=QE=Q\frac{V_R}{d}$$

由以上两式，得

$$V_R=\frac{mv_0^2d}{QR}$$

把 v_0 代入，得

$$V_R=\frac{2n^2\pi^2Rdmg}{hQ}$$

因 C_R(圆筒电容器)与 C_x 串联，故有

$$C_RV_R=C_xV_x, \quad V_R+V_x=V$$

解出

$$C_x=\frac{C_RV_R}{V_x}=\frac{C_RV_R}{V-V_R}$$

式中

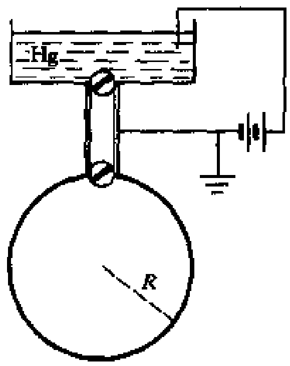
$$C_R=\varepsilon_0\frac{2\pi RL}{d}$$

故

$$C_x=\frac{4n^2\pi^3\varepsilon_0R^2Lmg}{(hVQ-2n^2\pi^2Rdmg)}, \ n=1,2,\cdots \tag{2}$$

(1)式和(2)式即为所求．

【题43】 如图所示，金属球壳上方与一个带有两个活栓的细长玻璃管连接，管壁外包着金属箔，金属箔与电池组的接地端连通，管上方槽中的水银则与电池组另一端正极连通，开始时，球内无水银且不带电，玻璃管下端的活栓关闭，上端的活栓打开，管内充满水银，然后，关闭上端活栓，移开金属箔，再打开下端活栓，使管内水银注入球内．不断重复此过程，直至球内充满水银为止．设电池组的端电压为 V，玻璃的相对电容率(又称介电常量)为 ε_r，管半径为 r，管壁厚度为 d，球半径为 R，且有 $R\gg r\gg d$．试近似计算金属球壳充满水银后相对于地的电势．



电图 1-43-1

【分析】 当玻璃管充满水银时，它和管壁外的金属箔形成一圆柱形电容器(其中充满玻璃介质)，因细长且 $r \gg d$，可看作平行板电容器，其电容可知，因管内水银与管壁金属箔分别与电池组正、负极相连，故管内水银是带电的．因打开下端活栓前，移去管壁金属箔，故每次将管内水银注入球内时，水银是带电的．球内充满水银后，它的总电量就是每次由水银带入的电量之和．这些电量最终将均匀分布在金属球壳的表面上．金属球壳相对于地是一个孤立导体球，其电容可知．于是当金属球壳最终带有上述电量时，它相对于地的电势可求．

【解】 玻璃管内水银与管壁金属箔构成圆柱形电容器，因细长且 $r \gg d$，可看作平行板电容器，两板间充满玻璃介质，其电容为

$$C(r)=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r\cdot 2\pi rl}{d}$$

式中 l 是管的长度．当水银与金属箔分别与电池组正、负极连通充电时，管内水银所带电量为

$$q=C(r)V=\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r rlV}{d}$$

设经 n 次充灌使金属球内充满水银，显然，n 等于球体积与管体积之比，为

$$n=\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\pi r^2 l}=\frac{4R^3}{3r^2 l}$$

每灌一次水银，带入电量 q，经 n 次，充满后，随水银进入金属球的电量，即金属球所带总电量为

$$Q=nq$$

把上述 q 和 n 代入，得

$$Q=\frac{4R^3}{3r^2 l}\cdot\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r rlV}{d}=\frac{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R^3 V}{3rd}$$

这些电量将分布在金属球壳的表面上．金属球壳作为一个相对于地的孤立导体球，其电容为

$$C(R)=4\pi\varepsilon_0 R.$$

因此，当球带电 Q 时，它相对于地的电势为

$$U=\frac{Q}{C(R)}=\frac{2\varepsilon_r R^2 V}{3rd}$$

【题 44】 在 $z\leqslant 0$ 的半空间中充满了相对电容率为 ε_r 的介质，$z>0$ 的半空间为真空，其中在 $z=h_1$ 处有一电量为 q 的点电荷．用外力将此点电荷从 $z=h_1$ 处缓慢地移动到 $z=h_2$ 处．试求外力所作的功 W．

【分析】 点电荷 q 的电场使介质极化，产生极化电荷，极化电荷的电场对 q 有作用，因此移动 q 需要作功．值得注意的是，当 q 在不同位置时，它产生的电场的空间分布不同，从而介质极化的强弱不同，于是极化电荷产生的电场的空间分布亦不同，其间是相互制约的．

在 $z=0$ 的 xy 平面上取极坐标(r,θ)，则 $z=0$ 的介质表面的极化电荷具有轴对称性，极化电荷的面密度可表为 $\sigma(r)$(介质的另一表面在无穷远，其上的极化电荷的影响可以忽略)．利用电位移矢量沿介质表面的法向分量(即 z 分量)连续，写出介质表面内、外的电场强度表达式，即

可求出 $\sigma(r)$. 注意,介质表面内、外的电场强度是 q 与 $\sigma(r)$ 的共同贡献,其中 q 的电场强度应采用 q 在任意 z 位置的结果,这样求出的 $\sigma(r)$ 将随 q 位置 z 的变化而变化 .

由 $\sigma(r)$ 在 z 处的电场强度即可确定 q 在该处所受的作用力,于是从 $z=h_1$ 移动到 $z=h_2$ 时,外力的功可求 .

【解】 在 $z=0$ 的 xy 平面上取极坐标 (r,θ),则 $z=0$ 的介质表面的极化电荷的分布具有轴对称性,极化电荷的面密度可表为 $\sigma(r)$. 在介质表面的上侧,即在 $z=0^+(z\geqslant0)$ 处,电场强度的 z 分量是 q 和 $\sigma(r)$ 贡献之和,为

$$E_{+,z}=-\frac{qz}{4\pi\varepsilon_0(r^2+z^2)^{3/2}}+\frac{\sigma(r)}{2\varepsilon_0}$$

式中右第一项是在 z 处的点电荷 q,在 $z=0^+(z\geqslant0)$ 平面的 r 处产生的电场强度的 z 分量;右第二项是 $\sigma(r)$ 在该处电场强度的 z 分量,这是由高斯定理得出的 . 同样,在介质表面的下侧,即在 $z=0^-(z\leqslant0)$ 处,电场强度的 z 分量为

$$E_{-,z}=-\frac{qz}{4\pi\varepsilon_0(r^2+z^2)^{3/2}}-\frac{\sigma(r)}{2\varepsilon_0}$$

因介质表面内、外电位移矢量的法向分量(即 z 分量)连续,故有

$$\varepsilon_0E_{+,z}=\varepsilon_r\varepsilon_0E_{-,z}$$

由以上三式,得出

$$\sigma(r)=\frac{(1-\varepsilon_r)qz}{2\pi(1+\varepsilon_r)(r^2+z^2)^{3/2}}$$

这是当点电荷 q 在任意位置 z 处时,介质表面 r 处的极化电荷面密度 $\sigma(r)$ 的表达式 . 因 $\varepsilon_r>1$,故 $\sigma(r)$ 与 q 异号,相互吸引 .

现在计算介质表面的全部极化电荷在 z 处(即点电荷 q 所在处)的电场强度 . 由于极化电荷分布的轴对称性,z 处的电场强度应沿 z 方向,即

$$E=E_z$$

把介质表面的极化电荷以 $z=0$ 为中心,分成许多半径为 r,宽为 $\mathrm{d}r$ 的环状带,把每一环状带在 z 处产生的电场强度的 z 分量积分,即得 E_z,为

$$E_z=\int_0^\infty\frac{\sigma(r)\cdot2\pi r\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0(r^2+z^2)}\cdot\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

把 $\sigma(r)$ 代入上式,得

$$E_z=\frac{(1-\varepsilon_r)qz^2}{4\pi\varepsilon_0(1+\varepsilon_r)}\int_0^\infty\frac{r\mathrm{d}r}{(r^2+z^2)^3}$$

$$=\frac{(1-\varepsilon_r)qz^2}{4\pi\varepsilon_0(1+\varepsilon_r)}\cdot\frac{1}{4z^4}=\frac{(1-\varepsilon_r)q}{16\pi\varepsilon_0(1+\varepsilon_r)z^2}$$

在 z 处的点电荷 q 所受电场作用力沿 z 方向,为

$$F_z=qE_z=\frac{1-\varepsilon_r)q^2}{16\pi\varepsilon_0(1+\varepsilon_r)z^2}$$

沿 z 轴缓慢移动点电荷 q 时,所需外力为

$$F'_z=-F_z$$

因此，把点电荷 q 从 $z=h_1$ 处沿 z 轴缓慢移动到 $z=h_2$ 处，外力作功为

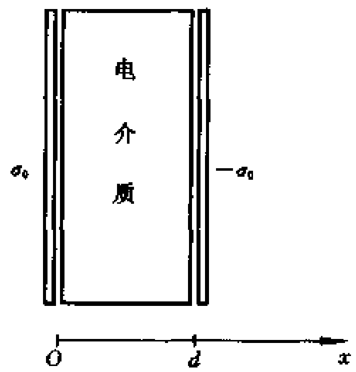
$$W=\int_{h_1}^{h_2}F'_z\mathrm{d}z=\frac{(\varepsilon_r-1)q^2}{16\pi\varepsilon_0(1+\varepsilon_r)}\int_{h_1}^{h_2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2}$$

$$=\frac{(\varepsilon_r-1)q^2}{16\pi\varepsilon_0(1+\varepsilon_r)}\left(\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_2}\right)$$

【题 45】 如图，平板电容器极板的电荷面密度为常量 σ_0，两极板间距为 d，其中充满了各向同性非均匀电介质．取 x 轴如图，介质的电极化率 $\chi_e(x)$ 为

$$\chi_e=\chi_0(1+\alpha x)$$

其中 χ_0 和 α 是两个常量．试求介质极化体电荷密度的分布 $\rho'(x)$ 以及介质两个表面的极化面电荷密度 $\sigma'(0)$ 与 $\sigma'(d)$.



电图 1-45-1

【分析】 介质极化电荷的体密度 ρ' 和面密度 σ' 由介质极化强度矢量 $\boldsymbol{P}$ 的分布确定．$\boldsymbol{P}$ 取决于介质的电极化率 χ_e 和总电场 $\boldsymbol{E}$．$\boldsymbol{E}$ 又是由 ρ' 和 σ' 产生的附加电场 $\boldsymbol{E}'$ 与平行板电容器极板电荷 σ_0 产生的电场 $\boldsymbol{E}_0$ 之和．搞清楚上述物理量的关系，ρ' 与 σ' 的分布即可求得．

【解】 电容器极板上面电荷密度为 σ_0 的自由电荷产生的电场 $\boldsymbol{E}_0$ 沿 x 方向，其大小为

$$E_0=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$$

$\boldsymbol{E}_0$ 使介质极化，由题设介质非均匀，其极化率 χ_e 只随 x 变化，即按层分布，故介质极化的方向即极化强度 $\boldsymbol{P}$ 的方向应沿 x 轴，从而 ρ' 也随 x 按层分布，由 ρ' 和 σ' 产生的附加电场 $\boldsymbol{E}'$ 也沿 x 轴．设 $\boldsymbol{E}'$ 在 x 轴正方向的大小为 E'（可正、可负），则总电场 $\boldsymbol{E}$（也沿 x 方向）的大小为

$$E=E_0+E'$$

$\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 的关系为

$$\boldsymbol{P}=\varepsilon_0\chi_e\boldsymbol{E}$$

把题设的 χ_e 代入，得

$$P=\varepsilon_0\chi_0(1+\alpha x)E$$

ρ' 与 $\boldsymbol{P}$ 的关系为

$$\rho'=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}=-\varepsilon_0\chi_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1+\alpha x)E]$$

$$=-\varepsilon_0\chi_0\left[\alpha E+(1+\alpha x)\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right]$$

由高斯定理的微分形式

$$\frac{\rho'}{\varepsilon_0}=\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}$$

由以上两式，消去 ρ'，得

$$\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}=-\varepsilon_0\chi_0\left[\alpha E+(1+\alpha x)\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right]$$

即

$$\frac{\mathrm{d}E}{E}=-\frac{\alpha\chi_0\mathrm{d}x}{[1+\chi_0(1+\alpha x)]}$$

设在介质中 $x=0$ 处的电场强度为 $E(0)$，把上式积分，得

$$E=\left\{\frac{(1+\chi_0)}{[1+\chi_0(1+\alpha x)]}\right\}E(0)$$

设在介质中 $x=0$ 处，由极化电荷产生的附加电场为 $E'(0)$，则

$$E(0)=E_0+E'(0)$$

由于介质内极化体电荷按层分布，故介质内 $x=0$ 处的 $E'(0)$是介质左表面的 $\sigma'(0)$电荷的贡献与其右方全部极化电荷的贡献之和，后者包括全部极化体电荷及右表面极化面电荷，可等效为 $-\sigma'(0)$的面电荷．故有

$$E'(0)=\frac{\sigma'(0)}{\varepsilon_0}$$

又

$$\sigma'(0)=-P(0)=-\varepsilon_0\chi_0(1+\alpha x)_{x=0}E(0)=-\varepsilon_0\chi_0E(0)$$

由以上两式，得

$$E'(0)=-\chi_0E(0)$$

于是

$$E(0)=E_0-\chi_0E(0)$$

即

$$E(0)=\frac{E_0}{1+\chi_0}=\frac{\sigma_0}{(1+\chi_0)\varepsilon_0}$$

代入 E 表达式，得

$$E=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0[1+\chi_0(1+\alpha x)]}$$

代入 P 表达式，得

$$P=\frac{\chi_0(1+\alpha x)\sigma_0}{1+\chi_0(1+\alpha x)}$$

因

$$\rho'=-\varepsilon_0\chi_0[\alpha E+(1+\alpha x)\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{e}x}]$$

$$\sigma'(0)=-P(0)$$

$$\sigma'(d)=P(d)$$

利用上面求出的 E 和 P 代入计算，得

$$\rho'=-\frac{\chi_0\alpha\sigma_0}{[1+\chi_0(1+\alpha x)]^2}$$

$$\sigma'(0)=-\frac{\chi_0\sigma_0}{1+\chi_0}$$

$$\sigma'(d)=\frac{\chi_0(1+\alpha d)\sigma_0}{1+\chi_0(1+\alpha d)}$$

【题 46】 两个同心导体球壳构成电容器,外球壳的内半径是固定的,其大小为 5cm,内球壳的外半径可以自由选择,两球壳之间充满了各向同性的均匀介质．已知电介质的击穿电场强度为 2.0×10^7V/m.试求该电容器所能承受的最大电压．

【分析】 设两球分别带电为 $\pm Q$ 时,电容器内的电场强度为 E_r,电容器的电压为 ΔU,可将 ΔU 用E_r 及有关几何量(外球内半径及内球外半径)表示．当电容器内的最大电场强度达到击穿电场强度,当改变内球外半径使 ΔU 中有关几何量的函数达到极大值时,所得 ΔU 即为电容器所能承受的最大电压．

【解】 当两球分别带电 $\pm Q$ 时,电容器内的电场强度为

$$E_r=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r^2},\quad R_{内}<r<R_{外}$$

式中 E_r 是距球心 r 处的电场强度,$R_{外}$ 是外球壳的内半径,是固定的,$R_{内}$ 是内球壳的外半径,是可变的．上式表明,在电容器中 $r=R_{内}$ 处的电场强度 $E_{R_{内}}$最大．电容器的电压为

$$\Delta U=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_{内}}-\frac{1}{R_{外}}\right)$$

由以上两式,消去 Q,得

$$\Delta U=E_r\left[r^2\left(\frac{1}{R_{内}}-\frac{1}{R_{外}}\right)\right]\tag{1}$$

设电容器所能承受的最大电压为 ΔU_{max},相应的电容器内最大的电场强度应为击穿电场强度,即取 E_r 为

$$E_r=E_{R_{内}}=E_{击穿}\tag{2}$$

同时,(1)式中的 r^2 应取为

$$r^2=R_{内}^2\tag{3}$$

由于 $R_{内}$ 可自由选择,ΔU_{max}对应的 $R_{内}^2\left(\frac{1}{R_{内}}-\frac{1}{R_{外}}\right)$亦应为极大．因 $R_{内}^2\left(\frac{1}{R_{内}}-\frac{1}{R_{外}}\right)=\frac{1}{R_{外}}$ $(R_{外}R_{内}-R_{内}^2)$,即要求$(R_{外}R_{内}-R_{内}^2)$为极大,亦即要求此函数对 $R_{内}$ 的微商为零,故应取

$$R_{内}=\frac{1}{2}R_{外}\tag{4}$$

把(2)、(3)、(4)式代入(1)式,得

$$\Delta U_{max}=E_{击穿}\left[R_{内}^2\left(\frac{1}{R_{内}}-\frac{1}{R_{外}}\right)\right]$$

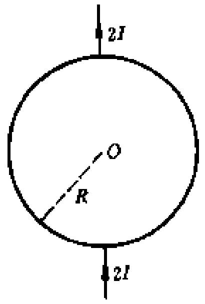
$$=E_{击穿}\left[\left(\frac{R_{外}}{2}\right)^2\left(\frac{2}{R_{外}}-\frac{1}{R_{外}}\right)\right]=E_{击穿}\cdot\frac{R_{外}}{4}$$

代入有关数据,得

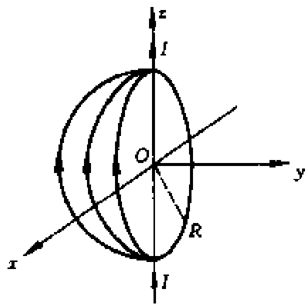
$$\Delta U_{max}=2.0\times10^7\times\frac{0.05}{4}=2.5\times10^5\text{V}$$

第二章　磁场，磁介质

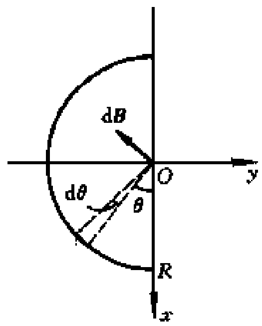
【题 1】 如电图 2－1－1 所示，电流强度为 $2I$ 的直流电经半无限长导线到达半径为 R 的金属球面的南极点，由球面流到北极点后，再从另一半无限长直导线流向远处．设想将上述电流分布切成左、右两半．左半部分为半无限长直电流 I 到达半球面南极点后，经左半球面（注意，此半球面的电流分布与原全球面左半的电流分布相同）流向北极点，再经半无限长直导线流向远处，并设置 $O-xyz$ 坐标，如图 2－1－2 所示．试求球心 O 处的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$．



电图 2－1－1



电图 2　1　2



电图 2－1－3

【分析】 如电图 2－1－1 所示，在全球面情形，由于电流分布的对称性，容易设想，球心 O 处的磁感应强度为零．如电图 2－1－2 所示，只剩左半球，电流分布失去了对称性，球心 O 处的 $\boldsymbol{B}$ 不再为零．显然，在电图 2－1－2 中，上、下两条半无限长直电流对 O 点的 $\boldsymbol{B}$ 无贡献，因而 O 点的 $\boldsymbol{B}$ 就是左半球面电流的贡献．可将左半球面电流分割成一系半圆形电流，利用半圆形电流在圆心处磁场的公式及问题的对称性，即可求解．

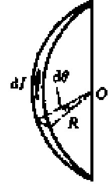
【解】 如电图 2－1－2，因上、下两半无限长直电流 I 对 O 点的 $\boldsymbol{B}$ 无贡献，只需计算左半球面电流在 O 点的 $\boldsymbol{B}$ 即可．

左半球面在 xy 平面上是半径为 R 的半圆，如电图 2－1－3 所示．在此半圆上取 θ 到 $(\theta+\mathrm{d}\theta)$ 的圆弧，此圆弧对应的半球面上的部分，像一条狭窄的中间宽两头尖的西瓜皮，如电图 2－1－4 所示．其中的电流 $\mathrm{d}I$ 为

$$\mathrm{d}I=\frac{I}{\pi}\mathrm{d}\theta$$

形如窄条西瓜皮上的电流 $\mathrm{d}I$ 对 O 点 $\boldsymbol{B}$ 的贡献，相当于半圆电流在圆心产生的磁场 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$，其方向如电图 2－1－3 所示，其大小为

$$\mathrm{d}B=\mu_0\frac{\mathrm{d}I}{4R}=\mu_0\frac{I\mathrm{d}\theta}{4\pi R}$$



电图 2－1－4

考虑到问题的对称性，各 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 的 y 分量互相抵消，$\boldsymbol{B}$ 指向 $-x$ 轴的方向，其大小为

$$B=B_x=\int_0^{\pi}\mathrm{d}B_x$$

因

$$\mathrm{d}B_x=\mathrm{d}B\sin\theta$$

故 O 点磁感应强度的大小为

$$B=\int_0^{\pi}\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

$\boldsymbol{B}$ 的方向沿 $-x$ 轴．

【题2】 抛物线形状的无穷长导线载有电流 I．设焦点到顶点的距离为 a．试求焦点处的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$．

【分析】 如图，抛物线的焦点为 P，顶点为 O，抛物线所在平面为 xy 平面．显然，在焦点 P 处，$\boldsymbol{B}$ 的方向应与抛物线所在的 xy 平面垂直，按图中标明的电流方向，$\boldsymbol{B}$ 的方向为⊙，即垂直纸面向外，且抛物线两半的电流对 P 点磁场的贡献相同．把所有电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 在焦点 P 的 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 求和即得所求．注意，各 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 的方向相同，均为⊙，又适当选取坐标，并利用抛物线的轨迹方程．

【解】 如图，取抛物线所在平面为 xy 平面，取顶点 O 为坐标原点，取 y 轴使抛物线相对 y 轴对称，则抛物线方程为

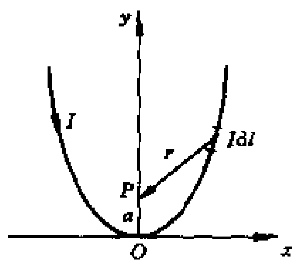
$$x^2=2py$$

其中 p 为抛物线焦点 P 到顶点 O 距离的两倍，即

$$a=\frac{p}{2}$$

故抛物线方程为

$$x^2=4ay$$



电图 2-2-1

如图，任取电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，它在焦点 P 产生的磁场为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}$$

式中 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的位置为 (x,y)，焦点 P 的位置为 $(0,a)$，从 $\mathrm{d}l$ 指向焦点 P 的 $\boldsymbol{r}$ 的两个分量为 $r_x=-x$，$r_y=a-y$，于是

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}&=(\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\mathrm{d}\boldsymbol{y})\times(\boldsymbol{r}_x+\boldsymbol{r}_y)=(\mathrm{d}\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{r}_y)+(\mathrm{d}\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{r}_x)\\&=(\mathrm{d}x\cdot r_y-\mathrm{d}y\cdot r_x)\ \boldsymbol{k}=\left(r_y-r_x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x\ \boldsymbol{k}\\&=\left(a-y+\frac{x^2}{2a}\right)\mathrm{d}x\ \boldsymbol{k}=(a+y)\mathrm{d}x\ \boldsymbol{k}\end{aligned}$$

式中 $\boldsymbol{k}$ 是 z 轴(图中垂直纸面向外)方向的单位矢量．在上述计算中已利用抛物线方程 $x^2=2ay$ 得出 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{2a}$．于是，$\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 可表为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\frac{(a+y)}{r^3}\mathrm{d}x\boldsymbol{k}$$

因

$$r^2=x^2+(a-y)^2=4ay+(a-y)^2=(a+y)^2$$

故

$$\frac{a+y}{r^3}=\frac{1}{(a+y)^2}=\frac{1}{a^2\left[1+\left(\frac{x}{2a}\right)^2\right]^2}$$

代入，得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\left[1+\left(\frac{x}{2a}\right)^2\right]^2}\boldsymbol{k}$$

故焦点 P 处的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 为

$$\boldsymbol{B}=\int\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\left\{2\int_0^{\infty}\frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\left[1+\left(\frac{x}{2a}\right)^2\right]^2}\right\}\boldsymbol{k}$$

作变量替换

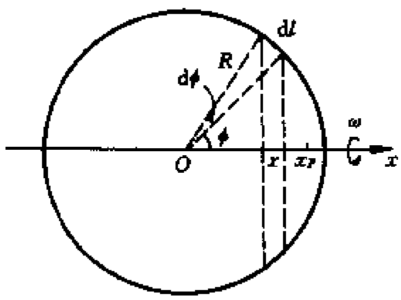
$$\tan\alpha=\frac{x}{2a}$$

则

$$\boldsymbol{B}=\left\{\frac{\mu_0 I}{\pi a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha\right\}\boldsymbol{k}=\frac{\mu_0 I}{4a}\boldsymbol{k}$$

【题 3】 均匀带电的球面绕着它的某一直径匀速旋转．试证明在该直径上的磁感应强度处处相同．

【分析】 如图，均匀带电球面绕通过 x 轴的直径以角速度 ω 匀速旋转．球面上任一面元所带电荷因旋转形成电流，电流沿该面元所在的与 x 轴垂直的环状球带流动．把球面分割成一系列与 x 轴垂直的环状球带，每一球带因旋转形成的电流在 x 轴上任一点 P 产生的 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 应沿 x 方向，积分，即可得出 P 点的 $\boldsymbol{B}$，它也沿 x 方向．若在 P 点的 $\boldsymbol{B}$ 的大小与 P 点的位置 x_P 无关，即得证．



电图 2-3-1

【解】 设球面半径为 R，面电荷密度为 σ，绕着沿 x 轴的直径以角速度 ω 匀速旋转，球心在原点 O．如图，在球面上任取与 x 轴垂直的从 ϕ 到 $(\phi+\mathrm{d}\phi)$ 的环状球带，其面积为

$$\mathrm{d}S=2\pi r\ \mathrm{d}l=2\pi r\ R\ \mathrm{d}\phi$$

式中 r 是环状球带的圆半径 $(r=R\ \sin\phi)$，$\mathrm{d}l=R\mathrm{d}\phi$ 是环状球带的宽度．所带电量为

$$\mathrm{d}Q=\sigma\mathrm{d}S=2\pi Rr\sigma\mathrm{d}\phi$$

由于旋转，该球带上的电荷形成沿环状球带流动的电流，电流强度为

$$\mathrm{d}I=\frac{\mathrm{d}Q}{T}$$

式中 T 是旋转周期，与 ω 的关系是

$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$

故

$$\mathrm{d}I=\frac{\omega}{2\pi}\mathrm{d}Q=\frac{\omega}{2\pi}\cdot 2\pi Rr\sigma\mathrm{d}\phi=R\sigma\,\omega\, r\mathrm{d}\phi$$

设该任意环状球带的中心位于 x 处，则

$$x=R\cos\phi$$

$$\mathrm{d}x=-R\sin\phi\mathrm{d}\phi=-r\mathrm{d}\phi$$

因此，$\mathrm{d}I$ 可表为

$$\mathrm{d}I=-R\sigma\omega\mathrm{d}x$$

此球状球带的电流 $\mathrm{d}I$ 在直径上任一点 P（它的位置是 x_P）产生的 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0\mathrm{d}I\cdot r^2}{2[r^2+(x_P-x)^2]^{3/2}}\boldsymbol{i}$$

式中 $\boldsymbol{i}$ 是 x 轴方向的单位矢量，式中的 r 是环状球带的圆半径，有

$$r^2=R^2-x^2$$

把 $\mathrm{d}I$ 和 r^2 的表达式代入 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$，得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=-\frac{\mu_0R\sigma\,\omega(R^2-x^2)}{2[(R^2-x^2)+(x_P-x)^2]^{3/2}}\mathrm{d}x\boldsymbol{i}$$

因 ϕ 的取值从 0 到 π，相应的 x 从 R 到 $-R$，故式中的 $\mathrm{d}x$ 为负值，若 $\sigma>0$，则 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{i}$ 同方向．

P 点总的磁感应强度 $\boldsymbol{B}_P$ 为

$$\boldsymbol{B}_P=\int\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\left\{-\frac{1}{2}\mu_0R\sigma\,\omega\int_R^{-R}\frac{R^2-x^2}{[(R^2-x^2)+(x_P-x)^2]^{3/2}}\mathrm{d}x\right\}\boldsymbol{i}$$

式中

$$\int_{-R}^{R}\frac{R^2-x^2}{[(R^2-x^2)+(x_P-x)^2]^{3/2}}\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$$

故

$$\boldsymbol{B}_P=\frac{2}{3}\mu_0R\sigma\,\omega\,\boldsymbol{i}$$

可见 $\boldsymbol{B}_P$ 与 P 点的位置 x_P 无关，即在作为转轴的直径上，磁感应强度处处相同．

【题 4】 如电图 2－4－1 所示，在 $Oxyz$ 坐标系中有一半径为 R 的无限长圆柱面，圆柱面的中央轴线沿 y 轴，圆柱面上绕有螺距为 H 的无限长等距螺旋导线，导线与 x 轴相交，导线内通有稳恒电流 I. 设空间各处的相对磁导率近似为 1，试求坐标原点 O 处的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的三个直角坐标分量 B_x，B_y 和 B_z．

【分析与解】 在螺旋线与 x 轴的交点 P 处取电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，它可以分解为沿 z 轴的圆电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$ 与沿 y 轴的直电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$，无沿 x 轴的分量．对于螺旋线上不与 x 轴相交的任意另一电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，则可分解为沿 xz 平面的圆电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$ 和沿 y 轴的直电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$.

因此，只需考虑全部圆电流元和全部直电流元对 O 点磁场的贡献，再求其矢量和即可．下面分别讨论．

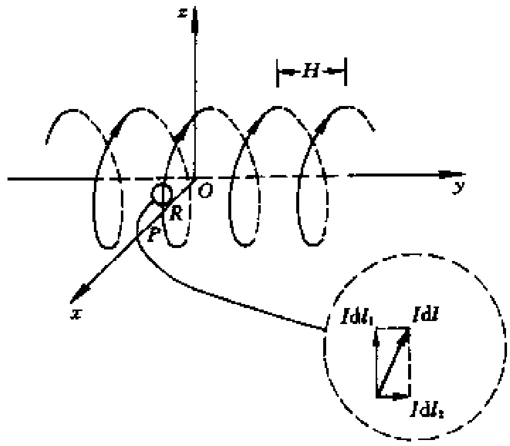
1．全部圆电流元对 O 点磁场的贡献 $\boldsymbol{B}_1$．

螺旋线与 x 轴的交点 P 处的圆电流元 Idl_1 对 O 点磁场的贡献为

$$dB_1=\frac{\mu_0 Idl_1}{4\pi R^2}$$

$d\boldsymbol{B}_1$ 的方向指向 y 轴的负方向．这个 $d\boldsymbol{B}_1$ 可用电流强度为 $\frac{Idl_1}{2\pi R}$ 的圆环电流在 O 点的磁场等效地代替．由于 Idl_1 在 y 轴方向占据的线度为 dl_2，可以假想在此线度上设置一匝圆环，将电流元 Idl_1 平均分配在圆环各处，于是假想圆环中的电流 dI' 应满足

$$dI'\cdot 2\pi R=Idl_1$$



电图 2－4－1

即

$$dI'=\frac{Idl_1}{2\pi R}$$

这样，在 P 处的圆电流元 Idl_1 对 O 点磁场的贡献完全等同于此假想圆环电流对 O 点磁场的贡献．

接着，从螺旋线与 x 轴的交点 P 出发，沿螺旋线顺着和逆着电流的方向逐对地取圆电流 $Id\boldsymbol{l}_1$．每一对 $Id\boldsymbol{l}_1$ 对 O 点磁场的贡献，由于相对 y 轴对称性偏斜，从而使它们在 O 点所产生的磁场的 x 分量相互抵消，沿 y 轴负方向的分量和沿 z 轴正方向的分量则分别作标量叠加．

首先考虑沿 y 轴负方向的分量叠加．螺旋线上每一个圆电流 Idl_1 对 O 点磁场 y 轴负方向分量的大小只与电流元所在位置的 y 坐标有关，而与 x 和 z 坐标无关．同样，可假设在此 y 位置的圆柱面上取一与 xz 平面平行的圆环，则 Idl_1 无论放在圆环上何处，它对 O 点磁场的 y 轴负方向分量的贡献是不会改变的．据此，又可将 Idl_1 圆电流元平均地分配到假想的圆环上，圆环上的电流也取为

$$dI'=\frac{Idl_1}{2\pi R}$$

此圆环电流在 O 点的磁场即可取代原圆电流元 Idl_1 对 O 点磁场的 y 轴负方向分量的贡献．

由以上分析可知，螺旋线上全部圆电流元 Idl_1 对 O 点磁场的 y 轴负方向分量的贡献，可等效为无限长直螺线管电流在 O 点的磁场，此假想螺线管单位长度上的线圈数（匝数）为

$$n=\frac{1}{dl_2}$$

每圈（每匝）中的电流强度为

$$dI'=\frac{Idl_1}{2\pi R}$$

此螺线管电流在轴上 O 点的磁场的 y 轴负方向分量大小为

$$B_{-y}=\mu n dI'=\frac{\mu_0 Idl_1}{2\pi R dl_2}$$

因

$$\frac{\mathrm{d}l_1}{\mathrm{d}l_2}=\frac{2\pi R}{H}$$

故

$$B_{-y}=\frac{\mu_0 I}{H}$$

螺旋线上全部圆电流元 $I\mathrm{d}l_1$ 对 O 点磁场 $\boldsymbol{B}_1$ 的 y 分量的总贡献即为

$$B_{1y}=-B_{-y}=-\frac{\mu_0 I}{H}$$

再计算全部圆电流元 $I\mathrm{d}l_1$ 对 O 点磁场 $\boldsymbol{B}_1$ 的 z 分量的总贡献 B_{1z}. 任一电流元 $I\mathrm{d}l_1$ 均可视为在 P 点的圆电流元沿圆柱面转过 ϕ 角形成的．因此,它的 y 坐标为

$$y=\frac{\phi}{2\pi}H$$

它与 O 点的距离为

$$r=\sqrt{R^2+y^2}$$

设 $\boldsymbol{r}$ 与 y 轴的夹角为 θ,则 $I\mathrm{d}l_1$ 在 O 点的磁场的 z 分量为

$$\mathrm{d}B_{1z}=\left|\frac{\mu_0 I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{r}}{4\pi r^3}\right|\cos\theta\sin\phi$$

其中

$$\cos\theta=\frac{y}{r},\quad \mathrm{d}l_1=R\mathrm{d}\phi$$

代入,得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}B_{1z}&=\frac{\mu_0 IR\mathrm{d}\phi}{4\pi r^2}\cdot\frac{y}{r}\sin\phi\\&=\frac{\mu_0 IRH\phi\sin\phi}{4\pi r^3}\mathrm{d}\phi=\frac{\pi\mu_0 IR\phi\sin\phi}{H^2\left[\left(2\pi\dfrac{R}{H}\right)^2+\phi^2\right]^{3/2}}\mathrm{d}\phi\end{aligned}$$

积分,

$$B_{1z}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\pi\mu_0 IR\phi\sin\phi}{H^2\left[\left(2\pi\dfrac{R}{H}\right)^2+\phi^2\right]^{3/2}}\mathrm{d}\phi$$

由于被积函数是 ϕ 的偶函数,故有

$$B_{1z}=\frac{2\pi\mu_0 IR}{H^2}\int_0^{\infty}\frac{\phi\sin\phi}{\left[\left(2\pi\dfrac{R}{H}\right)^2+\phi^2\right]^{3/2}}\mathrm{d}\phi$$

2. 全部直电流元对 O 点磁场的贡献 $\boldsymbol{B}_2$.

螺旋线与 x 轴交点 P 处的直电流元 $I\mathrm{d}l_2$ 对 O 点磁场的贡献为

$$\mathrm{d}B_2=\frac{\mu_0 I\mathrm{d}l_2}{4\pi R^2}$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{B}_2$ 的方向指向 z 轴正方向．

从 P 点出发,沿螺旋线顺着和逆着电流的方向移动并成对地取直电流元 $I\mathrm{d}l_2$,则每一对直

电流元 $Id\boldsymbol{l}_2$ 对 O 点磁场的 x 分量的贡献互相抵消，而对 O 点磁场的 y 分量均无贡献，只有对 O 点磁场 z 分量的贡献彼此叠加．

任一直电流元 $Id\boldsymbol{l}_2$ 均可视为在 P 点的直电流元沿圆柱面转过 ϕ 角而形成的，因此它的 y 坐标为

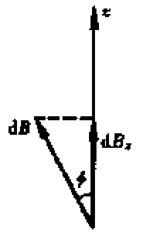
$$y=\frac{\phi}{2\pi}H$$

它与 O 点的距离为

$$r=\sqrt{R^2+y^2}$$

它在 O 点产生的磁场的 z 分量如图 2－4－2 所示，为

$$dB_z=\left|\frac{\mu_0 Id\boldsymbol{l}_2\times\boldsymbol{r}}{4\pi r^3}\right|\cos\phi=\frac{\mu_0 Idl_2 R\cos\phi}{4\pi r^3}$$



电图 2－4－2

因

$$dl_2=dy=\frac{H}{2\pi}d\phi$$

故

$$dB_z=\frac{\mu_0 I\left(\frac{H}{2\pi}d\phi\right)R\cos\phi}{4\pi\left[R^2+\left(\frac{H}{2\pi}\right)^2\phi^2\right]^{3/2}}=\frac{\mu_0\pi IR\cos\phi d\phi}{H^2\left[\left(2\pi\frac{R}{H}\right)^2+\phi^2\right]^{3/2}}$$

全部直电流元 Idl_2 对 O 点磁场的贡献为

$$B_2=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\pi\mu_0 IR}{H^2}\cdot\frac{\cos\phi d\phi}{\left[\left(2\pi\frac{R}{H}\right)^2+\phi^2\right]^{3/2}}$$

$\boldsymbol{B}_2$ 的方向指向 z 轴正方向．由于被积函数是 ϕ 的偶函数，故 B_2 为

$$B_2=\frac{2\pi\mu_0 IR}{H^2}\int_0^{\infty}\frac{\cos\phi d\phi}{\left[\left(2\pi\frac{R}{H}\right)^2+\phi^2\right]^{3/2}}$$

至此，O 点磁场 $\boldsymbol{B}$ 的三个直角坐标分量为

$$B_x=0$$

$$B_y=B_{1y}=-\frac{\mu_0 I}{H}$$

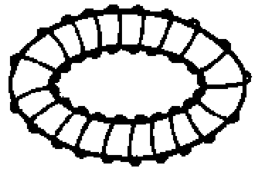
$$B_z=B_{1z}+B_{2z}=\frac{2\pi\mu_0 IR}{H^2}\int_0^{\infty}\frac{\phi\sin\phi+\cos\phi}{\left[\left(2\pi\frac{R}{H}\right)^2+\phi^2\right]^{3/2}}d\phi$$

载流等距螺旋线中央轴（即 y 轴）上任何一点的磁场，相当于上述 O 点的磁场绕 y 轴旋转而成．由于轴上各点的磁场除了 y 分量外，还有与 y 轴垂直的非零分量，故轴线上各点的磁场分布呈旋转对称分布．

【附】 B_y 值也可利用安培环路定理简单地得出．因螺旋线缠绕的圆柱面为无限长，y 轴上各点的 $\boldsymbol{B}_y$ 应相同．把无限长圆柱面的首尾相接，形成如电图 2－4－3 所示的半径为无穷大的圆环（环的截面是圆，相当于螺绕环），则 y 轴构成一闭合回路，沿此回路运用安培环路定理，有

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint B_y \mathrm{d}y = B_y \cdot 2\pi r$$

$$= \mu_0 \sum I = \mu_0 \left(-\frac{2\pi r}{H} I \right)$$

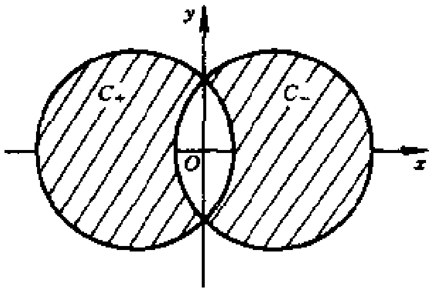


电图 2－4－3

式中 $r = \infty$ 是圆柱的半径．故

$$B_y = -\frac{\mu_0 I}{H}$$

【题 5】 如图，C_+ 和 C_- 是沿 z 轴放置的两根互相绝缘的长直非磁性导体，其中的电流分别沿 z 轴的正方向和负方向流动，电流强度均为 I．图中画斜线的部分是两导体的正截面，它们分别是 xy 平面中的部分圆，两圆的直径均为 D，两圆心的间距为 $\frac{D}{2}$，不难算出，两导体正截面的面积均为 $\left(\frac{1}{12}\pi + \frac{1}{8}\sqrt{3}\right)D^2$．每一根导体中的电流均匀地分布在自身的正截面内．试求两根导体之间空白区域内的磁场分布 $\boldsymbol{B}(x, y)$．



电图 2－5－1

【分析与解】 空白区域内的磁场可以看作是两根完整的圆柱形长直载流导体所产生的磁场之和．所谓完整的圆柱形是指其正截面是完整的圆而不是部分圆．由于两根完整的圆柱形长直导体中的电流反向，因而在交叠区域中两个反向电流刚好抵消，形成如本题所述的无电流空白区域．设两根完整圆柱形长直导体中的电流为 I'，则 I' 与题目给定的 I 之比应为完整圆与部分圆的面积之比（均设电流在正截面内均匀分布），即有

$$\frac{I}{I'} = \frac{\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right)D^2}{\frac{\pi}{4}D^2} = \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{6\pi}$$

由安培环路定理，在沿 z 轴放置的长直圆柱体内，若电流沿 z 轴正方向（图中垂直纸面向外）流动，电流强度为 I' 且均匀分布，则在距圆柱体中央轴为 r 处的磁场 $\boldsymbol{B}$ 只有角向分量 B_ϕ，其大小为

$$B_\phi = \frac{\mu_0}{2\pi r}\left(\frac{\pi r^2}{\frac{\pi}{4}D^2} I'\right) = \frac{2\mu_0 I' r}{\pi D^2}$$

$\boldsymbol{B}_\phi$ 的 x 分量和 y 分量分别为

$$B_x = B_\phi \cdot \frac{-y}{r} = -\frac{2\mu_0 I'}{\pi D^2} y$$

$$B_y = B_\phi \cdot \frac{x}{r} = \frac{2\mu_0 I'}{\pi D^2} x$$

这里的 x 和 y 坐标的原点取在圆柱体的中央轴上．

在本题中，如图，x、y 坐标的原点取在空白区域的中心．即 y 坐标不变，x 坐标与上述相比有所平移．故左侧完整长直圆柱体，其中电流沿 z 轴正方向，电流强度为 I'，它在空白区域中任一

点(x,y)产生的磁场的 x 分量和y 分量为

$$B_x^+ = -\frac{2\mu_0 I'}{\pi D^2}y$$

$$B_y^+ = \frac{2\mu_0 I'}{\pi D^2}\left(x+\frac{D}{4}\right)$$

同样，右侧完整长直圆柱体，其中电流沿 z 轴负方向，电流强度为 I'，它在空白区域中任一点(x,y)产生的磁场的 x 分量和y 分量为

$$B_x^- = -\frac{2\mu_0(-I')}{\pi D^2}y$$

$$B_y^- = \frac{2\mu_0(-I')}{\pi D^2}\left(x-\frac{D}{4}\right)$$

本题的长直载流导体 C^+ 和 C^- 在空白区域内任一点(x,y)产生的磁场的 x 分量和y 分量，即为上述结果之和，

$$B_x = B_x^+ + B_x^- = 0$$

$$B_y = B_y^+ + B_y^- = \frac{\mu_0 I'}{\pi D}$$

把

$$I' = \frac{6\pi}{2\pi+3\sqrt{3}}I$$

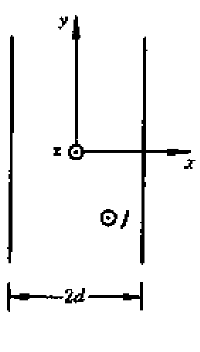
代入，得

$$\begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = \dfrac{6\mu_0}{(2\pi+3\sqrt{3})D}I \end{cases}$$

可见空白区域内的磁场为匀强磁场，其方向沿 y 轴正方向．

【本题是 1996 年第 27 届 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛) 试题的一部分．】

【题 6】 如电图 2－6－1 所示，取直角坐标系 xyz，在 $-d\leqslant x\leqslant d$ 的一层无穷区域内有均匀的传导电流，电流密度的方向为 z 轴的正方向，大小恒定为 j．试求真空中磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的分布．



电图 2－6－1

【分析】 首先，可将这一层沿 z 轴流动的电流，分解为一系列与 z 轴平行的无限长直载流“导线”．由于每一根“导线”都无限长，由毕奥－萨伐尔定律可知，它在空间任一点产生的磁场的方向都与该“导线”垂直，即无 z 分量．因此，全部“导线”产生的磁场，即本题全部电流在空间各点的磁场均无 z 分量．

由于沿 z 轴流动的电流是无限长的，因此在每一个与 z 轴垂直的xy 平面上，磁场的分布应该没有区别，完全相同．同理，由于电流沿 y 轴的分布也是无限的，因此在每一个与 y 轴垂直的xz 平面上，磁场的分布也没有区别，完全相同．又由于 y 轴左右两侧电流的分布具有旋转 180° 对称性，当我们把电流绕 z 轴旋转 180° 后，全空间的磁场也跟着旋转 180°，因此在某 x 处的磁场与 $-x$ 处的磁场应相等而反向．

总之，根据电流分布的对称性，空间各点的磁场均无 z 分量，磁场沿 z 轴及y 轴均匀分布，+

x 处的磁场与 $-x$ 处的磁场相等反向．

根据上述结论，利用 $\boldsymbol{B}$ 的高斯定理，选择适当的高斯面，可以进一步得出 $B_x=0$，即磁场只有 y 分量，再利用 $\boldsymbol{B}$ 的环路定理，适当选取环路，即可求出空间的磁场分布．

【解】 根据对称性分析，有

$$\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}=B_x(x)\boldsymbol{i}+B_y(x)\boldsymbol{j}$$

及

$$B_x(x)\boldsymbol{i}+B_y(x)\boldsymbol{j}=-B_x(-x)\boldsymbol{i}-B_y(-x)\boldsymbol{j}$$

其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 是 x 方向与 y 方向的单位矢量．（电流密度矢量也表为 $\boldsymbol{j}$，请注意区分．）

作长方体形状的高斯面如电图 2－6－2 中实线所示，它的三边分别与 x,y,z 轴平行．$\boldsymbol{B}$ 的高斯定理为

$$\oiint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0 \tag{1}$$

式中

$$\oiint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_{xy}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}+\iint_{yz}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}+\iint_{zx}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

其中 $\iint_{xy}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}S$ 是通过在两个不同 z 处的两个 xy 平面的磁通量，余同．因 $B_z=0$，故

$$\iint_{xy}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$$

因 x 处与 $-x$ 处的磁场相等反向，故通过两个 zx 平面的磁通量之和亦为零，有

$$\iint_{zx}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}S=0$$

由以上四式，得出

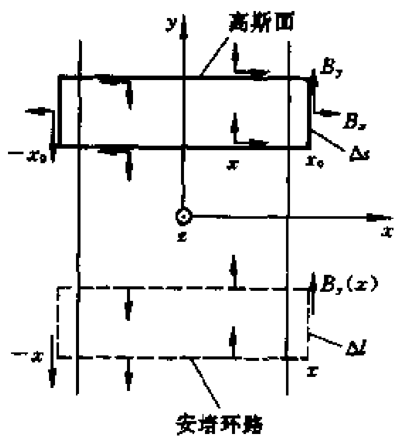
$$\iint_{yz}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$$

即

$$2B_x\Delta S=0$$

式中 ΔS 是高斯面的两个在 yz 平面的侧面的面积，故

$$B_x=0$$



电图 2－6－2

由于 $B_z=0,B_x=0$，故空间任一点的磁场只有 y 分量．磁场又只沿 x 轴有分布，且 x 处和 $-x$ 处的磁场又相等反向，故只需求出右半空间($x\geqslant 0$)的磁场分布即可．在右半空间的 $\boldsymbol{B}$ 可表为

$$\boldsymbol{B}=B_y\boldsymbol{j}=B_y(x)\boldsymbol{j}$$

式中 $\boldsymbol{j}$ 是 y 轴单位矢量．

为求 $B_y(x)$，作安培环路如电图 2－6－2 中虚线所示．由安培环路定理，有

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\begin{cases}\mu_0 j(2x\cdot\Delta l), & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant d\\ \mu_0 j(2d\cdot\Delta l), & \text{当 } x>d\end{cases}$$

式中 j 是电流密度．又

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 2B_y(x) \cdot \Delta l$$

故

$$B = B_y = B_y(x) = \begin{cases} \mu_0 jx, & 当 0 \leqslant x < d \\ \mu_0 jd, & 当 x > d \end{cases}$$

【题7】 无限长直圆柱形导体在没有电流时，自由电子的体电荷密度为常量 ρ_0，正离子的体电荷密度为 $-\rho_0$，导体内处于电中性．当沿导体长度方向通以直流电时，体电流会在导体中产生轴对称的环状分布磁场，沿轴向运动的自由电子便会在磁场力的作用下向中轴移动，从而破坏了原来的 ρ_0 分布．当积聚的净电荷产生的径向电场与运动自由电子所受的磁场力恰好抵消时，便形成只沿导体长度方向的稳恒电流．设此时自由电子的漂移速度为 $\bar{u}$．试求导体中净电荷密度的分布．

【分析】 无电流时，自由电子的 ρ_0 与正离子实的 $-\rho_0$ 处处抵消．

如图，有电流时(电流方向沿轴向上)，产生的环状磁场使运动的自由电子受到指向中轴的洛伦兹力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{m}}$，导致自由电子沿径向分布不均匀，产生附加电场，使电子受电力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}$．稳恒时，自由电子所受到的沿径向的磁力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{m}}$ 与电力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}$ 相等反向，相互抵消，自由电子沿轴以漂移速度 $\bar{u}$ 稳定地运动．

当电流稳恒地沿轴流动时，自由电子的径向分布 $\rho(r)$ 及漂移速度 $\bar{u}$ 决定了电流密度 $j(r)$，$j(r)$ 决定了环状磁场 $B(r)$，$B(r)$ 和 $\bar{u}$ 确定了磁力 F_{m}．另外，$\rho(r)$ 与正离子 $-\rho_0$ 之和即为净电荷分布，它确定了径向电场 $E(r)$ 及电力 F_{e}．稳恒时，$F_{\mathrm{e}} = F_{\mathrm{m}}$，于是净电荷密度的分布可求．

【解】 设当电流稳恒地沿轴流动时，自由电子的电荷体密度为 $\rho(r)$(具有轴对称性，沿径向分布)，则净电荷密度为

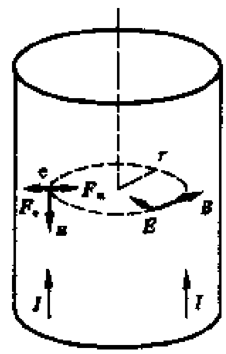
$$\Delta(r) = \rho(r) - \rho_0$$

电流密度为

$$j(r) = \rho(r)\bar{u}$$

由安培环路定理，上述体电流在 r 处的磁场为

$$B(r) = \frac{\mu_0}{r}\int_0^r r'j(r')\mathrm{d}r' = \frac{\mu_0}{r}\int_0^r r'\rho(r')\bar{u}\mathrm{d}r'$$



电图 2－7－1

自由电子所受磁场力为

$$F_{\mathrm{m}} = e\bar{u}B(r) = \frac{\mu_0 e\bar{u}^2}{r}\int_0^r r'\rho(r')\mathrm{d}r'$$

由高斯定理可得，净电荷按 $\Delta(r)$ 分布而形成的径向电场为

$$E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0 r}\int_0^r r'\Delta(r')\mathrm{d}r'$$

因此，自由电子所受电力为

$$F_e = eE(r) = \frac{e}{\varepsilon_0 r}\int_0^r r'\Delta(r')\mathrm{d}r'$$

$$= \frac{e}{\varepsilon_0 r}\int_0^r r'\rho(r')\mathrm{d}r' - \frac{e\rho_0}{2\varepsilon_0}r$$

稳恒时，有

$$F_m = F_e$$

即

$$\frac{\mu_0\bar{u}^2}{r}\int_0^r r'\rho(r')\mathrm{d}r' = \frac{1}{\varepsilon_0 r}\int_0^r r'\rho(r')\mathrm{d}r' - \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}r$$

因

$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

其中 c 为真空中的光速．又引入

$$\beta = \frac{\bar{u}}{c}$$

则上式可改写为

$$\int_0^r r'\rho(r')\mathrm{d}r' = \frac{\rho_0}{2(1-\beta^2)}r^2$$

考虑到

$$\int_0^r r'\mathrm{d}r' = \frac{r^2}{2}$$

因此

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1-\beta^2}$$

由此可见，自由电子沿径向的分布 $\rho(r)$ 为常量，故净电荷密度也是常量，为

$$\Delta(r) = \Delta = \rho(r) - \rho_0 = \frac{\rho_0}{1-\beta^2} - \rho_0 = \frac{\beta^2}{1-\beta^2}\rho_0$$

实际情况是

$$\bar{u} \ll c$$

即

$$\beta = \frac{\bar{u}}{c} \ll 1$$

故

$$\Delta \approx 0$$

因此，由于电流磁效应引起的自由电子体电荷密度分布的变化，即净电荷的分布，是完全可以忽略的．

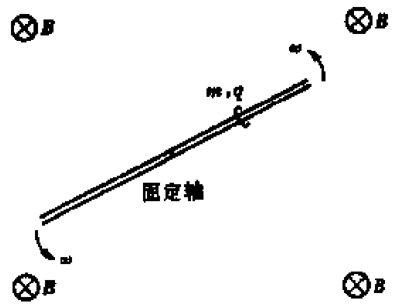
【题 8】 如图，在水平面上有一根光滑的刚性细长杆，它可以无摩擦地绕固定的竖直轴旋转，转动惯量为 I．在杆周围有与转轴平行的匀强磁场 $\boldsymbol{B}$，其方向如图所示．把质量为 m，电量为 q(q

>0)的光滑带电小圆环套在杆上，设环与杆之间无电荷转移．

1．试问杆连同环的旋转角速度 ω 取何值时，环在杆上任何位置均可相对杆静止．

2．设杆的初始角速度 ω_0 大于第1问中的 ω 值，设开始时环静止于转轴位置，后因受微小扰动，环离开转轴位置沿杆运动．试问环是否可能在到达杆的某一位置后，其径向速度降为零，从而停留在该处相对杆保持静止．

3．若杆的初始角速度改取第2问中所给初始角速度的 α 倍($\alpha>0$)．试问为使圆环的运动轨道保持不变，应如何改变磁场的大小．



电图 2－8－1

【分析】 当环随杆一起转动时，会受到指向转轴的洛伦兹力的作用．若此力刚好等于环圆运动所需的向心力，则环可相对杆静止，由此即可确定 ω 的取值．

如果环开始时静止于杆的转轴位置，因杆有初始角速度，故当环受扰动离轴运动时，环既有随杆旋转的速度又有沿杆的径向速度．由于磁场的洛伦兹力不作功，在扰动后，杆环系统的机械能守恒，故旋转的角速度必定发生变化．如果环可能再次相对杆静止，即其沿杆的径向速度再次降为零，设此时杆与转轴相距为 R，旋转角速度为 ω，这是两个待定的量．由于洛伦兹力会使杆环系统的角动量发生变化，故除上述能量方程外，还可由角动量定理建立一个关于 R 和 ω 的方程，从而解出 ω 与 ω_0 的关系．为使环相对杆保持静止，此 ω 需满足第一问的要求．若不能满足，即表明环的径向速度不可能在降为零后停留在杆的该位置上(本题不要求论证这种情况是否会发生)．

环在水平面的运动轨道在平面极坐标中可表为 $r=r(\theta)$．从数学上说，环的轨道取决于环的初始位置和各处的一阶导数$\frac{dr}{d\theta}$．当杆所取的初始角速度不同时，环的初始位置仍相同，因而只要各处的$\frac{dr}{d\theta}$相同，环的轨道就相同．由环的径向速度 $v_r=\frac{dr}{dt}$和旋转角速度 $\omega=\frac{d\theta}{dt}$，得出$\frac{dr}{d\theta}=\frac{v_r}{\omega}$．因此，在两种不同的初始角速度的情形(初始位置相同)，只要确保始终有相同的$\frac{v_r}{\omega}$，则环的运动轨道相同．于是，所需的磁场大小可求．

【解】 1．设环与转轴相距 r_0，为使环相对杆静止，即随杆以角速度 ω 绕轴作圆周运动，则环所受洛伦兹力应提供圆运动的向心力，即

$$q\omega r_0 B=m\omega^2 r_0$$

要求旋转角速度为

$$\omega=\frac{qB}{m}$$

2．若环从开始所在的转轴位置，因扰动稍有偏离，与转轴相距 r_0(r_0 为小量)．取随杆旋转的非惯性系，为使环能继续偏离转轴，即有沿杆向外的径向运动，要求惯性离心力大于洛伦兹力，即

$$m\omega_0^2 r_0>q\omega_0 r_0 B$$

因此要求

$$\omega_0>\frac{qB}{m}$$

设当环运动到与转轴相距 r 处时，具有的径向速度为 v_r，杆相对原惯性系的旋转角速度变为 ω，因洛伦兹力不作功，杆环系统在扰动后机械能守恒．注意到扰动开始时环的位置 r_0 为小量，故有

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2=\frac{1}{2}(I+mr^2)\omega^2+\frac{1}{2}mv_r^2 \tag{1}$$

洛伦兹力相对转轴的力矩为

$$M=qv_rBr$$

把杆环系统相对转轴的角动量记为 L，则有

$$M=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$$

即

$$\mathrm{d}L=M\mathrm{d}t=qv_rBr\mathrm{d}t$$

其中

$$v_r=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

代入，得

$$\mathrm{d}L=qBr\mathrm{d}r$$

积分，得

$$\Delta L=\int_0^r qBr\mathrm{d}r=\frac{1}{2}qBr^2$$

又

$$\Delta L=(I+mr^2)\omega-I\omega_0$$

故有

$$(I+mr^2)\omega-I\omega_0=\frac{1}{2}qBr^2 \tag{2}$$

设环到达与转轴相距为 R 的位置时，环相对杆的速度(即 v_r)为零，则(1)、(2)式为

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2=\frac{1}{2}(I+mR^2)\omega^2$$

$$(I+mR^2)\omega-I\omega_0=\frac{1}{2}qBR^2$$

由以上两式，消去 R^2 后，得

$$\frac{I\omega_0^2}{\omega}-I\omega_0=\frac{1}{2}qB\cdot\frac{I(\omega_0^2-\omega^2)}{m\omega^2}$$

即

$$(2m\omega_0-qB)\omega^2-2m\omega_0^2\omega+qB\omega_0^2=0$$

其解为

$$\omega=\frac{\omega_0}{2m\omega_0-qB}\left[m\omega_0\pm\sqrt{(m\omega_0-qB)^2}\right]$$

一个解为 $\omega=\omega_0$，容易算出相应的 $R=0$，显然不合题意．另一个解为

$$\omega=\frac{qB}{2m\omega_0-qB}\omega_0$$

容易算出，它相应的 $R>0$，符合题意．

若要求环在此 R 位置上能继续停留，由第 1 问，ω 应满足

$$\omega=\frac{qB}{m}$$

由以上两式，得

$$\frac{qB}{2m\omega_0-qB}\omega_0=\frac{qB}{m}$$

即要求

$$\omega_0=\frac{qB}{m}$$

这与上述要求

$$\omega_0>\frac{qB}{m}$$

相矛盾．因此环不可能在到达杆的某一位置后，径向速度降为零，并继续停留在该位置上．

3. 为使环的运动轨道相同，在平面极坐标中，要求两种情况下有相同的$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$. 因

$$v_r=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t},\quad \omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

即要求在两种情况下的$\frac{v_r}{\omega}$相同．

由上述(1)式，得

$$m\left(\frac{v_r}{\omega}\right)^2=I\frac{\omega_0^2}{\omega^2}-(I+mr^2)$$

由上述(2)式，得

$$\omega=\frac{I\omega_0+\frac{1}{2}qBr^2}{I+mr^2}$$

由以上两式，得

$$\frac{v_r}{\omega}=\sqrt{\frac{I+mr^2}{m}\left[\frac{I(I+mr^2)}{\left(I+\frac{qBr^2}{2\omega_0}\right)^2}-1\right]}$$

由此可见，若初始角速度从 ω_0 改为 $\alpha\omega_0$，则只要相应地将 B 改为 αB，即可确保$\left(\frac{v_r}{\omega}\right)$相同，从而环的运动轨道也就一致了．

【题 9】 如图 2-9-1 所示，半径为 R，质量为 m 的匀质细圆环上均匀地分布着相对圆环固定不动的正电荷，总电量为 Q. $t=0$ 时，圆环在水平地面上具有沿正东方向的平动速度 $\boldsymbol{v}_0$，且无

滚动．假设圆环与地面之间的摩擦系数为 μ，在圆环周围只有沿水平面指向北方（电图 2－9－1 中垂直纸面向里为北方）的匀强地磁场 $\boldsymbol{B}$．

1．为了使圆环在尔后的运动过程中始终不会离开地面．试求 v_0 的取值范围．

2．若 v_0 在第一问的取值范围内，假设圆环最后能达到纯滚状态．试导出在达到纯滚前，圆环的平动速度 v 与时间 t 的关系．

3．设 $v_0=\dfrac{mg}{2QB}$，试求圆环则达到纯滚状态的时刻 T．

【分析】 圆环的平动使之受到向上的洛伦兹力的作用，若此力大于圆环所受重力，圆环便会离开地面．为使圆环开始时不离开地面，对它开始时的平动速度 v_0 应有所限制．当 v_0 在此限制范围内时，地面会提供向上的支持力和向西的摩擦力，使圆环产生顺时针方向的转动．因洛伦兹力不作功，而摩擦力作负功，圆环的机械能减少，且有一部分转化为转动动能，故圆环的平动速度减小．可以证明，因圆环转动而使环上各部分电荷所受的附加洛伦兹力的合力为零．于是，随着圆环平动的减速，所受向上的洛伦兹力随之减小，所以只要开始时圆环不离开地面，尔后便始终不会离开地面．

圆环在运动过程中所受的洛伦兹力的方向始终向上，不影响其平动，只有摩擦力影响其平动．由此可导出圆环达到纯滚前，圆环的平动速度 v 与时间 t 的关系．

圆环平动时，相应的洛伦兹力对环心的力矩之和必为零．圆环转动时，相应的各部分所受的洛伦兹力均沿径向，亦无力矩．因此，影响圆环转动的作用力仍然只有摩擦力，所以圆环何时达到纯滚状态是一个单纯的力学问题，易求．

【解】 1．初始时刻圆环所受洛伦兹力 $\boldsymbol{F}$ 竖直向上，其大小为

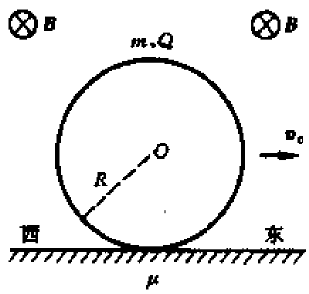
$$F=Qv_0B$$

圆环不离开地面的条件是

$$F\leqslant mg$$

故 v_0 的取值范围为

$$v_0\leqslant\frac{mg}{QB}$$



电图 2－9－1

若 $v_0=\dfrac{mg}{QB}$，则圆环所受洛伦兹力与重力抵消，地面支持力为零，从而也没有摩擦力，圆环将保持以此 v_0 作匀速平动的状态，始终不会离开地面．若 $v_0<\dfrac{mg}{QB}$，地面将提供向上的支持力，即圆环对地面有压力，从而地面对圆环有沿水平向西的摩擦力，它使圆环沿顺时针方向转动．摩擦力还使圆环的平动减速．设圆环在任意时刻的平动速度为 v，转动角速度为 ω，如电图 2－9－2 所示，圆环上任意电荷元 $\mathrm{d}Q$ 所受洛伦兹力为

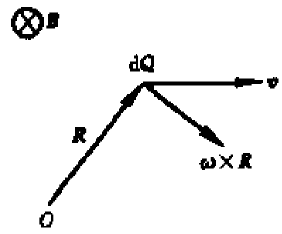
$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{F}&=\mathrm{d}Q[(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})\times\boldsymbol{B}]\\&=\mathrm{d}Q(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})+\mathrm{d}Q(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})\times\boldsymbol{B}\end{aligned}$$

上式右边第一项的积分为

$$\oint\mathrm{d}Q(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})=Q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

其方向竖直向上，其大小为 QvB，上式右边第二项 $\mathrm{d}Q(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})\times\boldsymbol{B}$ 是指向环心的径向力，积分为

$$\oint \mathrm{d}Q(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\omega}\times(\oint \boldsymbol{R}\mathrm{d}Q)\times\boldsymbol{B}$$



电图 2-9-2

因电荷均匀分布，故

$$\oint \boldsymbol{R}\mathrm{d}Q=0$$

即

$$\oint \mathrm{d}Q(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})\times\boldsymbol{B}=0$$

因此，圆环所受洛伦兹力为

$$\boldsymbol{F}=Q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

其方向竖直向上．因在任意时刻圆环的平动速度 v 小于其初始速度，即

$$v<v_0<\frac{mg}{QB}$$

故

$$F<mg$$

可见，只要圆环开始时不离开地面，则尔后便始终不会离开地面．为此，对圆环初始平动速度 v_0 的限制是

$$v_0\leqslant\frac{mg}{QB}$$

2. 若 $v_0\leqslant\dfrac{mg}{QB}$，则地面对圆环会产生沿水平向西的摩擦力 f，为

$$f=\mu N$$

其中 N 是地面所受圆环的正压力，为

$$N=mg-QvB$$

式中 v 是在 $t\geqslant0$ 的任意时刻（达到纯滚之前），圆环的平动速度．因洛伦兹力无水平分力，故圆环的平动方程（即圆环质心的运动方程），为

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-f=\mu(QvB-mg)$$

积分，得

$$\int_0^t\mu\mathrm{d}t=\int_{v_0}^{v}\frac{m}{QvB-mg}\mathrm{d}v$$

即

$$\mu t=\frac{m}{QB}\ln\frac{QvB-mg}{Qv_0B-mg}=\frac{m}{QB}\ln\frac{mg-QvB}{mg-Qv_0B}$$

故

$$v=\frac{mg}{QB}-\left(\frac{mg}{QB}-v_0\right)e^{\frac{QB}{m}\mu t}$$

若取 $v_0=\dfrac{mg}{QB}$，则 $v=v_0$，即平动速度不变．

3. 当圆环以 $\boldsymbol{v}$ 平动时，其上的 $\mathrm{d}Q$ 电荷所受洛伦兹力为 $\mathrm{d}Q(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$，圆环各处均匀分布的电

荷因受洛伦兹力而相对环心 O 的力矩上下成对抵消．当圆环以 $\boldsymbol{\omega}$ 转动时，$\mathrm{d}Q$ 所受的洛伦兹力为 $\mathrm{d}Q(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})\times\boldsymbol{B}$，这是指向环心 O 的径向力，力矩为零．因此，只有摩擦力有非零力矩，使圆环加速转动．设圆环顺时针转动的角加速度为 β，则有

$$fR = I\beta = mR^2\beta$$

即

$$\beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{f}{mR}$$

又

$$f = -m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

由以上两式，得

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

积分

$$\int_0^{\omega}\mathrm{d}\omega = -\frac{1}{R}\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v$$

得

$$\omega R = v_0 - v$$

圆环达到纯滚时，要求

$$\omega R = v$$

此时圆环的平动速度降为

$$v = \frac{v_0}{2}$$

因此，利用第二问的结果，圆环达到纯滚的时刻 T 应满足

$$\frac{v_0}{2} = \frac{mg}{QB} - \left(\frac{mg}{QB} - v_0\right)\mathrm{e}^{\frac{QB}{m}\mu T}$$

由题设

$$v_0 = \frac{mg}{2QB}$$

代入，得

$$\mathrm{e}^{\frac{QB}{m}\mu T} = \frac{3}{2}$$

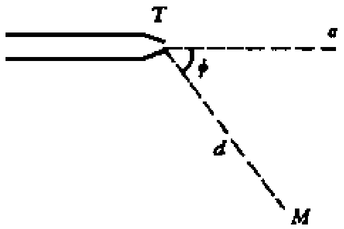
故

$$T = \frac{m}{QB\mu}\ln\frac{3}{2}$$

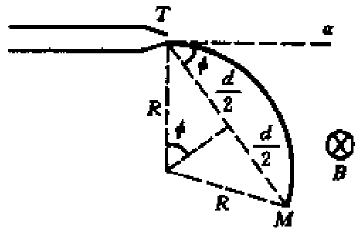
【题 10】 如电图 2－10－1 所示，经 $U=1\,000$ V 电压加速的电子(加速前电子静止)从电子枪 T 射出，其初速沿直线 a 的方向．若要求电子能击中在 $\varphi=60°$方向，与枪口相距 $d=5.0$ cm 的靶 M．试求在以下两种情形，所需的匀强磁场的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的大小．1．磁场 $\boldsymbol{B}$ 垂直于直线 a 与

靶 M 所确定的平面 .2. 磁场 $\boldsymbol{B}$ 平行于枪口 T 向靶 M 所引的直线 TM.

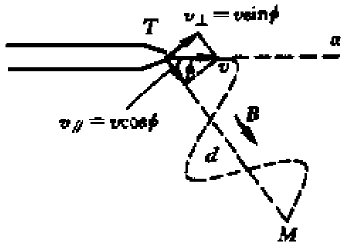
【分析】 电子带负电．如电图 2－10－2 所示，当 $\boldsymbol{B}$ 的方向垂直纸面向里时，与电子射出枪口时的速度 $\boldsymbol{v}$ 相垂直，电子受垂直向下的洛伦兹力的作用，作匀速圆周运动．如电图 2－10－2，该圆在纸平面上，与直线 α 在枪口 T 相切，圆的大小即圆半径 R 与 B 有关．因此，调节 B 的大小使圆经过 M 即可击中靶子，这一要求用适当的几何关系表述出来，即可求解．



电图 2－10－1



电图 2－10－2



电图 2－10－3

如电图 2－10－3 所示，当 $\boldsymbol{B}$ 的方向平行 TM 时，电子射出枪口时的速度 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 斜交．把 $\boldsymbol{v}$ 分成平行和垂直 $\boldsymbol{B}$ 的分量 $v_{/\!/}$ 和 $v_{\perp}$. 电子将以 $v_{/\!/}=v\cos\varphi$ 沿 TM 作匀速直线运动，同时因受洛伦兹力作用以 $v_{\perp}=v\sin\varphi$ 作匀速圆周运动，合成以 TM 为轴的等距螺旋线运动．由于仅当电子完成整数个圆周运动时，此螺旋线才与纸面相交．因此，为了击中靶，要求靶 M 刚好是螺旋线与纸面的交点．也就是说，当电子从枪口 T 射出，以 $v_{/\!/}$ 沿 TM 作匀速直线运动到达 M 所需的时间 t，应刚好是以 $v_{\perp}$ 完成整数个圆周运动所需的时间．显然，适当调整 B 的大小是可以满足上述要求，使电子击中靶 M 的．把上述要求给予适当的数学表述，即可求解．

【解】 设电子从枪口 T 射出的速度为 v，则

$$\frac{1}{2}mv^2=eU$$

故

$$v=\sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

式中 m 和 e 为电子的质量和电量(绝对值).

1. 如电图 2－10－2，为了击中靶 M，电子圆轨道的半径 R 与 d 及 φ 应满足下述关系

$$R\sin\varphi=\frac{d}{2}$$

在洛伦兹力作用下电子圆轨道半径 R 与磁场 B 的关系为

$$evB=\frac{mv^2}{R}$$

即

$$R=\frac{mv}{eB}$$

因此，为了击中靶，B 的大小应为

$$B=\frac{mv}{eR}=\frac{2\sin\varphi}{d}\sqrt{\frac{2mU}{e}}$$

把 $m=9.11\times10^{-31}$ kg, $e=1.6\times10^{-19}$ C 等数据代入，得

$$B=3.7\times10^{-3}\ \text{T}$$

2. 当 $\boldsymbol{B}/\!/TM$ 时，电子作等距螺旋线运动，如电图 2－10－3 所示．电子以 $v_{/\!/}=v\cos\varphi$ 沿 TM 作匀速直线运动，到达 M 所需时间为

$$t=\frac{d}{v\cos\varphi}$$

同时，电子因受洛伦兹力作用，以 $v_{\perp}=v\sin\varphi$ 在垂直于 $\boldsymbol{B}$ 的平面内作匀速圆周运动，绕一整圈的时间（即周期）为

$$T=\frac{2\pi m}{eB}$$

为了能够击中靶 M，要求

$$t=nT, n=1,2,\cdots$$

由以上三式，解出所需 B 为

$$B=\frac{2n\pi mv\cos\varphi}{ed}, n=1,2,\cdots$$

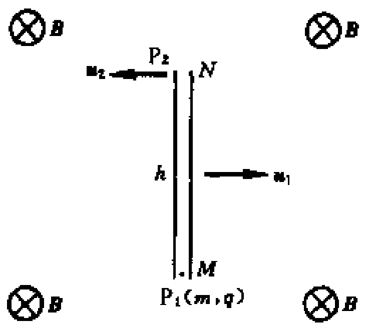
把有关数据代入，得

$$B=n\times6.7\times10^{-3}\ \text{T}, n=1,2,\cdots$$

【本题是 1977 年第 10 届 IPhO（国际中学生物理奥林匹克竞赛）的试题．】

【题 11】 如电图 2－11－1 所示，设在本题所涉及的空间范围内有磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$ 的匀强磁场，其方向垂直纸平面向里．在纸平面上有一个长为 h 的光滑绝缘空心细管 MN，在管的 M 端内有一个质量为 m，电量为 $q(q>0)$ 的带电小球 P_1，在管的 N 端外侧有另一个不带电的小球 P_2．开始时，P_1 相对管静止，管带着 P_1 以垂直于管长度方向的速度 $\boldsymbol{u}_1$ 在纸面上向图中正右方向运动，小球则以 $\boldsymbol{u}_2$ 向着图中正左方向运动．设管的质量远大于 m，小球 P_1 在管内运动对管运动的影响可以忽略．设引力可略．如果 P_1 从管的 N 端离开管后，最终能与 P_2 相碰．试求满足此要求的 u_2 的可能取值．

【分析】 P_1 因随管 MN 一起以 u_1 在磁场中运动，将受到指向 N 端的洛伦兹力，它使 P_1 沿管壁向 N 端加速运动．后一运动又会使 P_1 受附加的洛伦兹力（指向左方），它将被管壁提供的支持力抵消，由题设 P_1 对管壁的压力所产生的影响可忽略不计．因此，当 P_1 从管 N 端离开管时，它不仅具有随管一起向右运动的速度，还有沿 MN 方向的速度．离管后，P_1 以这两个速度之和在匀强磁场中作圆轨道运动，于是可以进一步讨论 P_1 与 P_2 相碰的条件，后者是典型的运动学问题．



电图 2－11－1

【解】 P_1 因随管以 $\boldsymbol{u}_1$ 向右运动而受到指向管 N 端的洛伦兹力作用，其大小为

$$F=qu_1B$$

F 使 P_1 具有沿管向 N 端的加速度，为

$$a=\frac{F}{m}=\frac{qu_1B}{m}$$

P_1 到达管 N 端时具有的沿管向上的速度的大小为

$$v_1=\sqrt{2ah}=\sqrt{\frac{2qu_1Bh}{m}}$$

P_1 从管 M 端到达 N 端所需时间为

$$t_1=\frac{v_1}{a}=\sqrt{\frac{2hm}{qu_1B}}$$

P_1 离开管 N 端时，除了上述 $\boldsymbol{v}_1$ 外，同时随管以 $\boldsymbol{u}_1$ 运动，故其速度为

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{u}_1$$

因 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{u}_1$ 垂直，故 $\boldsymbol{u}$ 的大小为

$$u=\sqrt{{v_1}^2+{u_1}^2}=\left[\sqrt{\left(\frac{2qBh}{m}\right)^2+1}\right]u_1$$

把 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{u}_1$ 的夹角表为 θ，则有

$$\tan\theta=\frac{v_1}{u_1}=\sqrt{\frac{2qBh}{mu_1}}$$

P_1 离开管 N 端后，受洛伦兹力作用，作匀速圆周运动，其半径为

$$R=\frac{mu}{qB}$$

P_1 绕圆轨道的周期为

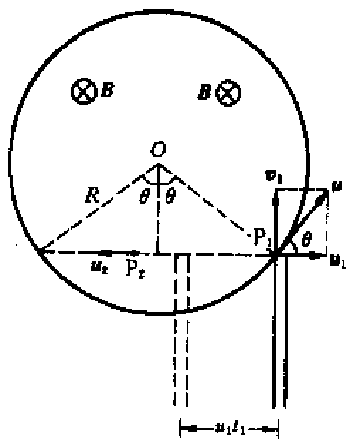
$$T=\frac{2\pi m}{qB}$$

如电图 2－11－2 所示，P_1 若能与 P_2 相碰，则 P_1 必须转过的圆心角应为

$$(2\pi-2\theta)+2k\pi,\quad k=0,1,2,\cdots$$

所需时间为

$$t_2=\frac{2\pi-2\theta}{2\pi}T+kT=\left(k+1-\frac{\theta}{\pi}\right)T,\quad k=0,1,2,\cdots$$



电图 2－11－2

P_1 从管的 M 端到达 N 端所需时间为 t_1，离开 N 端后，转过上述圆心角所需的时间为 t_2，总共所需的时间为

$$t=t_1+t_2=\sqrt{\frac{2hm}{qu_1B}}+\left(k+1-\frac{\theta}{\pi}\right)\frac{2\pi m}{qB}$$

为了使 P_1 与 P_2 相碰，在 t 时间内，P_2 经过的路程应为

$$2R\tan\theta-u_1t_1=\frac{2mu}{qB}\sqrt{\frac{2qBh}{mu_1}}-u_1\sqrt{\frac{2hm}{qu_1B}}=2\sqrt{\left(\frac{2qBh}{m}\right)^2+1}\sqrt{\frac{2hmu_1}{qB}}-\sqrt{\frac{2hmu_1}{qB}}$$

$$=\left[2\sqrt{\left(\frac{2qBh}{m}\right)^2+1}-1\right]\sqrt{\frac{2hmu_1}{qB}}$$

因此，为了使 P_1 和 P_2 能够相碰，P_2 的速度大小应为

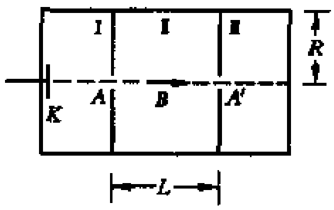
$$u_2=\frac{2R\tan\theta-u_1t_1}{t}=\frac{\left[2\sqrt{\left(\frac{2qBh}{m}\right)^2+1}-1\right]\sqrt{\frac{2hmu_1}{qB}}}{\left[\sqrt{\frac{2hm}{qu_1B}}+\left(k+1-\frac{\theta}{\pi}\right)\frac{2\pi m}{qB}\right]}$$

$$=\frac{\left[2\sqrt{\left(\frac{2qBh}{m}\right)^2+1}-1\right]\sqrt{hu_1}}{\left[\sqrt{\frac{h}{u_1}}+\left(k+1-\frac{1}{\pi}\arctan\sqrt{\frac{2qBh}{mu_1}}\right)\sqrt{\frac{2m}{qB}}\pi\right]}$$

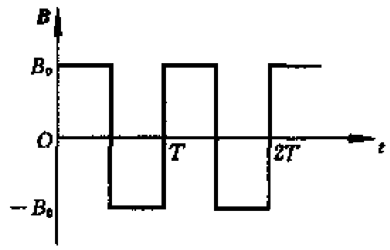
其中

$$k=0,1,2,\cdots$$

【题12】 如电图2-12-1所示，在半径为R的圆筒形真空管中有两个隔板，将管内分为三个区域，两隔板中心各有小孔A和A′，两孔间距为L．在左边的区域Ⅰ中有加速电场，在中间的区域Ⅱ中有沿管轴方向的匀强磁场$\boldsymbol{B}$，在右边的区域Ⅲ中既无电场也无磁场．区域Ⅰ中的阴极K连续发射的电子经其中的电场加速后，使穿过小孔A的电子形成发散束进入区域Ⅱ．设穿过小孔A的这些电子的速度在管轴方向的分量均为v，设电子之间的相互作用可以忽略．当将区域Ⅱ中沿管轴方向的磁感应强度的大小调到某些值时，从小孔A进入区域Ⅱ的电子便能穿过小孔A′射出，把这些磁场的最小值表为B_0．取从A到A′的方向为正方向，区域Ⅱ中的磁场$\boldsymbol{B}$随时间t变化的曲线如电图2-12-2所示．即从$t=0$起$\boldsymbol{B}$沿正方向，每经$\frac{T}{2}$的时间$\boldsymbol{B}$反向一次，T就是$\boldsymbol{B}$的变化周期．从$t=0$开始，电子束连续地从小孔A进入区域Ⅱ，设凡遇管壁的电子均被管壁吸收．



电图2-12-1



电图2-12-2

1．为了使从小孔A进入区域Ⅱ的电子能经小孔A′到达区域Ⅲ，试求磁场$\boldsymbol{B}$变化周期的最小值T_0．

2．若取磁场变化周期$T=2T_0$，试在电图2-12-2的时间轴上标明电子能经小孔A′到达区域Ⅲ的时间区间．

3．在进入区域Ⅲ的电子束中，电子运动方向与管轴之间夹角的最大值是多少？

【分析与解】 1．由题设，经小孔A进入区域Ⅱ的发散电子束速度沿管轴的分量均为v，这些斜入射的电子在$\boldsymbol{B}$的作用下作等距螺旋线运动，螺旋运动的周期T'与速度无关，为

$$T'=\frac{2\pi m}{eB}$$

螺距 h 为

$$h = vT' = \frac{2\pi mv}{eB}$$

式中 m 是电子的质量．为了使这些电子都能从小孔 A′射出(遇到管壁的被吸收)，要求 L 等于上述螺距 h 的整数倍，即

$$L = nh = n\left(\frac{2\pi mv}{eB}\right),\quad n = 1,2,\cdots$$

故磁场的大小应为

$$B = n\left(\frac{2\pi mv}{eL}\right),\quad n = 1,2,\cdots$$

可见，磁场 B 的最小值为

$$B_0 = \frac{2\pi mv}{eL}$$

与此 B_0 相对应，螺距 h 刚好等于孔 A 与 A′的间距 L，即

$$h = L = vT'$$

现在，设 B 随时间 t 按图 2－12－2 变化，周期为 T．如果这些电子在进入区域Ⅱ后运动的时间不足 T'，$\boldsymbol{B}$ 即改变方向，则电子将偏离原螺旋线，不能到达 A′，不能进入区域Ⅲ．因此，为了使这些电子能够到达 A′并进入区域Ⅲ，磁场方向变化的周期 T 必须满足下述条件

$$\frac{T}{2} \geqslant T'$$

故 T 的最小值 T_0 为

$$T_0 = 2T' = \frac{2L}{v}$$

2．若 $T = 2T_0$，则从 A 进入区域Ⅱ的斜入射电子中，在磁场方向沿正向的前一半时间内进入的那些电子可以穿过 A′射出，但在磁场方向沿正向的后一半时间内进入的那些电子就无法穿过 A′射出了．换言之，能够穿过 A′射出的电子必须在区域Ⅱ中经历时间 T'，而且在该时间内磁场的方向需保持不变．因此，发散电子束能穿过 A′到达区域Ⅲ的时间区间如电图 2－12－3 中时间 t 轴上的波纹线所示．

3．设斜入射到区域Ⅱ中的电子速度在垂直管轴方向的分量为 $v_\perp$，则在洛伦兹力作用下，电子圆轨道运动的半径为

$$r = \frac{mv_\perp}{eB}$$

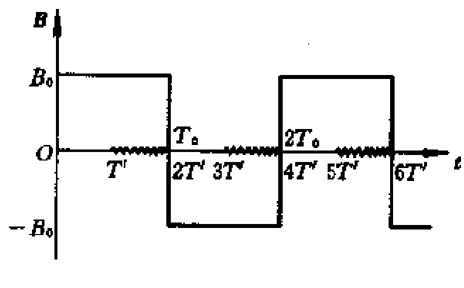
在这些电子中只有满足

$$2r < R$$

的那些电子能在管内运动时不与管壁相碰，从而能到达 A′并进入区域Ⅲ．即要求

$$v_\perp < \frac{eBR}{2m}$$

利用



电图 2－12－3

$$\frac{2\pi m}{eB}=T'=\frac{L}{v}$$

可得

$$v_{\perp}<\frac{\pi R v}{L}$$

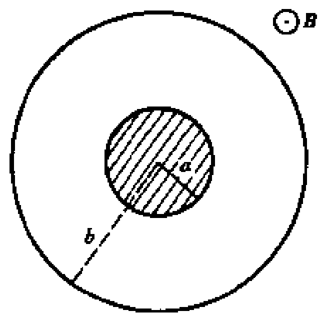
穿过A′进入区域Ⅲ后，这些电子作直线运动，其运动方向与管轴之间的夹角 θ 应满足

$$\tan\theta=\frac{v_{\perp}}{v}<\frac{\pi R}{L}$$

故最大夹角为

$$\theta_{\max}=\arctan\frac{\pi R}{L}$$

【题13】 如电图2－13－1所示，一个实心圆柱形导体和一个中空圆柱形导体共轴，其间为真空，内圆柱体的半径为 a，外圆柱体的内半径为 b. 外圆柱体相对内圆柱体可具有正电势 V，故称为阳极．在涉及的空间范围内可以存在匀强磁场，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的方向与圆柱体的中央轴平行，即垂直于电图2－13－1所在的纸平面并外指．设导体的感应电荷一律不予考虑．



电图2－13－1

本题讨论电子在两圆柱体之间的真空中运动的动力学问题．设电子的静止质量为 m，电量为 $-e$，电子一律从内圆柱体表面射出．

1. 设外圆柱体相对内圆柱体的电势为 V，设 $B=0$. 设有一个电子从内圆柱体表面逸出，初速可略．试求该电子打到阳极（外圆柱体）时的速度大小为 v，先给出非相对论的答案，再给出相对论的答案．

以下几问则无需考虑相对论效应．

2. 设 $V=0$，设匀强磁场 $\boldsymbol{B}$ 不为零．一个电子以径向初速度 v_0 从内圆柱体表面射出，当磁场超过某一临界值 B_C 时，电子将不能到达阳极（外圆柱体），试求此 B_C 值，并在磁场略大于 B_C 的情况下，定性画出电子与内圆柱体相碰前的运动轨道．

3. 电子从内圆柱体射出后，磁场对电子的作用可使电子获得相对圆柱体中央轴的非零角动量 L. 试导出 L 随时间 t 的变化率 $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$ 的表达式．试进而证明，这一表达式意味着下述量

$$L-keBr^2$$

是一个不随电子运动而变化的守恒量．其中 k 是一个无量纲的常量，r 是从圆柱体中央轴到电子所在位置的矢径．最后，试确定 k 的值．

4. 设一个电子无初速地从内圆柱体表面逸出后不能到达阳极，则它与圆柱体中央轴的距离必定会达到某个相应的极大值 $r_{\max}$. 试求电子到达该 $r_{\max}$ 距离的速度大小 v 与 $r_{\max}$ 的关系．

5. 若感兴趣的是如何利用磁场 $\boldsymbol{B}$ 来限制到达阳极的电子流．设当 B 稍大于某个临界值 B_C 时，从内圆柱体表面无初速地逸出的电子便不能到达阳极．试确定此 B_C 值．

6. 加热内圆柱体，使电子从内圆柱表面逸出时具有非零的初速度．设电子初速度沿 $\boldsymbol{B}$ 方向的分量为 v_B，沿径向向外的分量为 v_r，逆时针的角向分量为 v_ϕ. 对于这种情形，试求刚好能使电

子到达阳极的临界磁场 B_C.

【分析】 本题涉及的方面较多,但都与洛伦兹力的基本性质有关．这些性质包括:运动带电粒子在匀强磁场中受洛伦兹力的作用,若其速度与磁场方向垂直,则带电粒子作圆轨道运动;洛伦兹力对带电粒子不作功;洛伦兹力对带电粒子角动量的变化有影响,因为洛伦兹力可提供非零的力矩．

本题设问较多,内含提示,注意有关提示逐问细致求解,并不特别困难．

【解】 1. 电子受内、外圆柱体之间的电场作用,获得的电势能 eV 转化为其动能,因从内圆柱体逸出时初速可略,故在非相对论情况下有

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV$$

该电子打到阳极时的速度大小为

$$v=\sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

在相对论情况下有

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 = eV$$

故电子打到阳极时的速度大小为

$$v=\sqrt{1-\left(\frac{mc^2}{mc^2+eV}\right)^2}\,c$$

式中 c 为真空中的光速．

2. 在 $V=0$ 时,电子以径向初速度 v_0 逸出,因 v_0 与匀强磁场 $\boldsymbol{B}$ 垂直,所受洛伦兹力使电子作匀速圆周运动．由洛伦兹力及圆运动向心力公式,有

$$eBv_0 = \frac{mv_0^2}{R}$$

其中 R 为电子圆轨道的半径．为使电子不能到达阳极,最大可能的半径为 R 的圆运动轨道如电图 2-13-2 所示(几乎与外圆柱体相切),故 R 满足下式

$$\sqrt{a^2+R^2} = b-R$$

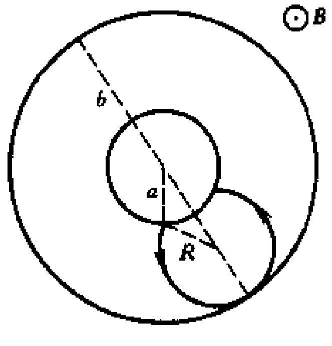
即最大可能的半径 R 为

$$R=\frac{b^2-a^2}{2b}$$

故所求 B_C 值为

$$B_C = \frac{mv_0}{eR} = \frac{2bmv_0}{e(b^2-a^2)}$$

电图 2-13-2 中画出的是 B 略大于 B_C 时的电子轨道．



电图 2-13-2

3. 因电场力沿径向,相应的力矩为零．故电子角动量随时间的变化,来源于电子所受的磁力的力矩．电子所受洛伦兹力为

$$\boldsymbol{F} = (-e)\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}.$$

式中 $\boldsymbol{v}$ 为电子的速度．洛伦兹力的角向分量 F_ϕ 产生的力矩为

$$F_\phi r=(eBv_r)r$$

其中

$$v_r=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

是电子速度 $\boldsymbol{v}$ 的径向分量．于是,所求的角动量 L 随时间 t 的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=F_\phi r=eBr\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

上式可改写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L-\frac{1}{2}eBr^2\right)=0$$

故

$$L-\frac{1}{2}eBr^2=\text{常量}$$

与题目所给的$(L-keBr^2)$为常量比较,得出 k 值为

$$k=\frac{1}{2}$$

4．当电子无初速地从内圆柱体表面逸出时,$L=0$,$r=a$,当电子到达径向最远距离 $r_{\max}$时,其速度 $\boldsymbol{v}$ 必沿角向,故其角动量为 $L=mvr_{\max}$. 利用第三问的结果,有

$$0-\frac{1}{2}eBa^2=mvr_{\max}-\frac{1}{2}eBr_{\max}^2,$$

故当电子在 $r_{\max}$处时,其速度大小 v 与$r_{\max}$的关系为

$$v=\frac{eB(r_{\max}^2-a^2)}{2mr_{\max}}$$

5．从内圆柱体表面无初速地逸出的电子,到达阳极前的速度为

$$v=\sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

若电子刚好不能到达阳极,则相应的

$$r_{\max}=b$$

利用第四问的结果,有

$$\sqrt{\frac{2eV}{m}}=\frac{eB(b^2-a^2)}{2mb}$$

因此,相应的临界磁场 B_C 为

$$B_C=\frac{2b}{b^2-a^2}\sqrt{\frac{2mV}{e}}$$

6．因电场力与洛伦兹力均无平行于 $\boldsymbol{B}$ 方向的分力,故电子运动速度在 $\boldsymbol{B}$ 方向的分量 v_B 是一个守恒量(即在运动过程中 v_B 不变)．把电子刚好到达阳极时,其速度在与 $\boldsymbol{B}$ 垂直方向的分量表为v,则由能量守恒,应有

$$\frac{1}{2}m(v_B^2+v_\phi^2+v_r^2)+eV=\frac{1}{2}m(v_B^2+v^2)$$

解出

$$v=\sqrt{v_r^2+v_\phi^2+\frac{2eV}{m}}$$

由第3问,在电子运动过程中,$\left(L-\frac{1}{2}eBr^2\right)$是常量,对于初态和终态,有

$$mv_\phi a-\frac{1}{2}eB_{C}a^2=mvb-\frac{1}{2}eB_{C}b^2$$

由题意,电子刚能到达阳极,表明终态的 $r=b$,相应的磁场就是临界磁场 B_C. 由上式解出临界磁场为

$$B_C=\frac{2m(vb-v_\phi a)}{e(b^2-a^2)}$$

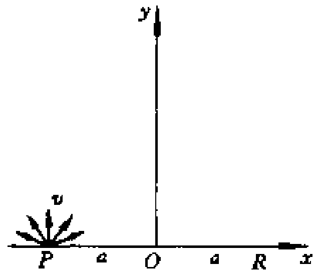
$$=\frac{2mb}{e(b^2-a^2)}\left[\sqrt{v_r^2+v_\phi^2+\frac{2eV}{m}}-v_\phi\frac{a}{b}\right]$$

【本题是1996年第27届IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)试题.】

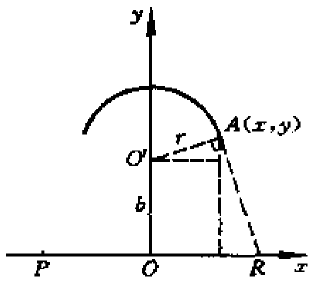
【题14】 如电图2-14-1所示,一簇质量均为 m,电量均为 q 的离子在 P 点以同一速率 v 沿 xy 上半平面中的各个方向射出. 垂直于 xy 平面的均匀磁场 B 将这些离子聚焦在 R 点,P 点与 R 点相距为 $2a$,离子的轨道应是轴对称的. 试确定磁场区的边界. 设离子之间的相互作用可以忽略.

【分析】 离子进入磁场区前,不受力,作匀速直线运动. 进入磁场区后,受洛伦兹力作用,以 v 作匀速圆周运动. 离开磁场区后,再作匀速直线运动. 所以,离子的轨道是两段直线和一段圆周,两直线与圆周相切,两切点正在磁场区的左、右边界上. 由于轴对称,离子轨道与磁场区都是左、右对称的,圆轨道的圆心必定在 y 轴上.

因此,磁场边界上的任一点 $A(x,y)$ 应是离子某个圆轨道上的一点,同时通过 A 点作该圆的切线应通过 R 点(或 P 点). A 点应满足的这两个条件就是确定磁场边界的根据. 得出磁场边界曲线的数学表述后,还应针对各种可能的情形详加讨论,画出相应的磁场区边界的曲线.



电图2-14-1



电图2-14-2

【解】 离子进入磁场区后,其运动方程为

$$qvB=\frac{mv^2}{r}$$

故离子作匀速圆周运动的半径 r 为.

$$r=\frac{mv}{qB}$$

可见 r 是常量，与离子从何处沿何方向进入磁场无关．

如电图 2-14-2 所示，设 $A(x,y)$ 是磁场边界上任一点，则 A 必在某圆轨道上，设该圆轨道的圆心 O' 与原点 O 相距为 b，通过 A 点作该圆的切线应经过 R 点．利用图中两个相似的直角三角形，得

$$\frac{y-b}{x}=\frac{a-x}{y}$$

因 $A(x,y)$ 点在圆轨道上，故有

$$x^2+(y-b)^2=r^2$$

由以上两式消去 $(y-b)$，得

$$(r^2-x^2)y^2=(a-x)^2x^4$$

这是一条通过原点 $(x=0,y=0)$ 的四次曲线，但它对 y 轴并不对称，因此只取它在第Ⅰ象限的部分，它代表磁场区域的右边界．磁场区域的左边界应是右边界的对称曲线，其方程应为

$$(r^2-x^2)y^2=(a+x)^2x^2$$

因而所求磁场区的边界为

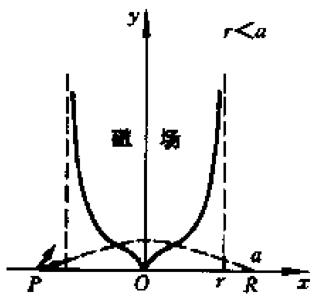
$$y=\begin{cases}\dfrac{x(a-x)}{\sqrt{r^2-x^2}}, & \text{当 } x\geqslant 0\\[2ex] -\dfrac{x(a+x)}{\sqrt{r^2-x^2}}, & \text{当 } x<0\end{cases}$$

显然必须有

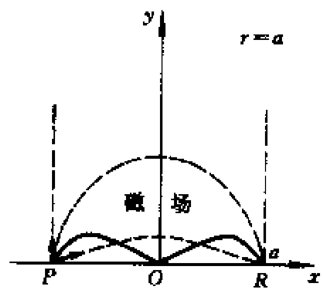
$$0\leqslant|x|<r$$

即磁场区域应受上式的限制．

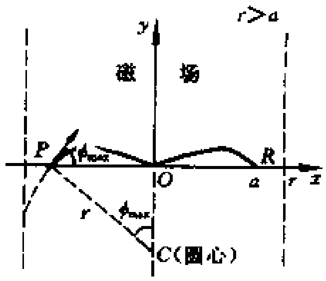
现在分几种情形讨论可聚焦的离子束的角范围．



电图 2-14-3



电图 2-14-4



电图 2-14-5

1. $r<a$．磁场区域的边界如电图 2-14-3 实线所示．从 P 点射出的离子束中凡出射角 $\varphi<90°$ 的离子都可以聚焦于 R 点，而 $\varphi\geqslant 90°$ 的离子因不能进入磁场而无法聚焦．

2. $r=a$．磁场区域的边界如电图 2-14-4 实线所示．$\varphi\leqslant 90°$ 的离子均可聚焦，$\varphi>90°$ 的离子无法聚焦．对磁场区边界的表达式求极限，得出当 $x\to a$ 时，y 的极限值为

$$\lim_{x\to a} y^2=\lim_{x\to a}\frac{(a-x)^2}{a^2-x^2}x^2=\lim_{x\to a}\frac{a-x}{a+x}x^2=0$$

即

$$\lim_{x\to a} y=0$$

因对称，$x\to -a$ 时仍有 $y\to 0$.

3. $r>a$. 磁场区域的边界如电图 2－14－5 实线所示. 当 $|x|=a$ 时，仍有 $y=0$.

对于较小的出射角，离子进入磁场区后沿圆轨道运动，通过 R 点. 这些圆轨道的圆心均在 y 轴的负半轴上. 随着出射角 φ 的增大，圆心沿 y 的负半轴逐渐上移. 当出射角刚好使离子切向地(即离子从 P 点射出的方向刚好与磁场区的边界曲线在 P 点相切)进入磁场区时，离子仍沿圆轨道通过 R 点. 把相应的出射角记为 φ_{max}，由图 2－14－5，有

$$\tan\varphi_{max}=\frac{a}{\sqrt{r^2-a^2}}$$

上式也可以从磁场边界曲线在 $x=-a$ 处的切线斜率得出，即

$$\tan\varphi_{max}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-a}$$

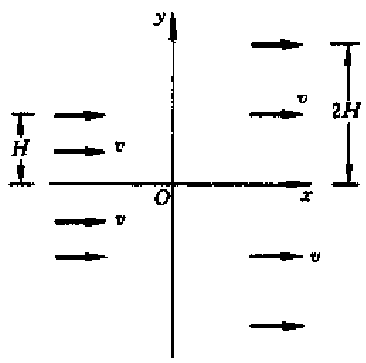
$$=\left.\frac{-(a+2x)\sqrt{r^2-x^2}-\dfrac{-x(a+x)(-2x)}{\sqrt{r^2-x^2}}}{r^2-x^2}\right|_{x=-a}$$

$$=\frac{a\sqrt{r^2-a^2}}{r^2-a^2}=\frac{a}{\sqrt{r^2-a^2}}$$

对于 $\varphi>\varphi_{max}$的离子，既要求离子射出后的轨道为圆轨道，又要求圆心 C 仍在 y 轴上(显然还要上移)且半径仍为 r，这是不可能的. 因此，$\varphi>\varphi_{max}$的离子不能聚焦于 R 点. 即在 $r>a$ 时，只有 $\varphi\leqslant\varphi_{max}=\arctan\dfrac{a}{\sqrt{r^2-a^2}}$的离子才能聚焦于 R 点.

【本题是 1975 年第 8 届 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)试题.】

【题 15】 如电图 2－15－1 所示，在 xy 平面上有一束稀疏的电子(其间的相互作用可以忽略)，在 $-H<y<H$ 范围内，从 x 负半轴的远处以相同的速率 v 沿着 x 轴方向平行地向 y 轴射来. 试设计一磁场区，使得 1. 所有电子都能在磁场力的作用下通过坐标原点 O. 2. 这一片电子最后扩展到 $-2H<y<2H$ 范围内继续沿着 x 轴方向向 x 正半轴的远处平行地以相同速率 v 射去.



电图 2－15－1

【分析与解】 本题的解答并不唯一，下面给出其中的一个解答.

由题设，从远处入射的电子群及射向远处的电子群，其空间范围及速度均对 x 轴有对称性，更重要的是每个电子的运动轨道都要通过原点 O，当电子在 O 点附近弯曲时其轨道应是连续的. 因此，可以合理地假设，在第Ⅱ象限入射的电子经过 O 点后将从第Ⅳ象限射出，从第Ⅲ象限入射的电子经过 O 点后则将从第Ⅰ象限射出.

这样，可在 O 点附近为 xy 平面的四个象限分别设计适当的磁场区域．

首先设计第Ⅰ象限的磁场区域．如电图 2－15－2 所示，由于电子从第Ⅲ象限以 v 经 O 点后从第Ⅰ象限以 v 射出，所以可将原点 O 视为电子发射源，发射的电子的速率均为 v，速度方向与 x 轴的夹角 θ 满足

$$0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$$

为使电子射出后能向 x 轴方向偏转，以便离开磁场区后能平行 x 轴前进，故在第Ⅰ象限磁场区内的 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}$ 的方向应与 xy 平面垂直，并指向 z 轴的负方向(即垂直纸面向里)．在该磁场区内电子以半径

$$R_{\mathrm{I}}=\frac{m_e v}{eB_{\mathrm{I}}}$$

作圆周运动，式中 m_e 和 e 是电子的质量和电量(绝对值)．由于 v 不变，如果 B_{I} 为常量即为均匀磁场，则各个电子所作的不同圆轨道的半径均相同．电子到达磁场区域边界上的 $S(x,y)$ 点后，将沿其圆轨道在 S 点的切线方向射出，匀速前进．由题目的要求，该切线方向应沿 x 轴的正方向，于是，如电图 2－15－2，应有

$$\begin{cases}x=R_{\mathrm{I}}\sin\theta\\ y=R_{\mathrm{I}}-R_{\mathrm{I}}\cos\theta\end{cases}$$

消去 θ，便可得出在第Ⅰ象限磁场区边界曲线的方程，为

$$x^2+(y-R_{\mathrm{I}})^2=R_{\mathrm{I}}^2$$

因此，在第Ⅰ象限磁场区域的边界也是以 R_{I} 为半径的圆．

另外，从 O 点发射的 $\theta\approx\frac{\pi}{2}$ 的电子应弯曲 90°，以便沿 x 轴正方向平行射出．磁场 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}$ 可以起此作用．$\theta\approx\frac{\pi}{2}$ 的电子在磁场 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}$ 中的圆轨道方程为

$$(x-R_{\mathrm{I}})^2+y^2=R_{\mathrm{I}}^2$$

在电图 2－15－2 中画出了上述圆轨道的四分之一．由于 $\theta\approx\frac{\pi}{2}$ 是从 O 点发射向第Ⅰ象限的最边缘的电子，因而上述电子的四分之一圆轨道同时也应是第Ⅰ象限磁场区域的边界．

于是，在第Ⅰ象限设计的磁场区域是以上两个圆包围的区域，即为

$$x^2+(y-R_{\mathrm{I}})^2=R_{\mathrm{I}}^2$$
$$(x-R_{\mathrm{I}})^2+y^2=R_{\mathrm{I}}^2$$

所包围的区域，在电图 2－15－2 中用斜线标明．

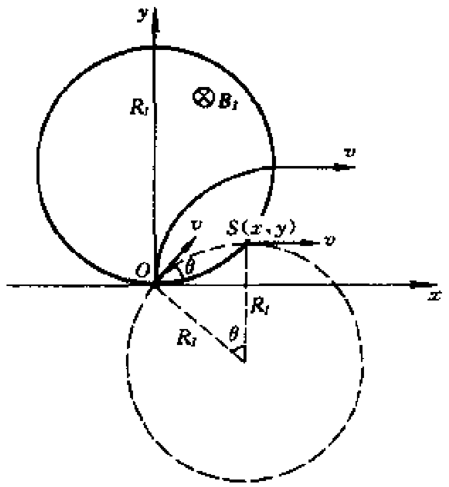
由于要求从磁场区最上方射出的电子与 x 轴相距为 $2H$，故应取

$$R_{\mathrm{I}}=2H$$

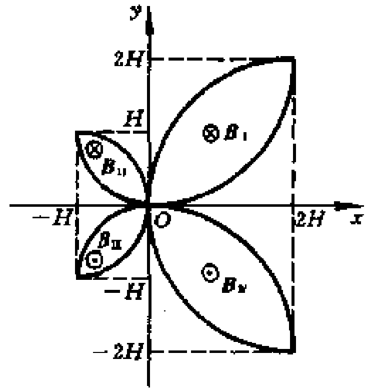
从而在第Ⅰ象限磁场区域中的均匀磁场应为

$$B_{\mathrm{I}}=\frac{m_e v}{eR_{\mathrm{I}}}=\frac{m_e v}{2eH}$$

$\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}$ 的方向已如电图 2－15－2 所示，沿负 z 方向(即垂直纸面向里)．



电图 2－15－2



电图 2－15－3

完全类似的分析表明，第Ⅳ象限的磁场区域与第Ⅰ象限的磁场区域关于 x 轴对称，$\boldsymbol{B}_{\mathrm{IV}}$ 也是均匀磁场，$\boldsymbol{B}_{\mathrm{IV}}$ 的方向与 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}$ 的方向相反，B_{IV} 与 B_{I} 的大小相同．

在第Ⅱ和第Ⅲ象限，磁场的作用是使从远处平行 x 轴射出的电子会聚到 O 点，反过来即相当于电子从 O 点射出，射向第Ⅱ和第Ⅲ象限．因此有关的讨论与计算与上面类似．需要注意的是，应以 H 代替 $2H$，还需要注意磁场的方向．结果如下．

第Ⅱ象限的磁场区域是以下两个圆

$$x^2+(y-R_{\mathrm{II}})^2=R_{\mathrm{II}}^2$$
$$(x+R_{\mathrm{II}})^2+y^2=R_{\mathrm{II}}^2$$

所包围的区域，式中

$$R_{\mathrm{II}}=H$$

$\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}$ 的方向与 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}$ 相同，其大小为

$$B_{\mathrm{II}}=\frac{m_e v}{eH}=2B_{\mathrm{I}}$$

第Ⅲ象限的磁场区域与第Ⅱ象限的磁场区域关于 x 轴对称．$\boldsymbol{B}_{\mathrm{III}}$ 的方向与 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}$ 的方向相反，B_{III} 与 B_{II} 的大小相同．

综上，设计的均匀磁场区域如电图 2－15－3 所示．

【题16】 如电图 2－16－1 所示，在螺绕环的平均半径 R 处有点源 P，从 P 点沿磁力线方向注入小孔径 $2\alpha_0$（$\alpha_0 \ll 1°$）的电子束，束中电子都是经电压 U_0 加速后从 P 点发出的．设螺绕环中磁场 B 的大小为常量，电子束中各电子间的相互作用可以忽略．

1. 为了使电子束沿环形磁场运动，需要另外加一个使电子束偏转的均匀磁场 $\boldsymbol{B}_1$，对于在环内沿半径为 R 的圆形轨道运动的一个电子，试计算所需的 B_1 的大小．

2. 当电子束沿环形磁场运动时，为了使电子束每绕一圈有四个聚焦点，即如电图 2－16－1，每绕过 $\frac{\pi}{2}$ 的圆周角聚焦一次．试问 B 应为多大．（此处可忽略 $\boldsymbol{B}_1$，并可忽略磁场 $\boldsymbol{B}$ 的弯曲．）

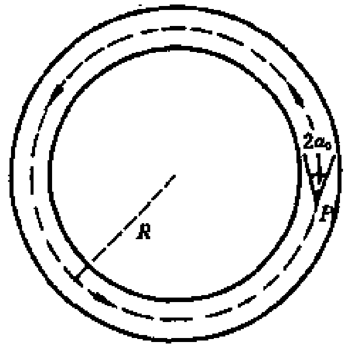
3. 如果没有偏转磁场 B_1，电子束便不可能维持在环平面附近，它将沿垂直于环平面的方向作总体的漂移运动而离开环平面．

(a)试证明，相对于注入半径 R，电子的径向偏离是有限大的．

(b)试确定漂移速度的指向．

(电子束的孔径角可以忽略．)

数据：$\frac{e}{m}=1.76\times10^{-11}$ C/kg，$U_0=3$ kV，$R=50$ mm.



电图 2－16－1

【分析与解】 1. 对于沿半径为 R 的圆轨道(即沿磁力线)运动的电子，环形磁场 $\boldsymbol{B}$ 对它的作用力为零．电子作圆周运动所需的向心力由均匀磁场 $\boldsymbol{B}_1$ 提供，$\boldsymbol{B}_1$ 的方向应垂直环平面(在电图 2－16－1 为垂直纸面向外)．故有

$$\frac{mv_0^2}{R}=ev_0B_1$$

电子速率 v_0 由加速电压 U_0 決定，为

$$\frac{1}{2}mv_0^2=eU_0$$

由以上两式，解出

$$B_1=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{2mU_0}{e}}=0.37\times10^{-2}\ \mathrm{T}$$

2. 由题设，忽略 B_1，忽略磁场 $\boldsymbol{B}$ 的弯曲，相当于电子束在均匀的磁力线为平行直线的磁场 $\boldsymbol{B}$ 中运动．任一电子的速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 可按平行和垂直磁场 $\boldsymbol{B}$ 分解为 $\boldsymbol{v}_{/\!/}$ 和 $\boldsymbol{v}_{\perp}$，电子以 $v_{/\!/}$ 作匀速直线运动，同时以 $v_{\perp}$ 作匀速圆周运动，电子的轨迹是螺旋线．设电子的 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的夹角为 α，则

$$v_{/\!/}=v_0\cos\alpha$$

$$v_{\perp}=v_0\sin\alpha$$

设电子以 $v_{\perp}$ 作匀速圆周运动的半径为 r，则

$$\frac{mv_{\perp}^2}{r}=ev_{\perp}B$$

故

$$r=\frac{mv_{\perp}}{eB}=\frac{mv_0\sin\alpha}{eB}$$

因 $2\alpha_0\ll1^\circ$，故 α 很小，r 很小，电子的螺旋轨道不会越出螺绕环内的空间，电子旋转一圈的周期为

$$T=\frac{2\pi r}{v_{\perp}}=\frac{2\pi m}{eB}$$

螺距为

$$b=v_{/\!/}T=\frac{2\pi mv_0\cos\alpha}{eB}$$

因

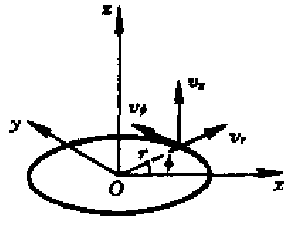
$$\frac{1}{2}mv_0^2=eU_0$$

又因电子束每绕$\frac{\pi}{2}$圆周角(即$\frac{1}{4}$周长)聚焦一次,故有

$$b=\frac{2\pi R}{4}$$

联立以上三式,得

$$B=\frac{4}{R}\sqrt{\frac{2mU_0}{e}}\cos\alpha\approx\frac{4}{R}\sqrt{\frac{2mU_0}{e}}=1.48\times10^{-2}\ \mathrm{T}$$



电图 2-16-2

3. 取柱极坐标(z,r,φ)如电图 2-16-2,原点 O 在环中心,环所在平面为 xy 平面,z 轴垂直环平面.

首先,应该指出,如果没有第一问的磁场 $\boldsymbol{B}_1$,那么即使不考虑电子束孔径角的影响(即电子沿磁力线发出),电子也不可能持续地维持在环平面内运动.例如,设电子的初速 $\boldsymbol{v}_0$ 沿切向(即沿磁力线),即开始时 $v_\varphi=v_0, v_r=0, v_z=0$($v_\varphi$ 即第二问中的$v_{/\!/}$, v_r 即$v_\perp$),由于无 $\boldsymbol{B}_1$ 的作用,电子的切向运动将偏离环状磁力线,形成非零的 $\boldsymbol{v}_r$,非零的 $\boldsymbol{v}_r$ 在$\boldsymbol{B}$ 的作用下受洛伦兹力 $\boldsymbol{F}_1=-e\boldsymbol{v}_r\times\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{F}_1$ 指向 z 轴负方向,于是电子将沿 z 轴负方向漂移,逐渐离开环平面,同时具有非零的 $\boldsymbol{v}_z(v_z<0)$. 非零的 $\boldsymbol{v}_z$ 在$\boldsymbol{B}$ 的作用下也要受洛伦兹力$\boldsymbol{F}_2=-e\boldsymbol{v}_z\times\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{F}_2$ 的方向沿径向指向 z 轴,使电子又有返回 R 轨道的趋势.这表明电子速度的径向分量 $\boldsymbol{v}_r$ 将往返改变方向,电子与原点的径向距离 r 将时而超过R,时而又接近 R. 下面的定量讨论表明,r 不会小于R,同时 r 超过R 的也有个限度.

由于环状磁场 $\boldsymbol{B}$ 是稳恒的,不作功,故电子运动过程中动能守恒,有

$$\frac{1}{2}m(v_r^2+v_\varphi^2+v_z^2)=\frac{1}{2}mv_0^2$$

即

$$v_r^2+v_\varphi^2+v_z^2=v_0^2 \tag{1}$$

又因电子所受洛伦兹力在平行于 $\boldsymbol{B}$ 的方向(亦即 $\boldsymbol{v}_\varphi$ 方向)无分量,不可能产生绕 z 轴的力矩,故电子运动过程中角动量的 z 分量L_z 守恒,有

$$L_z=mv_\varphi r=mv_0R$$

即

$$v_\varphi=\frac{R}{r}v_0 \tag{2}$$

由(2)式可见,v_φ 是r 的函数.如果 v_z 也能表为r 的函数,则由(1)式便可得出 v_r 作为r 的函数,再利用 $r=r_{\min}$或 $r=r_{\max}$时 $v_r=0$ 的物理条件,便可求出 $r_{\min}$与 $r_{\max}$.

为此讨论 v_z. v_z 的变化规律取决于z 方向的运动方程.当电子以 $\boldsymbol{v}=(v_r,v_\varphi,v_z)$运动时,所受洛伦兹力的 z 分量为$F_z=-eBv_r$,于是由牛顿第二定律,有

$$m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=F_z=-eBv_r=-eB\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

初始条件为

$$t=0\ 时, r=R, v_z=0$$

积分,得

$$v_z=-\frac{e}{m}B(r-R) \tag{3}$$

电子在垂直于环平面的方向漂移时，其径向（v_r 方向）偏离为极大或极小的条件是相应的

$$v_r=0 \tag{4}$$

把(2)、(3)、(4)式代入(1)式，得

$$v_0^2=\left[\frac{e}{m}B(r-R)\right]^2+\left(\frac{R}{r}v_0\right)^2$$

$$1=\left(\frac{R}{r}\right)^2+A^2\left(\frac{r}{R}-1\right)^2 \tag{5}$$

式中

$$A=\frac{eBR}{mv_0}$$

式中的 v_0 可由 $\frac{1}{2}mv_0^2=eU_0$ 得出．(5)式的实根就是径向偏离的极值．令

$$x=\frac{r}{R}$$

则(5)式改写为

$$1=\frac{1}{x^2}+A^2(x^2-1)^2 \tag{6}$$

这是一个 x 的四次代数方程，它的四个根或全为复根，或两复根两实根，或全为实根．方程的严格解相当麻烦．为了求解，令

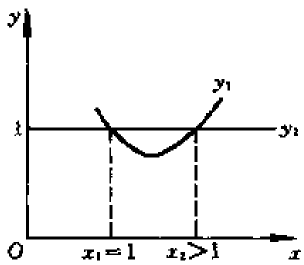
$$\begin{cases} y_1=\dfrac{1}{x^2}+A^2(x-1)^2 \\ y_2=1 \end{cases}$$

作 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 的函数曲线，它们的交点就是所求的实根．

如电图 2-16-3 所示，$y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 曲线有两个交点，为

$$x_1=1$$

$$x_2>1$$



电图 2-16-3

其中 $x_2>1$，但是有限值．

因此，径向偏离的极小值和极大值为

$$r_{\min}=R$$

$$r_{\max}>R$$

其中 $r_{\max}>R$，但是有限值．即电子的径向漂移是有限的，r 的变化范围是

$$R\leqslant r\leqslant r_{\max}(\text{有限})$$

代入(3)式，可知

$$v_z=-\frac{e}{m}B(r-R)\leqslant 0$$

即电子在 z 轴的漂移始终沿着 z 轴的负方向进行．

【附】 (5)式的严格解．把(5)式写成

$$\frac{A^2}{R^2}(r-R)^2=1-\left(\frac{R}{r}\right)^2=\frac{(r-R)(r+R)}{r^2}$$

即

$$\begin{cases} r-R=0 \\ \dfrac{r+R}{r^2}=\dfrac{A^2}{R^2}(r-R) \end{cases}$$

第一式得出一个解

$$r=R$$

第二式改写为

$$r^3-Rr^2-\frac{R^2}{A^2}r-\frac{R^3}{A^2}=0$$

令

$$r=x+\frac{R}{3}$$

代入，得

$$x^3-\left(\frac{R^2}{3}+\frac{R^2}{A^2}\right)x-\left(\frac{1}{9}+\frac{4}{3A^2}\right)R^3=0$$

令

$$a=-\left(\frac{R^2}{3}+\frac{R^2}{A^2}\right),b=-\left(\frac{1}{9}+\frac{4}{3A^2}\right)R^3$$

得

$$x^3+ax+b=0$$

它有一个实根 x_1，为

$$x_1=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

另外还有两个复根，弃去．所以(5)式的严格解为

$$\begin{cases} r=R \\ r=x_1+\dfrac{R}{3} \end{cases}$$

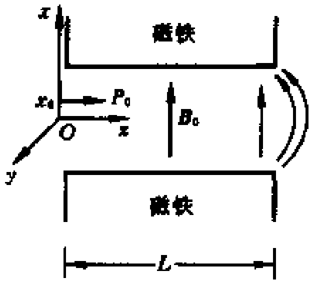
【本题是 1987 年第 18 届 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)试题．】

【题 17】 如电图 2－17－1 所示，电磁铁的两极是长方形平面，其长度 L 远大于两极的间距．在两极之间除边缘外，为匀强场区，磁感应强度为 $\boldsymbol{B}_0$，边缘部分的磁力线有所弯曲，如电图 2－17－1 所示．取 $O-xyz$ 坐标，z 轴为两极之间的中央轴，yz 平面为两极之间的中分面，xy 平面是磁铁的左侧面，x 轴与 $\boldsymbol{B}_0$ 的方向一致．

一电量为 $q>0$ 的带电粒子，从 x 轴的 x_0 处(x_0 的绝对值远小于两极间距)以平行 z 轴的初始动量 p_0($p_0\gg qB_0L$)，从磁铁两极的左侧面射入场区．

1. 试求粒子通过场区后，在 yz 平面上的小偏转角 θ_y．(θ_y 取正表示向 y 轴正方向偏转，θ_y 取

负表示向 y 轴负方向偏转 .）



电图 2－17－1

2. 试证明粒子通过场区后，在 xz 平面上的小偏转角近似为 $\theta_x=-\dfrac{x_0\theta_y^2}{L}$.（$\theta_x$ 取正表示向 x 轴正方向偏转，θ_x 取负表示向 x 轴负方向偏转 .）

3. 在 x 轴上取一段直线 $x_0\geqslant x\geqslant -x_0$，假设有一束粒子（电量均为 q，初始动量均为 $\boldsymbol{P}_0$）从此段直线上各点出发，射向场区．忽略粒子之间的相互作用．试证明，这些粒子将近似地会聚在 z 轴的某一点上，该点与磁铁右侧面的间距称为焦距 f，试导出 f 的近似表达式．

【分析】 题设 $p_0\gg qB_0L$，意味着讨论的是高速粒子，这种粒子在一般磁铁场区中的偏转是很小的．即粒子在 yz 平面速度分量的大小可近似认为不变，轨道为圆弧，小偏转角 θ_y 不难求出，偏转方向也容易确定．

粒子因有小偏转角 θ_y 而具有沿 y 方向的速度分量 v_y，在场区的边缘部分，因弯曲磁感线中有 B_z，粒子将受到沿 x 方向的洛伦兹力作用，它使粒子的运动方向向 x 轴偏转，于是小偏转角 θ_x 可求．

根据洛伦兹力公式 $\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$，可以判断 θ_y 和 θ_x 的正、负号．无论 x_0 是正值还是负值，粒子在 yz 平面所受力指向 y 轴正方向，故 θ_y 为正．θ_y 为正使粒子获得沿 y 轴正方向的速度分量 v_y，v_y 与磁场边缘部分的 B_z 结合产生洛伦兹力的 x 分量 F_x．若 x_0 为正，由电图 2－17－1 可以看出，B_z 应为负，F_x 应为负，故 θ_x 为负；若 x_0 为负，则 B_z 为正，F_x 为正，故 θ_x 为正．即 θ_x 的正、负刚好与 x_0 的正、负相反，与第 2 问中给出的 θ_x 表达式相符．x_0 取正时，θ_x 为负，出场区后粒子的轨道将向下偏转；x_0 取负时，θ_x 为正，出场区后粒子的轨道将向上偏转．这就使得第 3 问中所给定的粒子有可能在 z 轴上会聚（即这些粒子的轨道在某处相交），于是可解．

【解】 1. 设粒子质量为 m，初速度为 $\boldsymbol{v}_0$，则

$$\boldsymbol{p}_0=m\boldsymbol{v}_0$$

因题设

$$p_0\gg qB_0L$$

粒子动量在磁场中的变化很小，偏转微弱，故粒子在 yz 平面的运动，可近似看作速率仍为 v_0 的圆弧运动，圆半径为

$$R=\frac{mv_0}{qB_0}=\frac{p_0}{qB_0}$$

略去磁场边缘部分的效应，如电图 2－17－2，引入偏转角 θ_y，则有

$$R\sin\theta_y=L$$

即

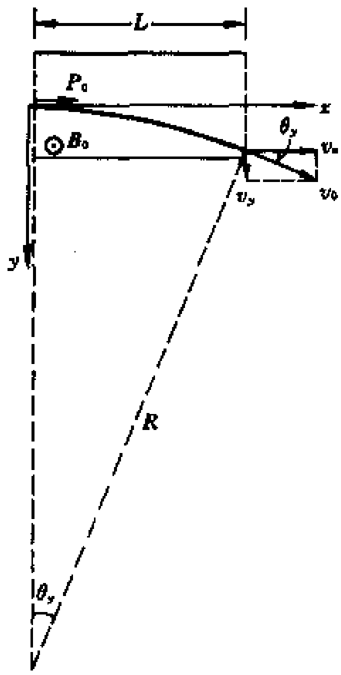
$$\sin\theta_y=\frac{L}{R}=\frac{qB_0L}{p_0}$$

因 θ_y 很小，近似有

$$\theta_y=\frac{qB_0L}{p_0}$$

2. 从电图 2－17－2 可以看出，粒子到达磁铁右侧面时具有 y 轴正方向的速度分量为

$$v_y = v_0\theta_y = \frac{qB_0Lv_0}{p_0} = \frac{qB_0L}{m}$$



电图 2－17－2

在磁铁右侧面外因边缘效应，磁感线弯曲，$\boldsymbol{B}$ 具有非零的 z 分量 B_z，x_0 为正时，B_z 为负，x_0 为负时，B_z 为正．粒子进入该区域后，由于有 v_y 和 B_z 而受到 x 方向的洛伦兹力为

$$F_x = qv_yB_z$$

若粒子最初从 z 轴上方 $x_0>0$ 处射入磁场区域，则 F_x 为负，粒子向下偏转(见电图 2－17－1)．反之，粒子将向上偏转．把上面求出的 v_y 代入，得

$$F_x = \frac{q^2B_0LB_z}{m}$$

故粒子在 x 方向的加速度为

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \left(\frac{q^2B_0L}{m^2}\right)B_z$$

可见，a_x 将随 B_z 变化．在 $\mathrm{d}t$ 时间内，粒子速度 x 分量的增量为 $\mathrm{d}v_x = a_x\mathrm{d}t$，粒子在 z 方向的位移为 $\mathrm{d}z = v_z\mathrm{d}t = v_0\mathrm{d}t$，即

$$\mathrm{d}v_x = \frac{a_x\mathrm{d}z}{v_0} = \left(\frac{q^2B_0L}{m^2v_0}\right)B_z\mathrm{d}z$$

把磁铁右侧面的 z 坐标表为 z_0，则粒子在 x 方向的末速度可近似表为

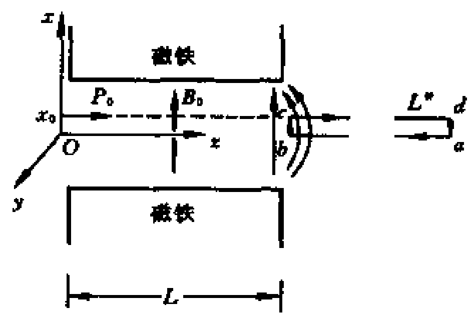
$$v_x = \int_{z_0}^{\infty}\mathrm{d}v_x = \frac{q^2B_0L}{m^2v_0}\int_{z_0}^{\infty}B_z\mathrm{d}z$$

为了计算积分，如电图 2－17－3 所示，取一条足够长的矩形回路 L^*，其 ab 段在 z 轴上，bc 在一条 $\boldsymbol{B}_0$ 磁感线上，则有

$$\oint_{L^*}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = B_0x_0 + \int_{z_0}^{\infty}B_z\mathrm{d}z$$

即

$$\int_{z_0}^{\infty}B_z\mathrm{d}z = -B_0x_0$$



电图 2－17－3

代入，得

$$v_x = -\left(\frac{q^2B_0^2L}{m^2v_0}\right)x_0$$

在 xz 平面上，粒子沿 x 轴的小偏转角 θ_x 近似为

$$\theta_x = \frac{v_x}{v_0} = -\left(\frac{q^2B_0^2L}{m^2v_0^2}\right)x_0 = -\left(\frac{qB_0L}{p_0}\right)^2\frac{x_0}{L}$$

即

$$\theta_x \approx -\frac{x_0\theta_y^2}{L}$$

3. 上述 θ_x 表达式，对于 $|x|\leqslant|x_0|$ 的任意初始位置 x 均成立．对于给定的粒子束，若出发的初始位置 x 为正，则 θ_x 为负，向下偏转；若 x 为负，则 θ_x 为正，向上偏转．无论 x 取何值，粒子射出场区后，其轨道与 z 轴的交点与 z_0 点（磁铁右侧面的 z 坐标）的距离近似为

$$\Delta z=\left|\frac{x}{\tan\theta_x}\right|\approx\left|\frac{x}{\theta_x}\right|$$

把 θ_x 及 θ_y 的结果代入，得

$$\Delta z=\frac{p_0^2}{q^2B_0^2L}$$

可见各粒子的轨道都交于该处，故 Δz 就是所求的焦距 f，为

$$f=\Delta z=\frac{p_0^2}{q^2B_0^2L}$$

注意，以上计算中忽略了磁场边缘区域在 z 方向的线度．另外，如果考虑到粒子在 y 方向的偏转，则会聚点会稍稍偏离 z 轴．

【题 18】 位于坐标原点 O 的粒子发射源，沿着 y 轴正方向以初速 v_0 发射质量为 m，电量为 q 的相同带电粒子．设粒子之间的相互作用及重力均可忽略．

1. 若在粒子运动的空间范围内沿 z 轴正方向有均匀磁场 $\boldsymbol{B}$，则带电粒子将在 xy 平面内作圆周运动．若在该空间范围内沿 y 轴正方向再加一均匀的弱电场 $\boldsymbol{E}$，则粒子的圆轨道便会沿 x 轴的正方向或负方向产生漂移．试分别就 $q>0$ 与 $q<0$ 两种情形，定性地判断这种漂移的方向，画出示意图，并计算相应的漂移速度（允许作适当的近似）．

2. 若第一问中的电场 $\boldsymbol{E}$ 未必很弱，但仍均匀并沿 y 轴正方向．试严格导出带电粒子沿 x 与 y 方向的速度分量 v_x 与 v_y 随时间 t 的变化关系．取粒子从原点发射的时刻为初始时刻 $t=0$．

3. 取消第一、第二问中的电场．设磁场非均匀，在 y 轴方向上有一微小的线性梯度 $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}y}$ 等于正的常量，则带电粒子也将沿 x 轴方向漂移．试定性确定正、负带电粒子这种漂移的方向，并画出示意图．

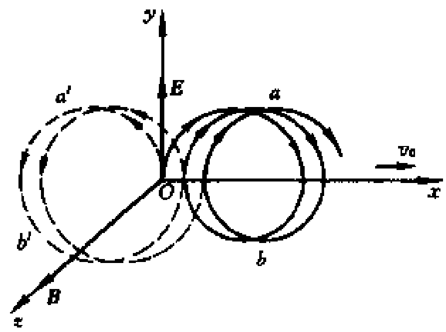
【分析与解】 1. 带电粒子从 O 点以 v_0 沿 y 轴射出．若只有沿 z 轴的均匀磁场 $\boldsymbol{B}$，则受洛伦兹力 $q\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B}$ 的作用，在 xy 平面以半径 $R=\frac{mv_0}{qB}$ 作匀速圆周运动，圆周与 O 点相切，$q>0$ 和 $q<0$ 粒子的圆周分别在右半和左半 xy 平面．

沿 y 轴加弱均匀电场 $\boldsymbol{E}$ 后，带电粒子的轨道仍近似为圆轨道，但受 $\boldsymbol{E}$ 的作用，其速度 v、所受洛伦兹力 F 及圆轨道半径 R 均稍有变化，v 变化较小，v^2 变化更小，R 的变化主要来自向心力 $F_{心}=\frac{mv^2}{R}$ 的影响．

对于带正电（$q>0$）的粒子，其轨道如电图 2－18－1 中实线所示．当粒子在 O 点时，因 qE 对 $\boldsymbol{F}$ 几乎没有贡献，R 由 $F_{心}=qvB$ 确定；当粒子在轨道最上方的 a 点时，$F_{心}=qvB-qE$ 变小，R 将增大；当粒子在最下方的 b 点时，$F_{心}=qvB+qE$ 变大，R 减小．这样，总的效果是形成沿 x

轴正方向的漂移．

对于带负电($q<0$)的粒子，其轨道如图2-18-1中虚线所示．同样，在a'点，$F_{心}=|q|vB+|q|E$变大，R减小；在b'点，$F_{心}=|q|vB-|q|E$变小，R增大．总的效果也是形成沿x轴正方向的漂移．



电图2-18-1

因此，除均匀磁场外若还有均匀电场，且$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{E}$相互垂直，则正和负的带电粒子的漂移方向相同，不引起正电荷与负电荷的分离．

现在计算漂移速度v_D．$\boldsymbol{v}_D$沿x轴正方向，近似作为常量处理．根据以上分析，近似有

$$v_x=v_0\sin\omega t+v_D$$

$$v_y=v_0\cos\omega t$$

式中ω可正、可负，取决于q的正、负．粒子的运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=q(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{qBv_y}{m}\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{q(E-Bv_x)}{m}\end{cases}$$

把v_x和v_y代入，得

$$\begin{cases}\omega v_0\cos\omega t=\dfrac{q}{m}Bv_0\cos\omega t\\[2mm]-\omega v_0\sin\omega t=\dfrac{q}{m}(E-Bv_0\sin\omega t-Bv_0)\end{cases}$$

式中

$$\omega=\frac{qB}{m}$$

故

$$v_D=\frac{E}{B}>0$$

可见漂移速度v_D与q无关，无论正或负的带电粒子均沿x轴正方向漂移．

2.$\boldsymbol{E}$均匀但并不很弱．为了严格求解粒子的运动，应从其运动方程出发，为

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=q(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})$$

即

$$\begin{cases}\dot{v}_x=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{q}{m}Bv_y & (1)\\[2mm]\dot{v}_y=\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{q}{m}(E-Bv_x) & (2)\end{cases}$$

对(1)式求导后，把(2)式代入，得

$$\ddot{v}_x+\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x-\left(\frac{q}{m}\right)^2 BE=0 \tag{3}$$

若(3)式无常量项，其解为谐振动．现有常量项，其解估计为谐振动加一常量，即为

$$v_x=v_0^*\sin(\omega t+\varphi)+v_{Dx} \tag{4}$$

代入(3)式，得

$$\begin{cases}\omega=\dfrac{qB}{m}\\ v_{Dx}=\dfrac{E}{B}\end{cases} \tag{5}$$

把(4)式代入(2)式，得

$$\dot{v}_y=-\frac{q}{m}Bv_0^*\sin(\omega t+\varphi)$$

解出

$$v_y=v_0^*\cos(\omega t+\varphi)+v_{Dy} \tag{6}$$

把(6)式代入(1)式，得出待定常量 v_{Dy} 为

$$v_{Dy}=0 \tag{7}$$

严格解出的(4)、(5)、(6)、(7)式表明，无论电场 $\boldsymbol{E}$ 的强弱，带电粒子都只有沿 x 方向的漂移 v_{Dx}（x 方向即为 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 的方向），而不沿 y 方向漂移（$v_{Dy}=0$）．只是在 $\boldsymbol{E}$ 较强时，漂移一词已失去了原来的低速含义．

顺便给出严格解中待定的常量 v_0^* 与 φ．初始条件为

$$t=0\text{ 时},\ v_x=0,\ v_y=v_0$$

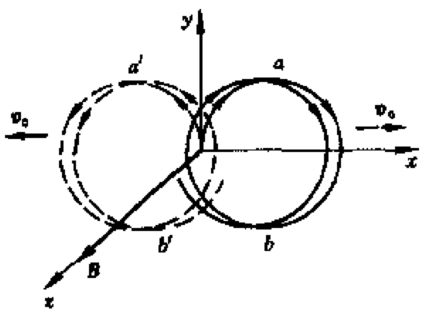
故

$$\begin{cases}v_0^*=\sqrt{v_0^2+\left(\dfrac{E}{B}\right)^2}\\ \tan\varphi=-\dfrac{E}{Bv_0}\end{cases}$$

φ 可在第Ⅱ和第Ⅳ象限取值，因

$$v_0=v_y(t=0)=v_0^*\cos\varphi>0$$

故 φ 应在第Ⅳ象限取值．



电图 2－18－2

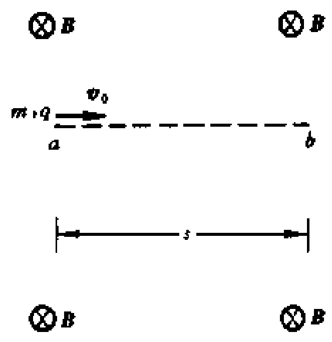
3．磁场梯度引起的漂移．

对于带正电（$q>0$）的粒子，其轨迹如电图 2－18－2 实线所示．当粒子在 a 等处（即在上半轨道处）时，由于磁场在 y 方向有梯度，磁场较强，向心力 $F_{心}=qvB$ 较大，轨道半径 R 较小；当粒子在 b 等处（即在下半轨道处）时，磁场较弱，向心力 $F_{心}=qvB$ 较小，轨道半径 R 较大．结果带正电的粒子沿 x 轴负方向漂移．

对于带负电（$q<0$）的粒子，其轨迹如电图 2－18－2 中虚线所示．当粒子在 a' 等处时，$F_{心}=|q|vB$ 较大，R 较小；当粒子在 b' 等处时，$F_{心}=|q|vB$ 较小，R 较大．结果带负电的粒子沿 x 轴正方向漂移．

由此可见，由于磁场弱、非均匀引起的漂移会导致正、负电荷的分离．而电场引起的漂移(亦称 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 漂移)则不导致正、负电荷的分离．这正是这两种漂移的一个重大区别．

【题 19】 如图所示，在空间有一个其方向与水平面平行且垂直纸面向里的足够大的匀强磁场 $\boldsymbol{B}$ 的区域．在磁场区域中有 a 和 b 两点，相距为 s，ab 连线在水平面上且与 $\boldsymbol{B}$ 垂直．一质量为 m，电量为 $q(q>0)$的粒子从 a 点以 $\boldsymbol{v}_0$ 的初速对着 b 点射出．为了使粒子能经过 b 点，试问 v_0 可取什么值？(注意，重力不可忽略．)



电图 2－19－1

【分析】 带电粒子从 a 点以 $\boldsymbol{v}_0$ 的初速射出，开始时受到垂直向下的重力以及垂直向上的洛伦兹力的作用．不难设想，若 v_0 的取值适当——称为 v_{01}，使重力与洛伦兹力刚好抵消，则尔后仍然抵消，粒子以 v_{01}作匀速直线运动，当然可以通过 b 点．所以 v_{01}是一个符合要求的解，容易求出．

为了寻找其他符合要求的解，不妨把 v_0 写成 $\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{v}_{01}+\boldsymbol{v}_{02}$，其中 $\boldsymbol{v}_{01}$的含义如上，$\boldsymbol{v}_{02}$也沿水平方向，与 $\boldsymbol{v}_{10}$可以同向或反向．这样，粒子所受洛伦兹力由两部分构成，其一相应于 $\boldsymbol{v}_{01}$，刚好与重力抵消，另一相应于 $\boldsymbol{v}_{02}$．于是，粒子的运动也由两部构成，其一是以 $\boldsymbol{v}_{01}$作匀速直线运动，另一是以 v_{02}作匀速圆周运动．当粒子以 v_{01}作匀速直线运动经 t 时间到达 b 点时，若在同样的 t 时间内，刚好以 v_{02}完成整数个匀速圆周运动，即 $t=nT(n=1,2,\cdots)$，其中 T 是匀速圆周运动的周期，则粒子必将通过 b 点．

如果不把 $\boldsymbol{v}_0$ 分解为 $\boldsymbol{v}_{01}$和 $\boldsymbol{v}_{02}$，直接求解如何？显然，粒子以 $\boldsymbol{v}_0$ 射出后，所受重力的大小与方向都恒定不变，但在 $\boldsymbol{v}_0\neq\boldsymbol{v}_{01}$的一般情况下，射出后，由于粒子速度的大小和方向都不断变化，相应的洛伦兹力的大小和方向也随之不断变化，且不易给出．所以，试图直接由牛顿第二定律列出运动方程并求解是很困难的．

由此可见，根据问题的特点，从容易想到的特殊解答出发，作巧妙的分解，可以起化难为易的关键作用．这是应从本题记取的第一条经验．另外，把“经过 b 点”这一要求“翻译”成适当的数学表述，则是应从本题记取的第二条经验．的确，某种物理要求或条件等等的数学表述，是解题的基本功．

【解】 带电粒子以 $\boldsymbol{v}_0$ 的初速从 a 点射出时，所受重力垂直向下，洛伦兹力垂直向上，若两力刚好抵消，即

$$mg=qv_0B$$

则粒子将作匀速直线运动，必能经过 b 点．由此解出的初速记为 v_{01}，即

$$v_{01}=\frac{mg}{qB}$$

这是本题的一个特殊解．

若 $v_0\neq v_{01}$，可将粒子的初速 $\boldsymbol{v}_0$ 分解为

$$\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{v}_{10}+\boldsymbol{v}_{20}$$

因 $\boldsymbol{v}_{01}$与 $\boldsymbol{v}_0$ 同向，故 $\boldsymbol{v}_{20}$必沿水平方向，可向左亦可向右．于是，粒子射出时，除重力(垂直向下)外，还有相应于 $\boldsymbol{v}_{01}$的洛伦兹力(垂直向上)和相应于 $\boldsymbol{v}_{20}$的洛伦兹力(垂直向上或垂直向下)．前

两者抵消，使粒子以 v_{01} 作匀速直线运动；后者使粒子以 v_{20} 的速率作匀速圆周运动．粒子射出后，重力和第一个洛伦兹力的大小方向都不变，第二个洛伦兹力的大小不变，但方向不断变化，因此粒子的运动是以 v_{01} 的匀速直线运动和以 v_{02} 的匀速圆周运动的合成．其中圆周运动的周期为

$$T=\frac{2\pi m}{qB}$$

为使粒子能经过 b 点，要求在整数个周期的时间 nT 内，以 v_{01} 的匀速直线运动位移刚好是 a，b 间距，即

$$s=v_{01}(nT),\qquad n=1,2,\cdots$$

把 v_{01} 与 T 代入，得

$$s=\frac{2n\pi m^2 g}{q^2B^2},\qquad n=1,2,\cdots$$

综上，若

$$s\neq\frac{2n\pi m^2 g}{q^2B^2},\qquad n=1,2,\cdots$$

则粒子必须以

$$v_0=v_{01}=\frac{mg}{qB}$$

射出，才能经过 b 点．若

$$s=\frac{2n\pi m^2 g}{q^2B^2},\qquad n=1,2,\cdots$$

则粒子以任何 v_0 射出，均可经过 b 点．

【题 20】 如电图 2－20－1 所示，两根平行金属棒与两金属弹簧构成回路．已知棒长为 L，质量为 m，只能作左、右对称的运动，边缘效应可以忽略．已知弹簧的劲度系数为 k，原长为 l_0（$l_0 \ll L$）．设以某种方式使回路中有恒定的电流 I，设电磁感应可以忽略．试求两棒围绕平衡位置作小振动的周期．

【分析】 两棒电流反向，彼此间有安培力（斥力）的作用．弹簧伸长或压缩后对两棒有弹性力的作用．由安培力与弹簧力平衡的条件可确定两棒的平衡位置．偏离平衡位置后，棒所受作用力确定了它的运动方程．于是小振动的周期可求．

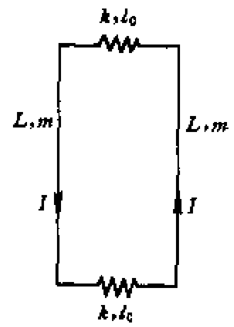
【解】 设两弹簧从原长 l_0 伸长为 l 时，即当两棒相距 l 时，两棒受力平衡．把 l 写成

$$l=l_0+\Delta l$$

则两棒所受弹簧力为 $2k\Delta l$，安培力为

$$F_{安}=IBL=IL\cdot\frac{\mu_0 I}{2\pi(l_0+\Delta l)}=\frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi(l_0+\Delta l)}$$

故平衡条件为



电图 2－20－1

$$2k\Delta l=\frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi(l_0+\Delta l)} \tag{1}$$

即

$$4\pi k(\Delta l)^2+4\pi k l_0(\Delta l)-\mu_0 I^2 L=0$$

解出(取正根)，

$$\Delta l=\frac{1}{8\pi k}\left[-4\pi k l_0\pm\sqrt{16\pi^2 k^2 l_0^2+16\pi k\mu_0 I^2 L}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sqrt{l_0^2+\frac{\mu_0 I^2 L}{\pi k}}-l_0\right]=\frac{l_0}{2}\left[\sqrt{1+\frac{\mu_0 I^2 L}{\pi k l_0^2}}-1\right] \tag{2}$$

故平衡时两棒距离为

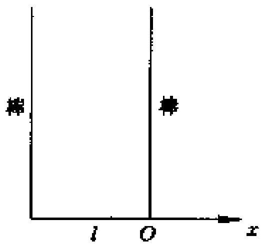
$$l=l_0+\Delta l=\frac{l_0}{2}\left[\sqrt{1+\frac{\mu_0 I^2 L}{\pi k l_0^2}}+1\right] \tag{3}$$

取 x 轴如电图 2－20－2 所示，原点 O 设在右棒的平衡位置．设右棒向右偏离小量 x，同时左棒向左偏离小量 x，即当两棒相距为$(l+2x)$时，右棒受力为

$$F_x=\frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi(l+2x)}-2k(\Delta l+2x)$$

$$=\frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi l}\left(1+\frac{2x}{l}\right)^{-1}-2k\Delta l-4kx$$

$$=\frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi l}-\frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi l}\left(\frac{2x}{l}\right)-2k\Delta l-4kx$$



电图 2－20－2

利用(1)式，得

$$F_x=-\frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi l}\left(\frac{2x}{l}\right)-4kx$$

$$=-2k\Delta l\cdot\frac{2x}{l}-4kx=-4\left(1+\frac{\Delta l}{l}\right)kx$$

把(2)、(3)式的 Δl 和 l 代入，得

$$\begin{cases} F_x=-4(1+\alpha)kx \\ \alpha=\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{\mu_0 I^2 L}{\pi k l_0^2}}-1}{\sqrt{1+\dfrac{\mu_0 I^2 L}{\pi k l_0^2}}+1} \end{cases} \tag{4}$$

由牛顿第二定律，

$$F_x=m\ddot{x}$$

故棒的运动方程为

$$\ddot{x}+\frac{4(1+\alpha)k}{m}x=0$$

可见棒将围绕其平衡位置作简谐振动，其圆频率 ω 和周期 T 为

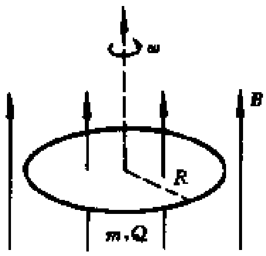
$$\omega=\sqrt{\frac{4(1+\alpha)k}{m}},\quad T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi\sqrt{\frac{m}{(1+\alpha)k}}$$

式中 α 如(4)式．

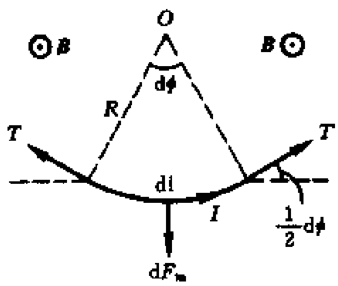
【题 21】 如电图 2－21－1 所示，半径为 R，质量为 m 的匀质细圆环均匀带电，总电量为 $Q(Q>0)$，放在光滑的水平面上．环内、外有垂直环面向上的均匀磁场 $\boldsymbol{B}$．若将圆环以角速度 ω 绕着通过圆心的竖直轴匀速旋转．试求环内因为这种转动而形成的附加张力．

【分析】 环静止时，因带电，产生静电场，环上各点的场强不为零，环上的电荷将受到电场的作用力，为了抗衡这一电场力，维持平衡，环内必定已经有张力．如果环是严格线状的，则环上各点的场强必定发散(即为无穷大)，张力也需是发散量．实际的带电环不可能是几何上的圆线，总有一定粗细，即电荷不会是线分布，而应是体分布，则环上各点的场强为有限值，相应的维持平衡的张力也是有限值．总之，在环静止时，为了抵抗电力，已有张力存在，但这并非本题所求．

圆环绕通过圆心的竖直轴在水平面上转动后，所带电量因旋转形成电流，将受到磁场的安培力作用，其方向沿径向向外．因此，为了维持圆环的形状而不散开，就需要附加的张力 T 来抵消安培力．当然，附加张力的一部分还需用作维持环旋转的向心力．



电图 2－21－1



电图 2－21－2

【解】 如电图 2－21－2 所示，在圆环上任取一小段 $dl=Rd\varphi$ 的圆弧．因圆环以 ω 旋转，而形成的电流为

$$I=\frac{Q}{\frac{2\pi}{\omega}}=\frac{Q\omega}{2\pi}$$

电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 在磁场 $\boldsymbol{B}$ 中受到的安培力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_m$ 的方向如电图 2－21－2(沿径向向外)，大小为

$$dF_m=IdlB=\frac{Q\omega}{2\pi}Rd\varphi B=\frac{R\omega QB}{2\pi}d\varphi$$

设 dl 两端附加的两个张力 T 在径向的分量之和为 dF_T，则有

$$dF_T=2\left(T\cdot\frac{d\varphi}{2}\right)=Td\varphi$$

dF_T 的一部分 dF_0 提供 dl 作圆周运动所需之向心力，即

$$dF_0=\frac{(dm)v^2}{R}=\left(\frac{md\varphi}{2\pi}\right)\omega^2R$$

dF_T 与 dF_0 之差应与 dF_m 平衡，即

$$Td\varphi-\frac{1}{2\pi}m\omega^2Rd\varphi=\frac{R\omega QB}{2\pi}d\varphi$$

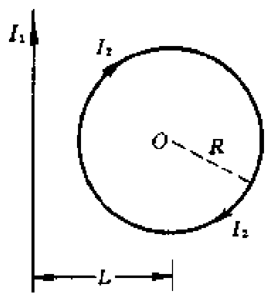
故因环旋转而附加的张力为

$$T=\frac{R\omega}{2\pi}(QB+m\,\omega)$$

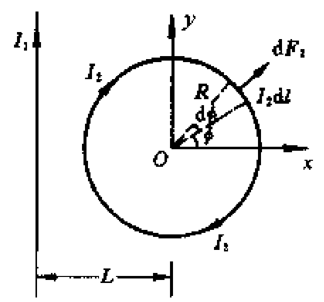
【题 22】 如电图 2－22－1 所示，无限长直导线中载有电流 I_1，在它旁边的半径为 R 的圆形线圈中载有电流 I_2. 长直导线与圆线圈在同一平面内，圆心到长直导线的距离为 L，两电流的方向如电图 2－22－1 所示．试求圆线圈对长直导线的作用力．

【分析】 显然，载流圆线圈与载流长直导线之间的作用力是安培力．由于载流圆线圈在长直导线各处的磁场不易计算，因此直接计算载流长直导线所受作用力有困难．考虑到两者之间的相互作用力遵循牛顿第三定律，并且长直载流导线在空间的磁场易求，不妨计算长直载流导线对载流圆线圈的作用力．

对载流圆线圈来说，载流长直导线的磁场的方向均垂直纸面向里(见电图 2－22－1)，因而圆线圈各电流元所受作用力均沿径向向外．考虑到问题的对称性(载流长直导线的磁场的对称性以及圆线圈的对称性)，取 x 轴垂直长直导线且在电图 2－22－1 的平面内，y 轴与长直导线平行，原点 O 在圆心，如电图 2－22－2 所示．不难设想，圆线圈上各电流元所受作用力的 y 分量之和为零，因此只需计算 x 分量之和即可．



电图 2－22－1



电图 2－22－2

【解】 如电图 2－22－2 所示，在圆线圈中任取电流为 $I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，它所受安培力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_2$ 的方向沿径向向外，其大小为

$$\mathrm{d}F_2=I_2\mathrm{d}lB=I_2R\mathrm{d}\varphi\,\frac{\mu_0I_1}{2\pi(L+R\cos\varphi)}$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_2$ 的 x 分量为

$$\mathrm{d}F_{2x}=\mathrm{d}F_2\cos\varphi=\frac{\mu_0I_1I_2R\cos\varphi}{2\pi(L+R\cos\varphi)}\mathrm{d}\varphi$$

由于对称性，各个 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_2$ 的 y 分量之和为零(无 z 分量)，故圆线圈所受作用力为

$$F_2=F_{2x}=\int\mathrm{d}F_{2x}=\frac{2\mu_0I_1I_2R}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos\varphi}{L+R\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

式中

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos\varphi\mathrm{d}\varphi}{L+R\cos\varphi}=\frac{\varphi}{R}\Big|_0^{\pi}-\frac{L}{R}\cdot\frac{2}{\sqrt{L^2-R^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{L-R}{L+R}}\tan\frac{\varphi}{2}\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{R}\left(1-\frac{L}{\sqrt{L^2-R^2}}\right)$$

代入，得

$$F_2 = F_{2x} = \mu_0 I_1 I_2\left(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 - R^2}}\right)$$

因

$$L > \sqrt{L^2 - R^2}$$

故

$$F_2 < 0$$

即

$$\boldsymbol{F}_2 = F_{2x}\boldsymbol{i} = \mu_0 I_1 I_2\left(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 - R^2}}\right)\boldsymbol{i}$$

式中 $\boldsymbol{i}$ 是 x 方向单位矢量，$\boldsymbol{F}_2$ 与 $\boldsymbol{i}$ 反向，指向长直导线，即载流圆线圈所受作用力为吸引力．

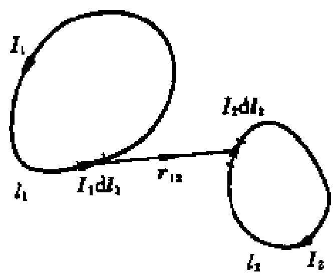
长直载流导线所受载流圆线圈的作用力 $\boldsymbol{F}_1$ 为，

$$\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2 = \mu_0 I_1 I_2\left(\frac{L}{\sqrt{L^2 - R^2}} - 1\right)\boldsymbol{i}$$

$\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{i}$ 同向，指向圆线圈，为吸引力．

【题 23】 试证明两个任意的闭合稳恒电流回路之间的相互作用力遵循牛顿第三定律．

【解】 如图所示，两个任意闭合回路 l_1 和 l_2，其中的电流为 I_1 和 I_2. 从回路 l_1 中任一电流元 $I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$ 到回路 l_2 中任一电流元 $I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$ 的距离为 $\boldsymbol{r}_{12}$，则回路 l_1 在 $I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$ 处产生的磁场为



电图 2－23－1

$$\boldsymbol{B}_{12} = \oint_{l_1}\frac{\mu_0 I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{r}_{12}}{4\pi r_{12}^3}$$

$I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$ 受 $\boldsymbol{B}_{12}$ 的作用力为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{12} = I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 \times \boldsymbol{B}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 \times (\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{r}_{12})}{r_{12}^3}$$

回路 l_2 受回路 l_1 的作用力为

$$\boldsymbol{F}_{12} = \oint_{l_2}\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_2}\oint_{l_1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 \times (\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{r}_{12})}{r_{12}^3}$$

利用矢量公式

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

得

$$\oint_{l_2}\oint_{l_1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 \times (\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{r}_{12})}{r_{12}^3} = \oint_{l_2}\oint_{l_1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 \cdot \boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3}\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 - \oint_{l_2}\oint_{l_1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1}{r_{12}^3}\boldsymbol{r}_{12}$$

$$= \oint_{l_1}\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\oint_{l_2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 \cdot \boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3} - \oint_{l_2}\oint_{l_1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1}{r_{12}^3}\boldsymbol{r}_{12}$$

故

$$\boldsymbol{F}_{12}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\left[\oint_{l_1}\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\oint_{l_2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\cdot\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3}-\oint_{l_2}\oint_{l_1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1}{r_{12}^3}\boldsymbol{r}_{12}\right]$$

交换脚标 1 和 2，即可得出回路 l_2 对回路 l_1 的作用力为

$$\boldsymbol{F}_{21}=\frac{\mu_0 I_2 I_1}{4\pi}\left[\oint_{l_2}\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\oint_{l_1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{r}_{21}}{r_{21}^3}-\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2}{r_{21}^3}\boldsymbol{r}_{21}\right]$$

因

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2=\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$$

$$r_{12}=r_{21}$$

$$\boldsymbol{r}_{12}=-\boldsymbol{r}_{21}$$

故

$$\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2}{r_{21}^3}\boldsymbol{r}_{21}=-\oint_{l_2}\oint_{l_1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1}{r_{12}^3}\boldsymbol{r}_{12}$$

利用上式，把 $\boldsymbol{F}_{12}$ 与 $\boldsymbol{F}_{21}$ 相加，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{12}+\boldsymbol{F}_{21}=&\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\left[\oint_{l_1}\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\oint_{l_2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\cdot\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3}-\oint_{l_2}\oint_{l_1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1}{r_{12}^3}\boldsymbol{r}_{12}\right]\\&+\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\left[\oint_{l_2}\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\oint_{l_1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{r}_{21}}{r_{21}^3}-\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2}{r_{21}^3}\boldsymbol{r}_{21}\right]\\=&\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\left[\oint_{l_1}\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\oint_{l_2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\cdot\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3}+\oint_{l_2}\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\oint_{l_1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{r}_{21}}{r_{21}^3}\right]\end{aligned}$$

联想到对于点电荷 Q 产生的静电场，场强沿任一环路的积分为零，即

$$\oint_l\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_l\frac{Q\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$$

因此，对任一闭合回路 l，总有

$$\oint_l\frac{\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{r^3}=0$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 是从任一固定点到 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的距离．

利用上式，有

$$\oint_{l_1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{r}_{21}}{r_{21}^3}=0,\quad\oint_{l_2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\cdot\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3}=0$$

代入，得

$$\boldsymbol{F}_{12}+\boldsymbol{F}_{21}=0$$

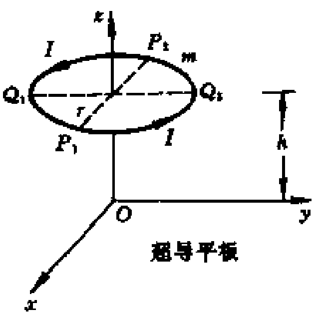
即

$$\boldsymbol{F}_{12}=-\boldsymbol{F}_{21}$$

可见两个任意闭合稳恒电流回路之间的相互作用力遵循牛顿第三定律．

【题 24】 在外磁场中的超导体，平衡后超导体内部的磁感应强度处处为零，超导体表面外侧的磁感应强度与表面平行．

在如电图2－24－1所示的 $O-xyz$ 直角坐标中，xy 平面是水平面，其中有一超导平板．z 轴竖直向上，超导平板在 $z=0$ 处，在 $z=h$ 处有一质量为 m、半径为 r、环心在 z 轴上、环平面为水平面的匀质金属圆环，且 $r\gg h$．在圆环内通以稳恒电流，刚好使圆环漂浮在 $z=h$ 处．



电图2－24－1

1．试求圆环中的电流强度．

2．若使圆环保持水平，从平衡位置稍稍偏上或偏下，则圆环将上、下振动．试求振动周期 T_1．

3．当圆环处在平衡位置时，其中与 x 轴平行的直径标为 P_1P_2，与 y 轴平行的直径标为 Q_1Q_2．若保持 P_1P_2 不动，使圆环绕 P_1P_2 稍有倾斜，即使 Q_1Q_2 与 y 轴有很小的夹角，则圆环将以 P_1P_2 为轴摆动．试求摆动周期 T_2．

【分析】 当圆环内通电流 I 时，在空间产生相应的磁场，同时，会在超导平板内激起感应电流，产生附加磁场．平衡后，圆环电流的磁场及超导平板内感应电流的附加磁场，在超导平板内应相互抵消，而在 Oxy 平面上侧的总磁场应平行于 Oxy 平面．与静电镜像法相仿，超导平板内感应电流在 $z>0$ 区域产生的磁场，可用一个镜像圆环电流产生的磁场来代替，镜像圆环与原圆环相对 Oxy 平面镜对称，电流方向与原圆环电流方向相反，电流大小相同，这样，两电流在 Oxy 平面上侧的总磁场沿水平方向．

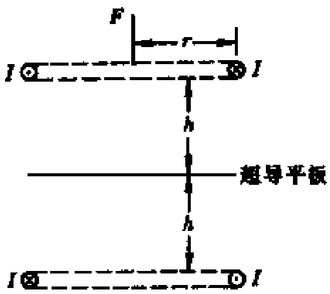
超导平板内感应电流对原圆环电流的作用，可等效为镜像圆环电流对原圆环电流的安培力．因两电流反向，安培力为排斥力，方向竖直向上，当此安培力的大小与原圆环所受重力（竖直向下）的大小相同时，原圆环达到平衡，漂浮在高 h 处，由此可求出原圆环电流强度 I．注意到 $r\gg h$ 的条件，两圆环电流之间的安培力可简化为两平行长直载流导线之间的安培力．

当原圆环保持水平，沿 z 轴上、下稍稍偏离平衡位置时，镜像圆环将对称地有所偏离．若原圆环向上偏离，则镜像圆环相应向下偏离，两环间距增大，安培斥力减小，原圆环所受安培力与重力之和向下．反之，若原圆环向下偏离，两环间距减小，安培斥力增大，则原圆环所受合力向上．总之，原圆环所受合力是恢复力，在小位移情形，若为线性恢复力，则原圆环将围绕平衡位置作简谐振动，其振动周期 T_1 不难求得．

当原圆环在平衡位置作小角倾斜时，若左侧向下偏转，右侧向上偏转，与此同时，镜像圆环应反向倾斜，即左侧向上偏转，右侧向下偏转．结果，原圆环左侧所受安培斥力加大，右侧所受安培斥力减小，使之恢复平衡．在小角度偏转情形，估计安培斥力的增大与减弱具有线性特征，故原圆环所受总安培斥力的大小不变，不会上、下运动．但安培斥力对转轴的力矩不为零，使原圆环受恢复力矩，围绕平衡位置绕轴小角度摆动．在小角度偏转时，若为线性恢复力矩，则摆动为简谐振动，其振动周期 T_2 易求．

【解】 1．在圆环磁场的作用下超导平板内形成感应电流，产生附加磁场．圆环磁场与附加磁场之和，在超导平板内应处处为零，在超导平板表面的外侧应沿水平方向．可以证明，超导平板内感应电流在 $z>0$ 区域产生的附加磁场，相当于在 $z=-h$ 处对称地放置一个镜像圆环电流所产生的磁场．镜像圆环的半径也为 r，电流强度也为 I，但电流方向与原圆环电流反向，如电图2－24－2所示．

超导平板内感应电流对原圆环电流的作用力即为镜像圆环电流对原圆环电流的安培斥力



电图 2－24－2

F_0. 因题设 $r \gg h$，可把两圆环近似看作两长直平行导线，则 F_0 的方向向上，大小为

$$F_0 = (I \cdot 2\pi r)\frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot 2h} = \frac{\mu_0 I^2 r}{2h}$$

圆环平衡时，F_0 与重力 mg 抵消，有

$$F_0 = mg$$

故圆环中电流应为

$$I = \sqrt{\frac{2mgh}{\mu_0 r}}$$

2. 取圆环环心的平衡位置为坐标原点，取竖直向上的 z' 轴．当圆环从平衡位置保持水平上移到 z' 位置，镜像圆环将相应地下移 z'，于是，原圆环所受向上安培力 F 的大小为

$$F = \frac{\mu_0 I^2 r}{2(h+z')} = \frac{\mu_0 I^2 r}{2h}\left(1+\frac{z'}{h}\right)^{-1} = mg\left(1+\frac{z'}{h}\right)^{-1}$$

因小偏离，故

$$|z'| \ll h$$

近似有

$$F = mg\left(1-\frac{z'}{h}\right)$$

原圆环还受重力，故所受向上的合力为

$$F'_z = F - mg = -\frac{mg}{h}z'$$

这是一个线性回复力，它使原圆环在平衡位置附近上、下作简谐振动，振动周期为

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{h}}} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$$

3. 如电图 2－24－1，在圆环上，把从 P_1 点转向 Q_2 点规定为旋转正方向，圆环上任一点的位置可用 ϕ 角表示，该处的环元为 $r\mathrm{d}\phi$. 当圆环倾斜时，把直径 Q_1Q_2 与 y 轴的夹角表为 θ，则环元 $r\mathrm{d}\phi$ 的 y 坐标和 z 坐标分别为

$$y = r\sin\phi\cos\theta$$
$$z = h + r\sin\phi\sin\theta$$

镜像圆环对称地反向倾斜 θ 角．当 θ 角很小时，原圆环中环元 $r\mathrm{d}\phi$ 所受竖直向上的安培力可近似取为

$$\mathrm{d}F = (Ir\mathrm{d}\phi)\cdot\frac{\mu_0 I}{2\pi\cdot 2z} = \frac{\mu_0 I^2 r\mathrm{d}\phi}{4\pi(h+r\sin\theta\sin\phi)}$$

因 θ 为小量，近似有

$$\frac{1}{h+r\sin\theta\sin\phi} = \frac{1}{h}\left(1-\frac{r}{h}\sin\theta\sin\phi\right)$$

故

$$\mathrm{d}F=\frac{\mu_0 I^2 r}{4\pi h}\left(1-\frac{r}{h}\sin\theta\sin\phi\right)\mathrm{d}\phi$$

此力相对直径 P_1P_2 的逆时针方向(即 θ 角正方向)力矩为

$$\mathrm{d}M=\mathrm{d}F\cdot y=\frac{\mu_0 I^2 r^2}{4\pi h}\cos\theta\sin\phi\left(1-\frac{r}{h}\sin\theta\sin\phi\right)\mathrm{d}\phi$$

因圆环所受重力对于转轴的力矩为零,故圆环所受力矩仅由安培力矩提供,总力矩为

$$M=\oint \mathrm{d}M=\frac{\mu_0 I^2 r^2}{4\pi h}\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\phi\left(1-\frac{r}{h}\sin\theta\sin\phi\right)\mathrm{d}\phi$$

其中 $\sin\phi$ 项的积分为零,故

$$M=-\frac{\mu_0 I^2 r^3}{4\pi h^2}\cos\theta\sin\theta\int_0^{2\pi}\sin^2\phi\,\mathrm{d}\phi=-\frac{\mu_0 I^2 r^3}{4h^2}\cos\theta\sin\theta$$

因 θ 为小量,近似有

$$M=-\frac{\mu_0 I^2 r^3}{4h^2}\theta$$

圆环相对 P_1P_2 转轴的转动惯量为

$$J=\frac{1}{2}mr^2$$

圆环绕 P_1P_2 轴转动的运动方程为

$$J\ddot{\theta}=M$$

即

$$\ddot{\theta}+\frac{\mu_0 I^2 r}{2mh^2}\theta=0$$

利用

$$\frac{\mu_0 I^2 r}{2h}=mg$$

得

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{h}\theta=0$$

这是一个简谐振动方程,故圆环将绕 P_1P_2 轴作简谐式的摆动,摆动周期为

$$T_2=2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$$

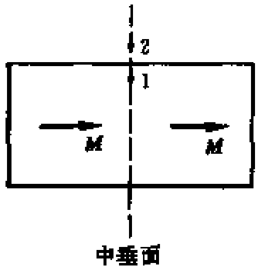
【题25】 如电图2－25－1所示是截面为任意形状的沿长度方向均匀磁化的柱形磁棒．在其中垂面上取柱体侧面内外两个无限接近的点1和2．试证明,$H_1=H_2,B_1\neq B_2$．在电图2－25－1中标出了棒内各点的磁化强度矢量的方向与中垂面垂直．

【分析】 因柱形磁棒沿长度方向均匀磁化,棒表面的磁化电流均应与中垂面平行,且中垂面两侧的磁化电流相对于中垂面应具有镜对称性．由此可以证明,磁化电流在中垂面上任一点产生的磁场 $\boldsymbol{B}$ 的方向与中垂面垂直,即与 $\boldsymbol{M}$ 平行,从而 $\boldsymbol{H}$ 也与 $\boldsymbol{M}$ 平行．

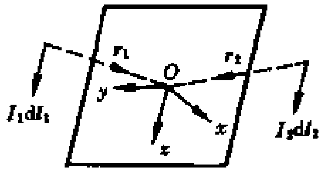
确定了 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{B},\boldsymbol{H}$ 的方向后,适当选取包括1和2两点在内的环路,利用安培环路定理,即可

证明 $H_1=H_2$. 进而利用 $\boldsymbol{H},\boldsymbol{M},\boldsymbol{B}$ 三者的关系，证明 $B_1\neq B_2$.

【解】 在均匀磁化的磁棒表面取一对磁化电流元 $I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$ 和 $I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$，它们相对中垂面镜对称，因而 $I_1=I_2$，令为 I，$\mathrm{d}l_1=\mathrm{d}l_2$，令为 $\mathrm{d}l$，即这一对电流元可以表为 $I\mathrm{d}l$.



电图 2－25－1



电图 2－25－2

如电图 2－25－2 所示，取直角坐标 $Oxyz$，yz 平面为中垂面，x 轴与中垂面垂直，原点 O 取在中垂面上任一点．磁化电流 $I\mathrm{d}l$ 的方向与中垂面平行，取 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的方向为 z 轴正方向，则

$$I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1=I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}=I\mathrm{d}l\boldsymbol{k}$$

式中 $\boldsymbol{k}$ 是 z 轴方向的单位矢量．$I_1\mathrm{d}l_1$ 引向 O 点的矢径记为 $\boldsymbol{r}_1$，$I_2\mathrm{d}l_2$ 引向 O 点的矢径记为 $\boldsymbol{r}_2$，若令

$$\boldsymbol{r}_1=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

因 $I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$ 与 $I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$ 镜对称，故

$$\boldsymbol{r}_2=-x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

式中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 是 x,y 方向的单位矢量．

$I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$ 在 O 点产生的磁场为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{B}_1&=I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{r}_1\\&=I\mathrm{d}l(x\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})=I\mathrm{d}l(x\boldsymbol{j}-y\boldsymbol{i})\end{aligned}$$

$I_2\mathrm{d}l_2$ 在 O 点产生的磁场为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{B}_2&=I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\times\boldsymbol{r}_2\\&=I\mathrm{d}l(-x\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})=I\mathrm{d}l(-x\boldsymbol{j}-y\boldsymbol{i})\end{aligned}$$

因此，相对中垂面呈镜对称的任意一对电流元在中垂面上任一点 O 产生的磁场为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\mathrm{d}\boldsymbol{B}_1+\mathrm{d}\boldsymbol{B}_2=-2I\mathrm{d}ly\boldsymbol{i}$$

在电图 2－25－2 中 $\boldsymbol{r}_1$ 的 y 分量为负值，故 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 指向 x 轴正方向．

磁棒表面的磁化电流的方向都与中垂面平行，并且相对于中垂面镜对称．由于每一对镜对称的电流元在中垂面上任一点的磁场都与中垂面垂直，所以全部磁化电流在中垂面上任一点产生的磁场 $\boldsymbol{B}$ 的方向必与中垂面垂直，即 $\boldsymbol{B}$ 与磁化强度矢量 $\boldsymbol{M}$ 平行．1 和 2 是中垂面上的两点，当然也不例外．

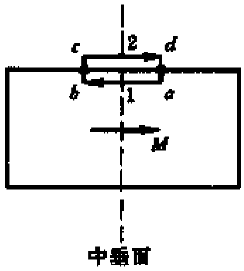
磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 定义为

$$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}$$

因 $\boldsymbol{B}\parallel\boldsymbol{M}$，故 $\boldsymbol{H}\parallel\boldsymbol{M}$，即中垂面上各点的 $\boldsymbol{H}$ 的方向与中垂面垂直．

如电图 2－25－3 所示，取矩形小闭合回路，使回路经过 1 和 2 两点．于 $\boldsymbol{H}$ 作回路积分，于是有

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{ab}\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{bc}\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{cd}\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{da}\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$



电图 2－25－3

因 1 和 2 两点无限接近，bc 和 da 的长度为无穷小量．取 ab 和 cd 的长度 l 亦为无穷小量．由于中垂面上各点的 $\boldsymbol{H}$ 方向与中垂面垂直，稍稍偏离后因 $\boldsymbol{H}$ 连续变化，其方向的偏离也很小，故在 bc 和 da 段，$\boldsymbol{H}$ 在 bc 和 da 方向的投影也是无穷小量，因而上式右侧第二和第四项为二级无穷小量，与第一和第三项相比可略，于是

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{ab}\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{cd}\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-H_1 l+H_2 l$$

式中 $ab=cd=l$.

由安培环路定理，因 $abcd$ 回路内无传导电流，故

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$$

由以上两式，得

$$H_1=H_2$$

因

$$\boldsymbol{B}_1=\mu_0(\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{M}_1)=\mu_0(\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{M}),$$
$$\boldsymbol{B}_2=\mu_0(\boldsymbol{H}_2+\boldsymbol{M}_2)=\mu_0\boldsymbol{H}_2$$

由于点 2 在磁棒外，故 $\boldsymbol{M}_2=0$·又因 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{H},\boldsymbol{M}$ 三者彼此平行，故有

$$B_1=\mu_0(H_1+M),\quad B_2=\mu_0 H_2$$

前已得出 $H_1=H_2$，又 $M\neq 0$，故

$$B_1\neq B_2$$

【题 26】 试采用等效磁荷的方法，证明已被均匀磁化的球壳形磁介质在无外加磁场的情况下，它的球心处的磁感应强度为零．

【分析】 均匀磁化的含义是磁介质内的 $\boldsymbol{M}$ 为常量（大小方向均相同），或 $\boldsymbol{J}$ 为常量．$\boldsymbol{M}$ 叫磁化强度，是按分子电流观点描述磁化强弱的物理量，$\boldsymbol{J}$ 叫磁极化强度，是按磁荷观点描述磁化强弱的物理量，且 $\boldsymbol{J}=\mu_0\boldsymbol{M}$．按磁荷观点，$\boldsymbol{J}$ 与磁介质表面的磁荷面密度 σ_{m} 有关，而 σ_{m} 的分布则决定了磁场强度 $\boldsymbol{H}$．于是，球心处的 $\boldsymbol{H}$ 可求．再利用 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{H},\boldsymbol{M}$ 三者的关系，即可得出球心处的 $\boldsymbol{B}$.

【解】 如图所示，设球壳形磁介质的内半径和外半径分别为 R_1 和 R_2．沿 $\boldsymbol{M}$ 或 $\boldsymbol{J}$ 的方向取 x 轴，原点 O 在球心．

在磁介质内，$\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{J}$ 的关系是

$$\boldsymbol{J}=\mu_0\boldsymbol{M}$$

磁极化强度 $\boldsymbol{J}$ 与磁介质表面的磁荷面密度 σ_{m} 的关系为

$$\sigma_{\mathrm{m}}=\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 是磁介质表面的单位法向矢量，从介质内指向介质外．如图，在球壳内表面和外表面与 x

轴的夹角为 θ 处的 σ_m 为

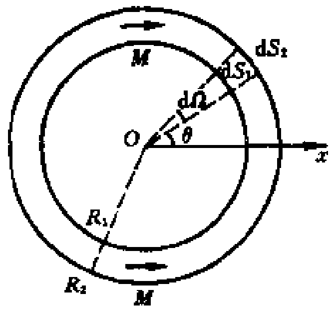
$$\sigma_m(R_1,\theta) = -J\cos\theta,\quad \sigma_m(R_2,\theta) = J\cos\theta$$

由磁荷观点，点磁荷 q_m 在 $\boldsymbol{r}$ 处的磁场强度为

$$\boldsymbol{H} = \frac{q_m \boldsymbol{r}}{4\pi\mu_0 r^3}$$

在 θ 角附近取小立体角 $d\Omega$，相应的介质内、外球面的小面元的面积分别为

$$dS_1 = R_1^2 d\Omega,\quad dS_2 = R_2^2 d\Omega$$



电图 2-26-1

在面元 dS_1 和 dS_2 上的磁荷分别为

$$dq_m(R_1,\theta) = \sigma_m(R_1,\theta)dS_1 = -J\cos\theta \cdot R_1^2 d\Omega$$

$$dq_m(R_2,\theta) = \sigma_m(R_2,\theta)dS_2 = J\cos\theta \cdot R_2^2 d\Omega$$

它们对球心 O 的磁场强度的贡献分别为

$$d\boldsymbol{H}_1 = \frac{dq_m(R_1,\theta)\boldsymbol{R}_1}{4\pi\mu_0 R_1^3} = -\frac{J\cos\theta d\Omega}{4\pi\mu_0}\cdot\frac{\boldsymbol{R}_1}{R_1}$$

$$d\boldsymbol{H}_2 = \frac{dq_m(R_2,\theta)\boldsymbol{R}_2}{4\pi\mu_0 R_2^3} = -\frac{J\cos\theta d\Omega}{4\pi\mu_0}\cdot\frac{\boldsymbol{R}_2}{R_2}$$

因

$$\frac{\boldsymbol{R}_1}{R_1} = \frac{\boldsymbol{R}_2}{R_2}$$

故

$$d\boldsymbol{H} = d\boldsymbol{H}_1 + d\boldsymbol{H}_2 = 0$$

既然每一对磁荷 $dq_m(R_1,\theta)$ 和 $dq_m(R_2,\theta)$ 在球心 O 处的磁场强度 $d\boldsymbol{H}$ 为零，则内表面和外表面全部磁荷在 O 点的 $\boldsymbol{H}$ 必为零，即

$$\boldsymbol{H}(O) = 0$$

在 O 点，$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{M}$ 三者的关系为

$$\boldsymbol{B}(O) = \mu_0[\boldsymbol{H}(O) + \boldsymbol{M}(O)]$$

因球心 O 处无磁介质，故

$$\boldsymbol{M}(O) = 0$$

于是

$$\boldsymbol{B}(O) = 0$$

【题 27】 由永久极化的电介质制成半径为 R 的无限长圆柱体，已知圆柱体内与轴相距为 $\boldsymbol{r}$ 处的极化强度 $\boldsymbol{P} = \alpha\boldsymbol{r}$，其中 α 是正的常量．

1．当圆柱体静止时，试求圆柱体内、外的电场能量密度．

2．当圆柱体以角速度 ω 绕轴匀速转动时，试求圆柱体内、外磁场能量密度．

【分析】 永久极化的电介质内有极化电荷，其体电荷密度 ρ 和面电荷密度 σ 的分布可由已知的极化强度 $\boldsymbol{P}$ 求得．由 ρ 和 σ 的分布可知由此产生的电场分布，于是电场能量密度 w_e 可求．

绕轴旋转时，ρ 和 σ 将分别在电介质内和电介质表面形成体电流和面电流，它们产生的磁场决定了磁场能量密度．

【解】 取柱极坐标(z,r,φ)，z 沿圆柱体中央轴，(r,φ)是垂直中央轴的平面上的极坐标．则任意矢量 $\boldsymbol{A}$ 的散度公式为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

式中 A_z,A_r,A_φ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 在三个坐标方向的分量．

因极化而在圆柱体内形成的极化体电荷密度 ρ 为

$$\rho=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\alpha r)=-2\alpha$$

在圆柱体表面形成的极化面电荷密度 σ 为

$$\sigma=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P}=\boldsymbol{e}_r\cdot(\alpha\boldsymbol{r})\Big|_{r=R}=\alpha R$$

其中用到 $\boldsymbol{P}=\alpha\boldsymbol{r}=\alpha r\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_r$ 是 r 方向的单位矢量．

ρ 在圆柱体内、外形成的电场分布可由高斯定理求得，为

$$\boldsymbol{E}_1=\begin{cases}\dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r=-\dfrac{\alpha r}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r, & r<R\\[2ex] \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\boldsymbol{e}_r=-\dfrac{\alpha R^2}{\varepsilon_0 r}\boldsymbol{e}_r, & r>R\end{cases}$$

σ 在圆柱体内、外形成的电场分布为

$$\boldsymbol{E}_2=\begin{cases}0, & r<R\\[2ex] \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}\boldsymbol{e}_r=\dfrac{\alpha R^2}{\varepsilon_0 r}\boldsymbol{e}_r, & r>R\end{cases}$$

故总的电场分布为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2=\begin{cases}-\dfrac{\alpha r}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r, & r<R\\[2ex] 0, & r>R\end{cases}$$

电场能量密度的分布为

$$w_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2=\begin{cases}\dfrac{\alpha^2r^2}{2\varepsilon_0}, & r<R\\[2ex] 0, & r>R\end{cases}$$

圆柱体绕轴以 ω 匀速转动时，r 处的线速度为

$$\boldsymbol{v}=\omega r\boldsymbol{e}_\varphi$$

式中 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 是 φ 方向的单位矢量．形成体电流密度为

$$\boldsymbol{j}_\rho=\rho\boldsymbol{v}=-2\alpha\omega r\boldsymbol{e}_\varphi$$

形成的面电流密度(圆柱体表面单位长度上的面电流密度）为

$$\boldsymbol{j}_\sigma=\sigma\boldsymbol{v}\Big|_{r=R}=\sigma\omega R\boldsymbol{e}_\varphi=\alpha\omega R^2\boldsymbol{e}_\varphi$$

这些体电流和面电流相当于一系列无限长密绕螺线管电流．因此，圆柱体外无磁场，圆柱体内的磁场应呈轴对称分布，可表为

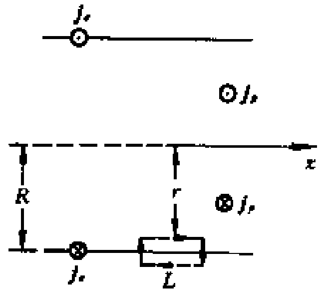
$$\boldsymbol{B}(r) = B(r)\boldsymbol{e}_z$$

为求 $B(r)$，取长方形回路如图所示，由环路定理，有

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0\left[\int_r^R j_\rho(L\mathrm{d}r) + j_\sigma L\right]$$

$$= \mu_0\int_r^R(-2\alpha\,\omega r L\mathrm{d}r) + \mu_0\alpha\,\omega R^2 L$$

$$= \mu_0\alpha\,\omega L(r^2 - R^2) + \mu_0\alpha\,\omega R^2 L = \mu_0\alpha\,\omega\,r^2 L$$



电图 2 - 27 - 1

而

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = BL$$

故

$$B = \mu_0\alpha\,\omega\,r^2$$

圆柱体内、外的磁场分布为

$$\boldsymbol{B} = \begin{cases}\mu_0\alpha\omega r^2\boldsymbol{e}_z, & r < R\\ 0, & r > R\end{cases}$$

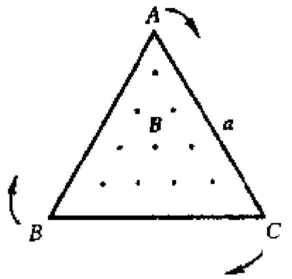
圆柱体内、外磁场能量密度的分布为

$$w_{\mathrm{m}} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \begin{cases}\dfrac{1}{2}\mu_0\alpha^2\omega^2 r^4, & r < R\\ 0, & r > R\end{cases}$$

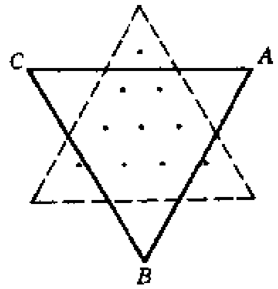
第三章 电磁感应

【题1】 如电图3－1－1所示，在边长为 a 的等边三角形区域内有匀强磁场 $\boldsymbol{B}$，其方向垂直纸面向外．一个边长也为 a 的等边三角形导体框架 ABC，在 $t=0$ 时恰好与上述磁场区域的边界重合，尔后以周期 T 绕其中心在纸面内顺时针方向匀速转动，于是在框架 ABC 中产生感应电流．规定电流按 $ABCA$ 方向流动时电流强度取正值，反向流动时取负值．设框架 ABC 的电阻为 R．试求从 $t=0$ 到 $t_1=\dfrac{T}{6}$ 时间内的平均电流强度 $\overline{I}_1$ 和从 $t=0$ 到 $t_2=\dfrac{T}{2}$ 时间内的平均电流强度 $\overline{I}_2$．

【分析】 根据法拉第电磁感应定律，感应电动势与磁通量变化率成正比，即 $\mathscr{E}=-\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$．由此，在一段时间 Δt 内感应电动势的平均值为 $\overline{\mathscr{E}}=-\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$．其中 $\Delta\Phi$ 是在 Δt 时间内磁通量的变化．由 $\overline{\mathscr{E}}$，根据欧姆定律可确定回路中的平均电流强度，电流的方向可由楞次定律确定．



电图 3－1－1



电图 3－1－2

【解】 从 $t=0$ 到 $t_1=\dfrac{T}{6}$ 的时间内，导体框架从电图 3－1－2 中的虚线位置转到实线位置，所经时间为

$$\Delta t_1=\frac{T}{6}$$

磁通量减少了

$$\Delta\Phi_1=-\frac{\sqrt{3}}{12}a^2B$$

故感应电动势的平均值为

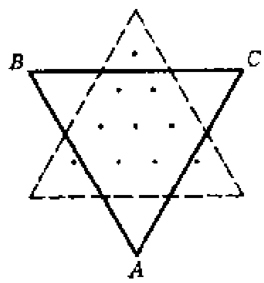
$$\overline{\mathscr{E}_1}=-\frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t}=\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{a^2B}{T}$$

由楞次定律，感应电流方向为 $ABCA$，故平均电流强度为正值，即

$$\overline{I_1}=\frac{\overline{\mathscr{E}_1}}{R}=\frac{\sqrt{3}a^2B}{2RT}$$

从 $t=0$ 到 $t_2=\frac{T}{2}$ 时间内，导体框架从电图 3-1-3 的虚线位置转到实线位置

$$\Delta t_2=\frac{T}{2},\quad \Delta\Phi_2=-\frac{\sqrt{3}}{12}a^2B$$



电图 3-1-3

感应电动势平均值为

$$\overline{\mathscr{E}_2}=-\frac{\Delta\Phi_2}{\Delta t_2}=\frac{\sqrt{3}a^2B}{6T}$$

平均电流强度为

$$\overline{I_2}=\frac{\overline{\mathscr{E}_2}}{R}=\frac{\sqrt{3}a^2B}{6RT}$$

细致分析可知，从 $t=0$ 到 $\frac{T}{6}$ 过程中，磁通量减少，感应电流沿 $ABCA$ 方向，电流强度取正值．从 $\frac{T}{6}$ 到 $\frac{T}{3}$ 过程中，磁通量增加，感应电流沿 $ACBA$ 方向，电流强度取负值．故从 $t=0$ 到 $\frac{T}{3}$ 过程中，平均电流强度为零．从 $\frac{T}{3}$ 到 $\frac{T}{2}$ 过程中，磁通量又减少，感应电流沿 $ABCA$ 方向，电流强度取正值．从 $\frac{T}{3}$ 到 $\frac{T}{2}$ 时间内，平均电流强度为

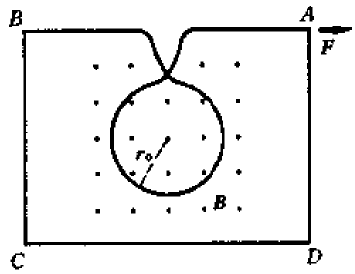
$$\overline{I'}_2=\overline{I}_1$$

从 $t=0$ 到 $\frac{T}{2}$ 时间内，平均电流强度为

$$\overline{I}_2=\frac{1}{3}\overline{I'}_2=\frac{1}{3}\overline{I}_1=\frac{\sqrt{3}a^2B}{6RT}$$

与上面的结果相符．

【题 2】 如图所示，$ABCDA$ 是闭合导体回路，总电阻为 R，AB 段的一部分绕成初始半径为 r_0 的圆圈．圆圈所在区域有与圆圈平面垂直的均匀磁场 $\boldsymbol{B}$．回路的 B 端固定，C 和 D 为自由端，A 端在沿 BA 方向的恒力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下向右移动，从而使圆圈缓慢缩小．设在圆圈缩小的过程中，始终保持圆的形状，设导体回路是柔软的，设阻力可以忽略．试求此圆圈从初始的半径 r_0 到完全闭合所需的时间 T．



电图 3-2-1

【分析】 在恒力 $\boldsymbol{F}$ 作用下，圆圈不断缩小，使其中磁通量变化，产生感应电动势，导致回路中有感应电流．因圆圈的缩小是缓慢的，又无阻力，F 所作的功全部变为感应电流产生的焦耳热，由此可确定圆圈半径 r 随时间 t 变化的规律，问题得解．

【解】 设在恒力 $\boldsymbol{F}$ 作用下，A 端在 $\mathrm{d}t$ 时间内右移 $\mathrm{d}x$，相应的圆圈半径缩小 $-\mathrm{d}r$，则

$$\mathrm{d}x=-2\pi\,\mathrm{d}r$$

在 $\mathrm{d}t$ 时间内 $\boldsymbol{F}$ 作功 $F\mathrm{d}x$，同时在圆圈内产生感应电动势 $\mathscr{E}$，在回路内引起感应电流 i，散发热能 $\mathscr{E}i\mathrm{d}t$，由能量守恒，得

$$F\mathrm{d}x=\mathscr{E}i\mathrm{d}t$$

感应电动势 $\mathscr{E}$ 和感应电流 i 为

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi r^2B)=-2\pi rB\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

$$i=\frac{\mathscr{E}}{R}=-\frac{2\pi rB}{R}\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

联立以上四式,得

$$-2\pi F\,\mathrm{d}r=\frac{4\pi^2r^2B^2}{R}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2\mathrm{d}t$$

即

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-\frac{FR}{2\pi r^2B^2}$$

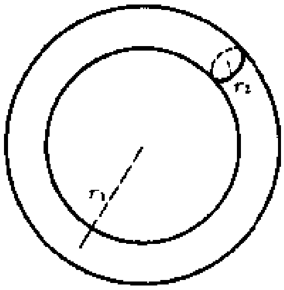
这就是圆圈半径 r 随时间 t 变化的规律．积分,得

$$T=\int_0^T\mathrm{d}t=\int_{r_0}^0-\frac{2\pi r^2B^2}{FR}\mathrm{d}r=\frac{2\pi B^2}{3RF}r_0^3$$

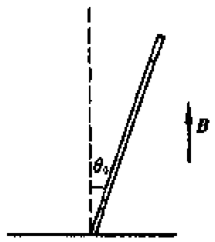
【题 3】 如图3－3－1所示,铜制圆环的两个半径分别为 $r_1=1$ cm 和 $r_2=1$ mm. 圆环竖放在地面上,环底部有固定的光滑栓限制,使其不能滑动．圆环周围有竖直向上的均匀的强磁场 $B=1.0$ T. 如电图 3－3－2 所示,开始时圆环偏离竖直方向一个小角度 $\theta_0=1.0$ rad,尔后圆环倒向地面．已知铜的电导率 $\sigma=6.25\times10^7(\Omega\cdot\mathrm{m})^{-1}$,质量密度 $\rho=8.93\times10^3\ \mathrm{kg/m^3}$.

1. 试通过数量级的估算,判断圆环倒下时其重力势能主要是转换成圆环的动能还是转换为焦耳热能．

2. 设圆环倒下过程中所受的磁力矩始终等于重力矩,试求圆环倒地所需时间 T.



电图 3－3－1



电图 3－3－2

【分析】 圆环从稍偏离竖直方向,直至倒地的过程中,通过环面的磁通量有变化,产生感应电动势,引起感应电流,散发焦耳热．其重力势能转换为焦耳热与转动动能之和．为了估计焦耳热与动能何者占优势,可取各量的平均值,然后由给定的数据作出判断．

圆环倒下过程中受重力矩,又因环中的感应电流使之具有磁矩,从而还受磁力矩的作用．由重力矩与磁力矩始终相等的条件,可以确定圆环转动角速度的变化规律,进而得出其转角随时间的变化,于是倒地所需时间可求．

【解】 1. 设圆环倒地所需时间为 T,则在这段时间内,通过圆环的磁通量,从开始时的近似为零(因 θ_0 很小)增大到倒地时的 $B\cdot\pi r_1^2$,故环中感应电动势的平均值约为

$$\bar{\mathscr{E}} \sim \frac{B\pi r_1^2}{T}$$

感应电流的平均值为

$$\bar{I} \sim \frac{\bar{\mathscr{E}}}{R}$$

式中 R 是圆环的电阻，为

$$R = \frac{2\pi r_1}{\sigma\pi r_2^2}$$

圆环倒地过程中散发的焦耳热约为

$$W_s \sim \bar{I}^2 RT \sim \frac{B^2\sigma\pi^2 r_1^3 r_2^2}{2T}$$

圆环倒地过程中其转动惯量近似为

$$J \approx \frac{1}{2}mr_1^2 + mr_1^2 = \frac{3}{2}mr_1^2$$

式中 m 是圆环的质量，近似为

$$m \approx \rho(2\pi r_1 \cdot \pi r_2^2)$$

圆环倒地过程中其转动角速度的平均值约为

$$\omega \sim \frac{\pi}{2}/T = \frac{\pi}{2T}$$

故圆环的转动动能约为

$$W_k \sim \frac{1}{2}J\omega^2 \sim \frac{3\rho\pi^4 r_1^3 r_2^2}{8T^2}$$

圆环倒地过程中其重力势能的损失近似为

$$E_p \approx mgr_1 \approx 2\rho g\pi^2 r_1^2 r_2^2$$

重力势能的损失转换为焦耳热与转动动能之和，即

$$E_p = W_s + W_k$$

把上述 W_s, W_k, E_p 代入，得

$$2\rho g\pi^2 r_1^2 r_2^2 \approx \frac{B^2\sigma\pi^2 r_1^3 r_2^2}{2T} + \frac{3\rho\pi^4 r_1^3 r_2^2}{8T^2}$$

即

$$1 \approx \left(\frac{B^2\sigma r_1}{4\rho g}\right)\frac{1}{T} + \left(\frac{3\pi^2 r_1}{16g}\right)\left(\frac{1}{T}\right)^2$$

把有关数据代入，算出

$$\frac{B^2\sigma r_1}{4\rho g} \approx 1, \quad \frac{3\pi^2 r_1}{16g} \approx 10^{-3}$$

故

$$1 \approx \frac{1}{T} + 10^{-3}\left(\frac{1}{T}\right)^2$$

得出

$$\frac{1}{T}\approx 1$$

即

$$T\approx 1\text{s}$$

因此，

$$\begin{aligned} W_s:W_k &\approx \frac{B^2\sigma r_1}{4\rho g}\left(\frac{1}{T}\right):\frac{3\pi^2 r_1}{16g}\left(\frac{1}{T}\right)^2 \\ &\approx \frac{1}{T}:10^{-3}\left(\frac{1}{T}\right)^2\approx 1:10^{-3} \end{aligned}$$

即

$$W_s\gg W_k$$

可见圆环倒地过程中，重力势能主要转换为焦耳热，转动动能所占比例甚小，其原因在于强磁场和高电导率使圆环所受磁力矩与重力矩相近．

2. 题设圆环倒地过程中所受磁力矩 M_m 与所受重力矩 M_g 始终相等，因而重力势能将全部转换为焦耳热，由此计算出来的倒地时间 T 应与第一问的估算值（$T\approx 1\text{s}$）具有相同的数量级．

当圆环转到与竖直方向夹角为 θ 时，通过环面的磁通量近似为

$$\Phi(\theta)=B\pi r_1^2\sin\theta$$

感应电动势的大小为

$$\mathscr{E}=\left|-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right|=B\pi r_1^2\cos\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=B\pi r_1^2\cos\theta\cdot\omega$$

式中 $\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$是圆环的转动角速度．环中感应电流为

$$i=\frac{\mathscr{E}}{R}=\frac{B\pi r_1^2\cos\theta\cdot\omega}{R}$$

圆环电流的磁矩大小为

$$m_i=i(\pi r_1^2)=\frac{B(\pi r_1^2)^2\cos\theta\cdot\omega}{R}$$

圆环所受磁力矩的大小为

$$M_m=m_iB\cos\theta=(B\pi r_1^2\cos\theta)^2\frac{\omega}{R}$$

圆环所受重力矩的大小为

$$M_g=mgr_1\sin\theta$$

因题设

$$M_m=M_g$$

故

$$(B\pi r_1^2\cos\theta)^2\frac{\omega}{R}=mgr_1\sin\theta$$

其中

$$R=\frac{2\pi r_1}{\sigma\pi r_2^2}$$

$$m=\rho(2\pi r_1\cdot\pi r_2^2)$$

代入，得

$$\omega=\frac{4\rho g\ \sin\theta}{\sigma B^2 r_1\cos^2\theta}=\frac{d\theta}{dt}$$

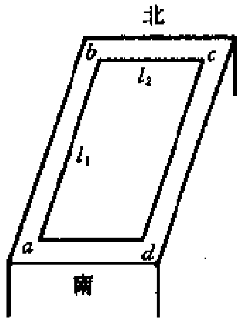
故圆环倒地所需时间为

$$T=\int dt=\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma B^2 r_1\cos^2\theta}{4\rho g\ \sin\theta}d\theta$$

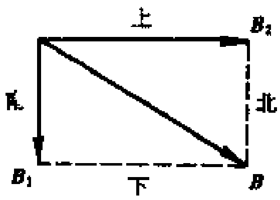
$$=\frac{\sigma B^2 r_1}{4\rho g}\left[-\cos\theta_0+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos\theta_0}{1-\cos\theta_0}\right]=3.6\ \text{s}$$

【题4】 如电图3-4-1所示，在水平桌面上平放着长方形线圈 $abcd$．已知 ab 边长 l_1，bc 边长 l_2，线圈总电阻为 R，ab 边正好指向北方．现将线圈以南北连线为轴翻转180°，使 ab 与 cd 边互换位置，在翻转的全过程中测得通过导线的总电量为 Q_1．然后，维持 ad 边(东西方向)不动，将线圈绕 ad 边转动90°，使之竖直，测得在竖直过程中流过导线的总电量为 Q_2．试求该处地磁场 B 的大小．

【分析】 由于地磁场的存在，无论翻转或竖起，都会使通过回路的磁通量发生变化，产生感应电动势，引起感应电流，导致电量传输．值得注意的是，地磁场既有竖直方向的分量又有南北方向的分量(南极和北极除外)，而且在南半球和北半球又有所不同．题目未指明实验是在南半球还是在北半球进行的，应分别讨论．



电图3-4-1



电图3-4-2

【解】 1．设在北半球作此实验．

在北半球，地磁场 $\boldsymbol{B}$ 可分解为竖直向下的 $\boldsymbol{B}_1$ 和在水平面上由南指向北的 $\boldsymbol{B}_2$ 两部分，如电图3-4-2所示．

如电图3-4-1，在线圈中取回路方向为 $abcda$，则当线圈翻转或竖起时，线圈中的感应电动势 $\mathscr{E}$，感应电流 i 和通过线圈的总电量 Q 可以分别表为

$$\mathscr{E}=-\frac{d\Phi}{dt}$$

$$i=\frac{\mathscr{E}}{R}=-\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}$$

$$Q=\left|\int_{\Delta t} i\,\mathrm{d}t\right|=\left|\int_{\Delta t}-\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}t\right|$$

$$=\left|\int_{\Delta t}-\frac{1}{R}\mathrm{d}\Phi\right|=\frac{1}{R}|\Delta\Phi|=\frac{1}{R}|\Phi_{终}-\Phi_{始}|$$

翻转时，只有 $\boldsymbol{B}_1$ 分量有影响，即

$$\Phi_{始}=B_1l_1l_2,\quad \Phi_{终}=-B_1l_1l_2$$

故

$$Q_1=\frac{2B_1l_1l_2}{R}$$

竖起时，$\boldsymbol{B}_1$ 和 $\boldsymbol{B}_2$ 分量均有影响，即

$$\Phi_{始}=B_1l_1l_2,\quad \Phi_{终}=B_2l_1l_2$$

故

$$Q_2=\frac{1}{R}|B_2-B_1|l_1l_2$$

于是解出

$$B_1=\frac{RQ_1}{2l_1l_2}$$

$$B_2=\begin{cases}\dfrac{R}{2l_1l_2}(Q_1+2Q_2),当\ B_2>B_1\\[2mm]\dfrac{R}{2l_1l_2}(Q_1-2Q_2),当\ B_2<B_1\end{cases}$$

其中 $B_2<B_1$ 的结果，只在 $Q_1\geqslant 2Q_2$ 时才成立．故地磁场的大小为

$$B=\sqrt{B_1^2+B_2^2}=\frac{\sqrt{2}R}{2l_1l_2}\sqrt{Q_1^2\pm 2Q_1Q_2+2Q_2^2}$$

当 $B_2>B_1$ 时取正号，当 $B_2<B_1$ 时取负号．考虑到实验在北极附近进行的可能性不大，$B_2>B_1$ 比较合理，故取

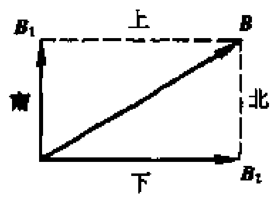
$$B=\frac{\sqrt{2}R}{2l_1l_2}\sqrt{Q_1^2+2Q_1Q_2+2Q_2^2}$$

2．设在南半球作此实验．

南半球地磁场 $\boldsymbol{B}$ 可分解为竖直向上的 $\boldsymbol{B}_1$ 和在水平面上由南指向北的 $\boldsymbol{B}_2$，如电图 3－4－3 所示．

如电图 3－4－1，在线圈中仍取回路方向为 $abcda$．则翻转时仍有

$$Q_1=\frac{2B_1l_1l_2}{R}$$



电图 3－4－3

竖起时，有

$$\Phi_{始}=-B_1l_1l_2,\quad \Phi_{终}=B_2l_1l_2$$

故

$$Q_2=\frac{1}{R}(B_1+B_2)l_1l_2$$

解出

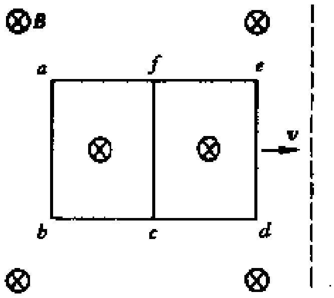
$$B_1=\frac{RQ_1}{2l_1l_2}$$

$$B_2=\frac{R}{2l_1l_2}(2Q_2-Q_1)$$

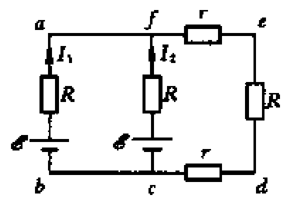
故地磁场 B 的大小为

$$B=\sqrt{B_1^2+B_2^2}=\frac{\sqrt{2}R}{2l_1l_2}\sqrt{Q_1^2-2Q_1Q_2+2Q_2^2}$$

【题5】 如电图3－5－1所示为一"日"字形矩形闭合导线框．已知 $ab=bc=cd=de=ef=fa=0.1$ m,已知 ab,cf,de 段电阻均为 3 Ω,cd,fe 段电阻均为 1.5Ω,bc,af 段电阻均为零．匀强磁场 B 的方向与框面垂直向里,大小为 $B=1$ T,磁场的边界与 de 平行,如电图 3－5－1 中虚线所示．今以图中向右的方向,以 $v=24$ m/s 的速度,将线框匀速地拉出磁场区域．试求在此过程中拉力所做的功．



电图 3－5－1



电图 3－5－2

【分析】 当整个线框都在磁场区域时,同其中磁通量不变,ab,cf,de 边的感应电动势彼此抵消,线框内无感应电流,不受磁场安培力,无须作功．

当 ed 边移出磁场区域而 ab 与 cf 尚在磁场内时,ab 与 cf 边将分别有感应电动势,并在线框内产生感应电流．根据已知条件画出电路图,不难求出 ab 和 cf 边的电流,它们将受磁场的安培力,故拉力需克服此安培力,把线框向右移动 cd 距离做功．(ed 边也有电流,但已移出磁场,故不受安培力．)

当 cf 边也移出磁场时,仅留在磁场内的 ab 边有感应电动势,并在线框内产生感应电流．再次画出电路图,求出 ab 边的电流及所受安培力．因此,拉力应克服此安培力将线框右移做功．

上述两部分功之和,即为线框移出磁场区域过程中拉力所作总功．

【解】 根据分析,在 ed 边未移出磁场时,无感应电流,不受安培力,无须作功．

当 ed 边移出磁场后,ab 和 cf 尚在磁场内,其中的感应电动势相同,均为

$$\mathscr{E}=B\,lv=2.4\text{ V}$$

式中 $l=ab=cf=0.1$ m,此时线框的等效电路如电图 3－5－2 所示,其中

$$R=3\Omega,r=1.5\ \Omega$$

不难算出流经 ab 和 cf 的电流为(电流方向如电图 3－5－2 所示)

$$I_1=I_2=0.16\ \text{A}$$

于是，ab 和 cf 两边所受安培力(方向向左)分别为

$$f_1=I_1lB=0.016\ \text{N}$$

$$f_2=I_2lB=0.016\ \text{N}$$

拉力将线框右移，从 ed 刚好移出磁场外直至 cf 刚好移出磁场外，需克服(f_1+f_2)右移 $cd=l$ 的距离，作功为

$$W_1=(f_1+f_2)l=0.0032\ \text{J}$$

当 cf 边也移出磁场后，仅留在磁场内的 ab 边上有感应电动势，其大小仍为

$$\mathscr{E}=Blv=2.4\ \text{V}$$

此时线框的等效电路如电图 3－5－3 所示．不难算出 ab 边的电流为(电流方向如电图 3－5－3 所示)

$$I=0.48\ \text{A}$$

ab 边所受磁场安培力为

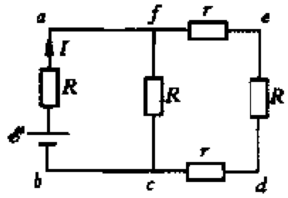
$$f=IlB=0.048\ \text{N}$$

从 cf 边刚好移出磁场到 ab 边刚好移出磁场，拉力克服安培力作功为

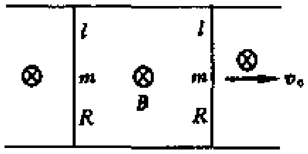
$$W_2=fl=0.0048\ \text{J}$$

综上，把线框移出磁场过程中，拉力所作总功为

$$W=W_1+W_2=8.0\times10^{-3}\ \text{J}$$



电图 3－5－3



电图 3－6－1

【题 6】 如电图3－6－1所示，在匀强磁场区域与 $\boldsymbol{B}$ 垂直的平面(水平面)中有两根足够长的固定的平行金属导轨，在它们上面横放着两根平行导体棒，构成矩形回路．导体棒的长度均为 l，质量均为 m，电阻均为 R，回路中导轨部分的电阻可以忽略．设导体棒在导轨上可以无摩擦地滑行，设重力及电磁辐射均可不计，设开始时左导体棒静止，右导体棒具有向右的初速度 v_0．

试求：1. 右导体棒向右的速度 v_1 随时间 t 的变化．2. 两导体棒间距增量 x 的上限．

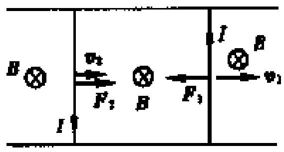
【分析】 右棒向右运动产生感应电动势，形成逆时针方向的回路感应电流 I．电流 I 流经右棒，使右棒受到向左的安培力，其运动减速．电流 I 流经左棒，使左棒受到向右的安培力，开始加速运动．右棒减速，使得因其运动而产生的感应电动势减弱；左棒加速，则因其运动会产生相应的反向电动势．从而使回路的总电动势减小，电流 I 随之减小．I 的减小，又使两棒所受安培力随之减小，右棒减速趋缓，左棒加速也趋缓．可以预计，两棒的速度随时间的变化将分别是按指数衰减和按指数增加．最后，两棒速度趋于一致，回路中的感应电动势降为零，感应电流也为零，此时两棒间距的增量达到上限．

很明显,由于两棒所受安培力始终大小相同而方向相反．因此,在运动过程中,两棒动量之和守恒．初始时,两棒动量之和为 mv_0,最终两棒速度的大小方向一致,故它们共同的末速度应为$\frac{1}{2}v_0$．利用感应电动势公式,借助牛顿定律,不难解出 $v_1(t)$并求出两棒间距增量的上限．

【解】 1．根据分析,右棒运动形成感应电动势,使回路中产生感应电流,此电流流经左棒又使左棒受安培力开始运动．一般情形,两棒均处于运动状态,如电图 3－6－2 所示,设右棒向右的速度为 v_1,左棒向右的速度为 v_2,两棒所受安培力分别为 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$,其方向已在电图 3－6－2 中标明．则回路中的总感应电动势为

$$\mathscr{E}=Blv_1-Blv_2$$

感应电流的方向已在电图 3－6－2 中标明,其大小为



电图 3－6－2

$$I=\frac{\mathscr{E}}{2R}=\frac{Bl(v_1-v_2)}{2R}$$

右棒所受安培力 $\boldsymbol{F}_1$ 向左,大小为

$$F_1=IlB=\frac{B^2l^2(v_1-v_2)}{2R}$$

$\boldsymbol{F}_1$ 使右棒减速,右棒速度 v_1 的变化遵循下式,

$$\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}=-\frac{F_1}{m}=-\frac{B^2l^2(v_1-v_2)}{2mR}$$

左棒所受安培力 $\boldsymbol{F}_2$ 向右,其大小为

$$F_2=F_1=\frac{B^2l^2(v_1-v_2)}{2R}$$

$\boldsymbol{F}_2$ 使左棒从静止向右加速,左棒速度 v_2 的变化遵循下式

$$\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}=\frac{F_2}{m}=\frac{B^2l^2(v_1-v_2)}{2mR}$$

由此可见,随着时间 t 的推移,右棒速度 v_1 不断减小,左棒速度 v_2 不断增大,同时,感应电动势 $\mathscr{E}$ 以及右棒与左棒所受作用力 F_1 与 F_2 都随之减小．当 $v_1=v_2$ 即两棒速度相等时,$\mathscr{E}$ 以及 F_1 和 F_2 均减小为零,两棒速度不再变化．由于在两棒运动过程中,两棒所受安培力的合力始终为零,即

$$\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=0$$

故在运动过程中,两棒系统的总动量守恒．若将两棒共同的末速度表为 v_e,则有

$$mv_0=(m+m)v_e$$

故

$$v_e=\frac{v_0}{2}$$

由上面的讨论得出

$$\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}$$

即

$$\mathrm{d}v_2=-\mathrm{d}v_1$$

因开始 $t=0$ 时，$v_1=v_0$，$v_2=0$，把上式积分，得

$$v_2=-(v_1-v_0)$$

代入前面的$\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}$表达式，得

$$\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}=-\frac{B^2l^2}{2mR}(2v_1-v_0)$$

积分，得

$$\int_{v_0}^{v_1}\frac{\mathrm{d}v_1}{2v_1-v_0}=\int_0^t\frac{-B^2l^2}{2mR}\mathrm{d}t$$

即

$$\frac{1}{2}\ln\frac{2v_1-v_0}{v_0}=-\frac{B^2l^2}{2mR}t$$

故右棒向右运动的速度 v_1 随时间 t 的变化为

$$v_1=\frac{v_0}{2}\left(1+\mathrm{e}^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}\right)$$

2. 由

$$\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}=\frac{B^2l^2(v_1-v_2)}{2mR}$$

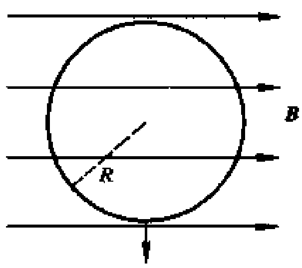
可以得出在 $\mathrm{d}t$ 时间内，两棒间距增量的微分值 $\mathrm{d}x$ 为

$$\mathrm{d}x=(v_1-v_2)\mathrm{d}t=\frac{2mR}{B^2l^2}\mathrm{d}v_2$$

故两棒间距增量的上限 x 为

$$x=\int\mathrm{d}x=\int_0^{v_e}\frac{2mR}{B^2l^2}\mathrm{d}v_2=\frac{2mR}{B^2l^2}v_e=\frac{mRv_0}{B^2l^2}$$

【题 7】 如图所示，有一水平方向的匀强磁场，磁感应强度 B 很大．一个半径为 R，厚度为 $D(D\ll R)$的金属圆盘，在此磁场中竖直下落，盘面始终在竖直平面内并与磁场 $\boldsymbol{B}$ 的方向平行．设金属圆盘的电阻为零，密度为 $\rho=9\times10^3\ \mathrm{kg/m^3}$，所受空气阻力可略．为使圆盘在磁场中下落的加速度比没有磁场时减小千分之一，试问 B 应为多大？



电图 3－7－1

【分析】 由于圆盘有厚度 D，故当圆盘在磁场区域内竖直下落的速度为 v 时，在圆盘的厚度方向上会产生感应电动势 $\mathscr{E}=BDv$，从而在圆盘的两个盘面上形成正、负电荷的积累．由于 $R\gg D$，圆盘的两个盘面可以看作是平行板电容器的两极，其电容为 $C=\frac{\varepsilon_0\pi R^2}{D}$．上述在两个盘面之间的感应电动势 $\mathscr{E}$ 可以看作是电容器两端所加的电压，于是电容器正极所带电量为 $Q=C\mathscr{E}$. 在圆盘下落过程中，速度 v 不断变化，引起 $\mathscr{E}$ 和 Q 的相应变化，Q 的变化意味着沿圆盘厚度方向上有电流 $I=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$．由于有磁场 $\boldsymbol{B}$，此电流将使圆盘受到竖直向上的

安培力 $\boldsymbol{F}$,其大小为 $F=IDB$. 这个安培力就是使圆盘下落的加速度 a 稍低于重力加速度 g 的原因. 弄清楚了整个物理过程,根据题目给出的要求,即可确定所需 B 的大小.

【解】 当圆盘磁场区域内以速度 v 竖直下落时,由于在圆盘的厚度方向切割磁感线,故在圆盘厚度方向上产生的感应电动势为

$$\mathscr{E}=BDv$$

感应电动势 $\mathscr{E}$ 使圆盘两个盘面有电荷积累,图中前面的盘面应带正电,设为 Q,则图中背后的盘面应带电 $-Q$. 由于圆盘的前、后盘面可看作一个平行板电容器(因 $R\gg D$),其电容为

$$C=\frac{\varepsilon_0\pi R^2}{D}$$

因设圆盘的电阻为零,故上述感应电动势 $\mathscr{E}$ 即为电容器两端的电压,于是圆盘盘面上积累的电量为

$$Q=C\mathscr{E}=\varepsilon_0\pi R^2Bv$$

圆盘竖直下落时 v 不断变化,导致 Q 随之变化,这相当于圆盘前、后盘面间有电流为

$$I=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=(\varepsilon_0\pi R^2B)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

电流方向是从圆盘的后盘面流向前盘面. 由于在磁场中,上述电流 I 的出现,使圆盘受到向上的安培力 $\boldsymbol{F}$,其大小为

$$F=IDB=(\varepsilon_0\pi R^2B^2D)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

圆盘竖直下落的加速度为

$$a=g-\frac{F}{m}$$

其中圆盘的质量 m 为

$$m=\rho\pi R^2D$$

由以上三式,得

$$a=g-\frac{\varepsilon_0B^2}{\rho}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)=g-\frac{\varepsilon_0B^2}{\rho}a$$

即

$$B=\left[\frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\frac{g}{a}-1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

按照题目的要求

$$g-a=10^{-3}g$$

即

$$\frac{a}{g}=1-10^{-3}$$

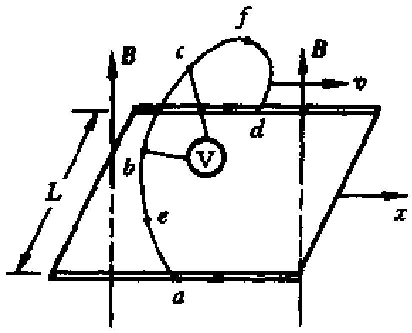
$$\frac{g}{a}\approx1+10^{-3}$$

代入,得

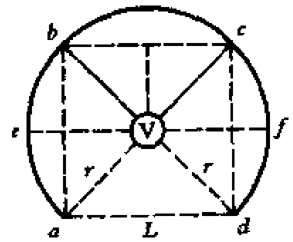
$$B=\sqrt{10^{-3}\frac{\rho}{\varepsilon_0}}=10^6\mathrm{T}$$

【题8】 如电图3－8－1所示，宽为 L 的长薄导体平板沿 x 轴水平放置，平板的电阻可以忽略不计．电图3－8－1中的 $aebcfd$ 为圆形均匀导线，电阻为 $3R$，圆所在平面与 x 轴垂直，圆弧的两端 a 和 d 与导体平板的两侧边相接触，并可沿侧边自由滑动．圆弧 ae,eb,cf,fd 均为 $\frac{1}{8}$ 圆周，圆弧 bc 为 $\frac{1}{4}$ 圆周．一个内阻为 $R_V=nR$ 的小体积电压表位于圆心 O 处，电压表的两端分别用理想导线与 b 点和 c 点连接．整个装置处在匀强磁场区域，$\boldsymbol{B}$ 竖直向上．保持导体平板不动，圆形导线与电压表一起以恒定速度 v 沿 x 轴方向作平移运动．

试求：1．电压表的读数．2．e 点与 f 点之间的电势差 ΔU_{ef}．



电图3－8－1



电图3－8－2

【分析】 圆形导线以及 b、c 与电压表的连线在磁场中运动时，各段导线都在切割磁感线，会产生相应的感应电动势．从几何上容易确定各段导线在与 $\boldsymbol{B}$ 垂直方向上投影的长度，相应的感应电动势随即可以算出．

圆形导线、电压表、理想导线以及导体平板构成了导电的网络，由已知的电阻分布及求出的各感应电动势，不难求出电压表的读数以及 e 点与 f 点之间的电势差．

【解】 如电图3－8－2所示，圆形导线的半径为

$$r=\frac{\sqrt{2}}{2}L$$

迎着 x 轴观察，各段圆弧导线在垂直于 $\boldsymbol{B}$ 方向的投影的长度分别为

$$l_{ae}=l_{eb}=l_{cf}=l_{fd}=r-\frac{L}{2}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}L$$

$$l_{bc}=L$$

连接电压表的两根理想导线在垂直于 $\boldsymbol{B}$ 方向上的投影的长度均为

$$l_{连}=\frac{L}{2}$$

$l_{ae},l_{eb},l_{cf},l_{fd}$ 因运动切割磁感线而产生的感应电动势的大小均为

$$\mathscr{E}_1=B\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)Lv$$

l_{bc} 因运动切割磁感线而产生的感应电动势为

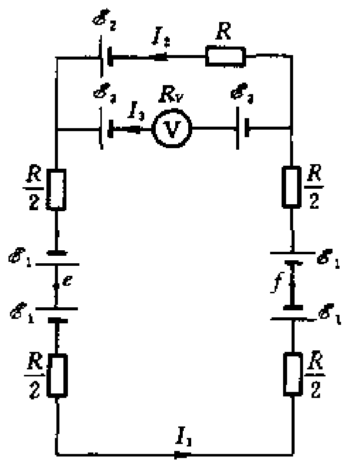
$$\mathscr{E}_2 = BLv$$

$l_{连}$ 因运动切割磁感线而产生的感应电动势为

$$\mathscr{E}_3 = \frac{1}{2}BLv$$

考虑到各个感应电动势的方向以及各段导线的电阻，可将电路网络画出，如电图 3－8－3 所示．在电图 3－8－3 的各支路中标明假设的电流方向．于是，由直流电路的基尔霍夫方程，可以得出

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ I_2R - I_3R_V - \mathscr{E}_2 + 2\mathscr{E}_3 = 0 \\ I_1\left(\frac{R}{2}+\frac{R}{2}+\frac{R}{2}+\frac{R}{2}\right) + I_3R_V - 2\mathscr{E}_3 = 0 \end{cases}$$



电图 3－8－3

利用 $2\mathscr{E}_3 = \mathscr{E}_2 = BLv$，可将方程组简化为

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ I_2R = I_3R_V \\ 2I_1R + I_3R_V = BLv \end{cases}$$

其中

$$R_V = nR$$

代入，得

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ I_2 = nI_3 \\ 2I_1 + nI_3 = \frac{BLv}{R} \end{cases}$$

解出

$$\begin{cases} I_1 = \left(\frac{n+1}{3n+2}\right)\frac{BLv}{R} \\ I_2 = \left(\frac{n}{3n+2}\right)\frac{BLv}{R} \\ I_3 = \left(\frac{1}{3n+2}\right)\frac{BLv}{R} \end{cases}$$

1. 电压表读数为

$$V = I_3R_V = \left(\frac{n}{3n+2}\right)BLv$$

2. e 点和 f 点之间的电势差为

$$\Delta U_{ef} = I_1\left(\frac{R}{2}+\frac{R}{2}\right) + \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_1$$

$$= \left(\frac{n+1}{3n+2} + \sqrt{2} - 1\right)BLv = \left(\sqrt{2} - \frac{2n+1}{3n+2}\right)BLv$$

【题 9】 如电图3－9－1所示，水平与垂直的两根长直导体棒相交，连接成固定不动的十字架形

$$I = I_{左} + I_{右} \tag{3}$$

式中的 $\mathscr{E}$ 等效于 MN 运动产生的感应电动势，为

$$\mathscr{E} = Blv \tag{4}$$

式中 l 是 MN 的长度．设在 $t=0$ 时刻，框架位于电图 3－9－1 所示的实线位置，t 时刻到达虚线位置，则

$$l = 2vt \tag{5}$$

当框架到达电图 3－9－1 虚线位置时，有

$$R_{MN} = rl \tag{6}$$

$$R_{左} = \sqrt{2}lr \tag{7}$$

$$R_{右} = (4a - \sqrt{2}l)r \tag{8}$$

由(1)、(2)、(3)式，解出

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R}$$

$$R = (R_{左}^{-1} + R_{右}^{-1})^{-1} + R_{MN}$$

把(6)、(7)、(8)式以及(4)、(5)式代入以上两式，得

$$\begin{aligned} I &= \frac{Blv}{\left[(\sqrt{2}+1) - \frac{l}{2a}\right]lr} \\ &= \frac{Bv}{\left[(\sqrt{2}+1) - \frac{l}{2a}\right]r} = \frac{Bv}{\left[(\sqrt{2}+1) - \frac{vt}{a}\right]r} \end{aligned}$$

当 MN 刚好将框架的左、右两部分等分时，为半过程，所需时间为

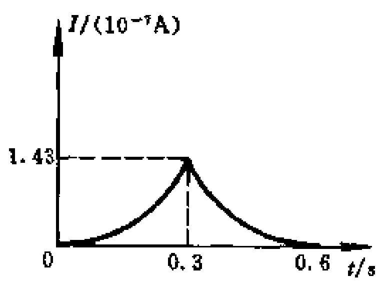
$$t_{半} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{v} = 0.3\ \text{s}$$

因此，在全过程中 $I(t)$ 关系为

$$I(t) = \begin{cases} \dfrac{Bv}{\left[(\sqrt{2}+1) - \dfrac{vt}{a}\right]r}, & 当\ 0 \leqslant t \leqslant t_{半} \\ \dfrac{Bv}{\left[(\sqrt{2}+1) - \dfrac{v(2t_{半} - t)}{a}\right]r}, & 当\ t_{半} < t \leqslant 2t_{半} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{10^{-7}}{1-t}\ \text{A}, & 当\ 0 \leqslant t \leqslant 0.3\ \text{s} \\ \dfrac{10^{-7}}{0.4+t}\ \text{A}, & 当\ 0.3\ \text{s} < t \leqslant 0.6\ \text{s} \end{cases}$$

$I(t)$ 曲线如电图 3－9－3 所示．



电图 3－9－3

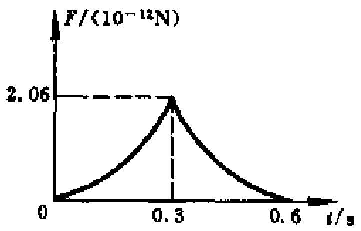
在整个过程中流过垂直棒的电量 Q 为

$$\begin{aligned} Q &= 2\int_0^{t_{半}} I\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{t_{半}} \frac{10^{-7}}{1-t}\,\mathrm{d}t \\ &= -2\times 10^{-7}\ln(1-t_{半}) = 6.9\times 10^{-8}\ \text{C} \end{aligned}$$

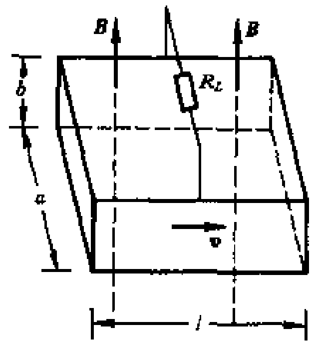
在整个过程中所需的外加作用力应与电流所受的安培力抵消，框架运动时 $I_{左}$ 所受安培力相当于MN 有 $I_{左}$ 电流时所受安培力．$I_{右}$ 类似．因此，

$$F=F_{安培}=I_{左}lB+I_{右}lB=IlB=I\cdot 2vtB$$
$$=\begin{cases}4.8\times10^{-12}\left(\dfrac{t}{1-t}\right)\text{N}, & 当\ 0\leqslant t\leqslant 0.3\ \text{s}\\ 4.8\times10^{-12}\left(\dfrac{0.6-t}{0.4+t}\right)\text{N}, & 当\ 0.3\ \text{s}<t\leqslant 0.6\ \text{s}\end{cases}$$

$F(t)$曲线如电图 3－9－4 所示．F 的方向指向电图 3－9－1 的左方．



电图3－9－4



电图3－10－1

【题 10】 磁流体发电机的工作原理如图所示．横截面为矩形的管道长为 l，宽为 a，高为 b，上、下两个侧面是绝缘体，相距为 a 的两个侧面是电阻可略的导体，这两个侧面与负载电阻 R_L 相连．整个管道处于匀强磁场区域，$\boldsymbol{B}$ 垂直于上、下侧面指向上．管道内沿长度方向流有电阻率为 ρ 的电离气体，气体流速处处相同，所受摩擦阻力的大小与流速成正比．今在管的两端维持恒定的压强差 P，无磁场存在时气体的流速为 v_0．试求有磁场存在时，此发电机的电动势 $\mathscr{E}$．

【分析与解】 无磁场存在时，两端压力差为

$$\Delta F=Pab$$

摩擦力为

$$f_0=\alpha v_0$$

压力差与摩擦力平衡，即

$$f_0=\Delta F$$

故比例系数 α 为

$$\alpha=\frac{Pab}{v_0}$$

有磁场存在时，磁流体在 a 的宽度方向上切割磁感线，产生感应电动势 $\mathscr{E}$ 和感应电流 I．磁流体宽度方向上的电流 I 会受到与运动速度 $\boldsymbol{v}$ 反向的安培力 $\boldsymbol{F}_{安}$，$\boldsymbol{F}_{安}$ 与摩擦阻力 $\boldsymbol{f}$ 的合力将使 v 小于 v_0．平衡时，有

$$\mathscr{E}=Bav$$
$$I=\frac{\mathscr{E}}{R}=\frac{Bav}{R_L+\dfrac{\rho a}{bl}}$$

$$F_{安}=IBa=\frac{B^2a^2v}{R_L+\frac{\rho a}{bl}}$$

$$\Delta F=F_{安}+f$$

其中

$$\Delta F=Pab,\quad f=\alpha v=\frac{Pabv}{v_0}$$

由以上四式,得

$$Pab=\frac{B^2a^2v}{R_L+\frac{\rho a}{bl}}+\frac{Pabv}{v_0}$$

解出

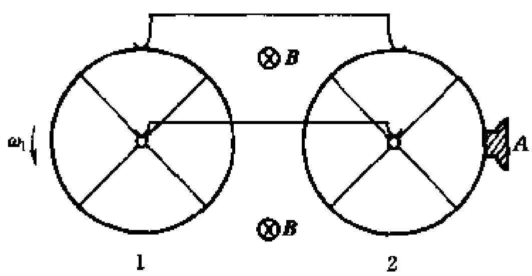
$$v=\frac{Pab}{\frac{Pab}{v_0}+\frac{B^2a^2}{R_L+\frac{\rho a}{bl}}}$$

代入 $\mathscr{E}$ 表达式,得

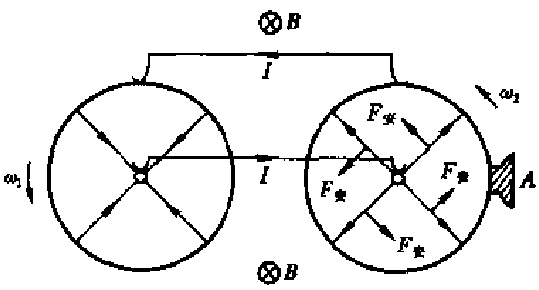
$$\mathscr{E}=\frac{Bav_0}{1+\frac{B^2av_0}{Pb\left(R_L+\frac{\rho a}{bl}\right)}}$$

【题 11】 如电图3－11－1所示,转轮 1 和转轮 2 的边缘都是很薄的良导体,每一个转轮都有四根轮辐,每根轮辐的长度为 l,电阻为 r. 两轮都可绕各自的轮轴转动(在图中轮轴与纸面垂直),两轮的边缘通过电刷用导线连接,两轮轴亦通过电刷用导线连接. 整个装置放在磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$ 的匀强磁场中,$\boldsymbol{B}$ 的方向垂直纸面向里. 转轮 2 的边缘与一阻力闸 A 接触,开始时转轮 1 以角速度 ω_1 旋转,转轮 2 不动,尔后使转轮 1 保持其旋转角速度 ω_1,这将使转轮 2 被带动并最后达到稳定的转动. 设电刷与导线的电阻均可忽略不计,电刷的阻力也可忽略. 设阻力闸 A 与转轮 2 之间的阻力恒为 F.

试求:1. 转轮 2 稳定转动时的角速度 ω_2.2. 保持转轮 1 以恒定角速度 ω_1 转动所需的外加功率 P.



电图 3－11－1



电图 3－11－2

【分析】 如电图 3－11－2 所示，转轮 1 旋转时它的四根轮辐上产生感应电动势，因转轮 1 和 2 经导线相连构成闭合回路，于是闭合回路中将有感应电流．转轮 2 轮辐中的感应电流受磁场的安培力作用，推动它旋转（电流及安培力的方向均在电图 3－11－2 中标明）．转轮 2 转动后，其轮辐中也会产生感应电动势．因此，转轮 1 和 2 稳定转动时的总感应电动势决定了闭合回路中的电流强度．

转轮 2 稳定转动的条件是所受磁力矩（轮辐中电流受磁场作用力产生的力矩）与阻力矩（由阻力闸 A 产生）相等抵消．

维持转轮 1 稳定旋转所需功率即为闭合电路中的总功率，亦即等于克服阻力的功率与电阻消耗功率之和．

【解】 当转轮 1 在磁场 $\boldsymbol{B}$ 中以 ω_1 旋转时，每一根轮辐上的感应电动势为

$$\mathscr{E}_1=\frac{1}{2}\omega_1 l^2 B$$

式中 l 为轮辐长度．因有 $\mathscr{E}_1$ 在闭合回路中产生感应电流，其方向如电图 3－11－2 所示．当转轮 2 的轮辐中有电流时，将受磁场的安培力（其方向亦在电图 3－11－2 中标明）使之转动（转动方向如电图 3－11－2）．当转轮 2 以角速度 ω_2 旋转时，其中每根轮辐的感应电动势为

$$\mathscr{E}_2=\frac{1}{2}\omega_2 l^2 B$$

当转轮 1 和转轮 2 分别以 ω_1 和 ω_2 旋转并达到稳定时，闭合回路中的感应电流为

$$I=\frac{\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2}{\dfrac{r}{4}+\dfrac{r}{4}}$$

注意，因转轮 1 的四根轮辐并联，总电阻为$\frac{r}{4}$；转轮 2 类似，其余连接导线、电刷、轮边缘的电阻均忽略不计．又，因转轮 1 和转轮 2 同方向旋转，$\mathscr{E}_1$ 和 $\mathscr{E}_2$ 同方向，但在电路中其作用是彼此减弱时，故用$(\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2)$．

稳定转动时，转轮 2 所受磁力矩应与阻力矩抵消．磁力矩是四轮辐所受安培力产生的力矩，为

$$\text{磁力矩}=4F_{\text{安}}\cdot\frac{l}{2}=4\cdot\frac{I}{4}lB\cdot\frac{l}{2}=\frac{1}{2}Il^2B$$

式中$\frac{I}{4}$是转轮 2 每根轮辐中的电流．阻力矩是阻力闸提供的力矩，因阻力恒为 F，故

$$\text{阻力矩}=Fl$$

由

$$\text{磁力矩}=\text{阻力矩}$$

得感应电流为

$$I=\frac{2F}{lB}$$

把以上公式联立，解出稳定时转轮 2 的角速度为

$$\omega_2=\omega_1-\frac{2Fr}{B^2l^3}$$

维持转轮 1 以 ω_1 旋转所需的功率等于电路的总功率，即有

$$P=\mathscr{E}_1 I=\frac{1}{2}\omega_1 l^2 B\cdot\frac{2F}{lB}=Fl\omega_1$$

此功率一部分用于克服阻力，另一部分用于电阻上的消耗．阻力的功率为

$$P_1=Fv=F\omega_2 l$$

电阻上消耗的热功率为

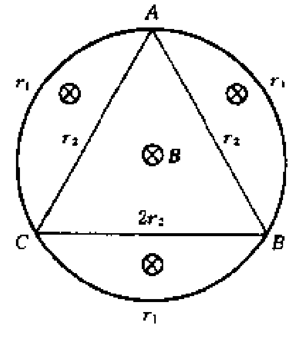
$$\begin{aligned}P_2&=8\cdot\left(\frac{I}{4}\right)^2 r=\frac{1}{2}I^2 r=(\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2)I\\&=\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)l^2 B\cdot\frac{2F}{lB}=Fl(\omega_1-\omega_2)\end{aligned}$$

显然

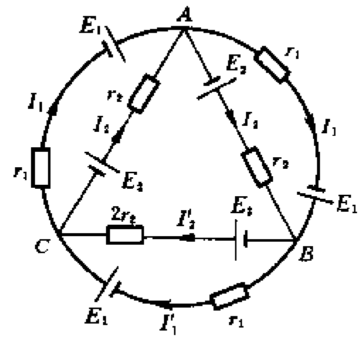
$$P=P_1+P_2$$

【题 12】 如电图3－12－1 所示，由匀质细导线弯成的半径为 a 的圆线圈和一内接等边三角形电阻丝构成的电路，电路中各段电阻值已在电图 3－12－1 中标明．在圆线圈所在平面内有垂直纸面向里的匀强磁场 $\boldsymbol{B}$，B 随时间 t 均匀地减小，其变化率的大小为已知常量 k，设 $2r_1=3r_2$．试求电图 3－12－1 中 A、B 两点之间的电势差 U_{AB}．

【分析】 磁场随时间变化，导致磁通量变化，使得圆线圈和三角形电阻丝内分别有感应电动势 $\mathscr{E}_c$ 和 $\mathscr{E}_t$．由于对称性，三条圆弧各有电动势 $\mathscr{E}_1=\frac{1}{3}\mathscr{E}_c$，三角形的三边各有电动势 $\mathscr{E}_2=\frac{1}{3}\mathscr{E}_t$．于是可将电图 3－12－1 中的电路改画如电图 3－12－2，再根据对称性标明各支路的电流大小和方向，利用直流电路的基尔霍夫定律即可求解．



电图 3－12－1



电图 3－12－2

【解】 由电图 3－12－1 中 $\boldsymbol{B}$ 的方向及均匀减小，可知圆周上感应电动势的方向为顺时针（见电图 3－12－2），大小为

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_c&=-\frac{\mathrm{d}\Phi_c}{\mathrm{d}t}\\&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(B\pi a^2)=\pi a^2\left(-\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\right)=k\pi a^2\end{aligned}$$

其中用到已知的 $k=-\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$．三角形周边上的感应电动势的方向也是顺时针，大小为

$$\mathscr{E}_t=-\frac{\mathrm{d}\Phi_t}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(B\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}a\cdot\sqrt{3}a\right)$$
$$=-\frac{3}{4}\sqrt{3}a^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=\frac{3}{4}\sqrt{3}k\ a^2$$

因对称性，$\mathscr{E}_c$ 可等分为三段圆弧上的三个 $\mathscr{E}_1$，大小为

$$\mathscr{E}_1=\frac{1}{3}\mathscr{E}_c=\frac{1}{3}k\pi a^2$$

同样，$\mathscr{E}_t$ 可等分为三角形三边上的三个 $\mathscr{E}_2$，大小为

$$\mathscr{E}_2=\frac{1}{3}\mathscr{E}_t=\frac{\sqrt{3}}{4}ka^2$$

电路中电源、电阻和电流的分布如电图 3－12－2 所示，由基尔霍夫定律，有

$$\begin{cases}I_1+I_2=I'_1+I'_2\\2I_1r_1+I'_1r_1-3\mathscr{E}_1=0\\2I_2r_2+2I'_2r_2-3\mathscr{E}_2=0\\I_1r_1-I_2r_2-\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2=0\end{cases}$$

已知

$$r_2=\frac{2r_1}{3}$$

把上式及 $\mathscr{E}_1$ 和 $\mathscr{E}_2$ 的结果代入方程，得

$$\begin{cases}I'_1+I'_2=I_1+I_2 & (1)\\2I_1+I'_1=\dfrac{k\pi a^2}{r_1} & (2)\\I_2+I'_2=\dfrac{9\sqrt{3}ka^2}{16r_1} & (3)\\3I_1-2I_2=\left(\pi-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)\dfrac{ka^2}{r_1} & (4)\end{cases}$$

由(1)、(2)、(3)式，消去 I'_1 和 I'_2，得

$$3I_1+2I_2=\left(\pi+\frac{9}{16}\sqrt{3}\right)\frac{ka^2}{r_1}$$

上式与(4)式联立，解出

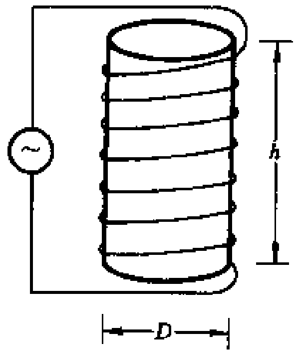
$$I_1=\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{32}\right)\frac{ka^2}{r_1}$$

故 A、B 两点的电势差为

$$U_{AB}=I_1r_1-\mathscr{E}_1=-\frac{\sqrt{3}}{32}ka^2$$

【题 13】 如图所示，一圆柱形金属块放在高频感应炉中加热．设感应炉的线圈产生的磁场是均匀的，磁感应强度的方均根值为 B，频率为 f．金属圆柱的直径为 D，高为 h，电导率为 σ，圆柱的轴与磁场平行．设涡电流产生的磁场可以忽略．试证明在金属圆柱内因涡电流产生的平均热功

率为 $\overline{P}=\frac{1}{32}\pi^3 f^2\sigma B^2 D^4 h$.



电图 3－13－1

【分析】 交变电流产生的交变磁场(均匀,方向沿圆柱的轴,但其大小随时间变化)引起了涡旋电场(又称有旋电场),导致金属圆柱中的涡电流.

把金属圆柱看作由许多同轴的薄圆柱筒构成．每一个圆柱筒中因磁通量变化产生的感应电动势及该圆柱筒的电阻,确定了在该圆柱筒中涡电流产生的瞬时热功率．积分,可得出整个金属圆柱因涡电流产生的瞬时热功率,再求其在一个周期内的平均值就是平均热功率．

【解】 把金属圆柱体分解为许多同轴的薄圆柱筒,其中任一圆柱筒的半径为 r,厚为 $\mathrm{d}r$. 则该圆柱筒中的磁通量为

$$\Phi=B^*\pi r^2$$

式中 B^* 是感应线圈产生的磁场的瞬时值,为

$$B^*=B_0\cos\omega t$$

B^*随时间变化使磁通量 Φ 随时变化,在该圆柱筒中产生的感应电动势为

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=\pi r^2\omega B_0\cos\omega t$$

该圆柱筒的电阻为

$$R=\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{2\pi r}{h\mathrm{d}r}$$

因此,在该圆柱筒中因涡电流产生的瞬时热功率为

$$\mathrm{d}P=\frac{\mathscr{E}^2}{R}=\frac{1}{2}\pi\omega^2 r^3\sigma h B_0^2\sin^2\omega t\cdot\mathrm{d}r$$

其中

$$\omega=2\pi f$$

代入,得

$$\mathrm{d}P=(2\pi^3 f^2\sigma h B_0^2\sin^2\omega t)r^3\mathrm{d}r$$

整个金属圆柱体因涡电流产生的瞬时热功率为

$$P(t)=\int\mathrm{d}P=2\pi^3 f^2\sigma h B_0^2\sin^2\omega t\int_0^{\frac{D}{2}}r^3\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{32}\pi^3 f^2\sigma D^4 h B_0^2\sin^2\omega t$$

平均热功率为

$$\overline{P}=\frac{1}{T}\int_0^T P(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{32}\pi^3 f^2\sigma D^4 h\cdot\frac{1}{T}\int_0^T B_0^2\sin^2\omega t\,\mathrm{d}t \qquad (1)$$

式中 T 是磁场B^*变化的周期,为

$$T=\frac{1}{f}=\frac{2\pi}{\omega}$$

题设磁场的方均根值为 B,故有

$$B=\left[\frac{1}{T}\int_0^T B^{*2}\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}}$$

即

$$B^2=\frac{1}{T}\int_0^T B^{*2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T B_0^2\cos^2\omega t\ \mathrm{d}t$$

因

$$\int_0^T\cos^2\omega t\ \mathrm{d}t=\int_0^T\sin^2\omega t\ \mathrm{d}t$$

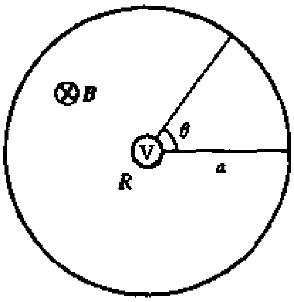
故

$$B^2=\frac{1}{T}\int_0^T B_0^2\sin^2\omega t\ \mathrm{d}t \tag{2}$$

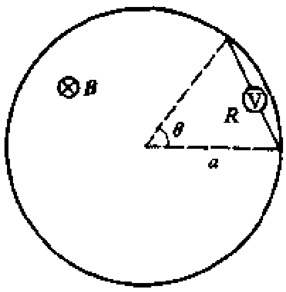
把(2)式代入(1)式，得

$$\overline{P}=\frac{1}{32}\pi^3f^2\sigma B^2D^4h$$

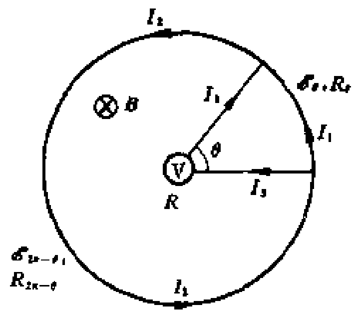
【题 14】 长为$2\pi a$，电阻为 r 的均匀细导线首尾相接形成一个半径为a 的圆．现将电阻为 R 的伏特计，以及电阻可以忽略的导线，按电图 3－14－1 和电图 3－14－2 所示的方式分别与圆的两点相连接．这两点之间的弧线所对圆心角为 θ. 若在垂直圆平面的方向上有均匀变化的匀强磁场，已知磁感应强度的变化率为 $\dot{B}$. 试问在电图 3－14－1 和电图 3－14－2 两种情形，伏特计的读数各为多少．



电图 3－14－1



电图 3－14－2



电图 3－14－3

【分析】 电图 3－14－1 包括两个回路，其一呈扇形，圆的其余部分为另一回路．电图 3－14－2 类似，其一呈圆帽形，另一为其余部分．磁场的变化导致的磁通量变化会在两个回路中分别产生感应电动势．因回路面积不变，磁场变化率 $\dot{B}$又是常量，故感应电动势是恒定的，即相当于直流电源．因而电图 3－14－1 和电图 3－14－2 实际上都是直流电路，利用直流电路的基尔霍夫定律即可确定各支路的电流强度．于是伏特计两端的电压即伏特计的读数可求．

【解】 如电图 3－14－3 所示，它按电图 3－14－1 方式连接，取回路方向为逆时针，设磁场 $\boldsymbol{B}$ 的方向垂直纸面向里(题设 $\boldsymbol{B}$ 的方向垂直圆平面，无论向里或向外都不会影响结果，此处取向里).则圆心角为 θ 的扇形回路及圆心角为$(2\pi-\theta)$的另一回路中的感应电动势分别为

$$\mathscr{E}_\theta=-\frac{\mathrm{d}\Phi_\theta}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S}_\theta)=\dot{B}S\,\frac{\theta}{2\pi}$$

$$\mathscr{E}_{2\pi-\theta}=\dot{B}S\frac{2\pi-\theta}{2\pi}$$

式中 S 是圆面积，为

$$S=\pi a^2$$

圆心角为 θ 与 $(2\pi-\theta)$ 的两圆弧的电阻分别为

$$R_\theta=r\frac{\theta}{2\pi}$$

$$R_{2\pi-\theta}=r\frac{2\pi-\theta}{2\pi}$$

各支路的电流标志如电图 3－14－3 所示，由直流电路的基尔霍夫定律，得

$$\begin{cases}I_2=I_1+I_3\\ \mathscr{E}_\theta=I_1R_\theta-I_3R\\ \mathscr{E}_{2\pi-\theta}=I_2R_{2\pi-\theta}+I_3R\end{cases}$$

消去 I_3，并把 $\mathscr{E}_\theta$ 和 $\mathscr{E}_{2\pi-\theta}$ 的结果代入，得

$$\frac{I_1R_\theta-I_2R+I_1R}{I_2R_{2\pi-\theta}+I_2R-I_1R}=\frac{\mathscr{E}_\theta}{\mathscr{E}_{2\pi-\theta}}=\frac{\theta}{2\pi-\theta}$$

再把 R_θ 和 $R_{2\pi-\theta}$ 的结果代入，经整理，得

$$I_1\left[r\frac{\theta}{2\pi}(2\pi-\theta)+R\pi\right]=I_2\left[r\frac{(2\pi-\theta)}{2\pi}\theta+R\pi\right]$$

即

$$I_1=I_2$$

故

$$I_3=0$$

伏特计读数为零．

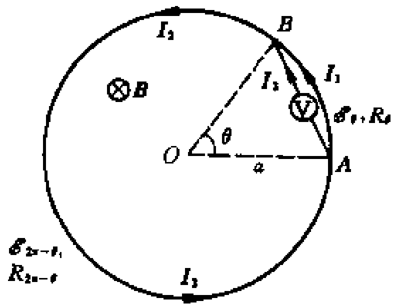
如电图 3－14－4 所示，它按电图 3－14－2 方式连接，取回路方向为逆时针，$\boldsymbol{B}$ 的方向垂直纸面向里．为了利用上面已有的 $\mathscr{E}_\theta,\mathscr{E}_{2\pi-\theta},R_\theta,R_{2\pi-\theta}$ 等结果，使计算简化，图 3－14－4 中圆帽形回路中的感应电动势可以看作扇形回路中的 $\mathscr{E}_\theta$ 与三角形回路中的感应电动势 $\mathscr{E}_{OABO}$ 之差，而除去圆帽形回路之后，圆的其余部分构成的回路中的感应电动势则可看作 $\mathscr{E}_{2\pi-\theta}$（其含义如图 3－14－3）与 $\mathscr{E}_{OABO}$ 之和．其中 $\mathscr{E}_{OABO}$ 为

$$\mathscr{E}_{OABD}=\dot{B}S_{OABO}=\dot{B}\frac{1}{2}a^2\sin\theta$$

各支路的电流已在图 3－14－4 中标明，由直流电路的基尔霍夫定律，得

$$\begin{cases}I_2=I_1+I_3\\ I_1R_\theta-I_3R=\mathscr{E}_{圆帽}=\mathscr{E}_\theta-\mathscr{E}_{OABO}\\ I_2R_{2\pi-\theta}+I_3R=\mathscr{E}_{圆}-\mathscr{E}_{圆帽}=\mathscr{E}_{2\pi-\theta}+\mathscr{E}_{OABO}\end{cases}$$

解出



电图 3－14－4

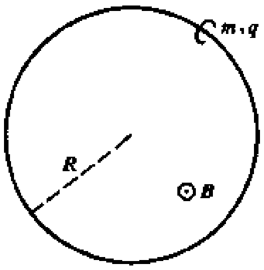
$$I_3=\frac{2\pi^2a^2\dot{B}\sin\theta}{\theta(2\pi-\theta)r+4\pi^2R}$$

故伏特计读数为

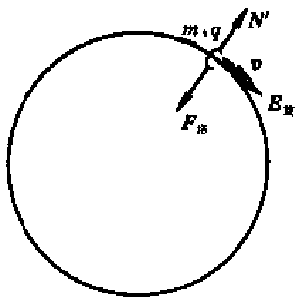
$$V=I_3R=\frac{2\pi^2a^2\dot{B}\sin\theta}{\theta(2\pi-\theta)\frac{r}{R}+4\pi^2}$$

【题 15】 如电图3－15－1所示，在半径为 R 的无限长圆柱形区域内有匀强磁场，磁场 $\boldsymbol{B}$ 的方向与圆柱的轴平行，在电图 3－15－1 中垂直纸平面向外．将半径也是 R 的光滑绝缘细环固定在纸平面上，并正好套住磁场区．在细环上串有一个质量为 m，电量为 $q(q>0)$的带电小珠．设 $t=0$ 时，磁场 $B=0$，小珠在环上静止；$0<t<T$ 时，B 随时间 t 均匀地增长；$t=T$ 时，$B=B_0$；$t>T$ 时，$B=B_0$ 不变．试定量地讨论 $t>0$ 时小珠的运动状态及小珠对圆环的正压力（沿图 3－15－1 中径向）．设电图 3－15－1 中的纸平面为水平面，小珠所受重力与圆环支持力抵消．

【分析】 无限长圆柱形区域内匀强磁场随时间的变化产生涡旋电场，其电场线是以圆柱中央轴为圆心的一系列同心圆．固定细环所在处就是涡旋电场的电场线，因细环绝缘无从形成电流，但串在细环上的带电小珠将受到涡旋电场的作用．涡旋电场对带电小珠的作用力沿细环切向，使小珠获得切向加速度，于是小珠绕细环作圆周运动的速度逐渐增大．随着带电小珠绕细环的运动，小珠还将受到磁场的洛伦兹力（其方向沿径向，指向中心）以及细环的作用力（其方向也沿径向，但由环心外指），两者的矢量和为小珠绕细环的圆周运动提供所需的向心力．所求小珠对细环的正压力正是上述细环对小珠作用力的反作用力．



电图 3－15－1



电图 3－15－2

【解】 由已知条件，在 $0<t\leqslant T$ 时间内，磁场 B 随时间 t 线性地增长，且 $t=0$ 时，$B=0$，$t=T$ 时，$B=B_0$，故有

$$B=B_0\frac{t}{T}$$

在此时间内，B 随 t 的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=\frac{B_0}{T}$$

磁场随时间的变化产生了涡旋电场 $\boldsymbol{E}_{旋}$，其电场线是一系列以圆柱中央轴为圆心的同心圆．由楞次定律，涡旋电场的圆形电场线为顺时针方向，故小珠所在处 $\boldsymbol{E}_{旋}$ 的方向如电图 3－15－2 所

示．$E_{旋}$ 的大小为

$$E_{旋}=\frac{R}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=\frac{B_0R}{2T}$$

由此，带电小珠受到的沿细环切向的涡旋电场的作用力 F_t 为

$$F_t=qE_{旋}=\frac{qB_0R}{2T}$$

相应的切向加速度 a_t 为

$$a_t=\frac{F_t}{m}=\frac{qB_0R}{2mT}$$

因小珠在 $t=0$ 时静止，故在任意 t 时刻小珠绕细环作圆周运动的速度 v 为

$$v=a_t t=\frac{qB_0R}{2mT}t$$

当小珠在 t 时刻以 v 绕细环运动时，所受磁场的洛伦兹力 $\boldsymbol{F}_{洛}$ 指向圆心（见电图 3－15－2），其大小为

$$F_{洛}=qvB=q\cdot\frac{qB_0R}{2mT}t\cdot B_0\frac{t}{T}=\frac{q^2B_0^2Rt^2}{2mT^2}$$

同时，小珠还受到细环的作用力 $\boldsymbol{N}'$（方向见电图 3－15－2），$\boldsymbol{F}_{洛}$ 与 $\boldsymbol{N}'$ 的矢量和提供了小珠绕细环以 v 运动所需的向心力 $\boldsymbol{F}_{心}$（指向环心），$F_{心}$ 的大小为

$$F_{心}=\frac{mv^2}{R}=\frac{q^2B_0^2Rt^2}{4mT^2}$$

由以上两式

$$F_{心}=\frac{1}{2}F_{洛}$$

可见，洛伦兹力 $\boldsymbol{F}_{洛}$ 的一半提供为向心力 $\boldsymbol{F}_{心}$，另一半被 $\boldsymbol{N}'$ 抵消（故 $\boldsymbol{N}'$ 的方向必由环心沿径向外指），即

$$N'=\frac{1}{2}F_{洛}$$

小珠对细环的正压力 $\boldsymbol{N}$ 是 $\boldsymbol{N}'$ 的反作用力，故 $\boldsymbol{N}$ 的方向沿径向指向环心，为压力，其大小为

$$N=\frac{1}{2}F_{洛}=\frac{q^2B_0^2Rt^2}{4mT^2}$$

当 $t>T$ 时，$B=B_0$，保持恒定，故涡旋电场不再存在，$\boldsymbol{E}_{旋}=0$，小珠的切向加速度随之消失，此时小珠将绕细环作匀速圆周运动，其速度 v_0 即为 T 时刻小珠的速度，为

$$v_0=a_tT=\frac{qB_0R}{2m}$$

此时小珠所受洛伦兹力即为 T 时刻所受洛伦兹力，为（在 $F_{洛}$ 公式中取 $t=T$）

$$F_{洛}=\frac{q^2B_0^2R}{2m}$$

此时小珠所需向心力为（在 $F_{心}$ 公式中取 $t=T$，$v=v_0$），

$$F_{心}=\frac{mv_0^2}{R}=\frac{q^2B_0^2R}{4m}$$

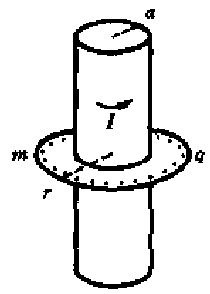
可见仍有

$$F_{心}=\frac{1}{2}F_{洛}$$

即 $F_{洛}$ 的一半提供小珠匀速圆周运动所需向心力，另一半则与此时的 N' 抵消．由于 $t>T$ 时，小珠对细环的正压力 N 仍是 N' 的反作用力，即仍有 $N=-N'$，故 N 的大小为

$$N=\frac{1}{2}F_{洛}=\frac{q^2B_0^2R}{4m}$$

【题 16】 如图所示，在一个半径为 r，质量为 m，可以无摩擦地自由转动的匀质绝缘圆盘中部装有一细长螺线管，其半径为 A，沿轴线方向单位长度上绕有 n 匝线圈，线圈中通以稳恒电流 I．在圆盘的边缘上均匀地嵌着 N 个带等量正电荷 q 的小球．设开始时，螺线管中的电流为 I，圆盘静止，然后将电流切断．试求圆盘转动的角速度．



电图 3-16-1

【分析】 电流切断后，在短暂的 Δt 时间内，螺线管线圈中的电流由 I 降为零，同时磁场相应减小，产生感应的环状涡旋电场（又称有旋电场），涡旋电场对 N 个带电小球的切向作用力形成力矩，推动圆盘转动．利用刚体的角动量定理，即可求出圆盘所获得的角速度．

【解】 设螺线管电流切断后，在 Δt 时间内电流从 I 减为零，在此过程中任意时刻 t 的电流表为 $i(t)$，则在 t 时刻由 $i(t)$ 产生的磁场 $B(t)$ 为

$$B(t)=\mu_0 n i(t)$$

$\boldsymbol{B}$ 的方向沿轴向，$B(t)$ 将随 $i(t)$ 减小为零．变化的 $B(t)$ 产生环状涡旋电场，在 r 处的涡旋电场 $E(t)$ 应满足

$$\begin{aligned}E(t)2\pi r &=\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\\&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[B(t)S]=-S\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B(t)=-\pi a^2\mu_0 n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t)\end{aligned}$$

即

$$E(t)=-\frac{a^2}{2r}\mu_0 n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t)$$

因 $i(t)$ 随时间减小，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t)<0$，$E(t)>0$，即涡旋电场 $\boldsymbol{E}(t)$ 的方向与电流的方向一致．

在半径为 r 的圆周上嵌着的 N 个带电小球所受的总切向力为

$$F(t)=NqE(t)=-\frac{a^2}{2r}\mu_0 nNq\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t)$$

它相对转轴形成的力矩为

$$M(t)=F(t)r=-\frac{1}{2}a^2\mu_0 nNq\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t)$$

由刚体的角动量定理，在电流从 I 减小为零的 Δt 时间内，刚体所获得的全部冲量矩等于它的角动量的增量．因开始时刚体（圆盘）静止，角动量为零，故有

$$J\omega=\int_0^{\Delta t}M(t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}a^2\mu_0 nNq\int_0^{\Delta t} -\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}a^2\mu_0 nNq\int_I^0 -\mathrm{d}i(t) = \frac{1}{2}a^2\mu_0 nNqI$$

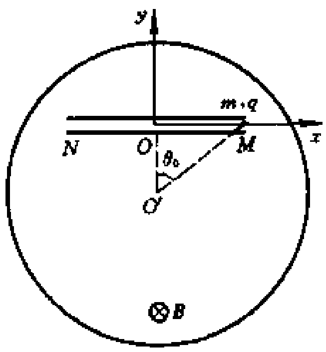
圆盘绕轴的转动惯量 J 为

$$J = \frac{1}{2}mr^2$$

代入上式，得出电流降为零后，圆盘转动的角速度 ω 为

$$\omega = \frac{a^2\mu_0 nNqI}{mr^2}$$

【题 17】 如电图3－17－1所示，一圆柱形区域内的匀强磁场 $\boldsymbol{B}$ 随时间 t 变化．在磁场区域内垂直于 $\boldsymbol{B}$ 的 Oxy 平面上有一光滑绝缘的细空心管 MN，它固定在 x 轴上并相对 y 轴对称．MO' 与 OO' 之间的夹角为 θ_0，其中 O' 是磁场区域中央轴与 xy 平面的交点．在管 MN 内有一质量为 m，电量为 $q(q>0)$ 的光滑小球．$t=0$ 时小球静止在 M 位置．设 $\boldsymbol{B}$ 的方向如电图 3－17－1 所示，其大小随 t 的变化规律为 $B = B_0\sin\omega t$，其中 B_0 和 ω 均为正的常量．设 $\boldsymbol{B}$ 的这种变化规律刚好能使小球在 MN 之间以 O 为中心，以 MN 长度之半为振幅作简谐振动．



电图 3－17－1

1．试确定小球简谐振动的圆频率 $\omega_{球}$ 与 m,q,θ_0,B_0 之间的关系．

2．设 MN 长为 $2R$．试求管 MN 受到小球作用力的 y 分量 N_y 与小球位置 x 之间的函数关系，画出 $N_y(x)$ 曲线，并标出曲线上的特征点．

【分析】 变化的磁场产生环状涡旋电场，使带电小球受涡旋电场的作用力沿管运动．同时，沿管运动的带电小球还要受到磁场的洛伦兹力以及管的作用力，但这两个力均无 x 分量．因此，小球沿管（即沿 x 轴）的运动仅由涡旋电场作用力的 x 分量确定．现已知小球沿管作简谐振动，于是其圆频率 $\omega_{球}$ 可求．

小球所受涡旋电场作用力的 y 分量及洛伦兹力的 y 分量之和应与管对小球在 y 方向的支持力平衡，该支持力的反作用力就是小球对管作用力的 y 分量 N_y．

【解】 如电图 3－17－2 所示，当小球在管中任意位置 x 时，设该处的涡旋电场为 E，则

$$E\cdot 2\pi r = \mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\pi r^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

$$= -\pi r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B_0\sin\omega t = -\pi r^2 B_0\omega\cos\omega t$$

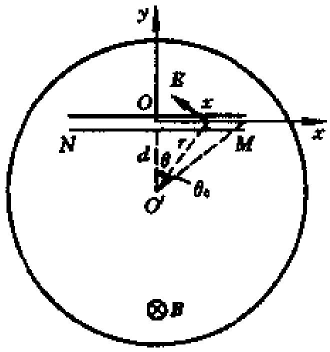
故

$$E = -\frac{1}{2}rB_0\omega\cos\omega t$$

式中 r 是小球在 x 位置时与 O' 的距离（见电图 3－17－2），式中的负号表示 $\boldsymbol{E}$ 的方向如电图 3－17－2 所示，即 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的变化构成左手螺旋．

因此，$\boldsymbol{E}$ 的 x 分量为

$$E_x = -|E|\cos\theta = -\frac{1}{2}B_0\omega r\cos\theta\cos\omega t$$



电图 3－17－2

式中 θ 是 $O'x$ 与 $O'O$ 的夹角．小球在 x 位置时，涡旋电场作用力的 x 分量为

$$F_x = qE_x = -\frac{1}{2}qB_0\omega d\ \cos\omega t$$

式中

$$d = OO' = r\cos\theta$$

小球所受洛伦兹力及管作用力均无 x 分量，故小球在 x 方向的加速度为

$$a_x = \frac{F_x}{m} = -\frac{1}{2m}qB_0\omega d\ \cos\omega t \tag{1}$$

已知小球沿管作简谐振动，即

$$x = A\ \cos\omega_{球} t$$

式中

$$A = \frac{1}{2}MN = R$$

故

$$a_x = -A\omega_{球}^2\cos\omega_{球} t \tag{2}$$

由(1)、(2)式，得

$$\omega_{球} = \omega$$

$$A\omega_{球}^2 = \frac{1}{2m}qB_0\omega d$$

又有

$$d = \frac{\frac{1}{2}MN}{\tan\theta_0} = \frac{A}{\tan\theta_0}$$

由以上三式，得

$$\omega_{球} = \omega = \frac{qB_0}{2m\tan\theta_0}$$

小球所受涡旋电场作用力的 y 分量为

$$F_y(1) = qE\sin\theta = \frac{1}{2}qB_0\omega r\sin\theta\cos\omega t = \frac{qB_0\omega x^2}{2A}$$

其中用到几何关系

$$x = r\sin\theta$$

及

$$x = A\ \cos\omega t,\quad A = \frac{1}{2}MN = R$$

可见 $F_y(1) > 0$，它表明 $F_y(1)$ 沿 y 轴正方向．

小球所受洛伦兹力沿 y 方向，无 x 分量，为

$$F_y(2)=qvB=q(-\omega_{球}A\sin\omega t)B_0\sin\omega t$$

$$=-qB_0\omega A\sin^2\omega t=-qB_0\omega A(1-\cos^2\omega t)=-qB_0\omega\frac{(A^2-x^2)}{A}$$

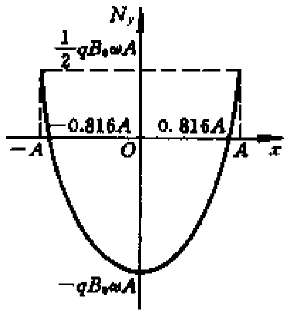
可见 $F_y(2)<0$，即洛伦兹力沿 y 轴负方向．

小球在 y 方向还受管的支持力，因三力平衡，故管对小球的支持力为 $-[F_y(1)+F_y(2)]$，于是，小球对管的作用力为

$$N_y=F_y(1)+F_y(2)=qB_0\omega\frac{(3x^2-2A^2)}{2A}$$

$$=qB_0\frac{qB_0}{2m\tan\theta_0}\cdot\frac{(3x^2-2A^2)}{2A}=\frac{q^2B_0^2(3x^2-2A^2)}{4Am\tan\theta_0}$$

$N_y(x)$ 曲线如电图 3-17-3 所示．当 $x=0$ 时，$N_y=-qB_0\omega A$；当 $N_y=0$ 时，$x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}A=\pm0.816A$；当 $x=\pm A$ 时，$N_y=\frac{1}{2}qB_0\omega A$.

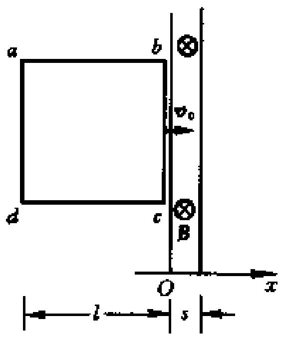


电图 3-17-3

【题 18】 如图所示，在光滑的水平面上，有边长为 $l=0.8$ m 的正方形导线框，其质量 $m=100$ g，自感 $L=10^{-3}$ V·s/A，电阻可忽略不计．在 $t=0$ 时，线框右侧 bc 边所在位置刚好是匀强磁场区域的左边界，磁场区域的宽度为 $s=0.2$ m，$\boldsymbol{B}$ 的方向垂直纸面（即水平面）向里，$B=0.5$ T. 如图，取 $t=0$ 时 bc 边所在位置为坐标原点 O，取 x 轴与 bc 边垂直．导线框以沿 x 轴正方向的初速 v_0 运动．忽略空气阻力．

1. 设 $v_0=4$ m/s，试求 $t=\frac{\pi}{36}$ s 时刻，bc 边所在的位置 x_c.

2. 设 $v_0=\frac{16}{\sqrt{3}}$ m/s，试求 $t=\frac{\pi}{36}$ s 时刻 bc 边所在的位置 x_c.



电图 3-18-1

【分析】 导线框的 bc 边进入磁场区域后，因切割磁感线而产生感应电动势（动生电动势），使导线框回路中形成电流，进而激起自感电动势．由于回路的电阻可略，动生电动势与自感电动势应达到平衡，由此可确定回路中的电流．通过 bc 的电流在磁场中会受到安培力的作用，它阻碍导线框的运动．由牛顿第二定律确定导线框的运动后，即可求出两种不同初速度相应的 x_c 值．

【解】 设任意时刻 t，bc 边在磁场区域中的运动速度为 v，则在导线框回路中产生的逆时针方向的动生电动势为 Blv，由此在回路中形成逆时针方向的感应电流 i，i 又在回路中激起顺时针方向的自感电动势 $L\frac{di}{dt}$，因回路电阻可略，两种电动势应达到平衡，故有

$$L\frac{di}{dt}=Blv$$

其中 bc 的速度 v 为

$$v=\frac{dx}{dt}$$

代入，得

$$Ldi=Bldx$$

初始条件为 $t=0$ 时，$x=0$，$i=0$，积分，得

$$Li=Blx$$

在 bc 边中电流 i 从 c 流向 b，它使 bc 边受磁场的安培力作用，其方向沿 x 轴负方向(即为阻力)，其大小为

$$F_x=-Bil=-\frac{B^2l^2}{L}x$$

这是一个线性回复力．因此，当 bc 边处在磁场区域中时，导线框将沿 x 轴作简谐振动，振动周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{mL}{B^2l^2}}=\frac{2\pi\sqrt{mL}}{Bl}=\frac{\pi}{20}\ \text{s}$$

导线框的位置 x、速度 v 随时间 t 变化的关系为

$$\begin{cases}x=A\cos(\omega t+\varphi)\\ v=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)\end{cases}$$

其中

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=40\ \text{s}^{-1}$$

由初始条件 $t=0$ 时，$x=0$，$v=v_0>0$，得

$$\varphi=-\frac{\pi}{2},\quad A=\frac{v_0}{\omega}$$

代入，得

$$\begin{cases}x=A\sin\omega t\\ v=v_0\cos\omega t\end{cases}$$

1．设 $v_0=4$ m/s，则简谐振动的振幅为

$$A=\frac{v_0}{\omega}=0.1\ \text{m}=\frac{s}{2}$$

在这种情形，bc 边可到达 $\frac{s}{2}$ 处，然后返回 $x=0$ 处，所需时间为

$$t_1=\frac{T}{2}=\frac{\pi}{40}\ \text{s}$$

bc 边返回 $x=0$ 处的速度为 $v=-v_0$．尔后 bc 边继续沿 x 轴负方向作匀速直线运动(因已离开磁场区域)，在 $t=\frac{\pi}{36}$s 时刻，bc 边的位置为

$$\begin{aligned}x_c&=v(t-t_1)\\&=-4\left(\frac{\pi}{36}-\frac{\pi}{40}\right)=-0.035\ \text{m}\end{aligned}$$

2．设 $v_0=\frac{16}{\sqrt{3}}$m/s，则简谐振动的振幅为

$$A=\frac{v_0}{\omega}=\frac{2}{5\sqrt{3}}\ \text{m}=0.231\ \text{m}>s$$

在这种情形，bc 边到达 $x=s$(磁场右边界)的时刻为

$$t_1=\frac{1}{\omega}\arcsin\frac{s}{A}=\frac{1}{40}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{120}\text{ s}$$

bc 边到达 $x=s$ 处的速度为

$$v=v_0\cos\omega t_1=\frac{v_0}{2}=\frac{8}{\sqrt{3}}\text{ m/s}$$

此后，因 bc 已出磁场区域，继续沿 x 轴正方向以 v 作匀速直线运动，故在 $t=\frac{\pi}{36}$ s 时刻，bc 边的位置为

$$x_c=s+v(t-t_1)=0.2+\frac{8}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{36}-\frac{\pi}{120}\right)=0.482\text{ m}<l$$

【题 19】 由半径为 1 mm 的导线构成的半径为 10 cm 的圆形线圈处于超导状态．开始时，线圈内通有 100 A 的电流．一年后测出线圈内电流的减小量不足 10^{-6} A，试粗略估算此线圈电阻率的上限．

【分析】 线圈中电流 $I(t)$ 随时间的减小，使得所产生的磁场减小，通过线圈的磁通量相应减小，导致自感电动势．因此，由欧姆定律和电磁感应定律即可确定线圈中不断减少的电流所遵循的方程．

涉及的自感系数的定义是 $L=\frac{\Phi}{I}$，当电流为 $I(t)$ 时，由它产生的磁场即可得出磁通量 Φ．在圆平面内各处的磁场并不均匀，以靠近线圈处的 B 为最大，可以此作估算．为了求得圆平面内靠近线圈处的磁场，可近似采用无限长直载流导线的磁场公式．至于电阻率 ρ 与电阻 R 的关系是熟知的．于是可解．

【解】 设在任意时刻 t，线圈中的电流为 $I(t)$，则由电磁感应定律和欧姆定律得，

$$\mathscr{E}=-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=IR \tag{1}$$

式中 L 为线圈的自感系数，定义为

$$L=\frac{\Phi}{I}$$

式中 Φ 是通过线圈的磁通量．

当线圈中的电流为 $I(t)$ 时，它在圆平面内各处产生的磁场并不均匀，以靠近线圈处的 B 为最大．该 B 可由沿导线中轴的无限长直载流为 $I(t)$ 的导线在 r_1 处（即在导线边缘处）产生的磁场来近似，即

$$B(r_1)=\frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}$$

圆平面内其余各处的磁场均小于 $B(r_1)$．于是，磁通量

$$\Phi<B(r_1)\cdot\pi r_2^2=\frac{\mu_0 r_2^2}{2r_1}I(t)$$

式中 r_2 是圆线圈的半径，r_1 是导线的半径．故有

$$L=\frac{\Phi}{I}<\frac{\mu_0 r_2^2}{2r_1} \tag{2}$$

线圈电阻 R 与电阻率 ρ 的关系是

$$R=\rho\frac{2\pi r_2}{\pi r_1^2}=\rho\frac{2r_2}{r_1^2} \tag{3}$$

把(2)、(3)式代入(1)式，得

$$\rho<-\frac{\mu_0 r_1 r_2}{4I}\cdot\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

由题设条件

$$-\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}<\frac{10^{-6}\,\mathrm{A}}{365\times24\times3\,600\,\mathrm{s}}\approx3.2\times10^{-14}\,\mathrm{A/s}$$

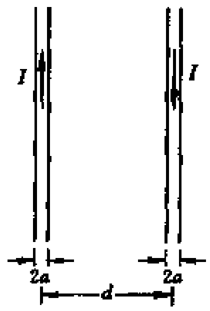
又已知 $r_1=10^{-3}\,\mathrm{m}$，$r_2=10^{-1}\,\mathrm{m}$，$I\approx100\,\mathrm{A}$ 把以上数据代入(4)式，得出

$$\rho<1.0\times10^{-26}\,\Omega\cdot\mathrm{m}$$

这就是超导线圈电阻率 ρ 的上限．

【题 20】 如图所示，两根半径均为 $a=1\,\mathrm{cm}$ 的长直圆柱形导线平行放置，两导线中央轴之间的距离为 $d=20\,\mathrm{cm}$．在两导线中有电流强度均为 $I=20\,\mathrm{A}$ 的反向恒定电流．

1．试求两导线之间每单位长度的自感系数．2．若将两导线保持平行地缓慢分开到相距 $d'=40\mathrm{cm}$．试求磁场对单位长度导线所作的功．3．试问移动后两导线单位长度的自感磁能改变了多少？是增加还是减少？试说明能量的来源或去向．



电图 3-20-1

【分析与解】 1．两平行长直导线中电流反向，形成了无限长的矩形回路，因而具有自感．在两导线之间取一矩形区域，其宽度为 $(d-2a)$，其高为 l，则单根载流导线在该区域的磁通量 Φ_1 和 Φ_2 应为

$$\Phi_1=\Phi_2=\int_a^{d-a}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}l\,\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\frac{d-a}{a}$$

该区域的总磁通量为

$$\Phi_l=\Phi_1+\Phi_2=\frac{\mu_0 Il}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$$

故两导线之间单位长度的自感系数为

$$L=\frac{1}{l}\cdot\frac{\Phi_l}{I}=\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$$

把有关数据代入，得

$$L=4\times10^{-7}\ln19\,\mathrm{H}=1.2\times10^{-6}\,\mathrm{H}$$

2．为了方便，设左侧导线不动，右侧导线平行移动，两者的间距从 d 增大为 d'．右侧导线受左侧导线的安培力，方向向右（斥力），单位长度受力的大小为

$$F_\mathrm{m}=IB$$

在移动过程中，上述安培力作功为

$$A=\int_d^{d'}F_\mathrm{m}\mathrm{d}r=\int_d^{d'}IB\,\mathrm{d}r$$

式中 B 是左侧载流导线在右侧导线中（近似取为中央轴线处）的磁感应强度，为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

式中 r 是两导线的间距．代入，得

$$A=\int_d^{d'}\frac{\mu_0 I^2}{2\pi r}\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln\frac{d'}{d}=5.5\times10^{-5}\ \mathrm{J}$$

这就是两导线间距从 d 增为 d' 过程中，磁场对单位长度载流导线所作的功．

3．两导线相距为 d 时，单位长度的自感磁能为

$$W_1=\frac{1}{2}LI^2$$

两导线相距为 d' 时，单位长度的自感磁能为

$$W_2=\frac{1}{2}L'I^2$$

式中的 L 和 L' 分别为

$$L=\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$$

$$L'=\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d'-a}{a}$$

因此，移动后，自感磁能的增量为

$$\Delta W=W_2-W_1=\frac{1}{2}(L'-L)I^2$$

$$=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln\frac{d'-a}{d-a}\approx\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln\frac{d'}{d}$$

因 $d'>d$，故移动后，自感磁能增大了（$\Delta W>0$）．自感磁能的增量 ΔW 应近似等于移动过程中磁场对载流导线所作的功，即

$$\Delta W\approx A=5.5\times10^{-5}\ \mathrm{J}$$

上述 A 和 ΔW 均来源于在移动过程中电源为保持电流 I 不变，克服自感电动势所作的功．现证明如下．

两平行载流长直导线单位长度的自感系数 L 的定义为

$$L=\frac{\Phi}{I}$$

在移动过程中，确保 I 不变，因 L 变化引起 Φ 变化，产生的自感电动势为

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-I\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$$

在移动过程中，电源为克服此自感电动势所需作的功为

$$A_{总}=-\int_d^{d'}\mathscr{E}I\mathrm{d}t=\int_d^{d'}I^2\mathrm{d}L=I^2(L'-L)$$

即

$$A_{总}=\frac{1}{2}I^2(L'-L)+\frac{1}{2}I^2(L'-L)=A+\Delta W$$

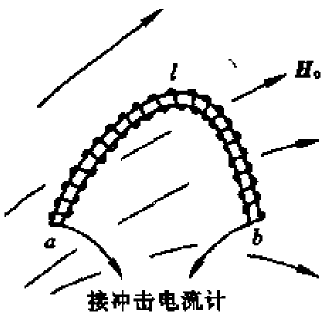
可见，$A_{总}$ 中的一半用于增加自感磁能，另一半用来通过磁场对导线作功．后一半能量或是转化为导线的动能（这是指导线受磁场作用力加速运动的情形），或转化为其他形式的能量（如在本题

中,导线缓慢移动,其动能基本不变,这就需有一个与磁场作用力大小相等方向相反的阻力,后一半能量即用来克服此阻力作功,转化为其他形式能量).

【题 21】 一种磁位计的结构如电图3－21－1所示．在一条非磁性材料做的细软带上,均匀密绕着线圈,线圈的两端接在冲击电流计上．把磁位计放在某磁场中,突然把产生磁场的电流切断,使 $\boldsymbol{H}$ 迅速变为零,由冲击电流计测出整个过程中迁移的电量为 q,即可得出原来的磁场沿软带的磁位降．试证明,原来磁场从软带一端的 a 点沿软带到另一端 b 点的磁位降为

$$\int_{(l)a}^{b}\boldsymbol{H}_0\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{Rq}{\mu_0 Sn}$$

式中 l 为软带长度,S 为软带截面积,n 为软带单位长度上缠绕的线圈匝数,R 为电路的总电阻(包括线圈电阻和冲击电流计电路中的电阻).



电图 3－21－1

【分析】 磁场变化引起感应电动势和感应电流,导致电量的迁移．由感应电动势及自感电动势,利用欧姆定律,即可确定在此瞬态过程中感应电流变化所遵循的方程．迁移的电量就是在此过程中感应电流对时间的积分．

【解】 设 $t=0$ 时刻开始切断产生磁场的电流,$t>0$ 时有非零的感应电流 $i(t)$,持续到 $t=\tau$ 时刻,$i(t)$降为零．则在此过程中冲击电流计测出的迁移的总电量为

$$q=\int_0^{\tau}i(t)\mathrm{d}t$$

$i(t)$产生于感应电动势 $\mathscr{E}$,$i(t)$的变化又引起自感电动势,设线圈的自感为 L,则由欧姆定律,$i(t)$所遵循的方程为

$$\mathscr{E}=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+iR$$

如电图 3－21－2 所示,在软带中任取 $\mathrm{d}l$,它对 $\mathscr{E}$ 的贡献为

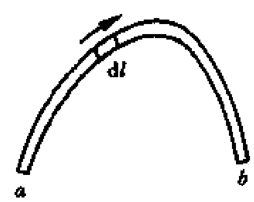
$$\mathrm{d}\mathscr{E}=-n\mathrm{d}l\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S})$$

式中 $n\mathrm{d}l$ 是 $\mathrm{d}l$ 长度上的线圈匝数,$(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S})$是单匝磁通量,$\boldsymbol{S}$ 的方向即为 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的方向,故

$$\boldsymbol{S}=S\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}l}$$

S 是软带的截面积,为常量．代入,得

$$\mathrm{d}\mathscr{E}=-nS\mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}$$



电图 3－21－2

对于非磁性材料

$$\mu_r\approx 1.0$$

故

$$\boldsymbol{B}=\mu_r\mu_0\boldsymbol{H}=\mu_0\boldsymbol{H}$$

代入,得

$$d\mathscr{E} = -\mu_0 nSd\boldsymbol{l}\cdot\frac{d\boldsymbol{H}}{dt}$$

因此,感应电动势为

$$\mathscr{E} = \int_{\substack{a\\(l)}}^{b} d\mathscr{E} = -\mu_0 nS\int_{\substack{a\\(l)}}^{b} d\boldsymbol{l}\cdot\frac{d\boldsymbol{H}}{dt} = -\mu_0 nS\frac{d}{dt}\int_{\substack{a\\(l)}}^{b}\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}$$

迁移的总电量 q 为

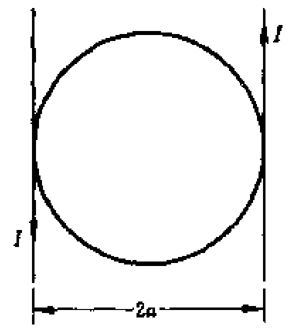
$$\begin{aligned} q &= \int_0^{\tau} i(t)dt = \int_0^{\tau}\left[-\frac{L}{R}\frac{di}{dt}+\frac{\mathscr{E}}{R}\right]dt = -\frac{L}{R}\int_0^{\tau}di + \frac{1}{R}\int_0^{\tau}\mathscr{E}dt \\ &= -\frac{L}{R}[i(\tau)-i(0)] - \frac{\mu_0 nS}{R}\int_0^{\tau}\left[\frac{d}{dt}\int_{\substack{a\\(l)}}^{b}\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}\right]dt \\ &= -\frac{\mu_0 nS}{R}\int_0^{\tau}d\left[\int_{\substack{a\\(l)}}^{b}\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}\right] \\ &= -\frac{\mu_0 nS}{R}\left[\int_{\substack{a\\(l)}}^{b}\boldsymbol{H}(\tau)\cdot d\boldsymbol{l} - \int_{\substack{a\\(l)}}^{b}\boldsymbol{H}(0)\cdot d\boldsymbol{l}\right] = \frac{\mu_0 nS}{R}\int_{\substack{a\\(l)}}^{b}\boldsymbol{H}_0\cdot d\boldsymbol{l} \end{aligned}$$

其中用到 $i(0)=0, i(\tau)=0$,及 $\boldsymbol{H}(0)=\boldsymbol{H}_0, \boldsymbol{H}(\tau)=0$. 于是得出原来磁场沿软带从 a 点到 b 点的磁位降为

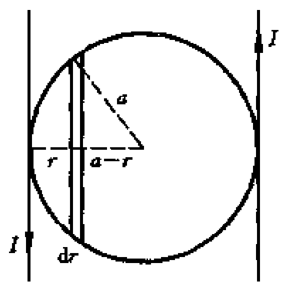
$$\int_{\substack{a\\(l)}}^{b}\boldsymbol{H}_0\cdot d\boldsymbol{l} = \frac{Rq}{\mu_0 Sn}$$

【题 22】 如电图3－22－1所示,两根无限长直载流导线互相平行,相距 $2a$,两导线中的电流彼此反向,电流强度相同. 在两平行长直导线所在的平面内有一半径为 a 的圆环,圆环刚好在两平行长直导线之间并且彼此绝缘. 试求圆环与两平行长直导线之间的互感系数.

【分析】 两平行长直导线中电流相同而反向,可视为在无穷远连通的闭合回路. 设其中电流为 I,设两平行长直导线构成的闭合载流回路所产生的磁场通过圆环的磁通量为 Φ,则 Φ 与 I 之比即为其间的互感系数.



电图 3－22－1



电图 3－22－2

【解】 如电图3－22－2,设在无穷远连通的两平行长直导线构成的闭合回路中的电流为 I,则在此闭合回路平面中,与其中一根长直载流导线相距为 r 处的磁场为

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{2a-r}\right)$$

$B(r)$的方向与回路平面垂直．因此，通过半圆环面的磁通量为

$$\Phi' = \iint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

$$= \int_0^a \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2a - r}\right) 2\sqrt{a^2 - (a - r)^2}\,\mathrm{d}r = \mu_0 I a$$

通过整个圆环面的全部磁通量为

$$\Phi = 2\Phi' = 2\mu_0 I a$$

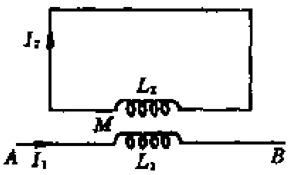
故两平行长直导线与嵌在其间的圆环之间的互感系数为

$$M = \frac{\Phi}{I} = 2\mu_0 a$$

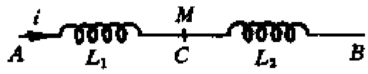
【题 23】 两个载流线圈彼此很靠近，则一个线圈中的电流变化会在另一个线圈中产生感生电动势．衡量载流线圈之间这种作用的物理量是互感系数 M，当第一个和第二个线圈中的电流强度分别为 $I_1(t)$和 $I_2(t)$时，在第一和第二线圈中产生的感生电动势分别为 $\pm M\dfrac{\mathrm{d}I_2(t)}{\mathrm{d}t}$和 $\pm M\dfrac{\mathrm{d}I_1(t)}{\mathrm{d}t}$，感生电动势的符号由楞次定律确定．

根据以上说明，试计算电图 3-23-1 系统的等效电感 L_{AB}．如果使一个线圈反向缠绕，结果是否会变化，怎样变化？互感系数 M 的最大值是多少？

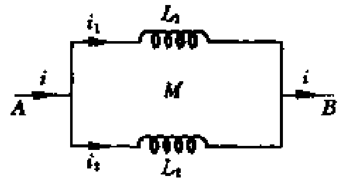
试再计算电图 3-23-2 和电图 3-23-3 两个系统的等效电感 L_{AB}．如果使电感为 L_1 的线圈反向缠绕，结果如何？



电图 3-23-1



电图 3-23-2



电图 3-23-3

【分析】 在三个电路中，A 和 B 两端的等效电感 L_{AB}是指其间的电压 U_{AB}与电流变化率$\left(\text{电图 3-23-1 是}\dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}\text{，电图 3-23-2 和电图 3-23-3 是}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right)$之比．根据电路的特点，考虑自感电动势和互感电动势即可求解．电图 3-23-2 和电图 3-23-3 分别是电感的串联和并联．

【解】 设电流方向如电图 3-23-1 所示，则对上方的环路和下方的通路分别有

$$L_2\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} \pm M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$U_{AB} = L_1\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \pm M\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}$$

按楞次定律，根据线圈的缠绕方向，以上两式中互感电动势项的符号应都取正或都取负．于是可得

$$U_{AB} = L_1\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \pm (\mp M^2)\frac{1}{L_2}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right)\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$$

可见,无论线圈的缠绕方向如何,系统的等效电感都是

$$L_{AB}=L_1-\frac{M^2}{L_2}$$

由于电感 L 总是正值(若 $L<0$,因载流线圈的能量为$\frac{1}{2}LI^2$,故电流越大,能量越小．若耗能器如加热器中包含这种线圈,则伴随着能量的消耗,线圈中电流会越来越大,导致无限耗能,这显然是不合理的),故

$$L_1-\frac{M^2}{L_2}\geqslant 0$$

即

$$M\leqslant\sqrt{L_1L_2}$$

可见两个线圈之间的互感系数不可能超过两线圈自感系数乘积的开方．

电图 3－23－2 是电感的串联．设电流方向如电图 3－23－2 所示,则有

$$\begin{aligned}U_{AB}&=U_{AC}+U_{CB}\\&=\left(L_1\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right)+\left(L_2\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right)=(L_1+L_2+2M)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

故系统的等效电感为

$$L_{AB}=L_1+L_2+2M$$

若电感为 L_1 的线圈反向缠绕,由楞次定律,上述 U_{AC}和U_{CB}的表达式中,互感电动势项的符号应为负,于是

$$L_{AB}=L_1+L_2-2M$$

电图 3－23－3 是电感的并联．设电流方向如电图 3－23－3 所示,则有

$$\begin{cases}i=i_1+i_2,\text{或 }\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\\U_{AB}=L_1\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}-M\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}(\text{上方支路})\\U_{AB}=L_2\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}-M\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}(\text{下方支路})\end{cases}$$

由第二和第三式,得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}=\dfrac{L_2+M}{L_1L_2-M^2}U_{AB}\\\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}=\dfrac{L_1+M}{L_1L_2-M^2}U_{AB}\end{cases}$$

代人第一式,得

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{L_1+L_2+2M}{L_1L_2-M^2}U_{AB}$$

或

$$U_{AB}=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2+2M}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

故系统的等效电感为

$$L_{AB}=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2+2M}$$

若电感为 L_1 的线圈反向缠绕，由楞次定律，互感电动势项的符号应改变，于是得出

$$L_{AB}=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2-2M}$$

以上结果表明，两电感串联时

$$L_{串}=L_1+L_2\pm 2M$$

两电感并联时

$$L_{并}=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2\pm 2M}$$

可见仅当 $M=0$ 时，才有 $L_{串}=L_1+L_2$，及 $L_{并}=\dfrac{L_1L_2}{L_1+L_2}$，即仅当 $M=0$ 时，电感的串联、并联公式才与电阻的串联、并联公式相当．

第四章　电流、直流电路

【题1】 长方形导体块如图．从 $t=0$ 开始，外加与导体表面垂直的均匀电场 $\boldsymbol{E}_0$，导体中开始有电流，导体两端的表面开始积累电荷．设 $\boldsymbol{E}_0$ 并不太强，故导体中自由电子的数密度近似不变，从而导体的电导率 σ 可视为常数．设电子运动到导体两端后就停留在表面上．导体的表面很大，边缘效应可以忽略．试求导体表面积累电荷的面密度 σ_e 及导体中电流密度 j 随时间的变化．

本题为导体在外电场下达到静电平衡的过程提供了一种简化模型．

【分析】 由欧姆定律，导体中的电流密度 j 与导体中的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 成正比，$\boldsymbol{E}$ 由外加电场 $\boldsymbol{E}_0$ 以及由于导体两端积累电荷造成的附加电场 $\boldsymbol{E}'$ 确定．$\boldsymbol{E}'$ 与积累电荷的面密度 σ_e 的关系可由高斯定理得出．于是，σ_e 和 j 随时间 t 的变化可求．不难设想，经过足够长的时间后，σ_e 达到定值，j 趋于零，导体内场强为零即达到静电平衡．

【解】 由欧姆定律，导体内的电流密度 j 与导体内的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的关系为

$$\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}$$

设在任意时刻 t，导体两端表面上积累电荷的面密度为 σ_e，σ_e 在导体内产生的电场强度为 $\boldsymbol{E}'$，$\boldsymbol{E}'$ 与外加电场 $\boldsymbol{E}_0$ 反向，则

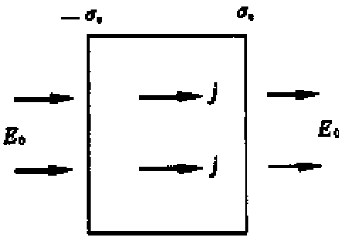
$$E=E_0-E'$$

因导体表面积很大，边缘效应可略．由高斯定理，有

$$E'=\frac{\sigma_e}{\varepsilon_0}$$

由 j 的定义，从 t 时刻经 dt 时间后，σ_e 增加的 $d\sigma_e$ 为

$$d\sigma_e=j\ dt$$



电图 4－1－1

由以上四式，得

$$d\sigma_e=\sigma\left(E_0-\frac{\sigma_e}{\varepsilon_0}\right)dt$$

积分，有

$$\int_0^{\sigma_e}\frac{d\sigma_e}{E_0-\frac{\sigma_e}{\varepsilon_0}}=\int_0^t\sigma dt$$

即

$$\frac{1}{E_0}\left(E_0-\frac{\sigma_e}{\varepsilon_0}\right)=e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t}$$

故 σ_e 随时间 t 的变化为

$$\sigma_e=\varepsilon_0E_0(1-e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t})$$

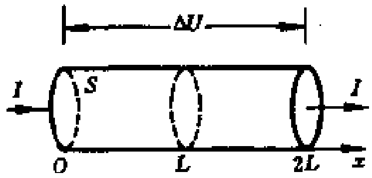
可见 $t=0$ 时,$\sigma_e=0$;$t=\infty$时,$\sigma_e=\varepsilon_0 E_0$. 电流密度 j 随时间 t 的变化为

$$j=\sigma(E_0-E')=\sigma\left(E_0-\frac{\sigma_e}{\varepsilon_0}\right)=\sigma E_0\,e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t}$$

可见 $t=0$ 时,$j=\sigma E_0$;随着 t 增长,j 按指数衰减;$t=\infty$时,$j=0$,达到静电平衡.

【题 2】 如图所示,圆柱形电阻器的截面积为 S,长为 $2L$,电导率为

$$\sigma=\begin{cases}\sigma_0\left(1+\dfrac{x}{L}\right), 0<x<L\\ \sigma_0\left(1+\dfrac{2x}{L}\right), L<x<2L\end{cases}$$



电图 4-2-1

在电阻器两端面之间加电压 ΔU,电流恒定均匀地从一个端面流入,从另一端面流出.

试求:1. 电阻器的电阻 R. 2. 电阻器中体电荷密度 ρ_e 的分布($x=L$ 处除外). 3. 电阻器 $x=L$ 处的面电荷密度 σ_e.

【分析】 因 σ 随 x 变化,且两段的函数关系不同,分两段积分即可得 R.

加电压后形成的恒定电流 I 可由欧姆定律求出. 因电阻器各处的 σ 不同,故各处的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 不同,可用欧姆定律的微分形式 $j=\sigma\boldsymbol{E}$ 求出. 利用高斯定理的微分形式 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$ 即可求出 ρ_e 的分布.

由于电阻器的电导率 σ 在 $x=L$ 处突变,故 $x=L$ 两侧的电场强度突变,电场强度的这种突变是由于在 $x=L$ 处有面电荷的积累造成的. 由 $x=L$ 两侧的电场强度,利用高斯定理即可求出 $x=L$ 处的面电荷密度 σ_e.

【解】 1. 电阻器的电阻 R 为

$$R=\int_0^{2L}\frac{\rho\mathrm{d}x}{S}=\frac{1}{S}\int_0^L\frac{\mathrm{d}x}{\sigma_0\left(1+\frac{x}{L}\right)}+\frac{1}{S}\int_L^{2L}\frac{\mathrm{d}x}{\sigma_0\left(1+\frac{2x}{L}\right)}$$

$$=\frac{1}{S\sigma_0}\left(L\ln2+\frac{L}{2}\ln\frac{5}{3}\right)=\frac{L}{S\sigma_0}\ln2\sqrt{\frac{5}{3}}=0.95\frac{L}{\sigma_0 S}$$

2. 电阻器中的恒定电流 I 和电流密度 j 为

$$I=\frac{\Delta U}{R}$$

$$j=\frac{I}{S}=\frac{\Delta U}{RS}=\frac{\sigma_0\Delta U}{L\ln2\sqrt{\frac{5}{3}}}=\frac{\sigma_0\Delta U}{0.95L}=1.05\frac{\sigma_0\Delta U}{L}$$

由欧姆定律微分形式,电阻器中的电场强度分布为

$$E=\rho j$$

由高斯定理的微分形式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$$

电阻器中体电荷密度 ρ_e 的分布为

$$\rho_e=\varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\varepsilon_0\, j\,\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}=\varepsilon_0\,\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}$$

式中 $\rho=\frac{1}{\sigma}$ 为电阻器的电阻率．

在 $0<x<L$ 处，有

$$\rho_e=\varepsilon_0\,\frac{\sigma_0\Delta U}{L\,\ln 2\sqrt{\frac{5}{3}}}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{\sigma_0\left(1+\frac{x}{L}\right)}\right]=\varepsilon_0\,\frac{\sigma_0\Delta U}{L\,\ln 2\sqrt{\frac{5}{3}}}\cdot\frac{\left(-\frac{1}{L}\right)}{\sigma_0\left(1+\frac{x}{L}\right)^2}$$

$$=-\frac{\varepsilon_0\,\Delta U}{L^2\left(1+\frac{x}{L}\right)^2\ln 2\sqrt{\frac{5}{3}}}=-\frac{1.05\,\varepsilon_0\,\Delta U}{L^2\left(1+\frac{x}{L}\right)^2}$$

在 $L<x<2L$ 处，有

$$\rho_e=\varepsilon_0\,\frac{\sigma_0\Delta U}{L\,\ln 2\sqrt{\frac{5}{3}}}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{\sigma_0\left(1+\frac{2x}{L}\right)}\right]=\varepsilon_0\,\frac{\sigma_0\Delta U}{L\,\ln 2\sqrt{\frac{5}{3}}}\cdot\frac{\left(-\frac{2}{L}\right)}{\sigma_0\left(1+\frac{2x}{L}\right)^2}$$

$$=-\frac{2\varepsilon_0\,\Delta U}{L^2\left(1+\frac{2x}{L}\right)^2\ln 2\sqrt{\frac{5}{3}}}=-\frac{2.11\,\varepsilon_0\,\Delta U}{L^2\left(1+\frac{2x}{L}\right)^2}$$

3. 在电阻器中 $x=L$ 处两侧的电场强度分别为

$$E(L_-)=\rho(L_-)j=\left.\frac{1}{\sigma_0\left(1+\frac{x}{L}\right)}j\right|_{x=L}=\frac{j}{2\sigma_0}$$

$$E(L_+)-\rho(L_+)j=\left.\frac{1}{\sigma_0\left(1+\frac{2x}{L}\right)}j\right|_{x=L}=\frac{j}{3\sigma_0}$$

$E(L_-)$和 $E(L_+)$的不同是在 $x=L$ 处的面电荷积累造成的．在 $x=L$ 附近，作一很窄的圆柱形高斯面，两侧的截面积为 S，一侧在 L_+，另一侧在 L_-，则由高斯定理，得

$$\oint\!\!\!\oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=E(L_+)S-E(L_-)S$$

$$=\frac{jS}{3\sigma_0}-\frac{jS}{2\sigma_0}=-\frac{jS}{6\sigma_0}=\frac{\sigma_e S}{\varepsilon_0}$$

故电阻器中 $x=L$ 处的面电荷密度 σ_e 为

$$\sigma_e=-\frac{\varepsilon_0 j}{6\sigma_0}=-\frac{\varepsilon_0}{6\sigma_0}\cdot\frac{\sigma_0\Delta U}{L\,\ln 2\sqrt{\frac{5}{3}}}$$

$$=-\frac{\varepsilon_0\Delta U}{6L\times 0.95}=0.18\,\frac{\varepsilon_0\Delta U}{L}$$

【题 3】 天气晴朗时，地球大气中沿径向有正的体电荷密度 $\rho_e(r)$分布，地球表面则有负的均匀

面电荷密度 σ_e，这样，在大气中便有径向电场 $E(r)$，从而形成径向电流．已知大气的电导率分布为

$$\sigma(r)=\sigma_0+a(r-R)^2$$

式中

$$\sigma_0=3.0\times10^{-14}\ 1/(\Omega\cdot\mathrm{m})$$
$$a=0.5\times10^{-20}\ 1/(\Omega\cdot\mathrm{m}^3)$$
$$R=6\times10^6\ \mathrm{m}(\text{地球半径})$$

r 从地球中心算起．已知地球表面的电场强度为

$$E(R)=-100\ \mathrm{V/m}$$

负号表示电场强度指向地球中心．设地球作为导体，其内部无电荷，并设大气中的体电荷密度 $\rho_e(r)$ 及地球表面的电荷密度 σ_e 均不随时间变化（稳态近似），即大气中的径向电流是恒定的．

试求：1. 地球表面的总电流强度．2. 地球表面的面电荷密度 σ_e．3. 地球大气中体电荷密度的分布 $\rho_e(r)$．4. 大气顶层与地球表面之间的电势差 V．

【分析】 根据欧姆定律，由地球表面的 $\sigma(R)$ 及 $E(R)$，可知地球表面的 $j(R)$ 及 I．由 $E(R)$，利用高斯定理，可得 σ_e．因 I 恒定，$j(r)$ 分布可知；由 $j(r)$ 及 $\sigma(r)$，$E(r)$ 分布可知；再用高斯定理，可求 $\rho_e(r)$．由 $E(r)$ 作积分可得 V．

【解】 1. 地球表面的电流密度 $j(R)$ 为

$$j(R)=\sigma(R)\ E(R)=\sigma_0\ E(R)$$

地球表面的总电流强度 I（即地球大气中恒定的径向电流）为

$$I=4\pi R^2|j(R)|=4\pi R^2\sigma_0|E(R)|=1350\ \mathrm{A}$$

2. 因地球内部无电荷，故

$$E(R)=\frac{\sigma_e}{\varepsilon_0}$$

地球表面的面电荷密度 σ_e 为

$$\sigma_e=\varepsilon_0\ E(R)=-8.85\times10^{-10}\ \mathrm{C/m^2}$$

3. 因电流强度 I 恒定，故

$$I=4\pi r^2|j(r)|=4\pi R^2|j(R)|=4\pi R^2\sigma_0 E(R)$$

或

$$j(r)=\sigma_0\ E(R)\frac{R^2}{r^2} \tag{1}$$

又由欧姆定律，有

$$j(r)=\sigma(r)\ E(r)=[\sigma_0+a(r-R)^2]E(r) \tag{2}$$

为寻找 $\rho_e(r)$ 与 $E(r)$ 的关系，作内半径为 r、外半径为 $(r+\mathrm{d}r)$ 的球壳．由高斯定理，有

$$\frac{1}{\varepsilon_0}[4\pi r^2\mathrm{d}r\ \rho_e(r)]=E(r+\mathrm{d}r)4\pi(r+\mathrm{d}r)^2-E(r)4\pi r^2$$

即

$$\rho_e(r)=\varepsilon_0\left[\frac{\mathrm{d}E(r)}{\mathrm{d}r}+\frac{2}{r}E(r)\right]=\frac{\varepsilon_0}{r^2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[r^2E(r)] \tag{3}$$

由(1)、(2)、(3)式,得

$$\rho_e(r)=\varepsilon_0\sigma_0E(R)\frac{R^2}{r^2}\cdot\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{\sigma(r)}\right]$$

$$=\varepsilon_0\sigma_0E(R)\frac{R^2}{r^2}\cdot\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{\sigma_0+a(r-R)^2}\right]$$

$$=-\frac{2\varepsilon_0\sigma_0E(R)R^2a(r-R)}{r^2[\sigma_0+a(r-R)^2]^2}$$

4. 因大气层中 r 处的电场强度为

$$E(r)=\frac{j(r)}{\sigma(r)}=\frac{\sigma_0E(R)R^2}{r^2[\sigma_0+a(r-R)^2]}$$

故地球表面与大气顶层之间的电势差 V 为

$$V=\int_\infty^R E(r)dr=-\sigma_0E(R)R^2\int_R^\infty\frac{dr}{r^2[\sigma_0+a(r-R)^2]}$$

$$=-\frac{\sigma_0E(R)R^2}{a\left(R^2+\frac{\sigma_0}{a}\right)^2}\left[R\ln\frac{\sigma_0}{aR^2}+\frac{\left(R^2+\frac{\sigma_0}{a}\right)}{R}+\frac{\pi\left(R^2-\frac{\sigma_0}{a}\right)}{2\sqrt{\frac{\sigma_0}{a}}}\right]$$

因

$$R^2\gg\frac{\sigma_0}{a}$$

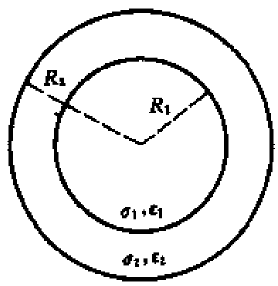
故近似有

$$V=-\frac{\sigma_0E(R)}{aR^2}\left[R\left(\ln\frac{\sigma_0}{aR^2}+1\right)+\frac{\pi R^2}{2\sqrt{\frac{\sigma_0}{a}}}\right]=3.84\times10^5\ \text{V}$$

【题 4】 如图所示,在 $0\leqslant r<R_1$ 的球形区域内,充满了电容率(又称介电常量)为 ε_1、电导率为 σ_1 的均匀介质．在 $R_1<r<R_2$ 的球壳状区域内,充满了电容率为 ε_2、电导率为 σ_2 的另一种均匀介质．在 R_2 之外为真空．设 $t=0$ 时,自由电荷体密度的分布为

$$\rho_e=\begin{cases}\rho_{e0}, & 0\leqslant r<R_1\\ 0, & R_1<r<R_2\end{cases}$$

且 R_1 和 R_2 两球面上自由电荷的面密度 σ_{e1} 和 σ_{e2} 均为零．试求 σ_{e1} 和 σ_{e2} 随时间 t 变化的规律．



电图 4-4-1

【分析】 $t=0$ 时刻在 R_1 球内的自由电荷以及两表面和界面的束缚电荷产生的电场,推动自由电荷运动,形成电流,导致 R_1 球内自由电荷的体密度逐渐减小．自由电荷的电流由内向外流,经过 R_1 处时,因两侧的电容率 ε_1 与 ε_2 不同,由电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 法线分量的连续可知 R_1 两侧的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 有跃变,从而使得电流也有跃变,结果有一部分自由电荷会在 R_1 球面上积累．注意,$\boldsymbol{D}$ 的法线分量连续只在开始 $\sigma_{e1}(t=0)=0$ 时成立,并导致 σ_{e1} 的积累,但一旦 $\sigma_{e1}\neq0$ 时,$\boldsymbol{D}$ 的法线分量便不再连续．R_1 与 R_2 之间原来就没有自由电荷,有电流后也不会引起自由电荷的积

累．但电流流到 R_2 处后，将在 R_2 表面上积累起来．显然，无论怎样流动，自由电荷的总量是不变的．上述分析表明，ρ_e(在 R_1 内)、σ_{e1}、σ_{e2}以及 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{j}$ 都将随时间 t 变化．另外，还需注意它们在 R_1 内的值和在 R_1 与 R_2 之间的值的区别．

ρ_e 和 $\boldsymbol{D}$ 的关系遵循高斯定理，$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的关系是介质方程，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 的关系是欧姆定律，另外 $\boldsymbol{j}$ 和 ρ_e 的关系遵循电荷守恒定律．本题要求解题者作出正确的物理分析，并全面地应用上述各种关系．

【解】 由高斯定理，介质方程，欧姆定律和电荷守恒定律，得

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_e\\ \boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial\rho_e}{\partial t}=0\end{cases}$$

消去 $\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{j}$，得

$$\frac{\partial\rho_e}{\partial t}+\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho_e=0$$

解上式，得

$$\rho_e(r,t)=\rho_e(r,t=0)\mathrm{e}^{-t/\tau}=\rho_{e0}\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

式中

$$\tau=\frac{\varepsilon}{\sigma}$$

因只在 R_1 球内有 ρ_e，故 ρ_e 应为

$$\rho_e(r,t)=\begin{cases}\rho_{e0}\mathrm{e}^{-t/\tau_1}, & 0\leqslant r<R_1\\ 0, & R_1<r<R_2\end{cases}\tag{1}$$

式中

$$\tau_1=\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}\tag{2}$$

因 R_1 两侧 $\boldsymbol{D}$ 连续，但 ε 不同，故 $\boldsymbol{E}$ 不同，从而 $\boldsymbol{j}$ 不同，导致 R_1 球面上自由电荷的积累．设从 t 时刻到$(t+\mathrm{d}t)$时刻，在 R_1 球面上自由电荷面密度的增量为 $\mathrm{d}\sigma_{e1}$，则

$$\mathrm{d}\sigma_{e1}\cdot4\pi R_1^2=[j_{内}(R_1,t)-j_{外}(R_1,t)]4\pi R_1^2\mathrm{d}t$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{e1}}{\mathrm{d}t}=j_{内}(R_1,t)-j_{外}(R_1,t)\tag{3}$$

由高斯定理，

$$\oint\!\!\!\oint_{(S)}\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\sum_{(S内)}Q$$

式中 Q 为 S 内的自由电荷，得

$$D=\frac{1}{4\pi r^2}\sum_{(S内)}Q$$

故

$$D(r,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi r^2}\cdot\dfrac{4\pi}{3}r^3\rho_e=\dfrac{r}{3}\rho_{e0}\,e^{-t/\tau_1}, & 0\leqslant r<R_1\\ \dfrac{1}{4\pi r^2}\left(\dfrac{4\pi}{3}R_1^3\rho_e+4\pi R_1^2\sigma_{e1}\right)=\dfrac{R_1^3}{3r^2}\rho_{e0}e^{-t/\tau_1}+\dfrac{R_1^2}{r^2}\sigma_{e1}, & R_1<r<R_2\\ \dfrac{1}{4\pi r^2}\cdot\dfrac{4}{3}\pi R_1^3\rho_{e0}=\dfrac{R_1^3}{3r^2}\rho_{e0}, & R_2<r\end{cases}\tag{4}$$

其中，当 $0\leqslant r<R_1$ 时，S 面内有体电荷；当 $R_1<r<R_2$ 时，S 面内有体电荷及 R_1 球表面的面电荷；当 $r>R_2$ 时，S 面内的自由电荷的总量为 $\frac{4}{3}\pi R_1^3\rho_{e0}$. 于是，$R_1$ 球面两侧的场强分别为

$$\begin{cases}E_{内}(R_1,t)=\dfrac{1}{\varepsilon_1}D_{内}(R_1,t)=\dfrac{R_1}{3\varepsilon_1}\rho_{e0}\,e^{-t/\tau_1}\\ E_{外}(R_1,t)=\dfrac{1}{\varepsilon_2}D_{外}(R_1,t)=\dfrac{R_1}{3\varepsilon_1}\rho_{e0}\,e^{-t/\tau_1}+\dfrac{\sigma_{e1}}{\varepsilon_2}\end{cases}$$

电流密度分别为

$$\begin{cases}j_{内}(R_1,t)=\sigma_1\,E_{内}(R_1,t)=\dfrac{R_1}{3\tau_1}\rho_{e0}\,e^{-t/\tau_1}\\ j_{外}(R_1,t)=\sigma_2\,E_{外}(R_1,t)=\dfrac{R_1}{3\tau_2}\rho_{e0}\,e^{-t/\tau_1}+\dfrac{\sigma_{e1}}{\tau_2}\end{cases}$$

式中

$$\tau_1=\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1},\quad \tau_2=\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}$$

注意，σ_1 和 σ_2 是介质的电导率，σ_{e1}是 R_1 球面上自由电荷的面密度，请勿混淆．把 $j_{内}$ 和 $j_{外}$ 代入(3)式，得

$$\frac{d\sigma_{e1}}{dt}+\frac{\sigma_{e1}}{\tau_2}=A\,e^{-t/\tau_1}\tag{5}$$

式中

$$\begin{cases}A=\dfrac{R_1\rho_{e0}}{3\tau^*}\\ \dfrac{1}{\tau^*}=\dfrac{1}{\tau_1}-\dfrac{1}{\tau_2}\end{cases}\tag{6}$$

(5)式是 $\sigma_{e1}(t)$遵循的方程．这是一阶线性常微分方程，其解为

$$\sigma_{e1}(t)=e^{-\int\frac{dt}{\tau_2}}\left[\int(A\,e^{-\frac{t}{\tau_1}})\,(e^{\int\frac{dt}{\tau_2}})dt+C\right]$$

$$=e^{-t/\tau_2}\left(\int A\,e^{-t/\tau^*}dt+C\right)=e^{-t/\tau_2}(-\tau^*A\,e^{-t/\tau^*}+C)$$

初条件为

$$t=0\text{ 时，}\quad \sigma_{e1}(t=0)=0$$

故积分常量为

$$C=\tau^*A$$

把 C,A,τ^* 等代入，得

$$\sigma_{e1}(t)=e^{-t/\tau_2}A\tau^*(1-e^{-t/\tau^*})$$
$$=\frac{1}{3}R_1\rho_{e0}e^{-t/\tau_2}(1-e^{-t/\tau^*})=\frac{1}{3}R_1\rho_{e0}(e^{-t/\tau_2}-e^{-t/\tau_1}) \tag{7}$$

在 R_2 球面上自由电荷的面密度为

$$\sigma_{e2}(t)=D_{外}(R_2,t)-D_{内}(R_2,t)$$

把(4)式代入，得

$$\sigma_{e2}(t)=\frac{R_1^3}{3R_2^2}\rho_{e0}(1-e^{-t/\tau_1})-\frac{R_1^2}{R_2^2}\sigma_{e1}(t)$$

再把(7)式求出的 $\sigma_{e1}(t)$ 代入，得

$$\sigma_{e2}(t)=\frac{R_1^3}{3R_2^2}\rho_{e0}(1-e^{-t/\tau_2}) \tag{8}$$

(7)式和(8)式即为所求．

当 $t=\infty$ 时，

$$\sigma_{e1}(t=\infty)=0,\quad \sigma_{e2}(t=\infty)=\frac{R_1^3}{3R_2^2}\rho_{e0}$$

故当 $t=\infty$ 时，在 R_2 球面上的自由电荷为

$$\sigma_{e2}(t=\infty)\cdot 4\pi R_2^2=\frac{R_1^3}{3R_2^2}\rho_{e0}\cdot 4\pi R_2^2=\frac{4\pi}{3}R_1^3\rho_{e0}$$

此即 $t=0$ 时，在 R_1 球内按 ρ_{e0} 分布的自由电荷的总量．

【题 5】 在电容率(又称介电常量)为 ε 的某超导体内，正、负离子的质量分别为 m_+ 和 m_-，正、负离子的电量分别为 q_+ 和 q_-，平衡时正、负离子的电荷密度分别为 ρ_0 和 $-\rho_0$. 超导体是以 x 轴为母线的柱体，且始终处于低温(接近 $T\approx 0$K)之中．开始时超导体处于平衡状态，后来因为受到 x 方向的扰动使离子有微小的运动．试证明，离子的这种小运动必定是简谐振动，并求出振动的圆频率．

【分析】 由正、负离子组成的超导体处于平衡，从宏观上说，超导体是处处电中性的．因为不存在外电场，正、负离子都没有宏观的运动．此外，由于 $T\approx 0$K，热运动亦可以忽略．扰动使正、负离子有所分离，破坏了电中性条件，产生电场，导致正、负离子的宏观小运动．因此，伴随着正、负离子的运动，它们的速度、电荷体密度、形成的电流密度、以及产生的电场强度，都将发生变化，但应遵循电荷守恒的条件，另外这些变化都是沿 x 轴的．由此，列出运动方程后即可求解．

【解】 设受扰动后，在任意时刻 t，超导体中正、负离子的运动速度、电荷体密度、电流密度为 $v_\pm$、$\rho_\pm$、$j_\pm$，则

$$j_\pm=\rho_\pm v_\pm$$

总的电流密度为

$$j=j_++j_-=\rho_+v_++\rho_-v_- \tag{1}$$

设柱形超导体的截面积为 S，沿柱体的母线 x 轴，取从 x 到 $(x+dx)$ 的一小段，则在 t 到

$(t+\mathrm{d}t)$的时间内，由电荷守恒得

$$[\rho(x,t+\mathrm{d}t)-\rho(x,t)]S\,\mathrm{d}x=[j(x,t)-j(x+\mathrm{d}x,t)]S\,\mathrm{d}t$$

即

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\frac{\partial j}{\partial x} \tag{2}$$

电荷分布决定了它所产生的电场，仍取 $\mathrm{d}x$ 一小段，由高斯定理，得

$$[E(x+\mathrm{d}x,t)-E(x,t)]S=\frac{\rho}{\varepsilon}S\,\mathrm{d}x$$

式中 E 是电场强度，即

$$\rho=\varepsilon\frac{\partial E}{\partial x} \tag{3}$$

由(2)式和(3)式，得

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)=-\frac{\partial j}{\partial x}$$

交换偏导次序，得

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)=-\frac{\partial j}{\partial x}$$

故

$$\varepsilon\frac{\partial E}{\partial t}=-j$$

再对 t 求导，得

$$\varepsilon\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=-\frac{\partial j}{\partial t} \tag{4}$$

由(1)式，得

$$\frac{\partial j}{\partial t}=\rho_+\frac{\partial v_+}{\partial t}+\rho_-\frac{\partial v_-}{\partial t}+\frac{\partial\rho_+}{\partial t}v_++\frac{\partial\rho_-}{\partial t}v_-$$

在小扰动条件下，v_+、v_-、$\frac{\partial\rho_+}{\partial t}$、$\frac{\partial\rho_-}{\partial t}$均为小量，在上式中略去二级小量，得

$$\frac{\partial j}{\partial t}=\rho_+\frac{\partial v_+}{\partial t}+\rho_-\frac{\partial v_-}{\partial t} \tag{5}$$

在 $T\approx 0\mathrm{K}$ 时，离子的热运动与碰撞均可略，由牛顿第二定律，得

$$m_\pm\frac{\partial v_\pm}{\partial t}=q_\pm E$$

即

$$\frac{\partial v_\pm}{\partial t}=\frac{q_\pm}{m_\pm}E \tag{6}$$

把(4)、(5)、(6)式联立，得

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_+q_+}{m_+}+\frac{\rho_-q_-}{m_-}\right)E=0$$

近似地，分别用 $\pm\rho_0$ 代替 $\rho_\pm$，得

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}+\frac{\rho_0}{\varepsilon}\left(\frac{q_+}{m_+}-\frac{q_-}{m_-}\right)E=0 \tag{7}$$

这就是因小扰动引起电荷分离产生的电场 E 所遵循的运动方程，它表明各处的 E 随时间 t 的变化作简谐振动，其圆频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{\rho_0}{\varepsilon}\left(\frac{q_+}{m_+}-\frac{q_-}{m_-}\right)} \tag{8}$$

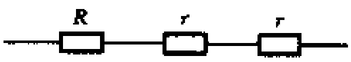
注意，式中 q_- 为负值．

由(6)式，正、负离子在各处的速度 $v_\pm$（或位移）随时间 t 的变化，也将是以上述 ω 为圆频率的简谐振动．

【题 6】 n 个电阻 r 连成电阻为 R 的系统，再将两个电阻 r 与系统连接．试问连接后电阻值能否保持不变，即仍为 R．

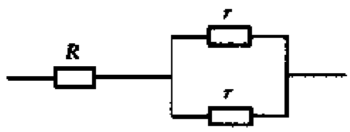
【分析】 R 与两个 r 连接，构成两端电阻网络，连接的方式无非是串、并联，把各种可能的连接方式一一列出，计算其阻值，即可判断能否仍为 R．猜想结论将是否定的．

【解】 R 与两个 r 可能的连接方式及相应的阻值如以下各图所示．



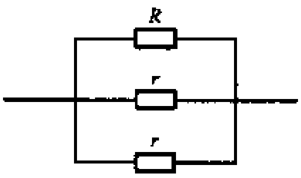
$R_{(1)}=R+2r$

电图 4－6－1



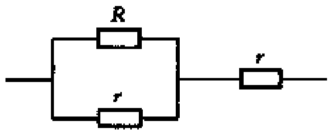
$R_{(2)}=R+\frac{r}{2}$

电图 4－6－2



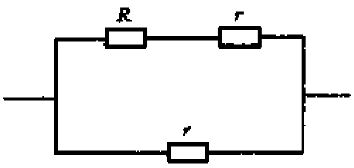
$R_{(3)}=\frac{Rr}{2R+r}$

电图 4－6－3



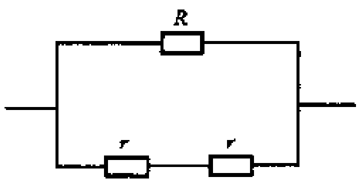
$R_{(4)}=\frac{r^2+2Rr}{R+r}$

电图 4－6－4



$R_{(5)}=\frac{r(R+r)}{R+2r}$

电图 4－6－5



$R_{(6)}=\frac{2Rr}{R+2r}$

电图 4－6－6

1. 要求 $R_{(1)}=R$，即要求 $R+2r=R$，因 $r>0$，不可能．

2. 要求 $R_{(2)}=R$，即要求 $R+\frac{r}{2}=R$，因 $r>0$，不可能．

3. 要求 $R_{(3)}=R$，即要求$\frac{Rr}{2R+r}=R$，亦即 $r=r+2R$ 或$R=0$，因 n 个电阻r 不可能连接成$R=0$ 的系统，故不可能．

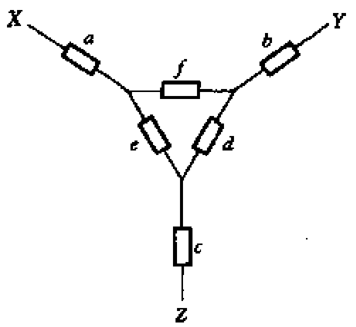
4. 要求 $R_{(4)}=R$，即要求$\frac{r(r+2R)}{R+r}=R$，亦即 $R=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})r$，即 $R=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})r$（因 $R>0$）这要求 R 与r 的比值$\frac{R}{r}$为无理数．由于 R 是由n 个相同的电阻r 构成的电阻网络的等效电阻，R 的值可以利用基尔霍夫定律来确定，其间只涉及加、减、乘、除四则运算．换言之，R 的阻值可由n 个r 经四则运算得出．由此得出的 R 与r 之比不可能是无理数．因此，仍为不可能．

5. 要求 $R_{(5)}=R$，即要求$\frac{r(R+r)}{R+2r}=R$，亦即 $R=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5})r$，或 $R=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})r$（因 $R>0$），与 4 同理，不可能．

6. 要求 $R_{(6)}=R$，即要求$\frac{2Rr}{R+2r}=R$，即 $R=0$，不可能．

因此，由 n 个同样的电阻r 连接成的电阻为R 的系统，再与两个电阻 r 连接后，其阻值不可能保持为原来的 R，必有所改变．

【题7】 将阻值分别为 1 Ω，2 Ω，3 Ω，4 Ω，5 Ω，6 Ω 的 6 个电阻连接成如图所示的电路．若已测得 $R_{XY}=7\frac{3}{13}$ Ω，$R_{YZ}=10\frac{1}{13}$ Ω，$R_{ZX}=6\frac{9}{13}$ Ω．试求图中 6 个电阻 a,b,c,d,e,f 各自的阻值．



电图 4-7-1

【分析】 本题只涉及电阻的串、并联，从原则上说求解应不困难．但测量的三个数据只给出了 6 个未知数之间的三个关系，仅由此是无从求解的．必须充分利用上述关系及有关数据的其余附加信息，再给出一些关系，才能求解．

本题提醒读者，在有些问题中，注意数据的特点是很重要的．

【解】 如图，显然有

$$\begin{cases} R_{XY}=R_a+R_b+\dfrac{R_f(R_e+R_d)}{R_f+R_e+R_d} \\ R_{YZ}=R_b+R_c+\dfrac{R_d(R_f+R_e)}{R_d+R_f+R_e} \\ R_{ZX}=R_c+R_a+\dfrac{R_e(R_d+R_f)}{R_e+R_d+R_f} \end{cases} \tag{1}$$

令

$$\begin{cases} R_R = \dfrac{R_f(R_e + R_d)}{R_f + R_e + R_d} \\ R_P = \dfrac{R_d(R_f + R_e)}{R_d + R_f + R_e} \\ R_Q = \dfrac{R_e(R_d + R_f)}{R_e + R_d + R_f} \end{cases} \tag{2}$$

则

$$\begin{cases} R_{XY} = R_a + R_b + R_R \\ R_{YZ} = R_b + R_c + R_p \\ R_{ZX} = R_c + R_a + R_Q \end{cases}$$

由于(1)式中的 R_{XY}, R_{YZ}, R_{ZX}都是以 13 为分母的分数，而 R_a, R_b, R_c 都是整数，因此分母相同的 R_P, R_Q, R_R 必定是以 13 为分母的分数，由于 13 是质数，故它们的分母应为 13，即

$$R_d + R_e + R_f = 13\Omega$$

由于 R_d, R_e, R_f 只能在 1,2,3,4,5,6 欧姆中取值，三者之和为 13Ω 的可能性只有两种，即

$$(R_d, R_e, R_f) \Rightarrow \begin{cases} (3,4,6) \\ (2,5,6) \end{cases}$$

式中符号⇒表示 R_d, R_e, R_f 分别取(3,4,6)之一，或分别取(2,5,6)之一，至于何者取何值，待定．

若$(R_d, R_e, R_f) \Rightarrow (3,4,6)$，则由(2)式得

$$(R_P, R_Q, R_R) \Rightarrow \left(\frac{3\times(4+6)}{13} = 2\frac{4}{13}, 2\frac{10}{13}, 3\frac{3}{13}\right)$$

由于剩下的 R_a, R_b, R_c 只能取 1,2,5 Ω，由(1)式，上述结果与测量不符，因此$(R_d, R_e, R_f) \Rightarrow (3,4,6)$不合，弃去．合理的是

$$(R_d, R_e, R_f) \Rightarrow (2,5,6)$$

代入(2)式，得

$$(R_P, R_Q, R_R) \Rightarrow \left(\frac{2\times(5+6)}{13} = 1\frac{9}{13}, 3\frac{1}{13}, 3\frac{3}{13}\right)$$

再根据(1)式及 R_{XY}, R_{YZ}, R_{ZX}的数据，得出

$$R_P = 3\frac{1}{13}\ \Omega$$

$$R_Q = 1\frac{9}{13}\ \Omega$$

$$R_R = 3\frac{3}{13}\ \Omega$$

由

$$R_Q = \frac{R_e(R_d + R_f)}{R_e + R_d + R_f} = \frac{R_e(R_d + R_f)}{13} = 1\frac{9}{13} = \frac{22}{13}$$

即

$$R_e(R_d+R_f)=22$$

而 R_d, R_e, R_f 只能取 2,5,6 之一,故

$$R_e=2\ \Omega$$

再由

$$R_P=\frac{R_d(R_f+R_e)}{R_d+R_f+R_e}=\frac{R_d(R_f+2)}{13}=3\frac{1}{13}=\frac{40}{13}$$

而 R_d, R_f 只能取 5,6 之一,因此

$$R_d=5\ \Omega$$

$$R_f=6\ \Omega$$

由(1)式,利用 R_{XY}, R_{YZ}, R_{ZX} 及 R_P, R_Q, R_R 的结果,得

$$R_a+R_b=4\ \Omega$$

$$R_b+R_c=7\ \Omega$$

$$R_c+R_a=5\ \Omega$$

解出

$$R_a=1\ \Omega,\quad R_b=3\ \Omega,\quad R_c=4\ \Omega$$

答案是

$$R_a=1\ \Omega,\quad R_b=3\ \Omega,\quad R_c=4\ \Omega$$

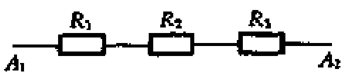
$$R_d=5\ \Omega,\quad R_e=2\ \Omega,\quad R_f=6\ \Omega$$

【题 8】 有8个外观完全相同的电阻,其中 7 个阻值相同,另 1 个阻值与它们不同,称为"特殊的"电阻．试设计一种测量方案,要求只使用欧姆表三次,便可将该"特殊的"电阻检出．

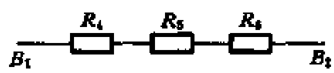
【分析与解】 显然,可供选择的测量方案并不唯一,此处给出的只是其中之一．

首先,将 8 个电阻分别标明 $R_1, R_2, \cdots, R_8$.

第一次测量．如电图 4－8－1 所示,将 R_1, R_2, R_3 串联,测量 A_1A_2 间的阻值,结果记为 R_A.



电图 4－8－1



电图 4－8－2

第二次测量．如电图 4－8－2 所示,将 R_4, R_5, R_6 串联,测量 B_1B_2 间的阻值,结果记为 R_B.

第三次测量．

1. 若 $R_A=R_B$,则特殊的电阻必为 R_7 或 R_8. 测量 R_7 的阻值,若 $R_7\neq\frac{1}{3}R_A$,则 R_7 为特殊电阻,否则 R_8 为特殊电阻．

2. 若 $R_A\neq R_B$,总可假设 $R_A>R_B$,引入

$$\alpha=\frac{R_A}{R_B}>1$$

$$\beta=\frac{1}{\alpha}<1$$

(a)若 R_1,R_2,R_3 中有一个是特殊的电阻，则正常的阻值 R 为

$$R=\frac{1}{3}R_B$$

特殊的阻值 r 为

$$r=R_A-\frac{2}{3}R_B=(3\alpha-2)R$$

设计包括全部 8 个电阻的网络如电图 4－8－3 所示，测量 C_1C_2 间的阻值，结果记为 R_C.

若 R_1 是特殊的电阻，由电阻串、并联关系，可算出 R_C 应为

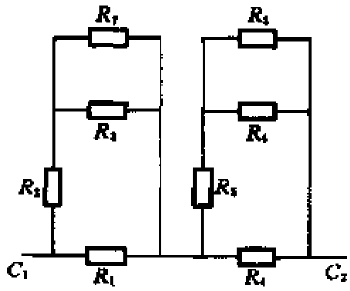
$$R_{C1}=\left(\frac{3\alpha-2}{6\alpha-1}+\frac{1}{5}\right)R_B$$

若 R_2 是特殊的电阻，可算出 R_C 应为

$$R_{C2}=\left(\frac{2\alpha-1}{6\alpha-1}+\frac{1}{5}\right)R_B$$

若 R_3 是特殊的电阻，可算出 R_C 应为

$$R_{C3}=\left(\frac{2\alpha-1}{9\alpha-4}+\frac{1}{5}\right)R_B$$



电图 4－8－3

因为 $\alpha>1$，容易看出

$$R_{C1}>R_{C2}>R_{C3}$$

(b)若 R_4,R_5,R_6 中有一个是特殊的电阻，则正常的阻值 R 为

$$R=\frac{1}{3}R_A$$

特殊的阻值 r 为

$$r=R_B-\frac{2}{3}R_A=\left(1-\frac{2}{3}\alpha\right)R_B$$

因

$$r>0$$

故要求

$$\alpha<\frac{3}{2}$$

这表明，若 $\alpha<\frac{3}{2}$，则特殊的电阻可能是 R_1,R_2,R_3,R_4,R_5,R_6 之一；若 $\alpha>\frac{3}{2}$，则特殊的电阻只可能是 R_1,R_2,R_3 之一．

仍设计由全部 8 个电阻构成的网络如电图 4－8－3 所示，测量 C_1C_2 间的阻值，结果仍记为 R_C.

若 R_4 是特殊的电阻，由电阻串、并联关系，可算出 R_C 应为

$$R_{C4}=\left(\frac{3\beta-2}{6\beta-1}+\frac{1}{5}\right)R_A=\left(\frac{3-2\alpha}{6-\alpha}+\frac{1}{5}\right)\alpha R_B$$

若 R_5 是特殊的电阻，可算出 R_C 应为

$$R_{C5}=\left(\frac{2\beta-1}{6\beta-1}+\frac{1}{5}\right)R_A=\left(\frac{2-\alpha}{6-\alpha}+\frac{1}{5}\right)\alpha R_B$$

若 R_6 是特殊的电阻，可算出 R_C 应为

$$R_{C6}=\left(\frac{2\beta-1}{9\beta-4}+\frac{1}{5}\right)R_A=\left(\frac{2-\alpha}{9-4\alpha}+\frac{1}{5}\right)\alpha R_B$$

综合以上(a)、(b)的结果，有

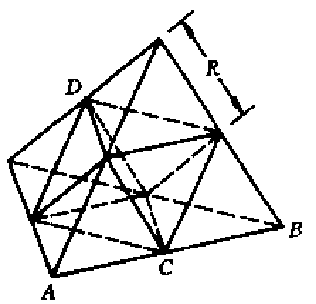
$$R_{C6}>R_{C1}>R_{C5}>R_{C2}>R_{C3}>R_{C4}$$

由于这 6 个 R_C 都只与 R_B 和 α 有关，而在第一、二次测量中已经测出 R_A 和 R_B，且 $R_B=3R$（R 是正常的电阻），$\frac{R_A}{R_B}=\alpha$，因此，以上 6 个 R_C 都可算出具体的阻值．

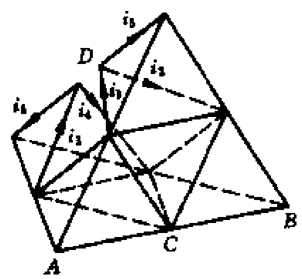
第三次测量得出的 R_C 只可能是以上 6 个 R_C 之一，“对号入座”即可确定“特殊的”电阻．

【题 9】 正四面体框架形电阻网络如电图4－9－1所示，其中每一小段的电阻均为 R．试求：1．A，B 两端点之间的等效电阻 R_{AB}．2．C，D 两端点之间的等效电阻 R_{CD}．

【分析】 有些电阻网络虽然不是通过简单的串、并联方式连接而成，但网络结构具有很强的对称性，充分利用这种对称性往往可以作等效的简化，使复杂的网络归结为等效的串、并联网络，从而所求两端点之间的等效电阻容易求得．本题就是一例．



电图 4－9－t



电图 4－9－2

【解】 1．如电图 4－9－1，设电流 i 从 A 点流入，从 B 点流出．鉴于网络的对称性，在电图 4－9－1 D 点聚集的 6 条支路的电流之间应满足下述关系

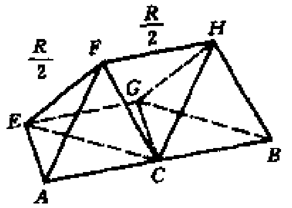
$$i_1=i_2,\quad i_3=i_4,\quad i_5=i_6=0$$

故可如电图 4－9－2 所示，将 D 点断开．断开后的两个小四面体框架等效电阻同为 $\frac{R}{2}$，故可将网络等效地简化为如电图 4－9－3 所示的网络，其中，除 $R_{FH}=R_{EG}=\frac{R}{2}$ 外，其余各小段电阻仍为 R．由对称性可知，E 和 F 等势，G 和 H 等势，于是网络可进而简化为如电图 4－9－4 所示的网络．再由对称性，可在 C 点将电阻断开，简化成如电图 4－9－5 所示的串、并联网络，由此容易算出

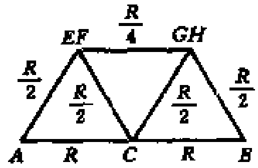
$$R_{AB}=\frac{3}{4}R$$

2．如电图 4－9－1，设电流从 C 点流入，从 D 点流出，则网络相对 ABD 平面具有对称性，与 AB 棱平行的中间小正方形四个顶点等势，故此正方形的四条边都可拆去．余下部分相对 ABD 平面上下对称，可上下合并，成为如电图 4－9－6 所示的网络，其中除 $R_{AC}=R_{CB}=R$ 外，

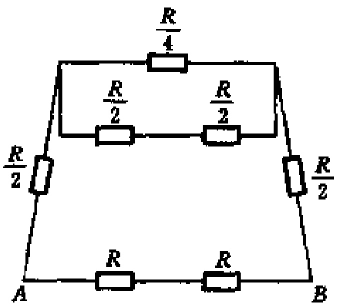
其余每小段的电阻均为$\frac{R}{2}$.



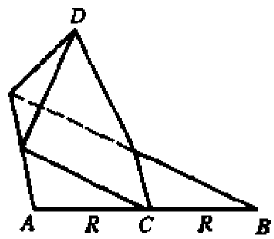
电图4－9－3



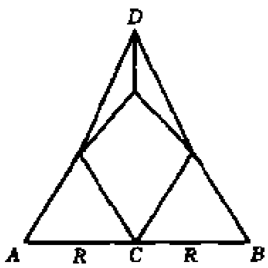
电图4－9－4



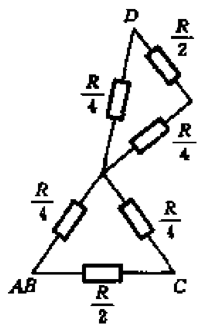
电图4－9－5



电图4－9－6



电图4－9－7



电图4－9－8

电图4－9－6的网络可画成电图4－9－7,两者等效．电图4－9－7的网络相对CD左右对称,故可合并成如电图4－9－8所示的网络．容易算出

$$R_{CD}=\frac{3}{8}R$$

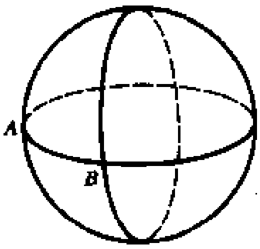
【本题是参加1995年第26届IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)的中国队队员毛蔚编制的．】

【题10】 三个相同的均匀金属圆圈两两相交地连接成如电图4－10－1所示的网络．已知每一个金属圆圈的电阻都是R．试求电图4－10－1中A,B两点之间的等效电阻R_{AB}．

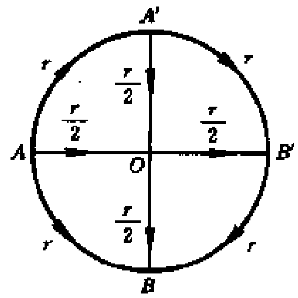
【分析与解】 对于如电图4－10－1所示的以A、B为端点的二端电阻网络,若电流从A点流

入，从 B 点流出，由于网络的对称性，不难看出，上、下两半（指包括 A 和 B 点在内的平面的上部和下部）电流的流动是完全对应的．因此，可将上、下两半压缩成如电图 4－10－2 所示的简化的等效平面电阻网络．在电图 4－10－2 中的圆 $ABB'A'$ 就是电图 4－10－1 中的水平圆，弧 $\widehat{AA'}$，$\widehat{A'B'}$，$\widehat{B'B}$，$\widehat{BA}$ 都是 $\frac{1}{4}$ 圆，其电阻 r 即为整个圆电阻 R 的 $\frac{1}{4}$，即

$$r=\frac{R}{4}$$



电图 4－10－1

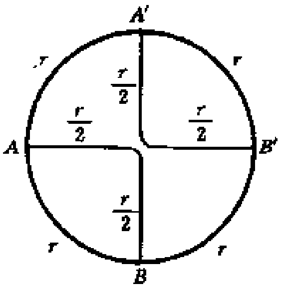


电图 4－10－2

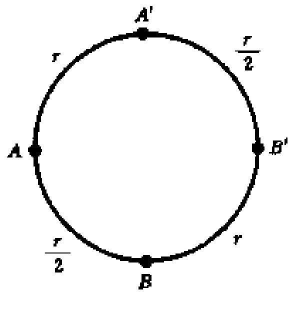
在电图 4－10－2 中的直线 $\overline{AD}$ 则是电图 4－10－1 中上、下两个 $\frac{1}{4}$ 圆重叠（即并联）的结果，故其电阻为 $\frac{r}{2}$，$\overline{A'O}$、$\overline{B'O}$、$\overline{BO}$ 类似．

对于电图 4－10－2 的平面网络，若电流从 A 点流入，从 B 点流出，则电流方向应如电图 4－10－2 所示．由于网络的对称性，从 A 点流到 O 点的电流应等于从 O 点流到 B 点的电流、同样，从 A' 点流到 O 点的电流也应等于从 O 点流到 B' 点的电流．因此，可将交叉的 ADB' 和 $A'OB$ 从 O 点断开，等效成如电图 4－10－3 所示的、不在 O 点交叉的简单网络．进而，由串并联关系，可将网络再简化成如电图 4－10－4 所示的等效网络．由电图 4－10－4，容易算出 A，B 之间的等效电阻为

$$R_{AB}=\frac{5}{12}r=\frac{5}{48}R.$$



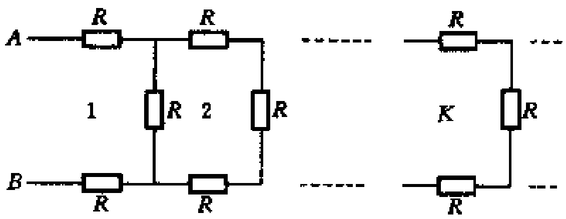
电图 4－10－3



电图 4－10－4

由此可见，根据网络的对称性，利用压缩（合并）、断开等办法，可以等效地简化，使问题易解．

【题 11】 二端无限梯形电阻网络如电图4－11－1所示，它由 $K\to\infty$ 个相同的网络元串接而成，每个网络元包含三个相同的电阻 R. 通常采用极限法来计算电图 4－11－1 中 A、B 两端点之间的等效电阻 R_{AB}. 所谓极限法，就是先设 K 个网络元组成二端网络，其等效电阻记为 R_K，再连接一个网络元，其等效电阻记为 R_{K+1}. 设法找出 R_{K+1} 与 R_K 之间的递推关系，最后令 $K\to\infty$，



电图 4－11－1

则 R_{K+1} 与 R_K 就都是所求的由无穷网络元构成的二端网络的等效电阻 R_{AB}. R_{K+1} 与 R_K 之间的递推关系成为关于 R_{AB} 的一元代数方程，由此可解出 R_{AB}.

不难看出，上述做法是不够严谨的，因为只有证明数列 $R_1, R_2, \cdots, R_K, \cdots$ 存在极限 R_∞ 之后，才有 $K\to\infty$ 时，$R_{K+1}=R_K=R_\infty=R_{AB}$ 的结果．换言之，不能"想当然"地认为，$K\to\infty$ 时，一定有 $R_{K+1}=R_K=R_\infty$ 的结果．

为了在严格的意义上讨论电图 4－11－1 中 A、B 之间的等效电阻 R_{AB}，特编制以下各题，试逐一予以解答．

1. 在找出数列 R_K 的数学表达式之前，试定性证明 $\{R_K\}$ 是一个单调递减的有界数列，因此存在极限．

2.(*a*)试导出 $R_{K-1}(R_K)$ 递推关系式．

(*b*)试由上述递推关系式，解出 $R_K(R)$ 表达式．

(*c*)试由 $R_K(R)$ 表达式定量证明 $\{R_K\}$ 是一个单调递减的有界数列，因此存在极限．

(*d*)试求出 R_K 的极限，即 R_{AB} 值．

最后，需要指出，在求解二端无限网络的等效电阻问题时，一般说来，若题文中无特殊要求，即意味着该题存在极限，解题者可在此基础上求解，不必作如本题的严格论证．

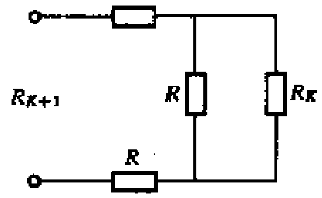
【分析与解】 1. 如电图 4－11－1，取到第 K 个网络元，则 A、B 间的电阻即为 R_K. 在右端再接一个网络元[第$(K+1)$个]，则第 K 个网络元右侧的电阻与第$(K+1)$个网络元为并联关系，故并联电阻 R' 必小于 R. $R'<R$ 将使第 K 个网络元与第$(K-1)$个网络元右侧的电阻 R 的并联等效电阻减小；从而导致与第$(K-2)$个网络元右侧的电阻 R 的并联等效电阻减小；…. 如此递推，使第一个网络元右侧两端点之间的等效电阻减小，导致 A、B 间等效电阻减小．

这就定性地证明了 $R_{K+1}<R_K$，即 $\{R_K\}$ 为单调递减的数列．

数列 $\{R_K\}$ 有界是显然的，因为无论 K 取何值，必有 $R_K>0$.

2.(*a*)如电图 4－11－2 所示，有

$$R_{K+1}=2R+\frac{RR_K}{R+R_K}$$



电图 4－11－2

即

$$R_{K+1}=\frac{(3R_K+2R)R}{(R_K+R)}$$

这就是 $R_{K+1}(R_K)$递推关系．

$(b)R_K$ 的初值(即 $K=1$)为

$$R_1=3R$$

引入辅助数列$\{x_K\}$,定义为

$$x_K=\frac{R_K}{R}$$

则有

$$\begin{cases}x_1=3\\ x_{K+1}+\dfrac{1}{x_K+1}=3\end{cases}$$

再引入辅助数列$\{y_K\}$,定义为

$$y_K=x_K+1$$

则有

$$\begin{cases}y_1=4\\ y_{K+1}+\dfrac{1}{y_K}=4\end{cases}$$

为求解 y_K,再引入新的辅助数列$\{z_K\}$,定义为

$$z_K=\frac{y_K+\alpha_1}{y_K+\alpha_2}=\frac{1+\dfrac{\alpha_1}{y_K}}{1+\dfrac{\alpha_2}{y_K}}$$

其中 α_1 和 α_2 为待定的可选择参量．把 y_K 与 y_{K+1}的关系代入,得

$$\begin{aligned}z_K&=\frac{1+(4-y_{K+1})\alpha_1}{1+(4-y_{K+1})\alpha_2}\\&=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\cdot\frac{\dfrac{1}{\alpha_1}+4-y_{K+1}}{\dfrac{1}{\alpha_2}+4-y_{K+1}}=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\cdot\frac{y_{K+1}-\left(4+\dfrac{1}{\alpha_1}\right)}{y_{K+1}-\left(4+\dfrac{1}{\alpha_2}\right)}\end{aligned}$$

若令

$$\begin{cases}-\left(4+\dfrac{1}{\alpha_1}\right)=\alpha_1\\ -\left(4+\dfrac{1}{\alpha_2}\right)=\alpha_2\end{cases}$$

则

$$z_K=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\cdot\frac{y_{K+1}+\alpha_1}{y_{K+1}+\alpha_2}=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}z_{K+1}$$

即

$$z_{K+1}=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}z_K$$

$\{z_K\}$为等比数列．α_1与α_2共同满足的方程为

$$-\left(4+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha$$

即

$$\alpha^2+4\alpha+1=0$$

方程的两个根为

$$\alpha=-2\pm\sqrt{3}$$

α_1与α_2的解为

$$\alpha_1=\alpha_2=\begin{cases}-2+\sqrt{3}\\-2-\sqrt{3}\end{cases}$$

即

$$\alpha_1=-2+\sqrt{3},\alpha_2=-2-\sqrt{3}$$

$$\alpha_1=-2-\sqrt{3},\alpha_2=-2+\sqrt{3}$$

$\{z_K\}$的解为

$$\begin{cases}z_1=\dfrac{4+\alpha_1}{4+\alpha_2}\\z_K=\left(\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{K-1}z_1\end{cases}$$

$\{y_K\}$的解为

$$y_K=\frac{\alpha_1-\alpha_2}{z_K-1}-\alpha_2$$

(i)若取$\alpha_1=\alpha_2$，则$z_K=z_1=1$，y_K无解，不符合要求，应弃去．

(ii)若取$\alpha_1=-2+\sqrt{3}$，$\alpha_2=-2-\sqrt{3}$，则

$$z_K=\left(\frac{-2-\sqrt{3}}{-2+\sqrt{3}}\right)^{K-1}z_1=(2+\sqrt{3})^{2(K-1)}z_1$$

其中

$$z_1=\frac{4+\alpha_1}{4+\alpha_2}=(2+\sqrt{3})^2$$

代入，得

$$z_K=(2+\sqrt{3})^{2K}$$

故

$$y_K=\frac{2\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})^{2K}-1}+(2+\sqrt{3})$$

$$x_K=y_K-1=\frac{2\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})^{2K}-1}+(1+\sqrt{3})$$

(iii)若取 $\alpha_1=-2-\sqrt{3},\alpha_2=-2+\sqrt{3}$,为了方便,改记

$$\alpha'_1=-2-\sqrt{3},\alpha'_2=-2+\sqrt{3}$$

则 α'_1,α'_2 与(ii)中 α_1,α_2 的关系为

$$\alpha'_1=\alpha_2,\alpha'_2=\alpha_1$$

对应的$\{z_K\},\{y_K\}$改记为$\{z'_K\},\{y'_K\}$,则由原来的 z_K 递推式可得

$$\begin{cases} z'_K=\dfrac{1}{z_k} \\ z'_1=\dfrac{1}{z_1} \end{cases}$$

式中 z_1 和 z_k 已在(ii)中给出．再由 z_K 定义式可得

$$z'_K=\frac{y'_K+\alpha'_1}{y'_K+\alpha'_2}=\frac{y'_K+\alpha_2}{y'_K+\alpha_1}$$

因 $z'_K=\dfrac{1}{z_K}$,故有

$$z_K=\frac{y'_K+\alpha_1}{y'_K+\alpha_2}$$

考虑原来已有的 z_K 与 y_K 的关系

$$z_K=\frac{y_K+\alpha_1}{y_K+\alpha_2}$$

故应有

$$y'_K=y_K$$

可见,(ii)中的 α_1 与 α_2 互换后,$\{y'_K\}$与$\{y_K\}$相同,因而$\{x'_K\}$与$\{x_K\}$也相同．

由上所述,$\{x_K\}$可仅取(ii)中的解．最后得出

$$R_K=\left[\frac{2\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})^{2K}-1}+(1+\sqrt{3})\right]R$$

(c)在 R_K 的表达式中,$(2+\sqrt{3})^{2K}$随着 K 增大而增大,因此 R_K 的值将随着 K 增大而减小,表明$\{R_K\}$是一个单调递减的数列．其次,无论 K 取多大值,R_K 表达式的方括号中第一项总为正值,故必有

$$R_K\geqslant(1+\sqrt{3})R$$

这表明$\{R_K\}$是一个有界数列．这种单调递减而有界的数列必定存在极限．

(d)$\{R_K\}$的极限为

$$\lim_{K\to\infty}R_K=\lim_{K\to\infty}\left[\frac{2\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})^{2K}-1}+(1+\sqrt{3})\right]R=(1+\sqrt{3})R$$

即

$$R_{AB}=(1+\sqrt{3})R$$

或者,在第一问中定性证明$\{R_K\}$存在极限后,利用第二问(a)中 $R_{K+1}(R_K)$的递推关系,令 $K\to\infty$,可得出

$$R_{AB}=\frac{(3R_{AB}+2R)R}{(R_{AB}+R)}$$

即

$$R_{AB}^2-2RR_{AB}-2R^2=0$$

解出

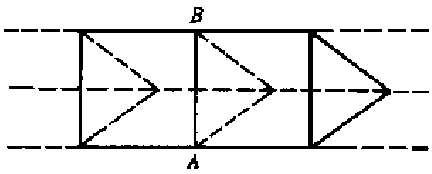
$$R_{AB}=(1\pm\sqrt{3})R$$

其中负根不合理，弃去．故得

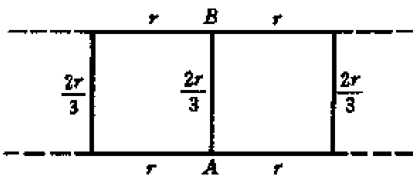
$$R_{AB}=(1+\sqrt{3})R$$

与上面(d)中的结果相同．

【题 12】 如电图4－12－1所示是由电阻丝连接成的无限电阻网络，已知每一段电阻丝的电阻均为 r. 试求 A、B 两点之间的等效电阻 R_{AB}.



电图 4－12－1



电图 4－12－2

【分析与解】 由于电图 4－12－1 网络的对称性，若电流从 A 点流入，经网络后，从 B 点流出，则电图 4－12－1 网络中背面那根无限长的电阻丝内应无电流通过，不起作用，可拆去．于是电图 4－12－1 的网络简化为电图 4－12－2 所示的等效网络．但应注意，在电图 4－12－2 网络中每一竖直电阻丝是电图 4－12－1 中 r 与 $2r$ 两电阻丝并联所得，其电阻应为$\frac{2}{3}r$，电图 4－12－2 网络中每一水平电阻丝的电阻仍为 r.

电图 4－12－2 网络相对 AB 左右对称，故可折叠成电图 4－12－3 的等效网络．折叠后，除 AB 外，每一条水平电阻丝是由电图 4－12－2 中两条 r 电阻丝并联所得，故其电阻为$\frac{r}{2}$；同样，每一条竖直电阻丝是由电图 4－12－2 中两条$\frac{2}{3}r$ 电阻丝并联所得，故其电阻为$\frac{r}{3}$，如电图 4－12－3 所示．

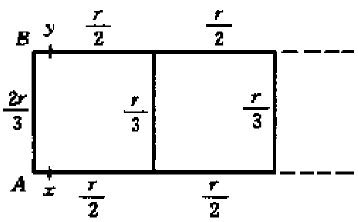
电图 4－12－3 中 A、B 两点之间的电阻 R_{AB}，可以看成是两部分并联而成，其一是电阻为$\frac{2}{3}r$ 的AB 直线；另一是以 x，y 为两端点的二端开路半无限网络(当然，x，y 两点非常靠近A，B 两点，其间的电阻可略)．故有

$$R_{AB}=\left(\frac{3}{2r}+\frac{1}{R_{xy}}\right)^{-1}$$

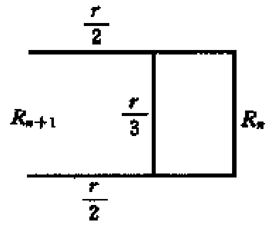
式中 R_{xy}是以 x，y 为两端点的开路半无限网络的等效电阻．

上述等效电阻为 R_{xy}的二端开路半无限电阻网络，可以看成是由三个电阻$\left(\frac{r}{2},\frac{r}{3},\frac{r}{2}\right)$连接

成的网络元向单一方向无限联组构成的．设由 n 个网络元联组构成的网络的等效电阻为R_n，再加一个网络元，便构成由$(n+1)$个网络元联组构成的网络，其等效电阻为 R_{n+1}．R_n 与R_{n+1}的关系如电图 4－12－4 所示，故两者的关系为



电图 4－12－3



电图 4－12－4

$$R_{n+1}=\frac{r}{2}+\left(\frac{3}{r}+\frac{1}{R_n}\right)^{-1}+\frac{r}{2}=\frac{4rR_n+r^2}{3R_n+r}$$

当 $n\to\infty$时，R_n 与 R_{n+1}应相等，即均为 R_∞，且都成为电图 4－12－3 中以 x,y 为端点的二端开路半无限电阻网络，亦即都等于 R_{xy}，故有

$$R_{xy}=R_\infty=R_{n+1}=R_n$$

即

$$R_{xy}=\frac{4rR_{xy}+r^2}{3R_{xy}+r}$$

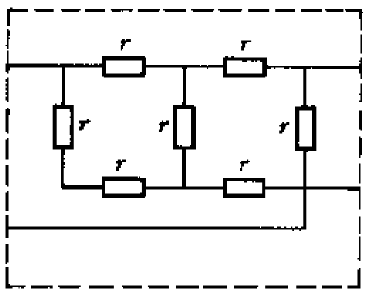
由此解出

$$R_{xy}=\left(\frac{3+\sqrt{21}}{6}\right)r$$

代入 R_{AB}的表达式，得

$$R_{AB}=\frac{2\sqrt{21}}{21}r$$

【题 13】 由7 个阻值均为 r 的电阻组成的网络元如电图 4－13－1 所示．由这种网络元彼此连接形成的无限梯形网络如电图 4－13－2 所示．试求 P,Q两点之间的等效电阻．

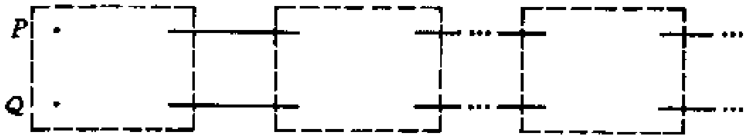


电图 4－13－1

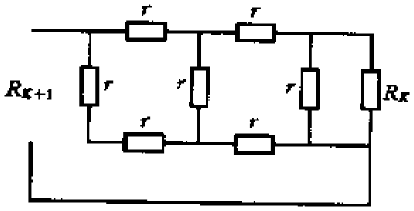
【分析】 设由 K 个网络元连接而成的梯形网络两端的等效电阻为R_K，把 R_K 再接上一个网络元，则其等效电阻为 R_{K+1}．利用直流电路的基尔霍夫定律，不难找出 R_{K+1}与 R_K 和 r 的关系．当 $K\to\infty$时，R_K 和R_{K+1}都等于 R_∞，亦即等于 R_{PQ}，于是可求．

【解】 设 K 个网络元连成的梯形网络的等效电阻为R_K，再连一个网络元后等效电阻为 R_{K+1}，如电图 4－13－3 所示．它又可简化为电图 4－13－4 所示的电路，且有

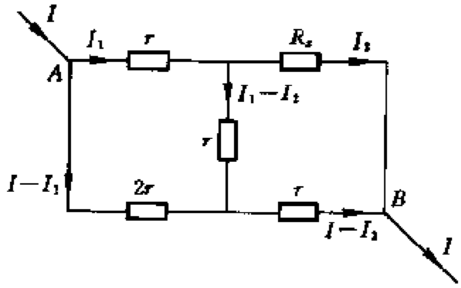
$$R_{K+1}=R_{AB}$$



电图 4－13－2



电图 4－13－3



电图 4－13－4

电图 4－13－4 电路中各支路的电流已在图中标明．由基尔霍夫电压方程，得

$$I_1r+(I_1-I_2)r=(I-I_1)2r$$

$$I_2R_x=(I_1-I_2)r+(I-I_2)r$$

式中

$$R_x=\frac{r+2R_K}{r+R_K}r$$

解出

$$I_1=\frac{2R_x+5r}{4R_x+7r}I$$

$$I_2=\frac{6r}{4R_x+7r}I$$

设 A,B 两端的电阻为 R_{AB}，此即 R_{K+1}，则

$$R_{AB}=\frac{U_{AB}}{I}=\frac{I_1r+I_2R_x}{I}$$

把 I_1 和 I_2 的表达式代入，得

$$R_{AB}=\frac{8R_x+5r}{4R_x+7r}r$$

再将 R_x 代入，得

$$R_{K+1}=R_{AB}=\frac{13r+21R_K}{11r+15R_K}r$$

当 $K\to\infty$ 时，有

$$R_{K+1}=R_K=R_\infty=R_{PQ}$$

故

$$R_{PQ}=\frac{13r+21R_{PQ}}{11r+15R_{PQ}}r$$

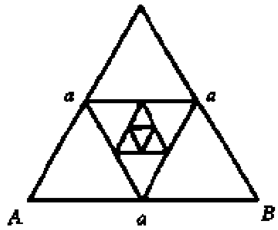
即

$$15R_{PQ}^2-10rR_{PQ}-13r^2=0$$

解出（$R_{PQ}<0$ 的解不合理，弃去）

$$R_{PQ}=\frac{1}{15}(5+2\sqrt{55})r=1.32r$$

【题 14】 用同种均匀金属丝连接成的无限内接等边三角形电阻网络如电图4－14－1所示，每个外三角形的三边中点为内接三角形的三个顶点．设最外面的等边三角形的边长为 a，金属丝单位长度的电阻为 r，试求 A,B 之间的等效电阻 R_{AB}．

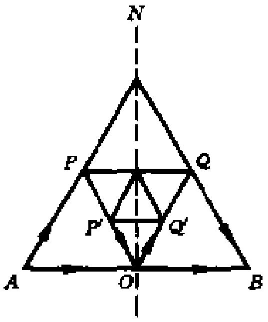


电图 4－14－1

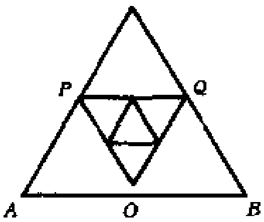
【分析与解】 如电图 4－14－2，网络相对图中的虚直线 MON 具有左、右对称性．若电流从 A 点流入，从 B 点流出，那么从左侧流向 MON 的电流分布必定与从 MON 向右侧流出的电流分布相同．因此，A 到 O 的电流与 O 到 B 的电流相同，P' 到 O 的电流与 O 到 Q' 的电流相同．因而，$P'OQ'$ 与 AOB 可在 O 处分开，而不影响计算的结果．换言之，可将电图 4－14－2（即电图 4－14－1）的网络等效成电图 4－14－3 所示的网络。

电图 4－14－3 的网络相当于在大三角形两边中点 P 与 Q 之间连接一个边长为 $\frac{a}{2}$ 的无限内接三角形网络，后者在 P,Q 两点之间的等效电阻记为 R_{PQ}，则电图 4－14－3 的网络可等效为电图 4－14－4 所示的网络．对于电图 4－14－4 的网络，容易算出

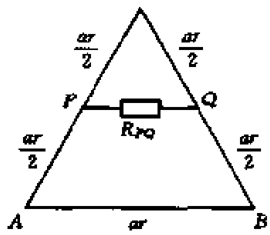
$$R_{AB}=\frac{ar+2R_{PQ}}{2ar+3R_{PQ}}ar$$



电图 4－14－2



电图 4－14－3



电图 4－14－4

R_{PQ} 是外边长为 $\frac{a}{2}$ 的无限内接等边三角形电阻网络的等效电阻．R_{AB} 是外边长为 a 的无限内接等边三角形电阻网络的等效电阻．考虑到电阻与长度成正比，应有

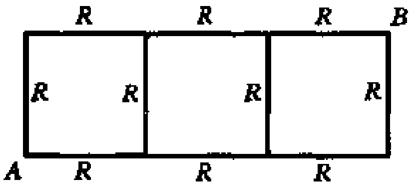
$$R_{PQ}=\frac{1}{2}R_{AB}$$

由以上两式，得

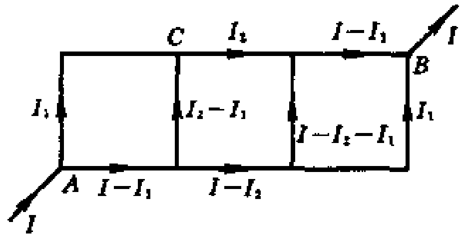
$$R_{AB}=\frac{1}{3}(\sqrt{7}-1)ar$$

【题 15】 10根电阻均为 R 的电阻丝连接成如电图 4－15－1 所示的电阻网络．试求 A,B 两点之间的等效电阻 R_{AB}.

【分析与解】 设电流 I 从 A 点流入,经网络后,由 B 点流出．根据网络的对称性以及电流经交叉点的分流关系,可以确定各支路中的电流如电图 4－15－2 所示．



电图 4－15－1



电图 4－15－2

由对称性,网络中间水平方向的两电流 I_2 和$(I-I_2)$应相等,即

$$I_2=I-I_2$$

故

$$I_2=\frac{I}{2}$$

同样,由对称性,网络中间竖直方向的两电流(I_2-I_1)和$(I-I_2-I_1)$亦应相等,由此可再次得出 $I_2=\frac{I}{2}$.

又,若从 A 点经网络中两条不同的路径到达 C 点,因 A 与 C 之间的电压 U_{AC}恒定,故有

$$I_1\cdot 2R=(I-I_1)R+(I_2-I_1)R$$

把上述 $I_2=\frac{I}{2}$代入,解出

$$I_1=\frac{3}{8}I$$

再从 A 点经 C 点到达 B 点,则有

$$U_{AB}=I_1\cdot 2R+I_2R+(I-I_1)R$$

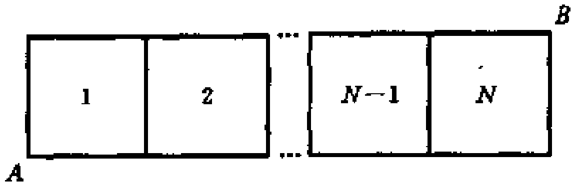
把上面解出的 I_1 和 I_2 代入,得

$$U_{AB}=\frac{15}{8}IR$$

故 A,B 两点之间的等效电阻 R_{AB}为

$$R_{AB}=\frac{U_{AB}}{I}=\frac{15}{8}R$$

【题 16】 如电图4－16－1所示的电阻丝网络包含 $N\geqslant 3$ 个正方形,网络中每一小段的电阻均为 R. 试求 A,B 之间的等效电阻 R_{AB}.



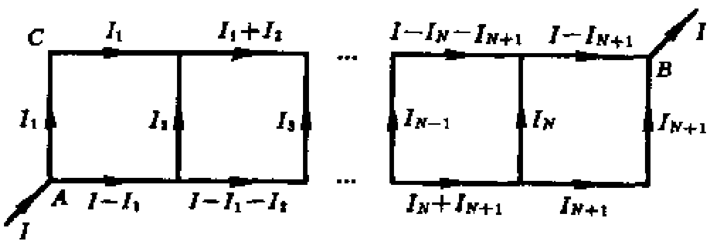
电图 4−16−1

【分析与解】 采用电流分布法求解．如电图 4−16−1，设从 A 端流入电流 I，从 B 端流出电流 I，若能求出电流在网络中的分布，进而算出 A，B 两端间的电压 U_{AB}，即可由

$$R_{AB}=\frac{U_{AB}}{I}$$

得出 R_{AB}．

设网络中的电流分布如电图 4−16−2 所示，则对于每一个正方形，其上、下两水平电流之和均为 I，故有



电图 4−16−2

$$U_{AD}+U_{CB}=IR+IR+\cdots+IR(\text{共 } N \text{ 项})=NIR$$

由对称性可知，

$$U_{AD}=U_{CB}$$

故

$$U_{CB}=\frac{1}{2}NIR$$

于是有

$$U_{AB}=I_1R+U_{CB}=\left(I_1+\frac{1}{2}NI\right)R$$

可见，求得 I_1 后即可算出 U_{AB}．

取网络中第$(K-1)$个和第 K 个正方形，其中的电流分布如电图 4−16−3 所示．建立电压方程．

$$I_{K-1}R+I'_{K-1}R=I''_{K-1}R+I_KR$$
$$I_KR+I'_KR=I''_KR+I_{K+1}R$$

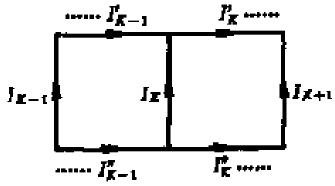
建立节点电流方程

$$I'_{K-1}+I_K=I'_K$$
$$I''_{K-1}=I_K+I''_K$$

以上四式，得

$$I_{K+1}-4I_K+I_{K-1}=0, K=2,3,\cdots,N$$

这是关于 I_K 的二阶递推式.



电图 4-16-3

引入常量 α_1 和 α_2，使得 I_K 之间有如下递推关系

$$I_{K+1}-\alpha_1 I_K=\alpha_2(I_K-\alpha_1 I_{K-1}) \qquad (1)$$

$$I_{K+1}-\alpha_2 I_K=\alpha_1(I_K-\alpha_2 I_{K-1}) \qquad (2)$$

即有

$$I_{K+1}-(\alpha_1+\alpha_2)I_K+\alpha_1\alpha_2 I_{K-1}=0$$

与 I_K 的原递推式比较，有

$$\alpha_1+\alpha_2=4, \quad \alpha_1\alpha_2=1$$

故 α_1 和 α_2 为方程

$$\alpha^2-4\alpha+1=0$$

的两个根，为

$$\alpha_1=2+\sqrt{3}, \quad \alpha_2=2-\sqrt{3}$$

由(1)、(2)两式得出

$$I_{N+1}-\alpha_1 I_N=\alpha_2^{N-1}(I_2-\alpha_1 I_1)$$

$$I_{N+1}-\alpha_2 I_N=\alpha_1^{N-1}(I_2-\alpha_2 I_1)$$

因对称性，有

$$I_{N+1}=I_1$$

$$I_N=I_2$$

代入，得

$$I_1-\alpha_1 I_2=\alpha_2^{N-1}(I_2-\alpha_1 I_1)$$

$$I_1-\alpha_2 I_2=\alpha_1^{N-1}(I_2-\alpha_2 I_1)$$

两式相减，得

$$\begin{aligned}(\alpha_1-\alpha_2)I_2&=(\alpha_1^{N-1}-\alpha_2^{N-1})I_2-(\alpha_1^{N-1}\alpha_2-\alpha_2^{N-1}\alpha_1)I_1\\&=(\alpha_1^{N-1}-\alpha_2^{N-1})I_2-(\alpha_1^{N-2}-\alpha_2^{N-2})I_1\\&=(\alpha_1^{N-1}-\alpha_1^{1-N})I_2-(\alpha_1^{N-2}-\alpha_1^{2-N})I_1\end{aligned}$$

由 $\alpha_1-\alpha_2=2\sqrt{3}$，解出

$$I_2=\frac{\alpha_1^{N-2}-\alpha_1^{2-N}}{(\alpha_1^{N-1}-\alpha_1^{1-N})-2\sqrt{3}}I_1$$

对于第 1 个正方形，可列出电压方程

$$I_1R+I_1R=(I-I_1)R+I_2R$$

即

$$3I_1=I+I_2$$

与上面得出的 I_2 与 I_1 的关系式联立，解出

$$I_1=\frac{I}{\left[3-\frac{\alpha_1^{N-2}-\alpha_1^{2-N}}{(\alpha_1^{N-1}-\alpha_1^{1-N})-2\sqrt{3}}\right]}$$

于是有

$$U_{AB}=\left(\frac{1}{2}NI+I_1\right)R=\left[\frac{N}{2}+\frac{1}{3-\frac{\alpha_1^{N-2}-\alpha_1^{2-N}}{(\alpha_1^{N-1}-\alpha_1^{1-N})-2\sqrt{3}}}\right]IR$$

故 A,B 之间的等效电阻为

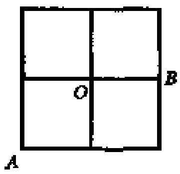
$$R_{AB}=\frac{U_{AB}}{I}=\left[\frac{N}{2}+\frac{1}{3-\frac{\alpha_1^{N-2}-\alpha_1^{2-N}}{(\alpha_1^{N-1}-\alpha_1^{1-N})-2\sqrt{3}}}\right]R$$

式中

$$\alpha_1=2+\sqrt{3}$$

【本题是参加 1996 年第 27 届 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)的中国队队员刘雨润编制的.】

【题 17】 电阻丝网络如电图4-17-1所示,每一小段的电阻均为 R. 试求 A,B 之间的等效电阻 R_{AB}.



电图 4-17-1

【分析】 如电图 4-17-1,对于从 A 端流入,从 B 端流出的电流流动方式,这个网络并不具有直观的对称性.

然而,根据电流的叠加性,可以把电图 4-17-1 中电流 I 从 A 流入从 B 流出的方式,看作是电图 4-17-2 中电流 I 从 A 流入从 O(网络中心)流出的方式与电图 4-17-3 中电流 I 从 O 流入从 B 流出的方式的叠加. 由于后两种电流流动方式都具有对称性,从而把原来看似不具有对称性的问题,转化成具有对称性的问题,使之便于求解.

【解】 如电图 4-17-2 所示,电流 I 从 A 流入,从 O 流出. 因对称地分流,从 A 到 C 的电流应为

$$I'_1=\frac{I}{2}$$

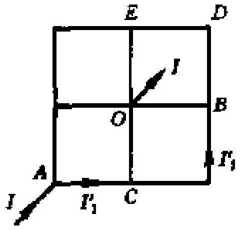
又因对称,B 和 E 应等势,故电图 4-17-2 BDE 部分无电流. I'_1 在 C 点分流,由两部分电阻的 3:1 关系,可知电图 4-17-2 中的 I'_2 应为

$$I'_2=\frac{1}{4}I'_1=\frac{I}{8}$$

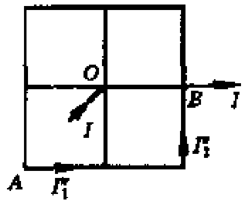
如电图 4-17-3 所示,电流 I 从 O 流入,从 B 流出. 利用对称性,不难算出(过程从略)其中的电流 I''_1 与 I''_2 分别为

$$I''_1=\frac{I}{24}$$

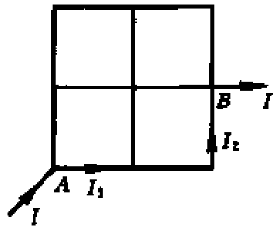
$$I''_2=\frac{5}{24}I$$



电图 4－17－2



电图 4－17－3



电图 4－17－4

上述两种电流分布叠加，构成如电图 4－17－4 所示的电流 I 从 A 流入从 B 流出的电流分布．电图 4－17－4 中的支路电流 I_1 是电图 4－17－2 和电图 4－17－3 中相应的支路电流 I'_1 与 I''_1 的叠加，同样电图 4－17－4 中的 I_2 是电图 4－17－2 和电图 4－17－3 中的 I'_2 与 I''_2 的叠加，即

$$I_1 = I'_1 + I''_1 = \frac{I}{2} + \frac{I}{24} = \frac{13}{24}I$$

$$I_2 = I'_2 + I''_2 = \frac{I}{8} + \frac{5}{24}I = \frac{8}{24}I = \frac{I}{3}$$

故 A，B 之间的电压为

$$U_{AB} = I_1 R + I_2 \times 2R = \frac{29}{24}IR$$

于是 R_{AB} 为

$$R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{29}{24}R$$

【题 18】 电阻丝构成的圆环分格（格数 $n \geqslant 2$）网络如电图 4－18－1 所示，其中每段电阻丝的电阻均为 R．试求 A，B 两节点之间的等效电阻 R_{AB}．

【分析与解】 本题的网络并不很复杂，但相对电流流入和流出的节点 A 和 B 而言，缺乏明显的对称性，给解题带来了困难．

然而，电图 4－18－1 中的 C 点给予解题者重要的启示，即网络相对于电流从 A 点流入、从 C 点流出具有对称性；网络相对于电流从 C 点流入、从 B 点流出也具有对称性．于是，可将题目要求的电流 I 从 A 点流入、从 B 点流出，分解为

1．电流 I 从 A 点流入、从 C 点流出

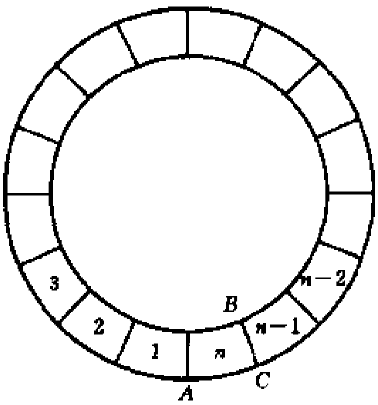
2．电流 I 从 C 点流入、从 B 点流出

之叠加．对两组电流，分别求出 A，B 之间的电压 $U_{AB}(1)$ 和 $U_{AB}(2)$，则电流 I 从 A 点流入、从 B 点流出时对应的 A，B 之间的电压为

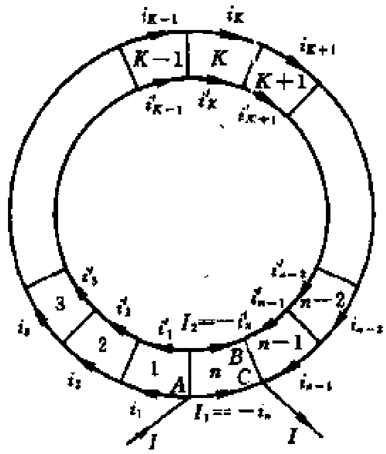
$$U_{AB} = U_{AB}(1) + U_{AB}(2)$$

所求等效电阻为

$$R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{1}{I}[U_{AB}(1) + U_{AB}(2)]$$



电图 4－18－1



电图 4－18－2

为了讨论方便，作如下规定．如电图 4－18－2 所示，从 A 点开始，顺时针地设外圈电流依次为 $i_1, i_2, i_3, \cdots, i_{K-1}, i_K, i_{K+1}, \cdots, i_{n-1}, i_{n-1}, i_n$，内圈电流加撇依次为 $i'_1, i'_2, \cdots, i'_n$．根据节点电流分配关系，不难得出

$$i_K + i'_K = i_{K+1} + i'_{K+1}, K \neq n, n-1$$

1．计算 $U_{AB}(1)$

如电图 4－18－2，引入电流

$$I_1 = -i_n, I_2 = -i'_n$$

取 ACB 路径，有

$$\begin{aligned} U_{AB}(1) &= [I_1 + (I_1 + i_{n-1} - I)]R \\ &= (2I_1 + i_{n-1} - I)R \end{aligned}$$

由对称性分析，不难得出

$$i_1 = i_{n-1}$$

故

$$U_{AB}(1) = (2I_1 + i_1 - I)R$$

又

$$U_{AC}(1) = I_1 R \tag{1}$$

$$\begin{aligned} U_{AC}(1) &= [(I - i_1 - I_1) + I_2 + (I - I_1 - i_1)]R \\ &= [2(I - I_1 - i_1) + I_2]R \end{aligned} \tag{2}$$

$$U_{AC}(1) = (i_1 + i_2 + \cdots + i_{n-1})R \tag{3}$$

$$\begin{aligned} U_{AC}(1) &= [(I - i_1 - I_1) + i'_1 + i'_2 + \cdots + i'_{n-1} + (I - I_1 - i_1)]R \\ &= [i'_1 + i'_2 + \cdots + i'_{n-1} + 2(I - I_1 - i_1)]R \end{aligned} \tag{4}$$

由(1)、(2)式，得

$$I_1 = 2I - 2I_1 - 2i_1 + I_2 \tag{5}$$

由(1)、(3)、(4)式，得

$$2I_1 = (i_1 + i'_1) + (i_2 + i'_2) + \cdots + (i_{n-1} + i'_{n-1}) + 2(I - I_1 - i_1)$$

又因

$$i_1+i'_1=i_2+i'_2=\cdots=i_{n-1}+i'_{n-1}=I-(I_1+I_2)$$

故

$$2I_1=(n-1)(I-I_1-I_2)+2(I-I_1-i_1) \tag{6}$$

引入

$$I_0=I-I_1-I_2$$

则(5)、(6)式可改写为

$$4I_1=3I-I_0-2i_1$$
$$4I_1=(n-1)I_0+2I-2i_1$$

由此解出

$$I_0=\frac{I}{n}$$

$$2I_1+i_1=\frac{1}{2}(3I-I_0)=\frac{3n-1}{2n}I$$

把上述结果代入

$$U_{AB}(1)=(2I_1+i_1-I)R$$

得

$$U_{AB}(1)=\frac{n-1}{2n}IR$$

2. 计算 $U_{AB}(2)$

如电图 4-18-3 所示，引入电流

$$i_0=i_n$$
$$i'_0=i'_n$$

如电图 4-18-3，电流 I 从 C 点流入，从 B 点流出，由对称性可知

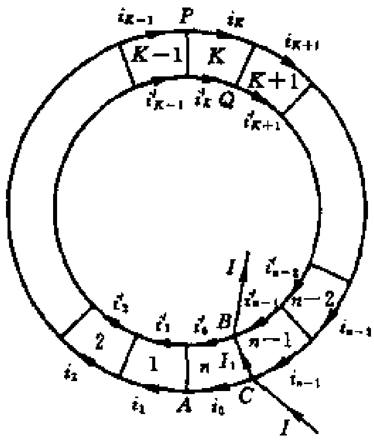
$$i'_K=-i_K,K=0,1,2,\cdots,n-1$$

利用 P,Q 两点之间取两条不同路径的等电压关系，得

$$i_K+(i_K-i_{K+1})=(i_{K-1}-i_K)+i'_K$$

上式当 $K=n-1$ 时，$K+1=0$；当 $K=0$ 时，$K-1=n-1$. 即

$$4i_K=i_{K-1}+i_{K+1}$$



电图 4-18-3

为求解递推式的需要，改写为

$$\begin{cases} i_{K+1}-\alpha i_K=\beta(i_K-\alpha i_{K-1}) \\ \alpha+\beta=4 \\ \alpha\beta=1 \end{cases}$$

解出 α 和 β 为

$$\alpha=2+\sqrt{3},\beta=2-\sqrt{3}.$$

于是有

$$i_{K+1}-\alpha i_K=\beta^K(i_1-\alpha i_0) \tag{7}$$

又有

$$i_{K+1}-\beta i_K=\alpha(i_K-\beta i_{K-1})$$

故相应地有

$$i_{K+1}-\beta i_K=\alpha^K(i_1-\alpha i_0) \tag{8}$$

由(7)、(8)式，得

$$i_K=\frac{(\alpha^K-\beta^K)i_1-(\alpha^{K-1}-\beta^{K-1})i_0}{\alpha-\beta} \tag{9}$$

由对称性可知

$$i_{n-1}=-i_0$$

结合(9)式，得

$$i_1=ai_0$$

$$a=\frac{\alpha^{n-2}-\beta^{n-2}-\alpha+\beta}{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}$$

引入电图 4－18－3 中的电流 I_1，则有

$$U_{AB}(2)=(-i_0+I_1)R$$

C 点的电流关系为

$$I=i_0+I_1-i_{n-1}=i_0+I_1+i_0=2i_0+I_1$$

利用 C,B 两点之间取两条不同路径的等电压关系，得

$$I_1R=i_0R+(i_0-i_1)R+(-i'_0)R$$

因

$$i'_0=-i_0$$

故有

$$I_1=3i_0-i_1$$

结合上述 $i_1=ai_0,2i_0+I_1=I$，解出

$$i_0=\frac{I}{5-a}$$

$$I_1=\frac{3-a}{5-a}I$$

代入 $U_{AB}(2)=(-i_0+I_1)R$，得

$$U_{AB}(2)=\frac{2-a}{5-a}IR$$

最后，A、B 两点间的等效电阻 R_{AB} 为

$$R_{AB}=\frac{1}{I}[U_{AB}(1)+U_{AB}(2)]=\left(\frac{n-1}{2n}+\frac{2-a}{5-a}\right)R$$

式中

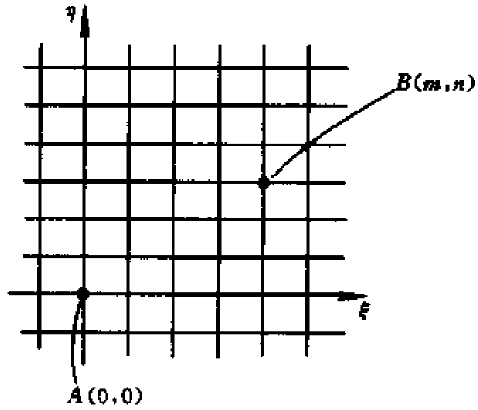
$$a=\frac{(\alpha^{n-2}-\beta^{n-2})-(\alpha-\beta)}{(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})}$$

$$\alpha=2+\sqrt{3},\quad \beta=2-\sqrt{3}$$

【本题是参加1995年第26届IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)的中国队队员谢小林编制的.】

【题19】 试求平面正方形无穷电阻网络任意两节点之间的等效电阻．已知网络中各小段电阻均为 r. 并推广到其他类型的无穷电阻网络，如平面矩形网络，平面正三角形网络，平面正六角形网络，三维立方体网络等，试求这些无穷电阻网络任意两节点之间的等效电阻．

【分析与解】 如所周知，对于各段电阻均为 r 的平面正方形无穷电阻网络(如电图4-19-1所示)，很容易求得相邻两节点之间的等效电阻为$\frac{r}{2}$.



电图4-19-1

但任意两个不相邻节点之间的等效电阻却较难计算．提示解题者，可采用二维平面的傅里叶展开，导出平面正方形无穷电阻网络任意两节点之间等效电阻的解析解．

为了方便，如电图4-19-1，在网络平面上建立 $\xi\eta$ 坐标，令所讨论的任意两节点 A 和 B 的坐标为 $A(0,0)$, $B(m,n)$(即 A 点是坐标原点)，其他所有节点的坐标可一般地表为 (k,l)，其中 m,n 和 k,l 均为整数．设电流 $I(k,l)$ 为流入节点 (k,l) 的电流，考虑电流 I 从 A 点流入，稳定后电流 I 从 B 点流出，则应有

$$I(k,l)=\begin{cases} I,\ k=l=0 \\ -I,\ k=m,l=n \\ 0,\ k,l\text{ 取其他值}\end{cases} \tag{1}$$

把稳定后任意节点 (k,l) 的电势记为 $V(k,l)$，则关于节点 (k,l) 的电流方程为

$$I(k,l)=\frac{1}{r}[V(k,l)-V(k-1,l)]+\frac{1}{r}[V(k,l)-V(k+1,l)]+\frac{1}{r}[V(k,l)-V(k,l-1)]+\frac{1}{r}[V(k,l)-V(k,l+1)]$$

或简写为

$$V(k,l)-\mathscr{L}V(k,l)=\frac{r}{4}I(k,l) \tag{2}$$

式中算符 $\mathscr{L}$ 定义为

$$\mathscr{L}V(k,l)=\frac{1}{4}[V(k-1,l)+V(k+1,l)+V(k,l-1)+V(k,l+1)] \tag{3}$$

$\mathscr{L}V(k,l)$ 即为任意节点 (k,l) 的四个相邻点电势的平均值．(2)式就是关于 $V(k,l)$ 的线性非齐次无限方程组，若设法由(2)式解出 $V(0,0)$ 与 $V(m,n)$，则 A、B 两点之间的等效电阻

$$R_{mn}=\frac{1}{I}[V(0,0)-V(m,n)] \tag{4}$$

便可得出．

非齐次方程(2)式的通解是相应的齐次方程

$$V(k,l)-\mathscr{L}V(k,l)=0 \tag{5}$$

的通解与非齐次方程(2)式的一个特解之和．

先求齐次方程(5)式的通解．

从数学上考虑，齐次方程(5)式实际上是各 $V(k,l)$的递推关系，故其解应具有不定性．从物理上考虑，可将(5)式解释为 $I(k,l)$一概为零的情形，即它表述的是没有外电流流入和流出时网络节点的电势分布．对此，可补充一个物理条件，即稳定后无源网络中电流消耗的功率必须为零．在电图 4－19－1 的平面网络中，各段电阻均不为零，各节点之间有电势差，则网络中必有内电流，电功率便不为零．因此，在(5)式的诸多解中，只能选取所有节点等电势的解，表为

$$V^{(1)}(k,l)=V_0 \tag{6}$$

再求非齐次方程组(2)式的特解．

把(2)式视为含参量 α 的方程组

$$\begin{cases} V(k,l)=\dfrac{r}{4}I(k,l)+\alpha\mathscr{L}V(k,l) \\ 0<\alpha<1 \end{cases} \tag{7}$$

在参量 $\alpha\to1$ 时的极限．

寻找函数 $F(x,y)$，令它在区间$[-\pi,\pi;-\pi,\pi]$上能展开成二维傅里叶级数，且以 $V(k,l)$ 为其(k,l)级傅里叶系数，即

$$F(x,y)=\sum_{k,l}V(k,l)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+ly)} \tag{8}$$

式中$\sum\limits_{k,l}$ 表示对k,l分别从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 求和．把(7)式代入，得

$$F(x,y)=\frac{r}{4}\sum_{k,l}I(k,l)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+ly)}+\alpha\sum_{k,l}\mathscr{L}V(k,l)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+ly)}$$

利用(1)、(3)式，得

$$\begin{aligned} F(x,y)=&\frac{rI}{4}[1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(mx+ny)}]\\ &+\frac{\alpha}{4}\sum_{k,l}V(k+1,l)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(k+1)x,ly]-\mathrm{i}x}+\frac{\alpha}{4}\sum_{k,l}V(k-1,l)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(k-1)x,ly]+\mathrm{i}x}\\ &+\frac{\alpha}{4}\sum_{k,l}V(k,l+1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[kx,(l+1)y]-\mathrm{i}y}+\frac{\alpha}{4}\sum_{k,l}V(k,l-1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[kx,(l-1)y]+\mathrm{i}y} \end{aligned}$$

考虑到求和是在无穷区间进行的，且已假定和数收敛于函数 $F(x,y)$，可在上式四个求和号中用 k,l 代替 $k+1,k-1,l+1,l-1$，得

$$\begin{aligned} F(x,y)=&\frac{rI}{4}[1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(mx+ny)}]+\frac{\alpha}{4}\sum_{k,l}V(k,l)(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+ly)}\\ &+\frac{\alpha}{4}\sum_{k,l}V(k,l)(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}y})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+ly)}\\ =&\frac{rI}{4}[1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(mx+ny)}]+\frac{\alpha}{2}(\cos x+\cos y)\sum_{k,l}V(k,l)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+ly)}\\ =&\frac{rI}{4}[1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(mx+ny)}]+\frac{\alpha}{2}(\cos x+\cos y)F(x,y) \end{aligned}$$

故 $F(x,y)$可表为

$$F(x,y)=\frac{Ir}{2}\cdot\frac{1-e^{i(mx+ny)}}{2-\alpha(\cos x+\cos y)} \tag{9}$$

对于$0<\alpha<1$,有

$$\begin{cases}V(0,0)_\alpha=\dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x,y)\,dxdy\\ \qquad\qquad=\dfrac{Ir}{8\pi^2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(mx+ny)}{2-\alpha(\cos x+\cos y)}dxdy\\ V(m,n)_\alpha=\dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x,y)e^{-i(mx+ny)}\,dxdy\\ \qquad\qquad=-\dfrac{Ir}{8\pi^2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(mx+ny)}{2-\alpha(\cos x+\cos y)}dxdy\end{cases}$$

非齐次方程组(2)式的特解可取为

$$V^{(2)}(k,l)=\lim_{\alpha\to1^-}V(k,l)_\alpha$$

因此,

$$\begin{cases}V^{(2)}(0,0)=\dfrac{Ir}{8\pi^2}\displaystyle\lim_{\alpha\to1^-}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(mx+ny)}{2-\alpha(\cos x+\cos y)}dxdy\\ V^{(2)}(m,n)=-\dfrac{Ir}{8\pi^2}\displaystyle\lim_{\alpha\to1^-}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(mx+ny)}{2-\alpha(\cos x+\cos y)}dxdy\end{cases}$$

数学上可以证明(此处从略),求极限可移至积分号内进行．于是,得出非齐次方程组(2)式的特解为

$$\begin{cases}V^{(2)}(0,0)=\dfrac{Ir}{8\pi^2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(mx+ny)}{2-\cos x-\cos y}dxdy\\ V^{(2)}(m,n)=-\dfrac{Ir}{8\pi^2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(mx+ny)}{2-\cos x-\cos y}dxdy\end{cases} \tag{10}$$

把符合物理要求的齐次方程组的通解(6)式与非齐次方程组的特解(10)式相加,得出非齐次方程组(2)式的通解为

$$\begin{cases}V(0,0)=V^{(1)}(0,0)+V^{(2)}(0,0)\\ V(m,n)=V^{(1)}(m,n)+V^{(2)}(m,n)\end{cases} \tag{11}$$

代入(4)式,得出

$$R_{mn}=\frac{r}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(mx+ny)}{2-\cos x-\cos y}dxdy \tag{12}$$

这就是平面正方形无穷网络任意两节点A,B之间等效电阻的解析解．

取熟知的

$$R_{10}=R_{01}=\frac{r}{2}$$

来检验．由(12)式,得出

$$\begin{cases}R_{10}=\dfrac{r}{4\pi^2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos x}{2-\cos x-\cos y}dxdy\\ R_{01}=\dfrac{r}{4\pi^2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos y}{2-\cos x-\cos y}dxdy\end{cases}$$

由被积函数的对称性，应有 $R_{10}=R_{01}$. 以上两式相加，得

$$R_{10}+R_{01}=\frac{r}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=r$$

故确有 $R_{10}=R_{01}=\frac{r}{2}$. 可见，由(12)式得出的 R_{10}和 R_{01}的结果与熟知的相符 .

作为(12)式的具体例子，再给出下述结果

$$R_{20}=2\left(1-\frac{2}{\pi}\right)r$$

$$R_{30}=\left(\frac{17}{2}-\frac{24}{\pi}\right)r$$

$$R_{11}=\frac{2}{\pi}r$$

$$R_{21}=\left(\frac{4}{\pi}-\frac{1}{2}\right)r$$

由(4)式和(2)式，容易得出

$$R_{mn}=\mathscr{L}R_{mn} \tag{13}$$

算符 $\mathscr{L}$的定义如(3)式，(13)式表明，R_{mn}是四个邻近等效电阻的算术平均值 . 考虑到 R_{mn}所具有的下述对称性

$$\begin{aligned}R_{mn}&=R_{(-m)n}=R_{m(-n)}=R_{(-m)(-n)}\\&=R_{nm}=R_{(-n)m}=R_{n(-m)}=R_{(-n)(-m)}\end{aligned} \tag{14}$$

不难预料，只需用(12)式通过积分算出 $R_{(2k)0}(k=1,2,\cdots)$，即可得出全部 R_{mn}值 .

如电图 4－19－1，在 ξ 轴上，R_{m0}的二重积分可简化为一重积分

$$R_{m0}=\frac{r}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2mx}{\sin x\sqrt{1+\sin^2 x}}\mathrm{d}x \tag{15}$$

由此可得出递推关系

$$R_{(m+1)0}-R_{m0}=\frac{2r}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2m+1)x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\mathrm{d}x \tag{16}$$

可以证明

$$\left(2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{2m+1}>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2m+1)x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\mathrm{d}x>\frac{1}{\sqrt{2}(2m+1)}$$

因此

$$\frac{(4-\sqrt{2})}{\pi(2m+1)}r>R_{(m+1)0}-R_{m0}>\frac{\sqrt{2}}{\pi(2m+1)}r$$

因 $R_{00}=0$，得

$$\frac{(4-\sqrt{2})r}{\pi}\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{2l-1}>R_{m0}>\frac{\sqrt{2}}{\pi}r\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{2l-1} \tag{17}$$

当 m 很大时，利用

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{2l-1}\approx\frac{1}{2}\ln m+\ln 2+\frac{1}{2}C\\ C=0.577\cdots(\text{欧拉常量})\end{cases}$$

可知 m 很大时，有

$$\left(\frac{4-\sqrt{2}}{2\pi}\ln m+0.81\right)r>R_{m0}>\left(\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\ln m+0.44\right)r$$

即 R_{m0} 随 m 的增长速度与 $\ln m$ 随 m 的增长速度相近．这意味着

$$\lim_{m\to\infty}R_{m0}=\infty \tag{18}$$

实际上，R_{m0} 随 m 的增长很慢．例如取 $r=1\Omega$，计算得出节点(0,0)与节点(10^8,0)之间的等效电阻仅约为 6Ω.

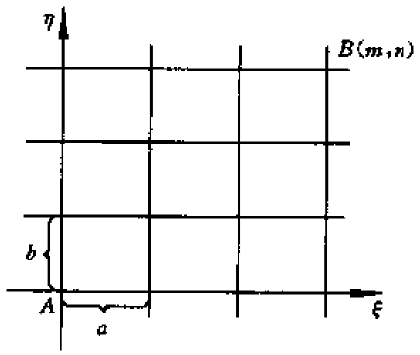
上面应用于平面正方形无穷电阻网络的傅里叶展开的方法，可推广引申，用于其他类型的无穷电阻网络．

1. 平面矩形无穷电阻网络

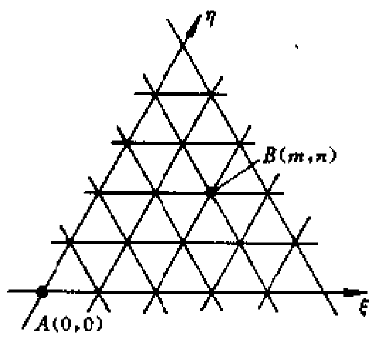
由均匀电阻丝连成的平面矩形无穷网络如电图 4－19－2 所示．若每个矩形的长为 a，宽为 b，单位长度的电阻为 r_0，则可类似地得出 A，B 两节点之间的等效电阻为

$$R_{mn}=\frac{ab}{4\pi^2}r_0\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(mx+ny)}{a+b-a\cos x-b\cos y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{19}$$

值得一提的是，在 $a\neq b$ 的条件下，用单纯的对称性分析甚至无法算出 R_{10} 的值．



电图 4－19－2



电图 4－19－3

2. 平面正三角形无穷电阻网络

对于这种网络，可将 $\xi-\eta$ 坐标取成如电图 4－19－3 所示，任一节点的坐标仍用一对整数标定．设每段电阻丝的电阻仍为 r，通过类似的推导可以得出

$$R_{mn}=\frac{r}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(mx+ny)}{3-\cos x-\cos y-\cos(x-y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{20}$$

由(20)式计算几个例子，得出

$$R_{10}=R_{01}=R_{(-1)1}=\frac{r}{3}$$

与简单的对称性分析得出的结果相符．

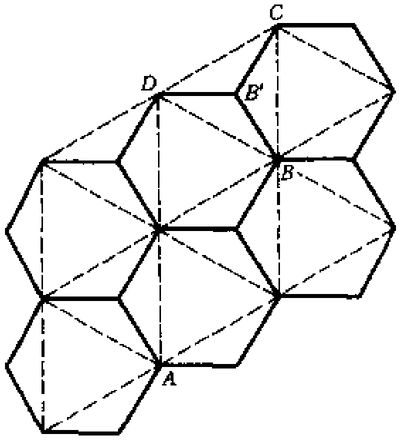
3. 平面正六边形无穷电阻网络

网络如电图 4－19－4 所示．这种网络较难处理，计算也比较复杂麻烦．例如，为求电图 4－19－4 中 A，B 之间或 A，C 之间或 A，D 之间的等效电阻，可先用 Y—△变换把正六边形网络转换成电图 4－19－4 中虚线所示的正三角形网络，从而可解．然而，若要求 A，B' 之间的等效电

阻,则可发现经 Y—△变换后,B'点消失了．为此,可利用下述公式

$$R_{AB'}=\frac{1}{3}(R_{AB}+R_{AC}+R_{AD}) \tag{21}$$

由 R_{AB},R_{AC},R_{AD}求得 $R_{AB'}$.(21)式的成立是显然的,利用电势叠加原理即可证明．



电图 4-19-4

4. 三维正立方体无穷电阻网络

熟悉了前面的推导后,对三维正立方体无穷网络即可写出

$$R_{mnl}=\frac{r}{8\pi^3}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(mx+ny+lz)}{3-\cos x-\cos y-\cos z}\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z \tag{22}$$

由此,可算出预期的结果

$$R_{001}=R_{010}=R_{100}=\frac{r}{3}$$

二维正方形网络中,当 $m\to\infty$时,R_{m0}发散．在三维正立方体网络中,(0,0,0)点与无穷远点之间的等效电阻却是收敛的,这是因为不难证明积分

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{3-\cos x-\cos y-\cos z}\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$$

是有限的．

5. 一维电阻网络

按上述方法,可以得出一维直线网络中节点 $A(0)$与 $B(m)$之间的等效电阻为

$$R_m=\frac{r}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos mx}{1-\cos x}\mathrm{d}x=\frac{r}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin mx}{\sin x}\right)^2\mathrm{d}x \tag{23}$$

傅里叶早在 200 多年前已经得出

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin mx}{\sin x}\right)^2\mathrm{d}x=m\pi \tag{24}$$

因此

$$R_m=mr$$

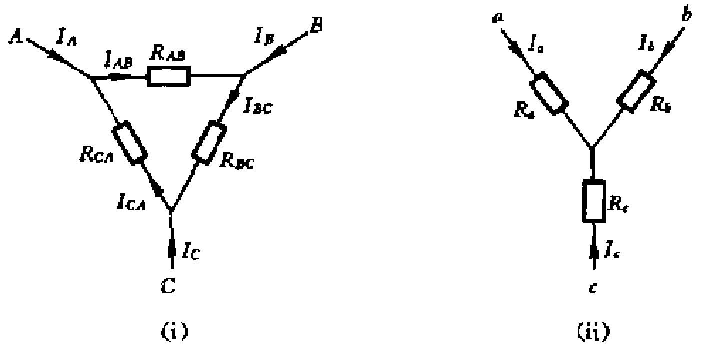
与预期的结果一致．由于 $R_m=mr$ 是从物理上可以简单判定的,故可用它反过来得出傅里叶积分(24)式,的确颇为有趣．

【本题的原编题和解题者是波兰的中学生 Krzysztof Giaro,后经北京大学物理系 92 级学生石长春、李翌、张霖涛及 93 级学生韦韬改编．】

【题 20】 如果电图4-20-1中两个电路之间具有这样的对应关系:当电路(ii)中 a,b,c 端的电势分别与电路(i)中 A,B,C 端的电势相同时,从 a,b,c 端流入的电流便分别与从A,B,C 端流入的电流相同．若电路(i)中的三个电阻 R_{AB},R_{BC},R_{CA}为已知,试求电路(ii)中的 R_a,R_b,R_c.

再利用上述结果计算电图 4-20-2 电路中的 R_{PQ}.

【分析】 如电图 4-20-1 所示,已知当 $U_{ab}=U_{AB}$,$U_{bc}=U_{BC}$,$U_{ca}=U_{CA}$时,应有 $I_a=I_A$,$I_b=$



电图 4-20-1

I_B, $I_c = I_C$. 根据电图 4-20-1 中电路(i)和(ii)的结构，不难把上述要求转换为各个电阻之间的关系，从而可由已知的 R_{AB}, R_{BC}, R_{CA} 来计算 R_a, R_b, R_c. 实际上，$U_{ab}=U_{AB}, U_{bc}=U_{BC}, U_{ca}=U_{CA}$ 中只有两个是独立的要求，同样，$I_a=I_A, I_b=I_B, I_c=I_C$ 三个方程中也只有两个是独立的．

以上的讨论是很有意义的，因为在某些复杂电路中常会遇到电阻联接成△形[如电图 4-20-1 中的电路(i)]或 Y 形[如电图 4-20-1 中的电路(ii)]. 而且有时电路等效电阻的计算很复杂．如果可以把 Y 形电阻联接代换成等效的△形电阻联接，或相反地把△形电阻联接代换成等效的 Y 形电阻联接，则往往可在电阻串、并联的基础上简化计算．所谓等效，就是指这两种电阻联接之间的代换仍保持电路中其余各部分的电压和电流不变，即要求 Y 形三个端点的电势以及流过的电流与△形三个端点的电势以及流过的电流分别相同．

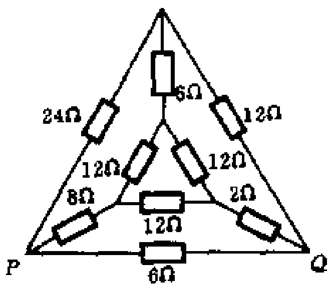
利用这种"Y—△电路的等效代换"方法，电图 4-20-2 中的 R_{PQ} 容易求出．

【解】 如电图 4-20-1，已知当

$$U_{ab}=U_{AB}, U_{bc}=U_{BC}, U_{ca}=U_{CA}$$

时，应有

$$I_a=I_A, I_b=I_B, I_c=I_C$$



电图 4-20-2

先看 $I_a=I_A$ 对电阻关系的要求．在电路(ii)中，有

$$\begin{cases} U_{ab}=I_aR_a-I_bR_b \\ U_{ca}=I_cR_c-I_aR_a \\ I_a+I_b+I_c=0 \end{cases}$$

消去 I_b 和 I_c，解出

$$I_a=\frac{R_c}{R_aR_b+R_bR_c+R_cR_a}U_{ab}-\frac{R_b}{R_aR_b+R_bR_c+R_cR_a}U_{ca}$$

在电路(i)中，有

$$\begin{cases} I_{AB}=\dfrac{U_{AB}}{R_{AB}} \\ I_{CA}=\dfrac{U_{CA}}{R_{CA}} \\ I_A=I_{AB}-I_{CA} \end{cases}$$

即

$$I_A=\frac{U_{AB}}{R_{AB}}-\frac{U_{CA}}{R_{CA}}$$

因此，$I_a=I_A$ 要求

$$\frac{R_c U_{ab}}{R_aR_b+R_bR_c+R_cR_a}-\frac{R_bU_{ca}}{R_aR_b+R_bR_c+R_cR_a}=\frac{U_{AB}}{R_{AB}}-\frac{U_{CA}}{R_{CA}}$$

但 $U_{ab}=U_{AB}$，$U_{ca}=U_{CA}$，且彼此独立，因此上式中对应项的系数应相等，即

$$\frac{R_c}{R_aR_b+R_bR_c+R_cR_a}=\frac{1}{R_{AB}} \tag{1}$$

$$\frac{R_b}{R_aR_b+R_bR_c+R_cR_a}=\frac{1}{R_{CA}} \tag{2}$$

这就是 $I_a=I_A$ 要求有关电阻遵循的关系．由 $I_b=I_B$ 或 $I_c=I_C$ 可以得出类似的关系，只需替换各量的下标即可．实际上只需要补充一个关系式，即

$$\frac{R_a}{R_aR_b+R_bR_c+R_cR_a}=\frac{1}{R_{BC}} \tag{3}$$

由(2)、(3)式以及由(1)、(3)式，得

$$R_b=\frac{R_{BC}}{R_{CA}}R_a$$

$$R_c=\frac{R_{BC}}{R_{AB}}R_a$$

再代入(1)式，有

$$R_a+R_b+\frac{R_b}{R_c}R_a=R_{AB}$$

可得

$$R_a=\frac{R_{AB}R_{CA}}{R_{AB}+R_{BC}+R_{CA}} \tag{4}$$

替换下标，得

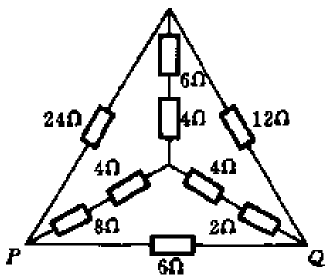
$$R_b=\frac{R_{BC}R_{AB}}{R_{AB}+R_{BC}+R_{CA}} \tag{5}$$

$$R_c=\frac{R_{CA}R_{BC}}{R_{AB}+R_{BC}+R_{CA}} \tag{6}$$

(4)、(5)、(6)式即为所求．

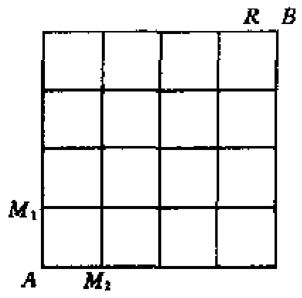
利用(4)、(5)、(6)式可将电图 4－20－2 电路中的△形电阻联接等效替换成 Y 形电路联接，后者如电图 4－20－3 所示．由于电图 4－20－3 电路中左侧各电阻的阻值恰为右侧相应各电阻阻值的两倍，故中间的 6Ω 与 4Ω 两电阻中并无电流，可以拆去．这样就简化为简单的串、并联电路，于是得出

$$R_{PQ}=4\Omega$$



电图 4－20－3

【题 21】 如电图4－21－1所示，由电阻丝构成的网络中，每一段电阻丝的电阻均为 R，试求R_{AB}.

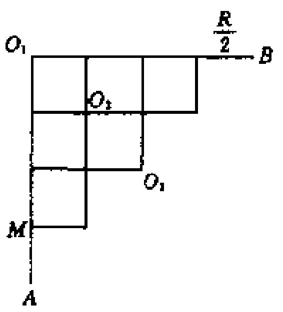


电图 4－21－1

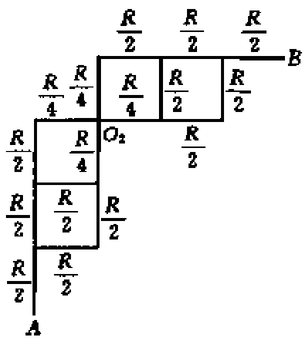
【分析】 如果采用直流电路的基尔霍夫定律，当然可以求解，但需列出约 40 个代数方程组，计算起来过于繁杂，也容易出错．

应该充分利用网络的对称性，通过“折叠”、“Y—△等效电路的代换”等方法，使电路简化，便容易求解．

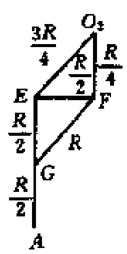
【解】 由于所求 R_{AB}对应的A，B 两点刚好是网络的对角线，利用对角线 AB 两侧电路的对称性，可将电路以 AB 为边“折叠”起来（如同折纸一样），这样做当然不会改变电路的任何性质．折叠后，每一段由原先单一的 R 变为相当于两个 R 并联，即每段电阻成为$\frac{R}{2}$，如电图 4－21－2 所示．例如，由对称性，电图 4－21－1 中 M_1 点和 M_2 点等电势，折叠后可把 M_1 和 M_2 连接起来，成为电图 4－21－2 中的 M 点，于是 AM 的电阻为$\frac{R}{2}$，余同．



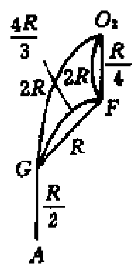
电图 4－21－2



电图 4－21－3



电图 4－21－4



电图 4－21－5

在电图 4－21－2 的电路中，由于 O_1、O_2、O_3 两侧是对称的，因此 O_1，O_2，O_3 三点应等电势，故可将 O_1 的两边及 O_3 的两边折叠到 O_2，得到电图 4－21－3 的电路．因 O_1，O_2，O_3 等电势，折叠后可将 O_1，O_2，O_3 连接起来，于是电图 4－21－3 中以 O_2 为中心四段的电阻均应为$\frac{R}{4}$，余仍为$\frac{R}{2}$．

在电图 4－21－3 的电路中，显然有

$$R_{AO_2}=R_{O_2B}$$

$$R_{AB}=R_{AO_2}+R_{O_2B}$$

故

$$R_{AB}=2R_{AO_2}$$

因此，只需算出 R_{AO_2}即可．电图 4－21－3 中的 AO_2 部分可以简化为如电图 4－21－4 所示的电路．

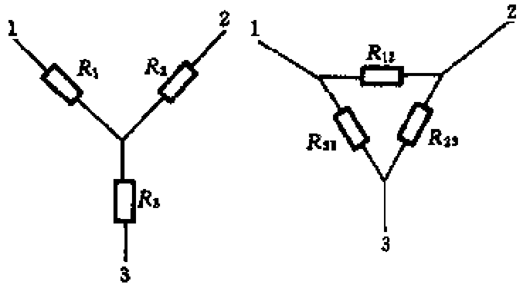
在电图 4－21－4 的电路中，E——O_2FG 部分是 Y 形联接，利用 Y—△等效电路代换，可将它用相应的△形联接代换．于是得出与电图 4－21－4 等效的如电图 4－21－5 所示的电路．

Y 形联接代换为△形联接时，各电阻之间的变换关系为

$$R_{12}=\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_3}$$

$$R_{23}=\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_1}$$

$$R_{31}=\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_2}$$



电图 4-21-6

式中各电阻如电图 4-21-6 所示．在本题中，$R_1=R_{EO_2}$，$R_2=R_{EF}$，$R_3=R_{EG}$（见电图 4-21-4）；$R_{12}=R_{\widehat{O_2F}}$，$R_{23}=R_{\widehat{FG}}$，$R_{31}=R_{\widehat{GO_2}}$（电图 4-21-5 中用曲线$\widehat{O_2F}$，$\widehat{FG}$，$\widehat{GO_2}$表示的电阻）．计算得出

$$R_{\widehat{O_2F}}=2R,\quad R_{\widehat{FG}}=\frac{4}{3}R,\quad R_{\widehat{GO_2}}=2R$$

已在电图 4-21-5 中标明．

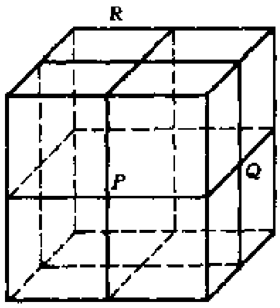
电图 4-21-5 是简单的串、并联电路，容易算出

$$R_{AO_2}=\frac{47}{44}R$$

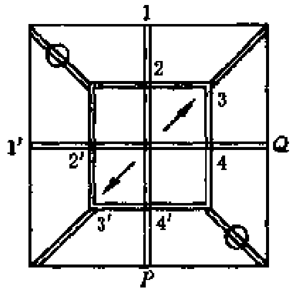
故

$$R_{AB}=2R_{AO_2}=\frac{47}{22}R$$

【题 22】 如电图4-22-1所示的立方体网络中，每一小段直线的电阻均为 R，试求 R_{PQ}．



电图 4-22-1



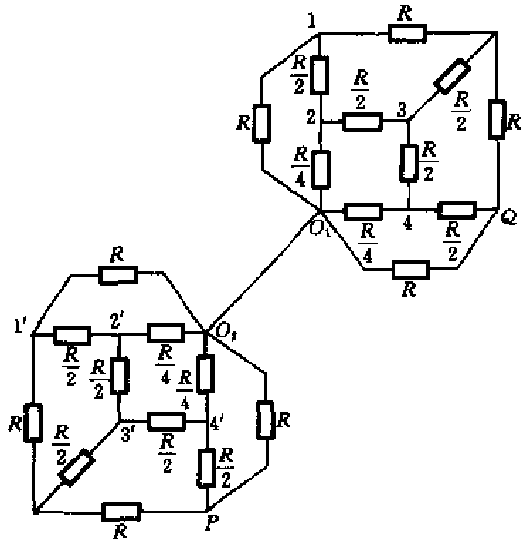
电图 4-22-2

【分析】 利用网络的对称性，通过"挤压"、拆除、连接等手段，再利用 Y—△代换的方法，一步步地简化电路，即可求解．

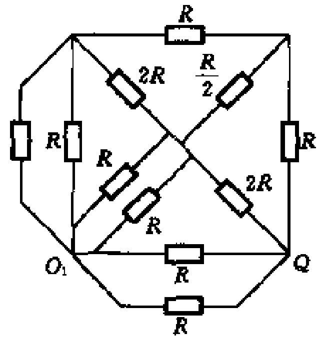
【解】 电图 4-22-1 电路的特点是上下对称，故可"挤压"成图 2 的等效电路．在图 2 中用双线画出的每段的电阻等于两个 R 的并联，即为$\frac{R}{2}$，用单线画出的每段的电阻仍为 R．

在电图 4-22-2 中，对于 P，Q 两点，两箭头所示方向具有对称性，故可将电图 4-22-2 中画圈的两个电阻拆去，并可将小正方形的四点与中央的 O 点短接．这样，电图 4-22-2 的电

路可等效为电图 4－22－3 的电路．



电图 4－22－3



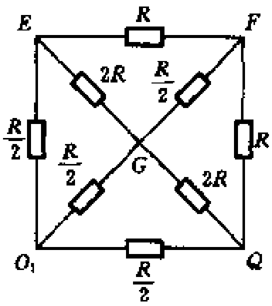
电图 4－22－4

在电图 4－22－3 电路中的 O_1 和 O_2 即为电图 4－22－2 的 O 点．显然，有

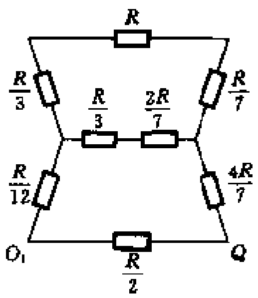
$$R_{PQ}=R_{PO_2}+R_{O_1Q},\quad R_{O_1Q}=R_{PO_2}$$

故

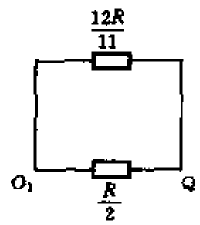
$$R_{PQ}=2R_{O_1Q}$$



电图 4－22－5



电图 4－22－6



电图 4－22－7

为了计算 R_{O_1Q}，把以 2 为结点的 Y 形联接和以 4 为结点的 Y 形联接代换成相应的△形联接．于是电图 4－22－3 中的 O_1Q 部分的等效电路如电图 4－22－4 所示．Y—△等效电路代换后，有关电阻阻值的计算可参看以上两题（本章题 20 和题 21），计算的结果已在电图 4－22－4 中标明，不赘述了．

显然，电图 4－22－4 的电路又可等效为电图 4－22－5 的电路．

把电图 4－22－5 电路中的两个△联接 EGO_1 和 FGQ 代换成等效的 Y 形联接后，得到电图 4－22－6 的电路．

电图 4－22－6 的电路又可等效成电图 4－22－7 的电路．

由电图 4－22－7，得

$$R_{O_1Q}=\frac{12}{35}R$$

故

$$R_{PQ}=2R_{O_1Q}=\frac{24}{35}R$$

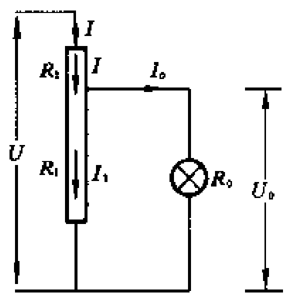
【题 23】 电灯泡的电阻为 $R_0=2\ \Omega$，正常工作电压为 $U_0=4.5\ \mathrm{V}$，用电动势 $U=6\ \mathrm{V}$ 且内阻可以忽略的电池供电，并利用一滑线电阻器将灯泡与电池相联．试求效率为最大的条件及最大效率值．又为使系统的效率不低于 $\eta=0.6$，试计算电阻器的阻值及其承受的最大电流．

【分析】 题目没有说明变阻器是怎样接入线路的，因而首先要根据题意判断其可能的连接方式，才能进一步求解．若变阻器全体与 R_0 并联，则 R_0 两端的电压应恒为 6 V，不符合要求．若变阻器全体与 R_0 串联，则为了使 R_0 上分配到 4.5 V 的电压，变阻器的阻值只能取 $\frac{2}{3}\ \Omega$[因 $U=6\ \mathrm{V}=(R+x)I=(2+x)I$，又 $RI=U_0$，即 $I=\frac{U_0}{R}=\frac{4.5}{2}$，故 $x=\frac{2}{3}\ \Omega$]，这样，效率 $\eta=\frac{IU_0}{IU}=\frac{4.5}{6}=75\%$ 是确定的，无从讨论"效率最大的条件"及"效率不低于 0.6"等问题，亦不符合要求．因此，唯一符合题意的连接方式是变阻器的一部分与 R_0 并联，另一部分与它们串联，如图所示，即相当于一个分压电路．

效率 η 是灯泡上的有用功率 U_0I_0 与电源提供的总功率 UI 之比，因 U_0、I_0、U 均为定值，η 只随总电流 I 变化，由此可知效率为最大的条件及相应的 η_{max} 值．同样，$\eta\geqslant0.6$ 对 I 有一定要求，由此可知变阻器应承受的最大电流及其阻值．

【解】 由分析，变阻器的连接方式如图所示．效率 η 为

$$\eta=\frac{P_0}{P}=\frac{U_0I_0}{UI}=\frac{U_0^2}{R_0UI}$$



电图 4-23-1

式中 U_0,R_0,U 均为定值，故

$$\eta\propto\frac{1}{I}$$

即效率只取决于总电流 I，I 越小，η 越大．因

$$I_{min}=I_0$$

故

$$\eta_{max}=\frac{U_0I_0}{UI_0}=\frac{U_0}{U}=75\%$$

这时 $I_1=0$，即图中 R_1 下端与电路断开，只有 R_2 部分与 R_0 串联，故

$$U=I_0(R_2+R_0)$$

式中

$$I_0=\frac{U_0}{R_0}$$

由以上两式，解出

$$R_2=\frac{1}{3}R_0=\frac{2}{3}\ \Omega$$

为使 η 不低于 0.6，即

$$\eta=\frac{U_0 I_0}{UI}\geqslant 0.6$$

要求

$$I\leqslant\frac{U_0 I_0}{0.6U}=\frac{v_0^2}{0.6R_0U}=2.81\ \mathrm{A}$$

故变阻器承受的最大电流值为

$$I_{\max}=2.81\ \mathrm{A}$$

又因

$$IR_2=U-U_0$$

故当 $\eta=0.6$ 时，R_2 应为

$$R_2=\frac{U-U_0}{I}=\frac{1.51}{2.81}=0.53\ \Omega$$

再由

$$I_1R_1=U_0$$

得

$$R_1=\frac{U_0}{I_1}=\frac{U_0}{I-I_0}=\frac{U_0}{\left(I-\dfrac{U_0}{R_0}\right)}$$

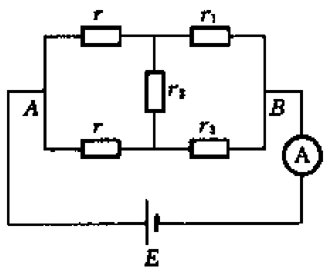
$$=\frac{4.5}{2.81-\dfrac{4.5}{2}}=8.04\ \Omega$$

故变阻器总阻值为

$$R=R_1+R_2=8.04+0.53=8.57\ \Omega$$

【题 24】 1. 在如图所示的电路中，各个电阻的阻值都是 1 Ω，安培计与电源的内阻均可忽略不计，电源的电动势 $\mathscr{E}=10$ V. 试求通过安培计的电流强度 .

2. 若图中的两个 r 是好电阻，而 r_1,r_2,r_3 是三个坏电阻，它们互不相关地时通、时断，已知 r_1,r_2,r_3 各自通电的概率都是 $\frac{1}{2}$. 试求电源的平均输出功率 .



电图 4-24-1

【解】 1. 根据图示电路的对称性，电阻 r_2 不起作用(即其中无电流)，可拆去 . 于是 A,B 间的总电阻为

$$R_{AB}=1\ \Omega$$

安培计读数为

$$I=\frac{\mathscr{E}}{R_{AB}}=10\ \mathrm{A}$$

2. 由题设，r_1,r_2,r_3 三个电阻各有通和断两种情形，概率各为 $\frac{1}{2}$ (另二个 r 完好). 这样，整个电路将会出现 $2^3=8$ 种可能的组合，每一

种组合的概率都是$\frac{1}{8}$. 列出每一种组合相应的电源输出功率,求平均值,即为所求的电源平均输出功率.

例如,r_1,r_2,r_3 皆通时,由第一问,$R_{AB}=1\Omega$,故电源输出功率为 $P=I^2R_{AB}=100$ W.

例如,r_1 与 r_2 通,r_3 断时,由图,容易得出 $R_{AB}=\frac{5}{3}$ Ω,$I=\frac{E}{R_{AB}}=6$ A,故 $P=60$ W.

例如,r_1,r_2,r_3 皆断时,$R_{AB}=\infty$,$I=0$,故 $P=0$.

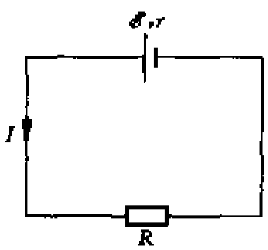
下面列出全部 8 种组合的结果.

r_1	r_2	r_3	R_{AB}	电源输出功率 P
通	通	通	1 Ω	100 W
通	通	断	$\frac{5}{3}$ Ω	60 W
通	断	通	1 Ω	100 W
通	断	断	2 Ω	50 W
断	通	通	$\frac{5}{3}$ Ω	60 W
断	通	断	∞	0
断	断	通	2 Ω	50 W
断	断	断	∞	0

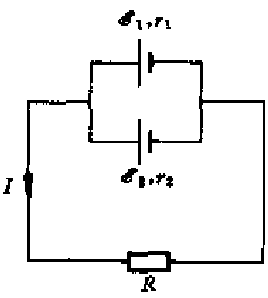
故电源的平均输出功率为

$$\bar{P}=\frac{1}{8}(100+60+100+50+60+0+50+0)=52.5\ \text{W}$$

【题 25】 为使如电图4－25－1和电图 4－25－2 所示的两个电路中,流过任意具有相同阻值的外电阻 R 的电流 I 相同. 试求电源($\mathscr{E}$,r)与电源组($\mathscr{E}_1$,r_1),($\mathscr{E}_2$,r_2)之间的定量关系,其中符号 $\mathscr{E}$ 和 r 分别表示电源的电动势和电阻.



电图 4－25－1



电图 4－25－2

【分析】 由 I 与 $\mathscr{E}$,r,R 的关系,以及由 I 与 $\mathscr{E}_1$,r_1,$\mathscr{E}_2$,r_2,R 的关系,可得出 $\mathscr{E}$,r,R 与 $\mathscr{E}_1$,r_1,

$\mathscr{E}_2, r_2, R$ 的关系．由后者对任意 R 都成立的条件，即可得出 $\mathscr{E}, r$ 与 $\mathscr{E}_1, r_1, \mathscr{E}_2, r_2$ 之间应满足的定量关系．

【解】 对于电图 4－25－1 的含电源电路，有

$$I=\frac{\mathscr{E}}{R+r}$$

对于电图 4－25－2 的电源组电路，如设两电源支路的电流分别为 I_1, I_2，则有

$$\begin{cases} I_1+I_2=I \\ I_1 r+IR=\mathscr{E}_1 \\ I_2 r+IR=\mathscr{E}_2 \end{cases}$$

解出

$$I=\frac{\dfrac{\mathscr{E}_1}{r_1}+\dfrac{\mathscr{E}_2}{r_2}}{1+\dfrac{R}{r_1}+\dfrac{R}{r_2}}$$

因要求两个电路中通过 R 的电流 I 相同，故

$$\mathscr{E}\left(1+\frac{R}{r_1}+\frac{R}{r_2}\right)=(R+r)\left(\frac{\mathscr{E}_1}{r_1}+\frac{\mathscr{E}_2}{r_2}\right)$$

即

$$\left[\mathscr{E}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)-\left(\frac{\mathscr{E}_1}{r_1}+\frac{\mathscr{E}_2}{r_2}\right)\right]R+\left[r\left(\frac{\mathscr{E}_1}{r_1}+\frac{\mathscr{E}_2}{r_2}\right)-\mathscr{E}\right]=0$$

为使上式对任意 R 均成立，要求

$$\begin{cases} \mathscr{E}\left(\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}\right)=\dfrac{\mathscr{E}_1}{r_1}+\dfrac{\mathscr{E}_2}{r_2} \\ r\left(\dfrac{\mathscr{E}_1}{r_1}+\dfrac{\mathscr{E}_2}{r_2}\right)=\mathscr{E} \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} \mathscr{E}=\dfrac{\dfrac{\mathscr{E}_1}{r_1}+\dfrac{\mathscr{E}_2}{r_2}}{\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}} \\ r=\dfrac{1}{\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}} \end{cases}$$

即要求 r 等于 r_1 与 r_2 并联的电阻．

用归纳法容易证明，如果把电源组 $(\mathscr{E}_1, r_1)$，$(\mathscr{E}_2, r_2)$ 扩充为 $(\mathscr{E}_1, r_1)(\mathscr{E}_2, r_2), \cdots, (\mathscr{E}_k, r_k)$，则为使流过任意相同电阻 R 的电流 I 相同，应满足的条件是

$$\begin{cases} \mathscr{E} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{\mathscr{E}_i}{r_i}}{\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{1}{r_i}} \\ r = \dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{1}{r_i}} \end{cases}$$

【题 26】 如电图4－26－1所示为一惠斯通电桥，电路参量为 $R_1=R_2=R_3=R_4=10.000\ \Omega$，电流计 G 的内阻为 R_g，电池内阻可略，电动势为 $\mathscr{E}=2.000\ \text{V}$.

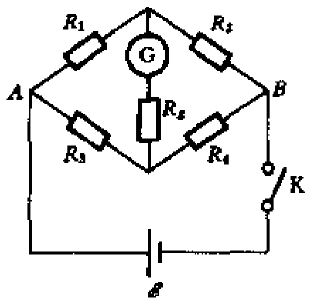
1. 在 $R_g=0$ 和 $R_g=\infty$ 两种情况下，试计算线路中 A 和 B 两点之间的等效电阻．

2. 设电桥四臂电阻参量确如上述，试证明合上电键 K 后，无论 R_g 取何值，均无电流流过电流计 G.

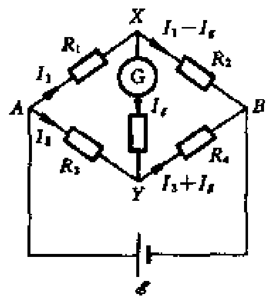
3. 若 R_4 增为 $10.001\ \Omega$，$R_g=10.000\ \Omega$，试求电键 K 合上后通过电流计 G 的电流．

【解】 1. $R_g=0$ 相当于电流计短路，$R_g=\infty$ 相当于电流计断路，因此都容易算出对应的 A 和 B 两点之间的等效电阻为

$$R_{AB}=10\Omega$$



电图 4－26－1



电图 4－26－2

2. 考虑到电流之间的相互关联，各支路电流可取为如电图 4－26－2 所示．由电图 4－26－2，可列出两个电压方程

$$\begin{cases} I_1R_1+I_gR_g=U_{AX}+U_{XY}=U_{AY}=I_3R_3 \\ (I_1-I_g)R_2=U_{XB}=U_{XY}+U_{YB}=I_gR_g+(I_3+I_g)R_4 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} I_1R_1+I_gR_g-I_3R_3=0 & (1) \\ (I_1-I_g)R_2-(I_3+I_g)R_4-I_gR_g=0 & (2) \end{cases}$$

因题设

$$R_1=R_2=R_3=R_4$$

故可统记为 R，即得

$$\begin{cases} (I_1-I_3)R+I_gR_g=0 \\ (I_1-I_3)R-I_g(2R+R_g)=0 \end{cases}$$

两式相减，得

$$2I_g(R+R_g)=0$$

因 R 为正，R_g 非负，故必定是通过电流计的电流

$$I_g=0$$

3. 因 $R_1=R_2=R_3=R_g=10.000\ \Omega$，统记为 R，现在 $R_4=10.001\ \Omega$，保留 R_4 符号，则(1)、(2)式成为

$$\begin{cases}(I_1-I_3)R+I_gR=0\\(I_1-I_3)R-I_g(2R+R_4)-I_3(R_4-R)=0\end{cases}$$

两式相减，得

$$I_g(3R+R_4)+I_3(R_4-R)=0$$

由电图 4-26-2，再建立 A 和 B 之间的电压方程为

$$I_3R+(I_3+I_g)R_4=U_{AB}=\mathscr{E}$$

由以上两式，消去 I_3，得

$$\mathscr{E}=\left[R_4-\frac{R+R_4}{R_4-R}(3R+R_4)\right]I_g$$

因

$$R_4-R=10^{-3}\ \Omega$$

它远小于 R 和 R_4，故近似有

$$\mathscr{E}=\left(R-\frac{2R}{R_4-R}\cdot 4R\right)I_g$$

式中右第一项远小于第二项，可略，解出

$$I_g=-\frac{(R_4-R)}{8R^2}\mathscr{E}=-2.5\times10^{-6}\ \mathrm{A}$$

负号表明 I_g 的方向与电图 4-26-2 中所示方向相反．

【题 27】 在如电图4-27-1所示的电路中，R_1、R_2、…、R_g 均为阻值有限的电阻，电流计 G 连同其串联电阻 R_g 接在 B 和 F 之间．若定义 α 和 β 为

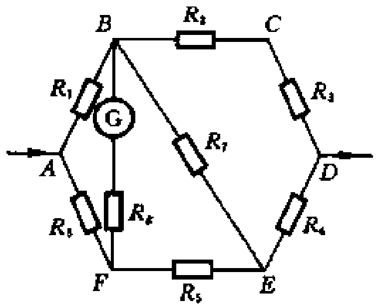
$$\alpha=\frac{R_1}{R_6},\beta=\frac{R_2+R_3}{R_4+R_5}$$

试证明，当 $R_5=0$ 时，无电流流过电流计的必要条件是 $\alpha=\beta$.

再定义

$$\lambda=\frac{R_4}{R_4+R_5}$$

$$\mu=\frac{R_5}{R_7}$$



电图 4-27-1

试证明，在一般情况下，即当 $R_5\neq0$ 时，如果

$$\alpha[(\beta+\lambda)\mu+1]=\beta$$

那么也不会有电流流过电流计．

在平衡时，即无电流流过电流计时，将流过 R_2, R_5, R_7 的电流分别记为 i_2, i_5, i_7. 试用 α, β, λ, μ 表述比值 $\frac{i_5}{i_2}$ 和 $\frac{i_7}{i_2}$.

【解】 在 $R_5=0$ 和电流计中的电流 $i_g=0$ 的情况下，电图 4－27－1 的原电路可简化成如电图 4－27－2 所示的电路．因原电路中无电流流过 R_7 和 R_g，故在电图 4－27－2 中这两个电阻均未画出．

如电图 4－27－2，由于 $i_g=0$，在回路 $ABFA$ 中，有

$$i_1R_1=i_6R_6$$

由于 $i_g=0$ 及 $R_5=0$，在回路 $BDEB$ 中，有

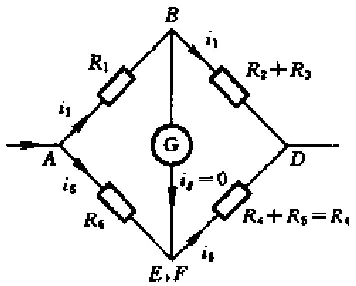
$$i_1(R_2+R_3)=i_6R_4=i_6(R_4+R_5)$$

两式相除，并适当移项，得

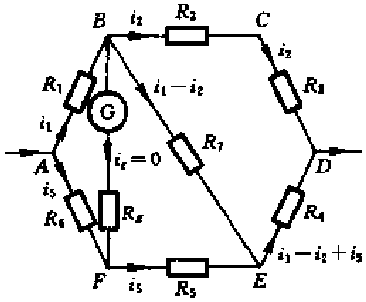
$$\frac{R_1}{R_6}=\frac{R_2+R_3}{R_4+R_5}$$

即为

$$\alpha=\beta$$



电图 4－27－2



电图 4－27－3

对于 $R_5\neq0$ 的一般情况，若 $i_g=0$，可设各支路的电流如电图 4－27－3 所示．在回路 $ABFA$ 中，有

$$i_1R_1=i_5R_6 \tag{1}$$

在回路 $BCDEFB$ 中，因 $U_{BF}=0$，有

$$U_{BD}=U_{BF}+U_{FE}+U_{ED}=U_{FE}+U_{ED}$$

即为

$$i_2(R_2+R_3)=i_5R_5+(i_1-i_2+i_5)R_4 \tag{2}$$

在回路 $FBEF$ 中，有

$$(i_1-i_2)R_7=i_5R_5 \tag{3}$$

把(1)式两边除以 R_6，得

$$i_1\alpha=i_5 \tag{4}$$

把(2)式两边除以 (R_4+R_5)，得

$$i_2(\beta+\lambda)=i_1\lambda+i_5 \tag{5}$$

把(3)式两边除以 R_7，得

$$i_2 = i_1 - i_5\mu \tag{6}$$

利用(4)式消去(5)、(6)式中的 i_5，得

$$i_2(\beta+\lambda) = i_1(\alpha+\lambda) \tag{7}$$

$$i_2 = i_1(1-\mu\alpha) \tag{8}$$

(7)、(8)两式相除，得

$$\beta+\lambda = \frac{\alpha+\lambda}{1-\mu\alpha}$$

即

$$\alpha[(\beta+\lambda)\mu+1] = \beta$$

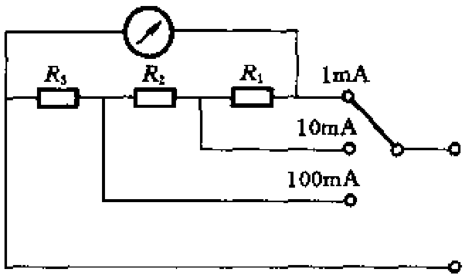
由(4)、(8)式可得电流比值

$$\frac{i_5}{i_2} = \frac{i_5 i_1}{i_1 i_2} = \frac{\alpha}{1-\mu\alpha}$$

流过 R_7 的电流 i_7 即为电图 4－27－3 中的(i_1-i_2)，利用(8)式可求得另一电流比值

$$\frac{i_7}{i_2} = \frac{i_1}{i_2} - 1 = \frac{\mu\alpha}{1-\mu\alpha}$$

【题 28】 实验室有一个破损的多量程动圈式直流电流计，有 1 mA、10 mA、100 mA 三档，由一个单刀三掷开关转换，其内部电路如电图 4－28－1 所示．电流计的表头已烧坏，无法知道其电特性，但三个精密分流电阻完好，测得 $R_1 = 144\ \Omega$．现有两个表头 A 和 B，外形都与原表头相同．表头 A 的满刻度电流为 0.2 mA，内阻为 660 Ω；表头 B 的满刻度电流为 0.5 mA，内阻为 120 Ω．试问在保留分流电阻 R_1、R_2、R_3 的情况下，应该用哪个表头修复此电流计？怎样修复？

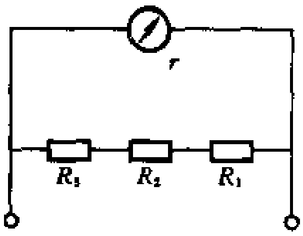


电图 4－28－1

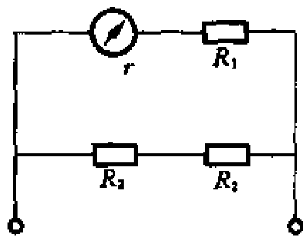
【分析与解】 设原表头的满度电流为 I_0(mA)，内阻为 $r(\Omega)$，1 mA 档的等效电路如电图 4－28－2 所示，输入 1 mA 电流时可得下述关系

$$\frac{I_0}{1-I_0} = \frac{R_1+R_2+R_3}{r} \tag{1}$$

10 mA 档和 100 mA 档的等效电路如电图 4－28－3 和电图 4－28－4 所示，分别输入 10 mA 和 100 mA电流时，可得下述关系



电图 4－28－2



电图 4－28－3

$$\frac{I_0}{10-I_0}=\frac{R_2+R_3}{r+R_1} \tag{2}$$

$$\frac{I_0}{100-I_0}=\frac{R_3}{r+R_1+R_2} \tag{3}$$

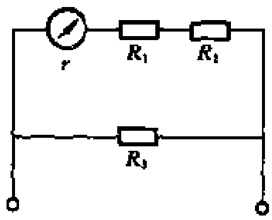
将给定的 R_1 值代入(1)、(2)、(3)式，消去 R_2 和 R_3，得

$$I_0(r+160)=160 \tag{4}$$

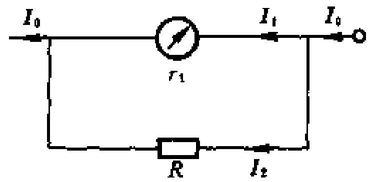
这就是表头的 I_0 和 r 所必须满足的关系，且只要满足此关系的表头，三个量程都可给出正确读数，并不一定需要用与原表头的参数一样的表头．

现有的表头 A 的参数为 $I_0=0.2$ mA，$r=660\ \Omega$，显然

$$I_0(r+160)=0.2\times(660+160)=164$$



电图 4-28-4



电图 4-28-5

不满足(4)式．若将此表头与另一电阻串联，则串联电阻必大于 660 Ω，使得(4)式更是不能成立．若将表头与另一电阻 R 并联，如电图 4-28-5 所示，此时 $I_1=0.2$ mA，$r_1=660\ \Omega$，而原(4)式中的 I_0 与 r 应分别为

$$I_0=I_1+I_2$$

$$r=\frac{r_1R}{r_1+R}$$

考虑能否找到一个 R，使(4)式得以成立．因

$$I_2=\frac{r_1}{R}I_1$$

故

$$I_0=I_1+\frac{r_1}{R}I_1=\frac{R+r_1}{R}I_1$$

于是

$$\begin{aligned}I_0(r+160)&=\frac{(R+r_1)}{R}I_1\left(\frac{r_1R}{r_1+R}+160\right)\\&=I_1\left[r_1+\frac{160(R+r_1)}{R}\right]\\&=0.2\left[660+160\left(1+\frac{660}{R}\right)\right]\end{aligned}$$

为使(4)式成立，要求

$$0.2\left[660+160\left(1+\frac{660}{R}\right)\right]=160$$

解出

$$R = -5280\ \Omega$$

这是不可能的．可见，表头 A 不可选用．

表头 B 的参量 $I_0=0.5$ mA，$r=120\ \Omega$，虽然

$$I_0(r+160)=0.5\times(120+160)=140$$

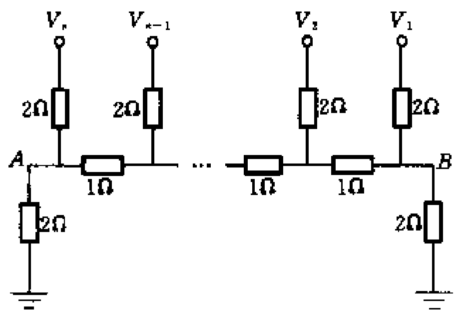
也不满足(4)式．但若将其与一个 $R=40\Omega$ 的电阻串联，使表头 B 的内阻变为

$$r'=r+40=160\ \Omega$$

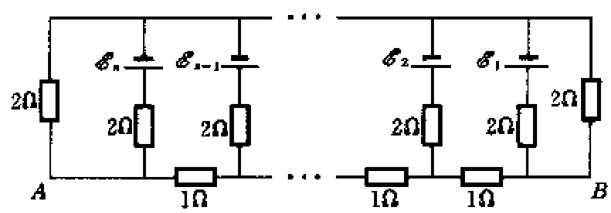
即可满足(4)式．

因此，答案是表头 B 可用来修复此电流计，方法是将表头 B 与另一个 40Ω 的电阻串联后接入原表头位置．

【题 29】 有若干个电阻构成如电图4－29－1所示的电路，其中 A 和 B 两点的接地电阻是固定不动的．输入电压 $V_1, V_2, \cdots, V_n$ 仅取 1 V 或 0 V 两个值，0 V 表示接地．试问 B 点的最大输出电压是多少？



电图 4－29－1



电图 4－29－2

【分析与解】 电图 4－29－1 的电路可等效为如电图 4－29－2 所示的电路，其中 B 和 C 之间的电压 U_{BC} 即为所求的电图 4－29－1 中 B 点的输出电压．将电图 4－29－2 中 BC 支路的电流记为 I_{BC}，则有

$$U_{BC}=I_{BC}R_{BC}$$

其中

$$R_{BC}=2\ \Omega$$

设电源 $\mathscr{E}_k$ 单独存在时，BC 支路的电流为 $I_{BC}(k)$，则由基尔霍夫方程组的线性特征可知应有

$$I_{BC}=\sum_{k=1}^{n} I_{BC}(k)$$

当 $\mathscr{E}_k$ 单独存在时，BC 支路的电压为

$$U_{BC}(k)=I_{BC}(k)R_{BC}$$

故有

$$U_{BC}=\sum_{k=1}^{n} U_{BC}(k)$$

因而，问题便简化为确定 $\mathscr{E}_k$ 单独存在的 BC 支路的电压 $U_{BC}(k)$.

把电图 4－29－2 中的 $\mathscr{E}_2,\mathscr{E}_3,\cdots,\mathscr{E}_{n-1},\mathscr{E}_n$ 都短接，便成为 $\mathscr{E}_1$ 单独存在时的电路．此时，$\mathscr{E}_1$ 支路右侧的电阻为 2 Ω. $\mathscr{E}_1$ 支路最左侧的两个 2 Ω 电阻并联成为 1 Ω 电阻，再与 1 Ω 电阻串联成 2 Ω 电阻，又与 2 Ω 电阻并联成 1 Ω 电阻，…，如此继续，可知 $\mathscr{E}_1$ 支路左侧的等效电阻也是 2 Ω. 因 $\mathscr{E}_1$ 支路中的电阻也是 2Ω，故 $\mathscr{E}_1$ 支路右侧的分压为$\frac{1}{3}$，即有

$$U_{BC}(1)=\frac{1}{3}\mathscr{E}_1$$

把电图 4－29－2 中的 $\mathscr{E}_1,\mathscr{E}_3,\cdots,\mathscr{E}_{n-1},\mathscr{E}_n$ 都短接，便成为 $\mathscr{E}_2$ 单独存在时的电路．通过与上述类似的分析可知，$\mathscr{E}_2$ 支路左侧和右侧的等效电阻也都是 2 Ω. 因此 $\mathscr{E}_2$ 支路右侧的分压也是$\frac{1}{3}\mathscr{E}_2$. 这一个分压在下方 1 Ω 电阻和右侧 1 Ω 等效电阻上平均分配，即有

$$U_{BC}(2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\mathscr{E}_2$$

把图 4－29－2 中的 $\mathscr{E}_1,\mathscr{E}_2,\cdots,\mathscr{E}_{k-1},\mathscr{E}_{k+1},\cdots,\mathscr{E}_{n-1},\mathscr{E}_n$ 都短接，便成为 $\mathscr{E}_k$ 单独存在的电路．同样，$\mathscr{E}_k$ 支路两侧的等效电阻都是 2 Ω，$\mathscr{E}_k$ 支路右侧的分压为$\frac{1}{3}\mathscr{E}_k$，这一个分压经过 $(k-1)$ 次等分，即有

$$U_{BC}(k)=\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\times\frac{1}{3}\mathscr{E}_k$$

综上所述，得

$$U_{BC}=\sum_{k=1}^{n}U_{BC}(k)=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathscr{E}_k}{2^{k-1}}$$

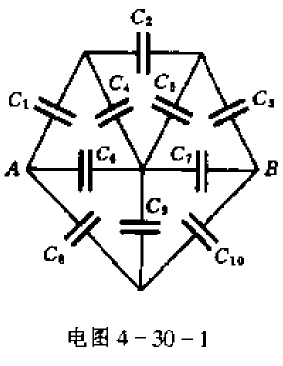
由于各 $\mathscr{E}_k$ 只能取 1 或 0 V，显然，当各 $\mathscr{E}_k$ 均取 1 V 时，U_{BC} 达到极大值，为

$$U_{BC}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}\mathrm{V}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\mathrm{V}$$

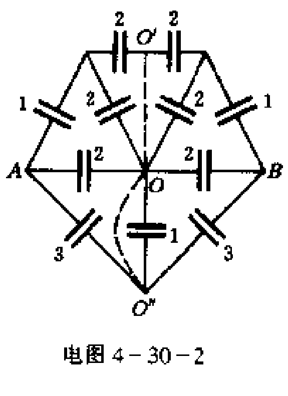
因此，电图 4－29－1 电路中，B 点的最大输出电压为

$$U_{B,\max}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\mathrm{V}$$

【题 30】 在如电图4－30－1所示的电容网络中，已知 $C_1=C_2=C_3=C_9=1\ \mu\mathrm{F}$，$C_4=C_5=C_6=C_7=2\ \mu\mathrm{F}$，$C_8=C_{10}=3\ \mu\mathrm{F}$. 试求 A，B 两点之间的等效电容 C_{AB}.



电图 4－30－1



电图 4－30－2

【分析与解】 把 C_2 处理为两个均为 $2\mu F$ 的电容的串联，可将电图 4－30－1 所示的电容网络等效为电图 4－30－2 所示的电容网络．在电图 4－30－2 中，直接标明各电容器的电容值（以 μF 为单位），由此可以看出，网络左、右两半是完全对称的，因而 O' 与 O 与 O'' 三点等势，可以短接（在图 4－30－2 中用虚线表示短接），故 $C_9=1\ \mu F$ 实际上并不起作用．

因电图 4－30－2 的电容网络左、右对称，C_9 不起作用，故有

$$C_{AO}=C_{OB}$$

从而

$$C_{AB}=(C_{AO}^{-1}+C_{OB}^{-1})^{-1}=\frac{1}{2}C_{AO}$$

因 O' 与 O 短接，C_{AO} 可用电容串、并联公式求出，为

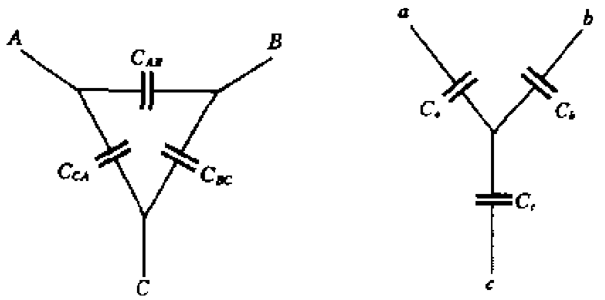
$$C_{AO}=\frac{1\times(2+2)}{1+(2+2)}+2+3=\frac{29}{5}\ \mu F$$

故

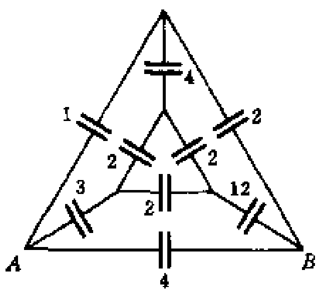
$$C_{AB}=\frac{29}{10}\ \mu F=2.9\ \mu F$$

【题 31】 如电图4－31－1所示，左边的三端电容网络为△型网络元，右边的三端电容网络为 Y 型网络元，试导出其间的等效变换公式．

然后，利用上述等效变换，试计算电图 4－31－2 所示电容网络中 A 和 B 两点之间的等效电容 C_{AB}．电图 4－31－2 网络中各电容已用数字标明，单位均为 μF．



电图 4－31－1



电图 4－31－2

【分析】 当电容器两极板之间加电压 U 时，若正极板上的电量为 Q，则其电容为

$$C=\frac{Q}{U}$$

当电阻器两端加电压 U 时，若通过的电流为 I，则其电阻为

$$R=\frac{U}{I}$$

在上述 C 和 R 的公式中，U 相同，Q 与 I 类似，但两公式显然有颠倒的关系．对于电容器，若引入

$$C^*=\frac{1}{C}=\frac{U}{Q}$$

则 C^* 与 R 的公式相当，可作类比．通过类比，可将电容网络的问题等效地处理为电阻网络的问题，容易求解，本题就是一例．

【解】 引入 $C^*=\frac{1}{C}$后，电容网络的 $Y-\triangle$ 等效变换可转化为相应电阻网络的 $Y-\triangle$ 等效变换．电阻网络的 $Y-\triangle$ 变换关系为

$$\begin{cases} R_{AB}=\dfrac{R_aR_b+R_bR_c+R_cR_a}{R_c} \\ R_{BC}=\dfrac{R_aR_b+R_bR_c+R_cR_a}{R_a} \\ R_{CA}=\dfrac{R_aR_b+R_bR_c+R_cR_a}{R_b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_a=\dfrac{R_{AB}R_{CA}}{R_{AB}+R_{BC}+R_{CA}} \\ R_b=\dfrac{R_{BC}R_{AB}}{R_{AB}+R_{BC}+R_{CA}} \\ R_c=\dfrac{R_{CA}R_{BC}}{R_{AB}+R_{BC}+R_{CA}} \end{cases}$$

通过类比，得出电容网络的 $Y—\triangle$ 变换关系为

$$\begin{cases} C_{AB}^*=\dfrac{C_a^*C_b^*+C_b^*C_c^*+C_c^*C_a^*}{C_c^*} \\ C_{BC}^*=\dfrac{C_a^*C_b^*+C_b^*C_c^*+C_c^*C_a^*}{C_a^*} \\ C_{CA}^*=\dfrac{C_a^*C_b^*+C_b^*C_c^*+C_c^*C_a^*}{C_b^*} \end{cases}$$

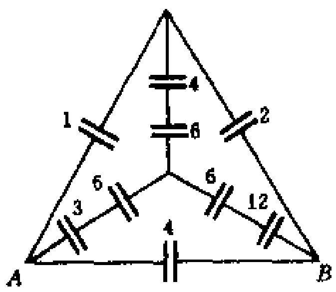
$$\begin{cases} C_a^*=\dfrac{C_{AB}^*C_{CA}^*}{C_{AB}^*+C_{BC}^*+C_{CA}^*} \\ C_b^*=\dfrac{C_{BC}^*C_{AB}^*}{C_{AB}^*+C_{BC}^*+C_{CA}^*} \\ C_c^*=\dfrac{C_{CA}^*C_{BC}^*}{C_{AB}^*+C_{BC}^*+C_{CA}^*} \end{cases}$$

换成用 C 表示的电容网络的 $Y—\triangle$ 变换关系为

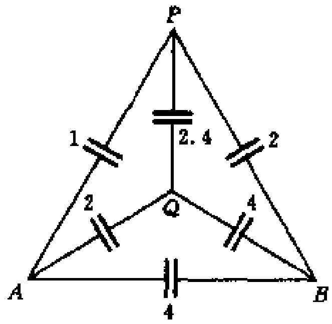
$$\begin{cases} C_{AB}=\dfrac{C_aC_b}{C_a+C_b+C_c} \\ C_{BC}=\dfrac{C_bC_c}{C_a+C_b+C_c} \\ C_{CA}=\dfrac{C_cC_a}{C_a+C_b+C_c} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_a=\dfrac{C_{AB}C_{BC}+C_{BC}C_{CA}+C_{CA}C_{AB}}{C_{BC}} \\ C_b=\dfrac{C_{AB}C_{BC}+C_{BC}C_{CA}+C_{CA}C_{AB}}{C_{CA}} \\ C_c=\dfrac{C_{AB}C_{BC}+C_{BC}C_{CA}+C_{CA}C_{AB}}{C_{AB}} \end{cases}$$

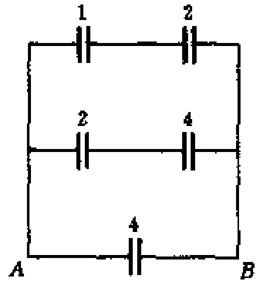
这就是电图 4－31－1 所示的两个电容网络之间的 Y—△等效变换公式．



电图 4－31－3



电图 4－31－4



电图 4－31－5

利用上述 Y—△等效变换，把电图 4－31－2 电路中间的△网络元变换为 Y 网络元，得出如电图 4－31－3 所示的等效电容网络．电图 4－31－3 电路中各电容的数值是根据上述变换公式计算得出的，已在电图 4－31－3 中标明．

再利用电容串联公式，得出与电图 4－31－3 电路等效的如电图 4－31－4 所示的电路．

在电图 4－31－4 的网络中，因左右对称，P 点与 Q 点等电势，其间的电容不起作用，可拆去．于是得出如电图 4－31－5 所示的网络．由电图 4－31－5，容易算出

$$C_{AB}=6\mu\text{F}$$

【题 32】 用由 N 个相同的电池串联而成的电池组对一电容器充电．第一种充电方式是将此电容器与一电阻串联后，接在 N 个串联电池的两端．第二种充电方式是将此电容器与同一电阻串联后，先用一个电池充电，接着改用两个串联电池继续充电，再改用三个串联电池继续充电，……，最后用 N 个串联电池为其充电（即逐个添加电池，不断继续充电，直至 N 个串联电池为其充电结束）．试问这两种充电方式的电能损耗是否相同？若不相同，哪种充电方式损耗的电能较多？

【分析与解】 设电源电动势为 $\mathscr{E}$，充电电流为 I，则电源输出的电功率为

$$P=I\mathscr{E}$$

在充电过程中任意一小段时间 Δt 内，电源所作的功即输出的能量为

$$\Delta A=P\Delta t=\mathscr{E}I\Delta t$$

注意，在充电过程中，电流 I 是变化的．上式中 $I\Delta t$ 是电容器极板在 Δt 时间内充电的电量 ΔQ，即

$$\Delta A=\mathscr{E}\Delta Q$$

设全部充电过程结束后，电容器极板上充电的总电量为 Q，则

$$Q=\Sigma\Delta Q$$

故在全部充电过程中，电源所作总功为

$$A=\Sigma\Delta A=\Sigma\mathscr{E}\Delta Q=\mathscr{E}\Sigma\Delta Q=\mathscr{E}Q$$

充电结束后，有

$$Q=\mathscr{E}C$$

式中 C 是电容器的电容．代入总功 A 的公式，可将电源所作总功表为

$$A=\mathscr{E}^2C$$

充电结束后，电容器内储存的能量为

$$W=\frac{Q^2}{2C}=\frac{1}{2}\mathscr{E}^2C$$

因此，在全部充电过程中，损耗的电能 ΔE 应等于电源所作总功（即输出的能量）A 与电容器储能 W 之差，即

$$\Delta E=A-W=\frac{1}{2}\mathscr{E}^2C$$

以上是一般的讨论，现在结合本题的具体情况．

设本题每一个电池的电动势为 $\mathscr{E}_0$，电容器的电容为 C，则无论用哪种方式充电，电容器极板最后所充电量 Q 为

$$Q=(N\mathscr{E}_0)C$$

充电结束后，电容器储能为

$$W=\frac{1}{2}(N\mathscr{E}_0)^2C$$

第一种充电方式．电池组所作总功即输出的全部能量为

$$A(1)=(N\mathscr{E}_0)^2C$$

故充电过程中损耗的电能为

$$\Delta E(1)=A(1)-W=\frac{1}{2}(N\mathscr{E}_0)^2C$$

第二种充电方式．第一次用一个电池充电，为电容器极板上充的电量为

$$Q_1=\mathscr{E}_0C$$

电源（即第一个电池）所作的功，即输出的能量为

$$A_1=\mathscr{E}_1Q_1=\mathscr{E}_0^2C$$

第二次用二个电池（即再串联一个电池）充电，为电容器极板上充的电量为

$$Q_2=(2\mathscr{E}_0)C-\mathscr{E}_0C=\mathscr{E}_0C$$

电源（二个电池）所作的功为

$$A_2=(2\mathscr{E}_0)Q_2=2\mathscr{E}_0^2C$$

……，第 N 次用 N 个电池充电，为电容器极板上充的电量为

$$Q_N=(N\mathscr{E}_0)C-(N-1)\mathscr{E}_0C=\mathscr{E}_0C$$

电源（N 个电池）所作的功为

$$A_N=(N\mathscr{E}_0)Q_N=N\mathscr{E}_0^2C$$

因此，用第二种充电方式，经 N 次充电后，由 N 个电池组成的电池组所作总功，即输出的总能量为

$$A(2)=A_1+A_2+\cdots+A_N=\mathscr{E}_0^2C+2\mathscr{E}_0^2C+\cdots+N\mathscr{E}_0^2C$$
$$=(1+2+\cdots+N)\mathscr{E}_0^2C=\frac{1}{2}N(N+1)\mathscr{E}_0^2C$$

故用第二种充电方式损耗的电能为

$$\Delta E(2)=A(2)-W$$
$$=\frac{1}{2}N(N+1)\mathscr{E}_0^2C-\frac{1}{2}(N\mathscr{E}_0)^2C=\frac{1}{2}N\mathscr{E}_0^2C$$

由此可见，第一种充电方式损耗的能量 $\Delta E(1)$ 多于第二种充电方式损耗的能量 $\Delta E(2)$，多损耗的能量为

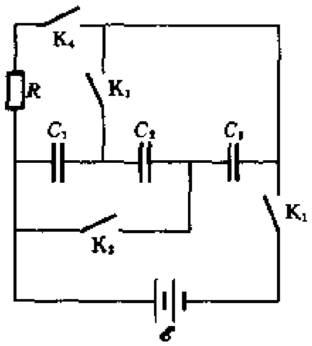
$$\Delta E(1)-\Delta E(2)=\frac{1}{2}(N\mathscr{E}_0)^2C-\frac{1}{2}N\mathscr{E}_0^2C=\frac{1}{2}N(N-1)\mathscr{E}_0^2C$$

【题 33】 在如电图4－33－1所示的由电容和直流电源构成的网络中，$C_1=4C_0$，$C_2=2C_0$，$C_3=C_0$，电源电动势为 $\mathscr{E}$，电源内阻可忽略不计．如电图 4－33－1，先断开 k_4，接通 k_1，k_2，k_3，为三个电容器充电．尔后断开 k_1，k_2，k_3，接通 k_4，使电容器放电．

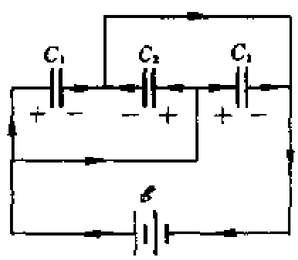
1. 试计算放电过程中，电阻 R 上产生的总热量．2. 试确定，当放电量达到总放电量的一半时，流经电阻 R 的电流强度．

【分析】 断开 k_4，接通 k_1，k_2，k_3 构成的充电电路中，C_1，C_2，C_3 并联，充电后三者的电压均为 E，于是三个电容器总的储能 W 便可求出．断开 k_1，k_2，k_3，接通 k_4 的放电电路中，C_1，C_2，C_3 串联．注意三个电容器极板的正、负后，即可确定放电后各电容器留下的电量以及总的储能 W'．W 与 W' 之差便为放电过程中，在电阻 R 上产生的总热能．

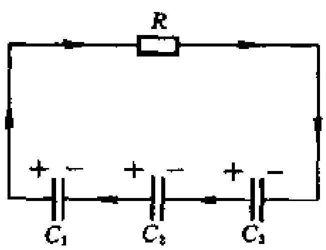
放电量达到总放电量的一半时，各电容器上的电压分别达到相应的值．因三电容器串联，由欧姆定律即可求出此时流经电阻 R 的电流强度．



电图 4－33－1



电图 4－33－2



电图 4－33－3

【解】 1. 充电电路如电图 4－33－2 所示，充电电流的方向以及各电容器极板的正、负已在电图 4－33－2 中标明．充电后，三电容器的电压均为 $\mathscr{E}$，其中的储能分别为

$$W_1=\frac{1}{2}C_1\mathscr{E}^2=2C_0\mathscr{E}^2$$

$$W_2=\frac{1}{2}C_2\mathscr{E}^2=C_0\mathscr{E}^2$$

$$W_3=\frac{1}{2}C_3\mathscr{E}^2=\frac{1}{2}C_0\mathscr{E}^2$$

三个电容器中总的储能为

$$W=W_1+W_2+W_3=\frac{7}{2}C_0\mathscr{E}^2$$

三个电容器上的电量分别为

$$Q_1=C_1\mathscr{E}=4C_0\mathscr{E}$$

$$Q_2=C_2\mathscr{E}=2C_0\mathscr{E}$$

$$Q_3=C_3\mathscr{E}=C_0\mathscr{E}$$

放电电路如电图 4－33－3 所示,设电流方向如电图 4－33－3 中标示的那样,即设 C_1 和 C_3 放电,C_2 充电．若总的放电电量为 ΔQ,则放电后各电容器的电量分别为

$$Q'_1=Q_1-\Delta Q=4C_0\mathscr{E}-\Delta Q$$

$$Q'_2=Q_2+\Delta Q=2C_0\mathscr{E}+\Delta Q$$

$$Q'_3=Q_3-\Delta Q=C_0\mathscr{E}-\Delta Q$$

放电后,三电容器正、负极板间的电压分别为

$$U'_1=\frac{Q'_1}{C_1}=\frac{Q'_1}{4C_0}$$

$$U'_2=\frac{Q'_2}{C_2}=\frac{Q'_2}{2C_0}$$

$$U'_3=\frac{Q'_3}{C_3}=\frac{Q'_3}{C_0}$$

如电图 4－33－3,放电后,应满足回路电压方程,即

$$U'_1-U'_2+U'_3=0$$

由以上公式,解出

$$\Delta Q=\frac{4}{7}C_0\mathscr{E}$$

$$Q'_1=\frac{24}{7}C_0\mathscr{E},\quad Q'_2=\frac{18}{7}C_0\mathscr{E},\quad Q'_3=\frac{3}{7}C_0\mathscr{E}$$

放电后,三电容器的储能分别为

$$W'_1=\frac{Q'^2_1}{2C_1}=\frac{72}{49}C_0\mathscr{E}^2,\quad W'_2=\frac{Q'^2_2}{2C_2}=\frac{81}{49}C_0\mathscr{E}^2,\quad W'_3=\frac{Q'^2_3}{2C_3}=\frac{9}{98}C_0\mathscr{E}^2$$

总储能为

$$W'=W'_1+W'_2+W'_3=\frac{45}{14}C_0\mathscr{E}^2$$

故放电过程中,在电阻 R 上散发的总热量为

$$Q=\Delta W=W-W'=\frac{2}{7}C_0\mathscr{E}^2$$

2. 当放电量达到一半，即当

$$\Delta Q'=\frac{\Delta Q}{2}=\frac{2}{7}C_0\mathscr{E}$$

时，三电容器上的电量分别为

$$Q''_1=Q_1-\Delta Q'=\frac{26}{7}C_0\mathscr{E},\quad Q''_2=Q_2+\Delta Q'=\frac{16}{7}C_0\mathscr{E},\quad Q''_3=Q_3-\Delta Q'=\frac{5}{7}C_0\mathscr{E}$$

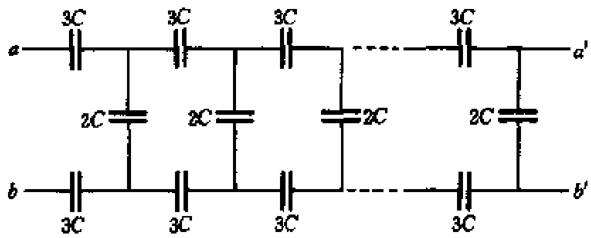
三电容器正、负极板之间相应的电压分别为

$$U''_1=\frac{Q''_1}{C_1}=\frac{13}{14}\mathscr{E},\quad U''_2=\frac{Q''_2}{C_2}=\frac{8}{7}\mathscr{E},\quad U''_3=\frac{Q''_3}{C_3}=\frac{5}{7}\mathscr{E}$$

由欧姆定律，流经电阻 R 的电流强度为

$$I=\frac{1}{R}(U''_1-U''_2+U''_3)=\frac{\mathscr{E}}{2R}$$

【题 34】 由 n 个网络元组成的电容网络如电图4－34－1所示，每一个网络元由三个电容器连接



电图 4－34－1

而成，其中上、下两个电容器的电容均为 $3C$，右侧电容器的电容均为 $2C$. 电图 4－34－1 中的 a 和 b 点是网络的输入端，a'和 b'点是网络的输出端，在 a 和 b 之间有恒定的输入电压 U，在 a'和 b'之间连接一个电容为 C 的电容器．

1. 试求从第 $k(k<n)$个网络元的输入端算起，后面所有电容器贮存的总电能．

2. 先将第 1 个网络元的输出端与其右侧的网络断开，再除去电源，并把它的输入端 a 和 b 连接起来．试求这时构成第 1 个网络元的三个电容器中贮存的总电能．

【分析与解】 1. a'与 b'之间的电容 C 与第 n 个网络元右侧电容 $2C$ 的并联电容为 $3C$，再与第 n 个网络元上、下两个 $3C$ 的电容串联，故第 n 个网络元输入端的等效电容为 C. 同样，第$(n-1)$，$(n-2)$，……直至第 1 个网络元的输入端之间的等效电容均为 C，可表为

$$C_k=C,\quad k=1,2,\cdots,n$$

从上面的分析还可得知，第 k 个网络元输出端之间(包含该网络元右侧的电容)的等效电容为 $3C$. 若设第 k 个网络元输入端之间的电压为 U_k，则由电压分配可知第 k 个网络元输出端之间的电压为 $\frac{1}{3}U_k$，后者正是第$(k+1)$个网络元输入端之间的电压 U_{k+1}，故有

$$U_{k+1}=\frac{1}{3}U_k,\quad k=1,2,\cdots,(n-1)$$

因

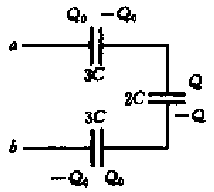
$$U_1=U$$

故

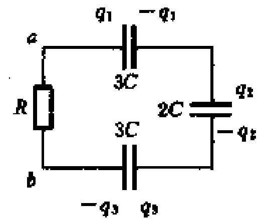
$$U_k=\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}U,\quad k=1,2,\cdots,n$$

第 $k(k<n)$ 个网络元输入端之间的电压为 U_k，从其输入端算起，后面所有电容器的等效电容为 $C_k=C$，故所有这些电容器贮存的总电能为

$$W_k=\frac{1}{2}C_kU_k^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k-2}CU^2$$



电图 4-34-2



电图 4-34-3

2. 在原网络中，第 1 个网络元的三个电容器上的电压均为

$$U_0=\frac{1}{3}U$$

上、下两个电容器极板上的电量均为

$$Q_0=(3C)U_0=CU$$

右侧电容器极板上的电量为

$$Q=(2C)U_0=\frac{2}{3}Q_0$$

把第 1 个网络元的输出端与右侧的网络断开（不包含第 1 个网络元自身右侧的电容器）并拆去电源后，第 1 个网络元中三个电容器极板上的上述电量分布不变，如电图 4-34-2 所示．将 a，b 连接后，电荷分布设如电图 4-34-3 所示，则应有

$$\begin{cases}q_1+(-q_3)=Q_0+(-Q_0)=0\\ q_2+(-q_1)=Q+(-Q_0)=-\dfrac{Q_0}{3}\\ \dfrac{q_1}{3C}+\dfrac{q_2}{2C}+\dfrac{q_3}{3C}=0\end{cases}$$

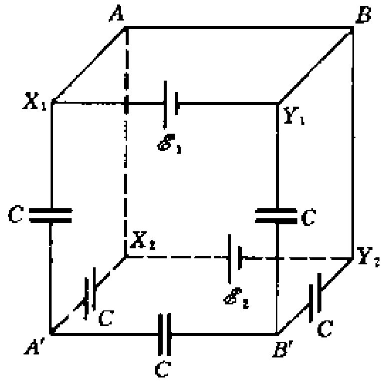
解出

$$\begin{cases}q_1=\dfrac{1}{7}Q_0\\ q_2=-\dfrac{4}{21}Q_0\\ q_3=\dfrac{1}{7}Q_0\end{cases}$$

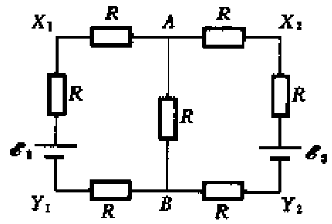
三个电容器贮存的总电能为

$$W=\frac{1}{2}\cdot\frac{q_1^2}{3C}+\frac{1}{2}\cdot\frac{q_2^2}{3C}+\frac{1}{2}\cdot\frac{q_3^2}{3C}=\frac{Q^2}{63C}=\frac{1}{63}CU^2$$

【题35】 如电图4－35－1所示，12根电阻均为 R 的电阻丝连接成正六面体（立方体）. 在两根电阻丝中连有电动势分别为 $\mathscr{E}_1$ 和 $\mathscr{E}_2$ 的电源，另5根电阻丝中连有5个相同的电容器 C. 设电源正、负极之间的距离均可忽略，内阻亦可略，且 $\mathscr{E}_1=2I_0R$，$\mathscr{E}_2=I_0R$. 试求：1. AB 中的电流 I_{AB}. 2. $A'B'$ 中电容器极板上的电量 $Q_{A'B'}$.



电图 4－35－1



电图 4－35－2

【分析】 计算电流时，凡接有电容器的电阻丝均中断不通，可拆去，剩下的是简单的直流电路，不难求解.

计算电容器极板上的电量时，可以采用等效替换的办法. 如果两个相同的电路，其一只包含电阻和电源，另一点包含电容和电源，且电阻和电容的位置相当，则由于每个电阻上的电势差为 IR，每个电容 I 的电势差为 $\frac{Q}{C}$，因而若以 $\frac{1}{C}$ 替换 R，Q 替换 I，即可将电阻电路的有关结论移植到电容电路中，于是问题便可简单地求解.

【解】 1. 为计算 I_{AB}，可将电图4－35－1中含电容的部分拆去，得出只含电阻和电源的电路，如电图4－35－2所示.

根据直流电路的叠加原理，当电路中有多个电源时，通过电路中任一支路的电流等于各个电动势单独存在时，在该支路产生的电流之和. 在如电图4－35－2的电路中，只有 $\mathscr{E}_1$ 存在时（即取走 $\mathscr{E}_2$，因其无内阻，可短接）流过 AB 的电流为

$$I_{AB}(1)=\frac{\mathscr{E}_1}{5R}$$

同理，只有 $\mathscr{E}_2$ 存在时，流过 AB 的电流为

$$I_{AB}(2)=\frac{\mathscr{E}_2}{5R}$$

故

$$I_{AB}=I_{AB}(1)+I_{AB}(2)=\frac{1}{5R}(\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2)$$
$$=\frac{1}{5R}(2I_0R+I_0R)=\frac{3}{5}I_0$$

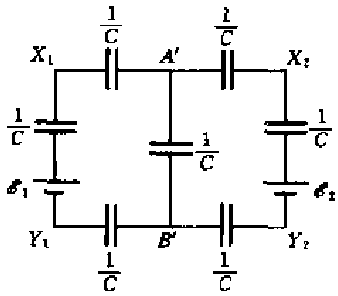
2. 把电图4－35－2电路中的 R 替换为 $\frac{1}{C}$，I 替换为 Q，得出的电路如电图4－35－3所示.

电图 4-35-2 与电图 4-35-3 的电路完全等效，因此相应的 X_1Y_1 的电压，X_2Y_2 的电压以及 AB（在电图 4-35-3 中写为 $A'B'$）的电压均应相等，即

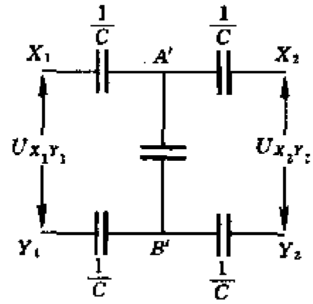
$$U_{AB}=I_{AB}R=\frac{1}{5}(\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2)=U_{AB'}=\frac{1}{C}Q_{A'B'}$$

故

$$Q_{A'B'}=\frac{\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2}{5\left(\frac{1}{C}\right)}$$



电图 4-35-3



电图 4-35-4

注意，电图 4-35-1 中与电容有关的电路如电图 4-35-4 所示，与电图 4-35-3 电路有区别，少了两个电容．但因电图 4-35-4 中的 $U_{X_1Y_1}$，$U_{X_2Y_2}$ 与电图 4-35-3 没有区别，故 $U_{A'B'}$ 亦应没有区别．于是仍有

$$Q_{A'B'}=\frac{\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2}{5\left(\frac{1}{C}\right)}=\frac{C}{5}(2I_0R+I_0R)=\frac{3}{5}I_0RC$$

第五章　交流电路，暂态过程及其它

【题 1】 矩形导线线圈的垂直边长为 l，水平边长为 $3b$，共有 N 匝，构成闭合回路．今使它在磁感应强度为 $\boldsymbol{B}_0$ 的水平匀强磁场中绕垂直轴旋转，角速度为 ω，转轴到线圈一条垂直边的距离为 b，如电图 5－1－1 所示．

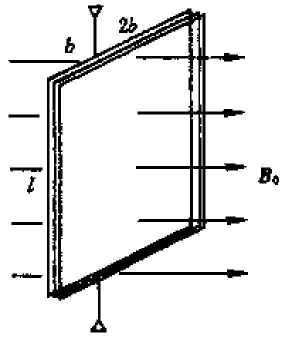
1．试证明，在一个小的时间间隔内，线圈在转动中克服磁场作用力所作的功等于线圈中通过感应电动势消耗的能量．

2．若线圈的电阻为 R，自感为 L，试写出线圈中的电流 i 在 t 时刻满足的方程，设在 $t=0$ 时刻线圈平面与磁感线平行．当 ω 为常量时，试采用代入法验证方程有以下形式的一个解

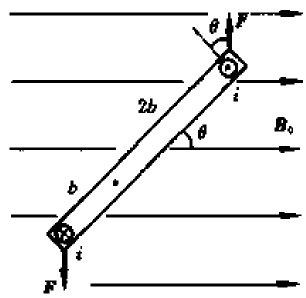
$$i = I_0\cos(\omega t + \varphi)$$

其中 I_0 和 φ 均为常量．试证明，振幅 I_0 与 $\sqrt{R^2+\omega^2L^2}$ 成反比，并求出初相位 φ．

3．试分别计算线圈每转一周，电阻和电感消耗的能量．



电图 5－1－1



电图 5－1－2

【分析与解】 线圈在匀强磁场中绕固定轴旋转，产生交流电，匀角速旋转时产生简谐交流电，这一结果与转轴的位置无关．本题中线圈转轴偏离对称位置，若线圈的质量均匀分布，则由力学中刚体绕固定轴转动的知识，转轴将因线圈质心的圆周运动而受力，故不宜在实际中采用．本题只是为教学需要而设置的．

1．设在 t 时刻，当线圈与磁场的夹角为 θ 时，线圈中的电流强度为 i，如电图 5－1－2 所示．在垂直于磁感应强度 $\boldsymbol{B}_0$ 的方向上，线圈两侧所受的磁场力的大小均为

$$F = NilB$$

为了克服它们，所需提供的两个外力的大小也为此值．设 $\mathrm{d}t$ 时间内线圈转过 $\mathrm{d}\theta$ 角，则这两个外力所作的功为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}W &= F(2b\mathrm{d}\theta)\cos\theta + F(b\mathrm{d}\theta)\cos\theta \\ &= 3NiblB_0\cos\theta\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

把

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

代入，得出 $\mathrm{d}t$ 时间间隔内克服磁场作用力所作的功为

$$\mathrm{d}W=3NiblB_0\omega\cos\theta\mathrm{d}t$$

另一方面，线圈因转动而产生的感应电动势的大小为

$$\mathscr{E}=N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

其中 Φ 是通过单匝线圈的磁通量，为

$$\Phi=B_0(3bl)\sin\theta$$

故

$$\mathscr{E}=3NblB_0\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=3NblB_0\omega\cos\theta$$

在 $\mathrm{d}t$ 时间内线圈中消耗的电能为

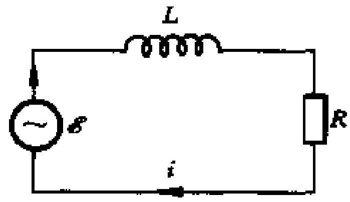
$$\mathrm{d}W'=\mathscr{E}i\mathrm{d}t=3NiblB_0\omega\cos\theta\ \mathrm{d}t$$

即有

$$\mathrm{d}W=\mathrm{d}W'$$

2. 线圈的等效电路如电图 5－1－3 所示，据此可写出回路方程为

$$\mathscr{E}=iR+L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$



电图 5－1－3

因 $t=0$ 时，$\theta=0$，且 ω 为常量，故有

$$\theta=\omega t$$

于是

$$\mathscr{E}=\mathscr{E}_0\cos\omega t$$

其中

$$\mathscr{E}_0=3NblB_0\omega$$

回路方程为

$$\mathscr{E}_0\cos\omega t=iR+L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

把

$$i=I_0\cos(\omega t+\varphi)$$

代入，得

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_0\cos\omega t&=RI_0\cos(\omega t+\varphi)-LI_0\omega\sin(\omega t+\varphi)\\&=I_0\sqrt{R^2+\omega^2L^2}\left[\frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos(\omega t+\varphi)-\frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t+\varphi)\right]\end{aligned}$$

引入辅助量 α，使之满足以下关系式

$$\cos\alpha=\frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}},\quad\sin\alpha=\frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$$

即

$$\tan\alpha=\frac{\omega L}{R}$$

于是回路方程可简化为

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_0\cos\omega t&=I_0\sqrt{R^2+\omega^2L^2}[\cos\alpha\ \cos(\omega t+\varphi)-\sin\alpha\ \sin(\omega t+\varphi)]\\&=I_0\sqrt{R^2+\omega^2L^2}\ \cos(\omega t+\varphi+\alpha)\end{aligned}$$

比较两边的振幅与相位，得出

$$I_0=\frac{\mathscr{E}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$$

即 I_0 与$\sqrt{R^2+\omega^2L^2}$成反比，又初相位 φ 为

$$\varphi=-\alpha=-\operatorname{arc}\tan\frac{\omega L}{R}$$

3. 线圈每转一周，电阻消耗的能量为

$$\begin{aligned}W_R&=\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}Ri^2\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}RI_0^2\cos^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}RI_0^2\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi T\mathscr{E}_0^2}{\omega(R^2+\omega^2L^2)}\end{aligned}$$

把 $\mathscr{E}_0=3NblB_0\omega$ 代人，得

$$W_R=\frac{9\pi N^2b^2l^2B_0^2R\omega}{R^2+\omega^2L^2}$$

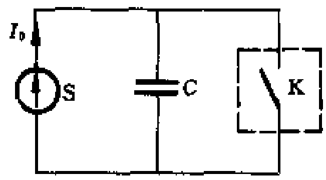
电感消耗的能量为

$$\begin{aligned}W_L&=\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\left(L\ \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right)i\ \mathrm{d}t=\int_{I_0\cos\varphi}^{I_0\cos(2\pi+\varphi)}L\ i\ \mathrm{d}i\\&=\int_{I_0\cos\varphi}^{I_0\cos\varphi}L\ i\ \mathrm{d}i=0\end{aligned}$$

其中积分上、下限随积分变量替换时，用到了 $i=I_0\cos(\omega t+\varphi)$.

【题 2】 简化的电子张弛振荡器如电图5－1－1所示．电图 5－1－1 中 S 为恒流源，输出恒定的直流电流 I_0.K 是一个电子开关，它的开关动作由一个正弦讯号发生器(电图 5－1－1 中末画出)产生的电压

$$u_F(t)=U_1+U_0\sin\omega t$$

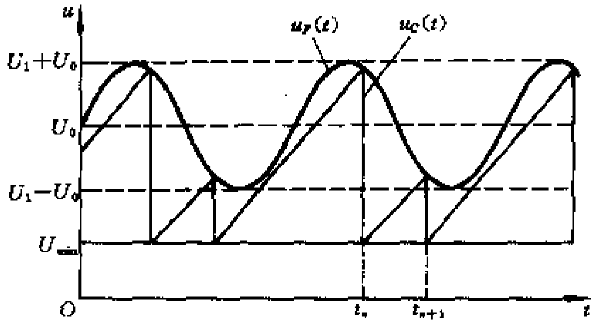


电图 5－2－1

控制，其中 U_1，U_0 和 ω 都是正的常量，且 $U_1>U_0$，u_F 只是控制 K 的开关动作，对电容 C 的充电和放电不起作用．当 t 时刻K 两端的电压亦即电容两端的电压 $u_C(t)$恰好达到 t 时刻的 $u_F(t)$值时，K 自动合上，使电容器放电；当 $U_0(t)$直线下降，降到 $U_{\min}$时，K 才自动断开．这里的 $U_{\min}$是小于(U_1-U_0)的正的常量．

1. 试在 $u\sim t$ 坐标上画出 $u_F(t)$曲线和 $U_{\min}$直线．设 $t=0$ 时刻，$u_C(t)$具有任意某个不小于 $U_{\min}$但小于 $u_F(t)$的初始值，试在同一个 $u\sim t$ 坐标上画出 $u_0(t)$曲线．

2. 若在一定的 $I_0, U_1, U_0, \omega, U_{\min}$ 等参数值时，$u_C(t)$ 每相邻两次达到 $u_F(t)$ 的时间间隔都相等，试求每次 $u_C(t)=u_F(t)$ 时的 $u_C(t)$ 值 .



电图 5－2－2

【分析与解】 1. $u_F(t)$ 为正弦曲线，$U_{\min}$ 为平行于 t 轴的直线，分别如图 5－2－2 所示 .

在 $t=0$ 时刻，$U_{\min} \leqslant u_C(t) < u_F(t)$，K 是断开的，S 以恒定电流 I_0 对电容 C 充电，单位时间内 u_C 的增量为 $\frac{I_0}{C}$，故 u_C 随时间 t 线性地增长，如电图 5－1－2 所示 .

$u_C(t)$ 的斜直线与 $u_F(t)$ 的正弦曲线的相交处，即为 u_C 恰好达到 u_F 值，则 K 自动合上，电容 C 立即通过 K 放电，u_C 在极短时间内降到 $U_{\min}$ 值，由题目给的条件，可作为直线下降，这也已在电图 5－1－2 中画出 . 当 u_C 降到 $U_{\min}$ 值时，K 又断开，S 对电容 C 重新开始线性地充电，u_C 又随 t 线性地增加，直到再次达到 u_F 值 .……如此继续下去，据此即可画出 $u_C(t)$ 曲线，如电图 5－1－2 所示 .

2. 设 $t_n, t_{n+1}, \cdots$ 依次为 $u_C(t)$ 达到上阈值 $u_F(t)$ 的时刻，$(t_n+0), (t_{n+1}+0), \cdots$ 为 $u_C(t)$ 降到 $U_{\min}$ 的时刻 . 当

$$t_n+0 \leqslant t \leqslant t_{n+1}$$

时，$u_C(t)$ 随电图 5－1－2 中的斜直线上升，有

$$u_C(t)=U_{\min}+\frac{I_0}{C}(t-t_n)$$

当

$$t=t_{n+1}$$

时，有

$$u_C(t_{n+1})=u_F(t)=U_1+U_0 \sin\omega t_{n+1}$$

由此得出

$$U_{\min}+\frac{I_0}{C}(t_{n+1}-t_n)=U_1+U_0 \sin \omega t_{n+1}$$

$$t_{n+1}-t_n=\frac{C}{I_0}[(U_1-U_{\min})+U_0 \sin \omega t_{n+1}]$$

若任意相邻两次 $u_C(t)$ 达到 $u_F(t)$ 的时间间隔都相等，则对任意 n 均有

$$t_{n-1}-t_n=t_{n+2}-t_{n+1}=\cdots$$

即

$$\sin\omega t_n=\sin\omega t_{n+1}=\cdots$$

解出

$$t_{n+1}=\begin{cases}t_n+\dfrac{2k\pi}{\omega}\\ -t_n+\dfrac{(2k+1)\pi}{\omega}\end{cases}\qquad k=1,2,\cdots$$

后一个解不符合 $t_{n+1}-t_n=t_{n+2}-t_{n+1}=\cdots$，故只可取前一个解，即

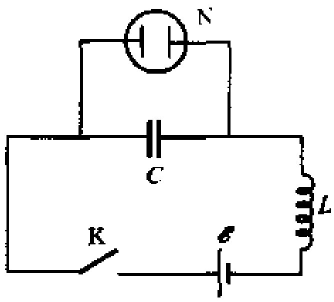
$$t_{n+1}-t_n=\frac{2k\pi}{\omega},\qquad k=1,2,\cdots$$

因此，每次 $u_C(t)=u_F(t)$ 时的 $u_C(t)$ 值为

$$u_C(t)=u_C(t_{n+1})=U_{\min}+\frac{I_0}{C}(t_{n+1}-t_n)=U_{\min}+\frac{I_0}{C}\cdot\frac{2k\pi}{\omega},\qquad k=1,2,\cdots$$

其中 k 应为某一可取的定值．

【题3】 如图所示的电路是由下述元器件组成的：电容为 C 的电容器(开始时未充电)，电感为 L 的线圈，电动势为 $\mathscr{E}$ 内阻可略的直流电源，氖灯 N，以及电键 K．氖灯在其接点电压小于燃点电压 U_z 时保持绝缘体的特性，超过 U_z 时即点燃，并引起电容器迅速放电．当氖灯的接点电压降至熄灭点电压 U_g 时，氖灯又成为绝缘体，并使电容放电停止．假定电容通过氖灯放电的时间非常短，以至可认为放电过程中流经线圈的电流没有变化．



电图 5－3－1

设 $\mathscr{E}=34$ V，$U_z=64$ V，$U_g=22$ V．

试证明合上电键 K 后，氖灯 N 只亮一次．

【分析】 由直流电源、电容、电感组成的串联电路中，由于 C 和 L 之间的电场能量和磁场能量交替传送，电路中除了直流成分外，还会有简谐交流成分．由回路电压的微分方程及初条件，可将电路中的直流与交流成分解出，从而可以确定电键 K 合上后，电容两端的电压 u_C 随时间 t 的变化关系．氖灯的接点电压就是 u_C，若 u_C 达到 U_z，氖灯即被点亮．

氖灯点亮后即为电容放电，使其电压直线下降到 U_g，尔后氖灯断路，电容停止放电．此后，由直流电源、电容、电感构成的串联电路复原，回路电压的微分方程及其通解同前，但因初条件发生了变化，u_C 随时间 t 的变化关系将会有所不同．若新的 $u'_C(t)$ 仍可达到 U_z 值，则氖灯会第二次点亮；若还不到 U_z 值，氖灯就不会第二次点亮．若由本题给定的数据求出的新的 $u_C(t)$ 不能达到 U_z，则表明氖灯 N 只点亮一次．

【解】 在氖灯未点亮前，设在 $t=0$ 时刻合上电键 K，尔后在任意 t 时刻，设电容 C 极板的电量为 q，电流为 i，则回路电压的微分方程为

$$\mathscr{E}=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{q}{C}$$

因

$$i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

得

$$C\mathscr{E}-q=LC\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}$$

引入辅助参量

$$q^*=q-C\mathscr{E}$$

方程变为

$$\frac{\mathrm{d}^2q^*}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{LC}q^*=0$$

其通解为

$$q^*=A\cos(\omega t+\varphi)$$

式中

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

由此得出 q 与 i 分别为

$$q=A\cos(\omega t+\varphi)+C\mathscr{E},\quad i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$$

初条件为

$$t=0\text{ 时},q=0,i=0$$

代入后，得出

$$A=C\mathscr{E},\quad \varphi=\pi$$

因此，有

$$q=C\mathscr{E}(1-\cos\omega t),\quad i=\omega C\mathscr{E}\sin\omega t$$

电容两端的电压为

$$u_C=\frac{q}{C}=\mathscr{E}(1-\cos\omega t)$$

当 $t=\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}$（半周期）时，$u_C$ 达到极大值 $2\mathscr{E}=68\text{V}$．此极大值超过了氖灯的燃点电压 $U_z=64\text{V}$，故在某个 t_0（$t_0<\frac{T}{2}$）时刻，u_C 达到 U_z 值使氖灯点亮，电容放电．

设 $t=t_0$ 时，$u_C=U_z$，则有

$$U_z=\mathscr{E}(1-\cos\omega t_0)$$

即

$$\cos\omega t_0=1-\frac{U_z}{\mathscr{E}}=-\frac{15}{17}$$

$$\sin\omega t_0=\frac{8}{17}$$

计算中已考虑到 ωt_0 在第Ⅱ象限．

放电在瞬间完成，当 u_C 降到 U_g 时，氖灯熄灭，原串联电路复原．改取新的时间 t'，令 $t'=0$ 与 $t=t_0$ 对应，则回路电压的微分方程和初条件分别为

$$\mathscr{E}=L\frac{\mathrm{d}i'}{\mathrm{d}t'}+\frac{q'}{C}$$

$$t'=0\text{ 时}\begin{cases}i'=i(t_0)=\omega C\,\mathscr{E}\sin\omega t_0\\ u'_C=U_g\end{cases}$$

微分方程的通解仍为

$$q'=A'\cos(\omega t'+\varphi')+C\,\mathscr{E}$$

式中仍有 $\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$. **于是** i' **和** u'_C **仍为**

$$i'=-\omega A'\sin(\omega t'+\varphi')$$

$$u'_C=\frac{q'}{C}=\frac{A'}{C}\cos(\omega t'+\varphi')+\mathscr{E}$$

把初条件代入,得

$$\begin{cases}-\omega A'\sin\varphi'=\omega C\,\mathscr{E}\sin\omega t_0\\ \frac{A'}{C}\cos\varphi'+\mathscr{E}=U_g\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\frac{A'}{C}\sin\varphi'=-\mathscr{E}\sin\omega t_0\\ \frac{A'}{C}\cos\varphi'=U_g-\mathscr{E}\end{cases}$$

由此解出

$$\frac{A'}{C}=[(-\mathscr{E}\sin\omega t_0)^2+(U_g-\mathscr{E})^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\left(-34\times\frac{8}{17}\right)^2+(22-34)^2\right]^{\frac{1}{2}}\text{V}=20\text{ V}$$

因此,氖灯熄灭后,电容两端的电压为

$$u'_C=\frac{A'}{C}\cos(\omega t'+\varphi')+\mathscr{E}=[20\cos(\omega t'+\varphi')+34]\text{ V}$$

应有

$$(34-20)\text{ V}\leqslant u'_C\leqslant(34+20)\text{ V}$$

即

$$14\text{ V}\leqslant u'_C\leqslant 54\text{ V}<U_z$$

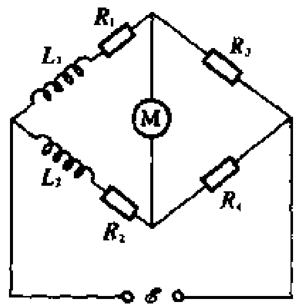
因此,氖灯不会第二次点亮.

【题 4】 在如图的电路中,适当选择电阻 R_1,R_2,R_3,R_4 和电感 L_1,L_2,使得无论电源的电动势 $\mathscr{E}$ 是否随时间 t 变化,都没有电流通过电流计 M,设上述条件得到满足,并已知 $R_2=90\ \Omega,R_3=300\ \Omega,R_4=60\ \Omega,L_2=900$ mH.

试求 R_1 和 L_1.

【分析】 本题的电路是惠斯通电桥. 当电源电动势 $\mathscr{E}$ 不随时间 t 变化,即采用直流电源时,此电桥为直流电桥. 当 $\mathscr{E}(t)$ 随 t 变化时,虽然题目没有指明是通常的随 t 简谐式变化的交流电源,

但总可以看作是一系列不同频率的简谐交流电的叠加．由于不同频率的简谐成分在线性电路中彼此独立互不干扰，可以一个个地单独处理，因此实际上相当于交流惠斯通电桥．



电图 5－4－1

电流计无电流通过，意味着它两端的电压（无论直流或交流）为零，即电桥达到平衡，由此即可确定桥路中各元件应满足的关系，于是可解．

【解】 当$\mathscr{E}$不随时间 t 变化时，直流电桥的平衡条件是

$$R_1R_4=R_2R_3$$

故

$$R_1=\frac{R_2R_3}{R_4}=450\Omega$$

当$\mathscr{E}(t)$随 t 变化时，对任一简谐成分，交流电桥的平衡条件是

$$\begin{cases}L_1\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+R_1I_1=L_2\dfrac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}+R_2I_2\\ R_3I_1=R_4I_2\end{cases}$$

由第二式，得

$$I_2=\frac{R_3}{R_4}I_1$$

求导后代入第一式，得

$$L_1\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}+R_1I_1=L_2\frac{R_3}{R_4}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}+R_2\frac{R_3}{R_4}I_1$$

把 $R_1=\dfrac{R_2R_3}{R_4}$代入，得

$$L_1=L_2\frac{R_3}{R_4}=4500\ \mathrm{mH}$$

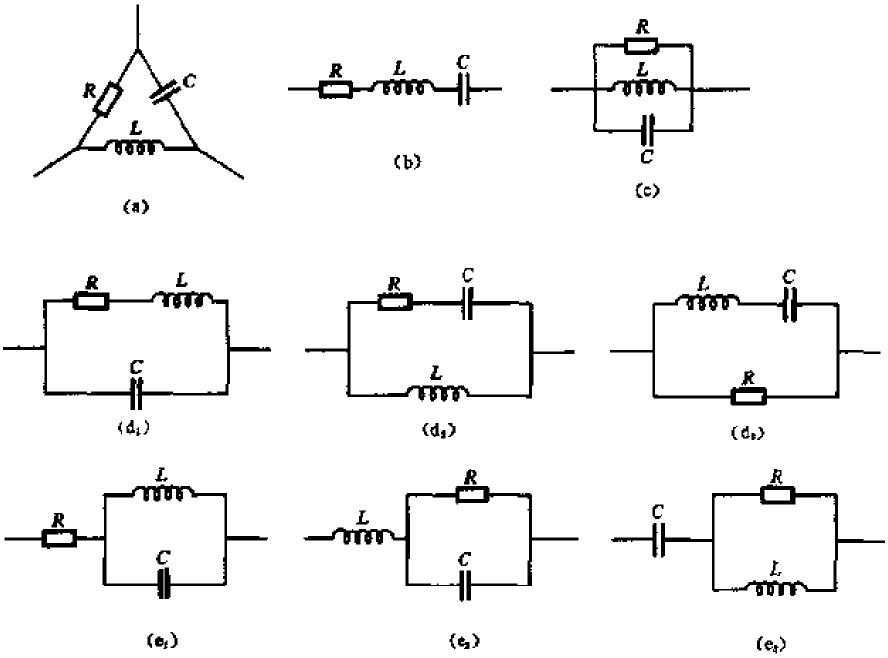
【题 5】 黑盒子内装着由电阻、电容、电感各一个组成的网络，两端点置盒外．以 100 V 的直流电压接到两端，测得电流为 0.1 A. 以 60 Hz、100 V(有效值)的交流电压接到两端，测得电流为 1 A(有效值). 当交流电的频率增大到 1000Hz 时，电流达到很大的极大值．试问盒内三元件是如何联接的，并求各元件的数值．

【分析】 黑盒子是指无从窥视其内部的容器．由题设，盒内只有 R、L、C 各一，元件并不多，但可能的联接方式却不少，需根据提供的实验测量结果，排除一些可能性，判断符合实测结果的联接方式．

由三元件构成的网络的各种可能的联接方式如图 5－5－1 所示．

因网络只有两个端点，排除图(a)，即不可能混联，只能是串并联．

接直流电压，直流电流不为零，表明 C 不可能与另两元件串联，否则断路，由此排除图(b)及图(e_3). 直流电流为有限值而非无穷大，表明 L 不能单独作为并联电路的一个支路，否则短路，由此排除图(c)及图(d_2).



电图 5－5－1

谐振是具有 L 和 C 的交流电路的重要特征．在交流电压一定时，LC 串联谐振的特点是随着频率的变化，出现电流极大；并联谐振则出现电流极小．现在，接交流电压，改变频率，出现电流极大，表明发生了串联谐振．由此断定，L 与 C 应串联，排除了图(d_1)，图(e_1)和图(e_2)．

因此，盒内 R，L，C 元件的联接只能是 LC 串联再与 R 并联，如图(d_3)所示．

以上详尽分析是为了说明各种测量所提供的信息的含义，这正是判断盒内网络联接方式的依据．实际上可以更直接地得到答案：加交流电压，改变频率，出现电流极大，这是串联谐振，表明 LC 串联；加直流电压，电流不为零，排除 RLC 串联，所以只能是 LC 串联，再与 R 并联．

【解】 如电图 5－5－1 中图(d_3)所示，加直流电压 $U_{直}$，测出直流电流 $I_{直}$，故

$$R=\frac{U_{直}}{I_{直}}=\frac{100}{0.1}=1\ 000\ \Omega \tag{1}$$

加 $\omega=\omega_0=2\pi\times 60=120\pi$ Hz，$U_{交}=100$ V 的交流电压，测出 $I_{交}=1$ A，所以在频率为 ω_0 时，网络的阻抗为

$$|Z_{\omega_0}|=\frac{U_{交}}{I_{交}}=100\ \Omega \tag{2}$$

当 $\omega=\omega_{共振}=2\pi\times 100$Hz 时，出现电流极大，这是 LC 串联谐振，谐振条件为

$$\omega_{共振}L-\frac{1}{\omega_{共振}C}=0$$

即

$$LC=\frac{1}{\omega_{共振}^2}=\frac{1}{(2\pi\times 1000)^2} \tag{3}$$

如电图 5－5－1 中的图(d_3)，网络的复数阻抗 $\tilde{Z}$ 满足下式

$$\frac{1}{\tilde{Z}}=\frac{1}{R}+\frac{1}{j\omega L+\frac{1}{j\omega C}}$$

由此可求出 $\tilde{Z}$，再求出 Z，为

$$|Z|=\frac{R\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \tag{4}$$

取 $\omega=\omega_0$，由(2)式和(4)式，解出

$$C=\frac{(\omega_0^2LC-1)\sqrt{R^2-Z_{\omega_0}^2}}{Z_{\omega_0}R\omega_0}$$

把(1)、(2)、(3)式及 ω_0 代入上式，得

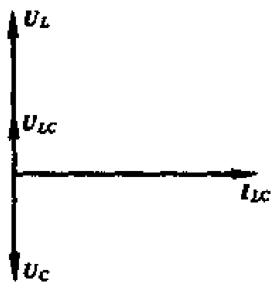
$$C=2.6\times10^{-5}\ \mathrm{F}$$

把 C 代入(3)式，得

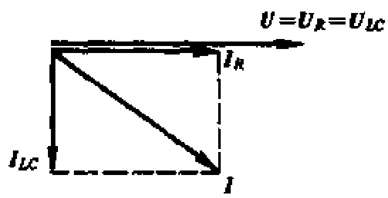
$$L=0.96\times10^{-3}\ \mathrm{H}$$

电图 5－5－1 中图(d_3)网络的阻抗也可由矢量法求出．如电图 5－5－2 所示，在 LC 串联电路中，有

$$U_{LC}=U_L-U_C=I_{LC}\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)=I_{LC}Z_{LC}$$



电图 5－5－2



电图 5－5－3

如电图 5－5－3 所示，在整个网络中，有

$$U=U_R=U_{LC}$$

又

$$U_R=I_RR$$

故

$$I=\sqrt{I_R^2+I_{LC}^2}=U\sqrt{\frac{1}{R^2}+\frac{1}{\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

即

$$Z=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2}+\frac{1}{\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}}=\frac{R\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

与(4)式相同．

【题 6】 三相交流电的相电压为220V，负载是不对称的纯电阻，$R_A=R_B=22\Omega$，$R_C=27.5\Omega$，按星形联接．

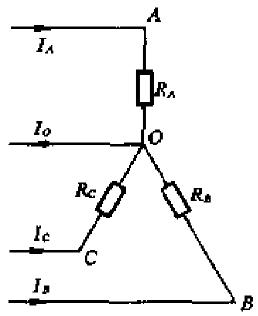
1．试求中线电流．2．试求各线电压．3．若中线断开，试求各线电流．

【分析】 有中线时，三相交流电的三个相电压的相位彼此相差$\frac{2\pi}{3}$，振幅相同(220V)．因负载为纯电阻，三个线电流的相位也应彼此相差$\frac{2\pi}{3}$，因负载不对称，三个线电流的振幅不同．三个线电流的矢量和即为中线电流．

三相电的每一个线电压等于两相应相电压的矢量和．因此，三个线电压的振幅相等，彼此相位差为$\frac{2\pi}{3}$．

除去中线后，线电压不变，于是相应的线电流可求．

【解】 1．有中线时，电路如电图 5－6－1 所示．三个相电压 U_{AC}，U_{BO}，U_{CO}的振幅相同，为 220V，彼此相位差$\frac{2\pi}{3}$，其矢量表述如电图 5－6－2 所示．若交流电的圆频率为 ω，取 U_{AO}的初相位为零，则有



电图 5－6－1

$$U_{AO}=220\cos\omega t$$

$$U_{BO}=220\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$U_{CO}=220\cos\left(\omega t-\frac{4\pi}{3}\right)$$

三个线电流分别为

$$I_A=\frac{U_{AO}}{R_A}=\frac{220}{22}\cos\omega t=10\cos\omega t$$

$$I_B=\frac{U_{BO}}{R_B}=\frac{220}{22}\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}\right)=10\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}\right)$$

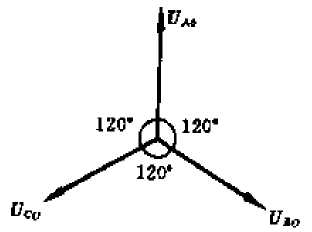
$$I_C=\frac{U_{CO}}{R_C}=\frac{220}{27.5}\cos\left(\omega t-\frac{4\pi}{3}\right)=8\cos\left(\omega t-\frac{4\pi}{3}\right)$$

以上 U 和 I 的单位分别是伏特和安培．

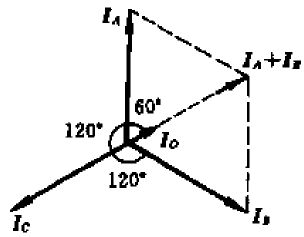
$\boldsymbol{I}_A$，$\boldsymbol{I}_B$，$\boldsymbol{I}_C$ 的矢量表述如电图 5－6－3 所示，由电图 5－6－3 可知，$(\boldsymbol{I}_A+\boldsymbol{I}_B)$的模量与 $\boldsymbol{I}_A$ 或 $\boldsymbol{I}_B$ 的模量相同，均为 10 A，$\boldsymbol{I}_C$ 的模量为 8 A，$\boldsymbol{I}_C$ 与$(\boldsymbol{I}_A+\boldsymbol{I}_B)$反向．因此，中线电流 $\boldsymbol{I}_0$ 的模量为 2 A，其方向为$(\boldsymbol{I}_A+\boldsymbol{I}_B)$的方向，与 $\boldsymbol{I}_A$ 夹 60°角，即

$$\boldsymbol{I}_0=\boldsymbol{I}_A+\boldsymbol{I}_B+\boldsymbol{I}_C$$

$$I_0=2\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{3}\right)$$



电图 5－6－2



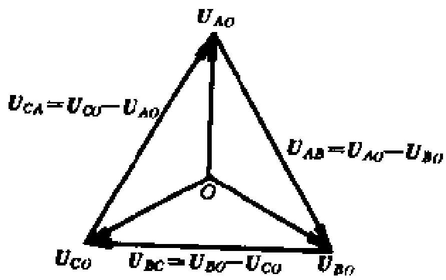
电图 5－6－3

2. 线电压 U_{AB}，U_{BC}，U_{CA}的矢量表述如图 5－6－4 所示．因 U_{AO}，U_{BO}，U_{CO}的模量均为 220 V，故 U_{AB}，U_{BC}，U_{CA}的模量均为$\left(220\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=380$ V．若改设 U_{AB}的初相位为零，则有

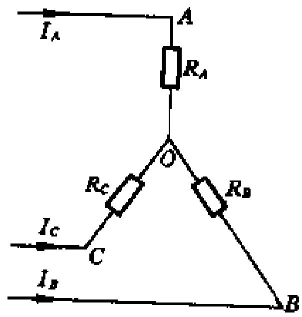
$$U_{AB}=380\cos\omega t$$

$$U_{BC}=380\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$U_{CA}=380\cos\left(\omega t-\frac{4\pi}{3}\right)$$



电图 5－6－4



电图 5－6－5

3. 除去中线后，线路如电图 5－6－5 所示．线电压 U_{AB}，U_{BC}，U_{CA}保持不变，线电流 I_A，I_B，I_C 遵循的方程组为

$$I_AR_A-I_BR_B=U_{AB}=380\cos\omega t$$

$$I_BR_B-I_CR_C=U_{BC}=380\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$I_A+I_B+I_C=0$$

解出

$$\begin{cases} I_A=\frac{5}{7}\sqrt{183}\cos(\omega t-\varphi) \\ I_B=\frac{5}{7}\sqrt{183}\cos(\omega t+\varphi+\pi) \\ I_C=\frac{60}{7}\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

式中的相位参量 φ 满足

$$\cos\varphi=\frac{7}{\sqrt{61}}$$

$$\sin\varphi=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{61}}$$

即

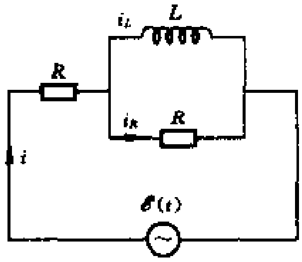
$$\varphi=26.3^\circ$$

故

$$I_A=9.66\cos(\omega t-26.3^\circ)$$
$$I_B=9.66\cos(\omega t+206.3^\circ)$$
$$I_C=8.57\cos(\omega t+90^\circ)$$

单位都是安培．

【题7】 一个含有非直流电源的电路如电图5－7－1所示．已知电源的电动势为 $\mathscr{E}(t)=4\mathscr{E}_0\cos^3\omega t$，其中 $\mathscr{E}_0$ 为常量．又 ω 刚好使得 $\omega L=R$，试求 $t=0$ 时电感 L 两端的电压．



电图 5－7－1

【分析】 电源并非直流电源，但也不是通常的简谐式交流电源．利用三角函数公式

$$\mathscr{E}(t)=4\mathscr{E}_0\cos^3\omega t=3\mathscr{E}_0\cos\omega t+\mathscr{E}_0\cos3\omega t$$

可见 $\mathscr{E}(t)$ 是两个简谐式交流电源的叠加．由于不同频率的简谐交流电在线性电路中彼此独立，互不干扰，只要分别求解再相加即可．至于求解的方法，因为是简单的串并联电路，采用矢量法或复数法均无不可．

【解】 利用三角函数公式，把 $\mathscr{E}(t)$ 写为

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(t)&=4\mathscr{E}_0\cos^3\omega t\\&=3\mathscr{E}_0\cos\omega t+\mathscr{E}_0\cos3\omega t=\mathscr{E}_1(t)+\mathscr{E}_2(t)\end{aligned}$$

其中

$$\mathscr{E}_1(t)=3\mathscr{E}_0\cos\omega t$$
$$\mathscr{E}_2(t)=\mathscr{E}_0\cos3\omega t$$

均为简谐式交流电源．电路的方程为

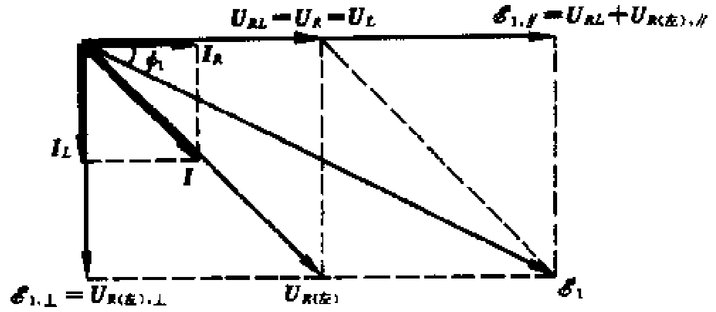
$$\begin{cases}iR+i_RR=\mathscr{E}(t)=\mathscr{E}_1(t)+\mathscr{E}_2(t)\\ i_RR-L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=0\\ i-i_R-i_1=0\end{cases}$$

可线性地分解为两个分别只含 $\mathscr{E}_1(t)$ 和 $\mathscr{E}_2(t)$ 的方程组，单独求解，再相加即可．

因为是简单的串并联电路，采用矢量法求解．

1．单独的 $\mathscr{E}_1(t)$ 电源

如电图5－7－2所示，先画电流的矢量图．在 RL 并联电路中，$\boldsymbol{I}_L$ 与 $\boldsymbol{I}_R$ 相位差 $\frac{\pi}{2}$，大小相同（因 $\omega L=R$），$\boldsymbol{I}_L+\boldsymbol{I}_R=\boldsymbol{I}$．此 $\boldsymbol{I}$ 为总电流矢量，就是通过左边的串联 R 中的电流，即 $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}_{R(左)}$．



电图 5－7－2

再画电压矢量图．在 RL 并联电路中，$\boldsymbol{U}_{RL}=\boldsymbol{U}_R=\boldsymbol{U}_L$，左边串联 R 两端的电压为 $\boldsymbol{U}_{R(左)}$．$\boldsymbol{U}_R=\boldsymbol{U}_L=\boldsymbol{U}_{RL}$与 $\boldsymbol{I}_R$ 同相位，$\boldsymbol{U}_{R(左)}$与 $\boldsymbol{I}$(即 $\boldsymbol{I}_{R(左)}$)同相位，$\boldsymbol{U}_{RL}+\boldsymbol{U}_{R(左)}=\boldsymbol{\mathscr{E}}_1$，因

$$I=\sqrt{2}I_R=\sqrt{2}\frac{U_{RL}}{R}$$

故

$$U_{RL}=\frac{\sqrt{2}}{2}IR$$

又

$$U_{R(左)}=IR=\sqrt{2}U_{RL}$$

因

$$\boldsymbol{\mathscr{E}}_1=\boldsymbol{U}_{RL}+\boldsymbol{U}_{R(左)}$$

故

$$\mathscr{E}_1=\sqrt{5}U_{RL}$$

且

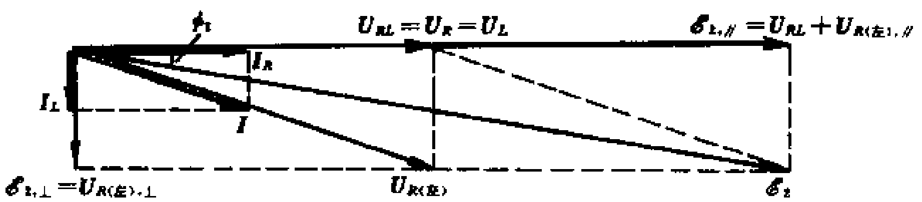
$$\mathscr{E}_{1,/\!/}=2U_{RL}，\quad \mathscr{E}_{1,\perp}=U_{RL}$$

$\boldsymbol{U}_{RL}$在$\mathscr{E}_1$ 方向及垂直$\mathscr{E}_1$ 方向的投影分别为

$$U_{RL,/\!/}=U_{RL}\cos\varphi_1=\frac{\mathscr{E}_1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\mathscr{E}_{1,/\!/}}{\mathscr{E}_1}=\frac{\mathscr{E}_1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2}{5}\mathscr{E}_1$$

$$U_{RL,\perp}=U_{RL}\sin\varphi_1=\frac{\mathscr{E}_1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\mathscr{E}_{1,\perp}}{\mathscr{E}_1}=\frac{\mathscr{E}_1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{5}\mathscr{E}_1$$

2．单独的 $\mathscr{E}_2(t)$电源



电图 5－7－3

矢量图的画法与 1 类似，如电图 5－7－3 所示．但因 $\mathscr{E}_2(t)$的圆频率为 3ω，故 $Z_L=3\omega L=$

$3R$，有

$$I_L=\frac{1}{3}I_R,$$

$$I=\frac{\sqrt{10}}{3}I_R=\frac{\sqrt{10}}{3}\frac{U_{RL}}{R}$$

故

$$U_{RL}=\frac{3}{\sqrt{10}}IR$$

又

$$U_{R(左)}=IR=\frac{\sqrt{10}}{3}U_{RL}$$

$$U_{R(左),/\!/}=U_R\frac{I_R}{I}=\frac{\sqrt{10}}{3}U_{RL}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}=U_{RL}$$

$$U_{R(左),\perp}=U_R\frac{I_L}{I}=\frac{\sqrt{10}}{3}U_{RL}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{1}{3}U_{RL}$$

故

$$\mathscr{E}_{2,/\!/}=U_{R(左),/\!/}+U_{RL}=2U_{RL}$$

$$\mathscr{E}_{2,\perp}=U_{R(左),\perp}=\frac{1}{3}U_{RL}$$

$$\mathscr{E}_2=\sqrt{\mathscr{E}_{2,/\!/}^2+\mathscr{E}_{2,\perp}^2}=\frac{\sqrt{37}}{3}U_{RL}$$

U_{RL}在$\mathscr{E}_2$方向及垂直$\mathscr{E}_2$方向上的投影为

$$U_{RL,/\!/}=U_{RL}\cos\varphi_2=\frac{3}{\sqrt{37}}\mathscr{E}_2\cdot\frac{\mathscr{E}_{2,/\!/}}{\mathscr{E}_{02}}=\frac{3}{\sqrt{37}}\mathscr{E}_2\cdot\frac{2}{\sqrt{37}/3}=\frac{18}{37}\mathscr{E}_2$$

$$U_{RL,\perp}=U_{RL}\sin\varphi_2=\frac{3}{\sqrt{37}}\mathscr{E}_2\cdot\frac{\mathscr{E}_{2,\perp}}{\mathscr{E}_2}=\frac{3}{\sqrt{37}}\mathscr{E}_2\cdot\frac{\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{37}}{3}}=\frac{3}{37}\mathscr{E}_2$$

在 $t=0$ 时，$\mathscr{E}_1$与$\mathscr{E}_2$同方向（在 $t=0$ 时 $\mathscr{E}_1(t)$与 $\mathscr{E}_2(t)$的相位均为零）. $U_L=U_{RL}$在$\mathscr{E}_1$和$\mathscr{E}_2$方向及垂直$\mathscr{E}_1$和$\mathscr{E}_2$方向的投影分别为

$$\begin{aligned}U_{L,/\!/}&=U_{RL,/\!/}=U_{RL,/\!/}(\mathscr{E}_1)+U_{RL,/\!/}(\mathscr{E}_2)\\&=\frac{2}{5}\mathscr{E}_{10}+\frac{18}{37}\mathscr{E}_{20}=\frac{2}{5}(3\mathscr{E}_0)+\frac{18}{37}\mathscr{E}_0=\frac{312}{185}\mathscr{E}_0=1.69\mathscr{E}_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U_{L,\perp}&=U_{RL,\perp}=U_{RL,\perp}(\mathscr{E}_1)+U_{RL,\perp}(\mathscr{E}_2)\\&=\frac{1}{5}\mathscr{E}_{10}+\frac{3}{37}\mathscr{E}_{20}=\frac{1}{5}(3\mathscr{E}_0)+\frac{3}{37}\mathscr{E}_0=\frac{52}{185}\mathscr{E}_0=0.28\mathscr{E}_0\end{aligned}$$

故 $t=0$ 时 L 两端的电压为

$$U_L=\sqrt{U_{L,/\!/}^2+U_{L,\perp}^2}=1.71\mathscr{E}_0$$

注意，由于 $U_L(\mathscr{E}_1)$及 $U_L(\mathscr{E}_2)$分别以 ω 和 3ω 的角速度旋转，因此在不同时刻其间的夹角是不同

的，上面计算的是 $t=0$ 的结果．

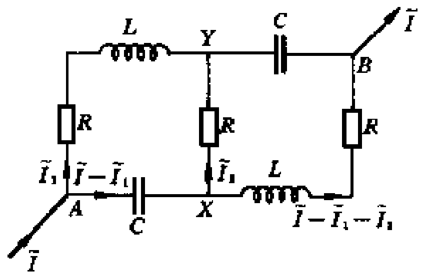
用旋转矢量表述简谐量时，旋转矢量在基轴方向的投影才是真正的简谐量．本题 $t=0$ 时，$\mathscr{E}_1$、$\mathscr{E}_2$与基轴同方向，故矢量 U_L 在基轴上的投影即为 $\boldsymbol{U}_L$ 在$\mathscr{E}_1$与$\mathscr{E}_2$上的投影，因此实测的 U_L 在 $t=0$的瞬时值即为上述题解中的 $U_{L,/\!/}=1.69\mathscr{E}_0$.

【题 8】 由三个 R，两个 L，两个 C 构成的交流网络，如图所示．当 A 和B 两端加上$U=U_0\cos(\omega t+\varphi_u)$的电压时，使 $\omega L=\dfrac{1}{\omega C}=R$. 若已知 U_0 与 R，试用复数法求出 A 和B 之间的总阻抗(即复阻抗的模量)及流过中间(即图中 X，Y 两点之间)电阻的电流的有效值．

【分析】 根据交流电路的基尔霍夫方程组，用复数法求解．

【解】 因

$$\omega L=\frac{1}{\omega C}=R$$



电图 5－8－1

故

$$\tilde{Z}_R=R$$

$$\tilde{Z}_L=j\omega L=jR$$

$$\tilde{Z}_C=\frac{1}{j\omega C}=-jR$$

网络各支路中的复电流标示如图，则有

$$\begin{cases}AY:\tilde{I}_1(1+j)R=(\tilde{I}-\tilde{I}_1)(-jR)+\tilde{I}_2R\\ XB:\tilde{I}_2R+(\tilde{I}_1+\tilde{I}_2)(-jR)=(\tilde{I}-\tilde{I}_1-\tilde{I}_2)(1+j)R\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\tilde{I}_2=\tilde{I}_1+\tilde{I}j\\ 2\tilde{I}_2=\tilde{I}(1+j)-\tilde{I}_1\end{cases}$$

解出

$$\begin{cases}\tilde{I}_1=\dfrac{1}{3}(1-j)\tilde{I}\\ \tilde{I}_2=\dfrac{1}{3}(1+2j)\tilde{I}\end{cases}$$

设 A 和B 之间总的复阻抗为$\tilde{Z}_{AB}$，则有

$$\tilde{U}_{AB}=\tilde{I}\tilde{Z}_{AB}=\tilde{I}_1(1+j)R+(\tilde{I}_1+\tilde{I}_2)(-jR)$$

$$=\tilde{I}_1R-\tilde{I}_2jR=\frac{1}{3}(1-j)\tilde{I}R-\frac{1}{3}(1+2j)\tilde{I}jR=\frac{1}{3}(3-2j)\tilde{I}R$$

故

$$\tilde{Z}_{AB}=\frac{1}{3}(3-2j)R$$

或写成

$$\tilde{Z}_{AB}=Z_{AB}\,e^{j\varphi_Z}$$

其中

$$Z_{AB}=\frac{\sqrt{13}}{3}R=1.20R,\quad \tan\varphi_Z=-\frac{2}{3}$$

总电流为

$$\tilde{I}=\frac{\tilde{U}}{\tilde{Z}_{AB}}=\frac{U_0\,e^{j(\omega t+\varphi_u)}}{Z_{AB}\,e^{j\varphi_z}}$$

所求 X 和 Y 两点之间的电流为

$$\tilde{I}_2=\frac{1}{3}(1+2j)\tilde{I}=\frac{1}{3}(1+2j)\frac{U_0\,e^{j(\omega t+\varphi_u)}}{\frac{1}{3}(3-2j)R}$$
$$=\frac{(1+2j)U_0}{(3-2j)R}\,e^{j(\omega t+\varphi_u)}=\frac{(-1+8j)U_0}{13R}\,e^{j(\omega t+\varphi_u)}=\left(\frac{\sqrt{65}}{13}\,e^{j\varphi_{i2}}\right)\frac{U_0}{R}\,e^{j(\omega t+\varphi_u)}$$

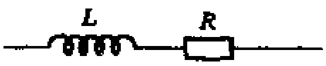
故 $\tilde{I}_2$ 的有效值为

$$I_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{65}}{13}\,\frac{U_0}{R}=\sqrt{\frac{5}{26}}\,\frac{U_0}{R}=0.44\,\frac{U_0}{R}$$

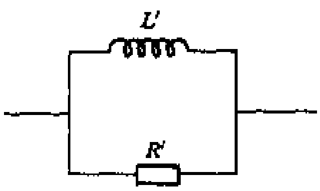
【题 9】 实际的电感元件(例如线圈)均有电阻,在通有交流电时总会有热能损耗．若将损耗的有功功率记为 $P_{有功}$,纯电感性的无功功率记为 $P_{无功}$,则元件的品质因数 Q 定义为

$$Q=\frac{P_{无功}}{P_{有功}}$$

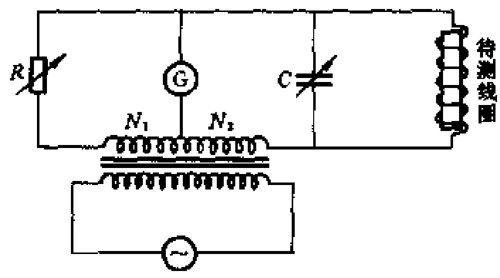
1. 电感元件可以采用如电图 5－9－1 所示的 L 和 R 串联式描述,也可采用如电图 5－9－2 所示的 L' 和 R' 并联式描述．若交流电的圆频率为 ω,试求 L,R 与 L',R' 之间的关系,并验证在两种描述下的 Q 值相同．



电图 5－9－1



电图 5－9－2



电图 5－9－3

2. 为了测量电感线圈的 Q 值,采用如电图 5－9－3 所示的导纳电桥．电桥的两个臂 1,2 是有抽头的变压器副线圈,交流电源通过这个变压器耦合起来,抽头与检流计 G 相联．另外两个臂,一个是电阻 R,另一个是电容 C 与待测线圈的并联,R 和 C 都是可调的．试证明,当电桥达到平衡时,待测线圈的 Q 值为

$$Q=\frac{N_2}{N_1}\omega CR$$

其中 N_1,N_2 分别是1,2两臂变压器副线圈的匝数,ω 是电源电动势的圆频率．

【分析】 对于同一电感线圈,无论是串联描述还是并联描述,其阻抗是相同的,由此即可得出 L,R 与 L',R'的关系．再根据 Q 的定义即可证明在两种描述下的 Q 值相同．

电桥平衡时,检流计G中无电流通过,整个回路的四个臂是 N_1 匝线圈,R,N_2 匝线圈,以及 C 和待测线圈的并联,四者简单的串联．利用回路各处电流相同以及G两端等电势的条件,对待测线圈采用 L'和 R'并联描述,即可确定四个臂上有关物理量的关系,从而 L'和 R'可求．再利用第1问的结果,即可得出待测的 Q 值．

【解】 1．如电图5－9－1,对电感线圈作串联式描述,则其复阻抗为

$$\tilde{Z}=R+j\omega L$$

如电图5－9－2,对同一电感线圈作并联式描述,则其复阻抗为

$$\tilde{Z}'=[(R')^{-1}+(j\omega L')^{-1}]^{-1}$$

或

$$\tilde{Z}'=\frac{R'(\omega L')^2+jR'^2\omega L'}{(\omega L')^2+R'^2}$$

两种描述是等效的,故

$$\tilde{Z}=\tilde{Z}'$$

解出

$$R=\frac{R'(\omega L')^2}{(\omega L')^2+R'^2}=\frac{R'}{1+\left(\frac{R'}{\omega L'}\right)^2}$$

$$L=\frac{R'^2L'}{(\omega L')^2+R'^2}=\frac{L'}{1+\left(\frac{\omega L'}{R'}\right)^2}$$

在串联式描述中,若电流有效值为 I,则

$$P_{有功}=I^2R$$

$$P_{无功}=I^2\omega L$$

故电感线圈的品质因数 Q 为

$$Q=\frac{P_{无功}}{P_{有功}}=\frac{\omega L}{R}$$

在并联式描述中,若电压有效值为 U,则

$$P'_{有功}=\frac{U^2}{R'}$$

$$P'_{无功}=\frac{U^2}{\omega L'}$$

故

$$Q'=\frac{P'_{无功}}{P'_{有功}}=\frac{R'}{\omega L'}$$

利用上述 R,L 与 R',L'的关系，可得

$$\frac{\omega L}{R}=\frac{\dfrac{\omega L'}{1+\left(\dfrac{\omega L'}{R'}\right)^2}}{\dfrac{R'}{1+\left(\dfrac{R'}{\omega L'}\right)^2}}=\frac{R'}{\omega L'}$$

故

$$Q=Q'$$

2. 对待测线圈采用 R'和 L'并联式描述，则由待测线圈与电容 C 并联构成的电桥一臂的复阻抗的倒数(即复导纳)为

$$\tilde{Z}^{-1}=(R')^{-1}+(j\omega L')^{-1}+j\omega C=\frac{\omega L'-jR'(1-\omega^2L'C)}{R'\omega L'}$$

设由变压器副线圈构成的电桥两个臂的复电功势分别为$\tilde{\mathscr{E}}_1$和$\tilde{\mathscr{E}}_2$，则有

$$\frac{\tilde{\mathscr{E}}_1}{\tilde{\mathscr{E}}_2}=\frac{N_1}{N_2}$$

当电桥平衡时，检流计 G 无电流通过，整个回路是四个臂串联，设回路中的复电流为 $\tilde{I}$，则有

$$\tilde{\mathscr{E}}_1+\tilde{\mathscr{E}}_2=\tilde{I}(R+\tilde{Z})$$

因检流计 G 两端等电势，故

$$\tilde{\mathscr{E}}_1=\tilde{I}R$$

$$\tilde{\mathscr{E}}_2=\tilde{I}\tilde{Z}$$

于是

$$\frac{R}{\tilde{Z}}=\frac{\tilde{\mathscr{E}}_1}{\tilde{\mathscr{E}}_2}=\frac{N_1}{N_2}$$

或

$$\tilde{Z}^{-1}=\frac{N_1}{N_2R}$$

把上述 $\tilde{Z}^{-1}$的表达式代入，得

$$\begin{cases}\dfrac{\omega L'}{R'\omega L'}=\dfrac{N_1}{N_2R}\\1-\omega^2L'C=0\end{cases}$$

解出

$$\begin{cases}R'=\dfrac{N_2}{N_1}R\\\omega L'=\dfrac{1}{\omega C}\end{cases}$$

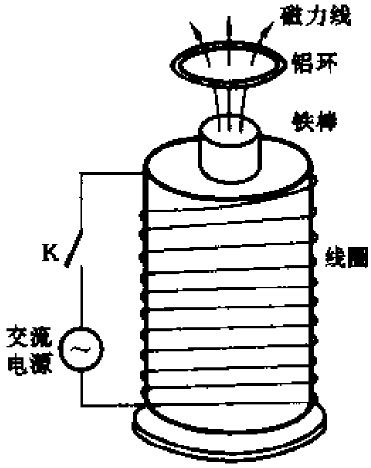
利用第 1 问的结果，待测电感线圈的品质因数为

$$Q=\frac{R'}{\omega L'}=\frac{N_2}{N_1}\omega CR$$

【题 10】 试解释“跳环”实验．

如电图 5－10－1 所示，竖直铁棒外绕有线圈，线圈接交流电源．铁棒上套一铝环．接通开关时，铝环会跳起来；适当调整电压，铝环会悬浮在空中．这就是“跳环”实验，试予解释．

提示：铝环有电阻和电感，应看作 RL 串联．注意分析有关简谐量的相位关系．证明铝环所受的平均作用力是斥力．



电图 5－10－1

【分析】 接通开关后，线圈内的交变电流产生交变磁场，使得通过铝环的磁通量交替变化，引起交变的感应电动势，在铝环内产生交变的感应电流，从而使铝环受到线圈磁场的安培力作用．

由于电流、磁场、磁通量、感应电动势、感应电流、安培力等都是交变的，安培力可能是排斥力、也可能是吸引力，铝环悬浮要求安培力在一个周期内的平均值是斥力，亦即要求在一个周期的大部分时间内，线圈产生的磁场与铝环内感应电流产生的磁场方向相反．因此，问题的关键在于确定这两个交变磁场的相位关系，这就需要逐步弄清楚所涉及的一系列同频交变简谐量的相位关系．值得注意的是，由于铝环可以等效为 RL 串联电路，其中的感应电流就将与引起它的感应电动势有一个相位差，这是讨论问题的出发点．

【解】 设线圈内的交变电流为

$$i_1(t)=I_1\cos\omega t$$

$i_1(t)$产生的交变磁场应与它同相位，写为

$$B_1(t)=B_1\cos\omega t$$

$B_1(t)$在铝环（设其面积为 S）上引起的感应电动势为

$$\mathscr{E}(t)=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(B_1S)$$

$$=S\omega B_1\sin\omega t=U_0\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$$

式中

$$U_0=S\omega B_1$$

可见，$\mathscr{E}(t)$比 $i_1(t)$和 $B_1(t)$落后$\frac{\pi}{2}$的相位．

把铝环等效为 RL 串联电路，则其复数阻抗为

$$\tilde{Z}=R+j\omega L=Ze^{j\varphi}$$

式中

$$Z=\sqrt{R^2+(\omega L)^2}$$

是铝环的阻抗，Z 与 U_0 及 I_2(铝环内感应电流的振幅)的关系为

$$Z=\frac{U_0}{I_2}$$

又

$$\varphi=\arctan\frac{\omega L}{R}$$

是幅角，即铝环中感应电动势与感应电流的相位差．因此，铝环中的感应电流可写为

$$i_2(t)=I_2\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=I_2\cos(\omega t-\delta)$$

可见，铝环中感应电流 $i_2(t)$比线圈中电流 $i_1(t)$落后 $\delta=\frac{\pi}{2}+\varphi$ 的相位，即线圈电流 $i_1(t)$产生的磁场 $B_1(t)$与铝环中感应电流 $i_2(t)$产生的磁场 $B_2(t)$的相位差为 $\delta=\frac{\pi}{2}+\varphi$.

铝环中的感应电流 $i_2(t)$使铝环受到 $B_1(t)$的安培力作用．如图 5-9-1 所示，在铝环处 $\boldsymbol{B}_1(t)$的方向是倾斜的，可把 $\boldsymbol{B}_1(t)$分解为沿环半径方向的分量 $aB_1(t)$(a 是某个小于 1 的常数)和垂直环面的分量．前者使环受到竖直方向的作用力 $F(t)$，后者使环受到沿半径方向的作用力．显然，讨论铝环能否悬浮问题时，只需考虑 $F(t)$．根据安培力公式，有

$$\begin{aligned}F(t)&=\int i_2(t)aB_1(t)\mathrm{d}l = I_2\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}-\varphi\right)aB_1\cos\omega t\oint\mathrm{d}l\\&=2\pi haB_1I_2\cos\omega t\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=F_0\cos\omega t\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\end{aligned}$$

式中 h 是铝环的半径，$F_0=2\pi haB_1I_2$ 是一个常量．上式表明，铝环所受竖直方向的作用力 $F(t)$是随时间周期性变化的，应该考虑 $F(t)$在一个周期内的平均值，以便确定铝环所受的平均作用力是否能使之悬浮的斥力．

$$\begin{aligned}\overline{F}&=\frac{1}{T}\int_0^T F(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T F_0\cos\omega t\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{F_0}{2T}\int_0^T\left[\cos\left(2\omega t-\frac{\pi}{2}-\varphi\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\right]\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}F_0\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=-\frac{1}{2}F_0\sin\varphi<0\end{aligned}$$

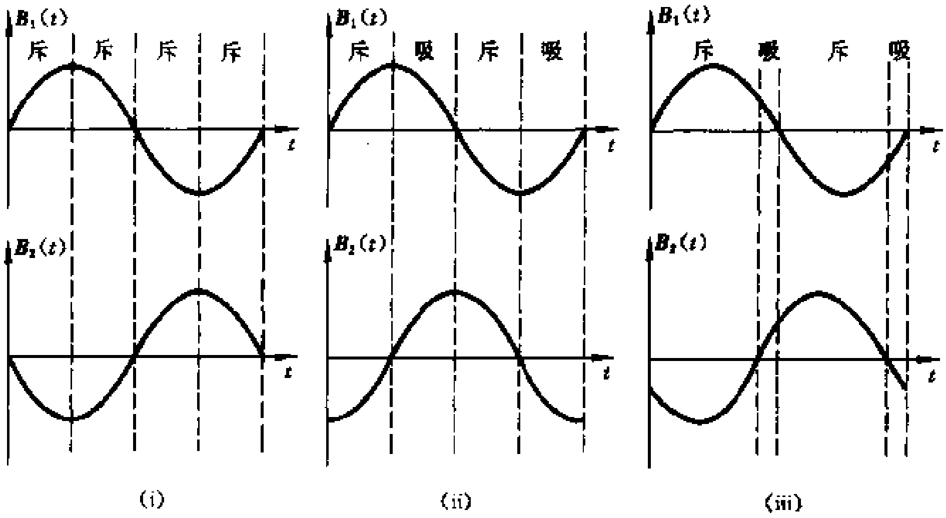
以上计算用到三角函数公式

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

由此可见，平均作用力 $\overline{F}$ 之所以不为零，是因为 $\sin\varphi\neq0$，而 $\varphi=\arctan\frac{\omega L}{R}\neq0$ 是因为 $L\neq0$，因此 $\overline{F}\neq0$ 的根源在于铝环有一定的电感 L.

上式 $\overline{F}<0$ 是否确实表明铝环受到斥力，从而能够悬浮呢？现在详细讨论如下．

$\overline{F}$ 是否斥力取决于线圈电流产生的磁场 $B_1(t)$与铝环中感应电流产生的磁场 $B_2(t)$之间的相位差，即 $i_1(t)$与 $i_2(t)$之间的相位差 $\delta=2\pi+\varphi$. 当 $\varphi=\frac{\pi}{2}$(即 $\tan\varphi=\frac{\omega L}{R}=\infty,R=0$)时，铝环为纯电感，则 $\delta=\pi$，$\boldsymbol{B}_1(t)$与 $\boldsymbol{B}_2(t)$始终反向，$\overline{F}=-\frac{F_0}{2}<0$，确为斥力．当 $\varphi=0$(即 $\tan\varphi=\frac{\omega L}{R}=0$，



电图 5-10-2

$L=0$)时，铝环为纯电阻，则 $\delta=\frac{\pi}{2}$，上半个周期内 $\boldsymbol{B}_1(t)$ 与 $\boldsymbol{B}_2(t)$ 反向，相斥，另半个周期内 $\boldsymbol{B}_1(t)$ 与 $\boldsymbol{B}_2(t)$ 同向，相吸，$\bar{F}=0$. 实际上铝环为 RL 串联，即 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{2}<\delta<\pi$，则在大半个周期内 $\boldsymbol{B}_1(t)$ 与 $\boldsymbol{B}_2(t)$ 反向，相斥，小半个周期内 $\boldsymbol{B}_1(t)$ 与 $\boldsymbol{B}_2(t)$ 同向，相吸，$\bar{F}=-\frac{F_0}{2}\sin\varphi<0$，为斥力．以上结果详如电图 5-9-2 所示．在电图 5-9-2 中，(i) $\varphi=\frac{\pi}{2}$，$\delta=\pi$，铝环纯电感，$F(t)$ 总是斥力，$\bar{F}<0$，为斥力．(ii) $\varphi=0$，$\delta=\frac{\pi}{2}$，铝环纯电阻，$F(t)$ 在半个周期为斥力，另半个周期为吸力，$\bar{F}=0$．(iii) $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}<\delta<\pi$，铝环为 RL 串联，$F(t)$ 大半周期为斥力，小半周期为吸力，$\bar{F}<0$，为斥力，使铝环得以悬浮．

【题 11】 在如图所示的电路中，$L_1=10$ mH，$L_2=20$ mH，$C_1=10$ μF，$C_2=5$ μF，$R=100$ kΩ.

开关 K 长时间闭合．电源的正弦式频率 f 可改变但其电流振幅保持不变．

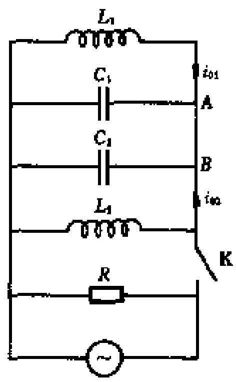
1. 以 f_m 表示有功功率为极大值 P_{max} 时的频率，以 f_+ 和 f_- 分别表示有功功率为 $\frac{1}{2}P_{max}$ 时的两个频率．试确定 f_m 和 $\Delta f=f_+-f_-$ 的比值．

打开开关 K，在开关打开 t 时间后，通过 L_1 和 L_2 的电流分别为 $i_{01}=0.1$ A，$i_{02}=0.2$ A，电压 $U_0=40$ V.

2. 试计算电路 $L_1C_1C_2L_2$ 的固有振荡频率．

3. 试确定导线 AB 内的电流．

4. 试计算线圈 L_1 中的电流振荡的振幅．



电图 5-11-1

【分析】 初阅此题，可能不很适应，需要弄清楚题意和每一个提问的含义，才能逐个求解．

如图，这是一个 L_1,L_2,C_1,C_2,R 并联的交流电路．值得注意的是，交流电源是频率可变而电流振幅恒定的变频恒流源，与一般的恒压电源不同．

1．交流电路的有功功率是消耗在电阻上的功率，即

$$P_{有功}=\frac{U^2}{R}=\frac{I^2Z^2}{R}$$

因题设 I 恒定，故 $P_{有功}$经并联电路的阻抗 Z 随频率 f 变化．当频率 f 等于并联电路的谐振频率 f_m时，阻抗 Z 为极大值 Z_{max}，相应的 $P_{有功}$亦为极大值 P_{max}．求出并联电路的阻抗 Z，即可得出使之为极大值的 f_m．求出相应于 $P_{有功}=\frac{1}{2}P_{max}$的 f_+ 和 f_-，即可得出所求的$\frac{f_m}{\Delta f}=\frac{f_m}{f_+-f_-}$的值．

2．打开开关后，电源与 R 不再起作用了，剩下的是 L_1,L_2,C_1,C_2 并联电路，能量不再损耗，将在电路中往复振荡．

注意到题中的数据使 $L_1C_1=L_2C_2$，这表明并联电路 L_1C_1 和 L_2C_2 的固有振荡频率相同，均为

$$f=\frac{1}{2\pi\sqrt{L_1C_1}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{L_2C_2}}$$

因此，L_1C_1 和 L_2C_2 两并联回路将以同样的固有频率 f 独立地振荡．

3．为了计算 t_0 时刻通过 AB 的电流，可利用交流基尔霍夫定律（节点电流方程）．对于 A 点，流入 A 点的电流i_{01}与 i_{C_1} 之和等于流出 A 点的i_{AB}，对于 B 点，流入 B 点的电流i_{02}与 i_{C_2} 之和等于流出 B 点的i_{BA}，显然 $i_{AB}=-i_{BA}$（以上各电流均指瞬时值）．由于 C_1 与 C_2 并联，两端电压相等，故其中的电流之比$\frac{i_{C_1}}{i_{C_2}}=\frac{C_1}{C_2}$，于是 i_{AB}可求．

值得注意的是，第 2 问得出，L_1C_1 与 L_2C_2 回路独立地以相同的固有频率振荡，因此在联接两回路的支路 AB 中在任何时刻应无交流电通过．但现在又求出 $i_{AB}\neq0$．这表明，在振荡电路中混杂着非振荡的直流成分，它只能来自电源，即交流恒流源提供的电流中除了交流成分还混杂有直流成分．打开开关后，由于 $L_1L_2C_1C_2$ 并联电路无电阻，直流成分是不会衰减的．

4．根据上述讨论，在 t_0 时刻流过 L_1 的电流 i_{01}应是交流成分 i_{o1r}与直流成分i_{AB}之和，因直流成分无法通过 C_1，故 i_{AB}全部来自 i_{01}．（注意，下标 0 表示 t_0 时刻，1 表示 L_1，r 表示振荡部分．）

第 4 问要求计算 L_1 中电流振荡的振幅，此即 i_{01r}的振幅$i_{1r\max}$．

由于 L_1C_1 并联回路独立振荡，能量守恒，故在 t_0 时刻 L_1 内的磁能$\frac{1}{2}L_1\ i_{01r}^2$与 C_1 内的电能$\frac{1}{2}C_1U_0^2$ 之和应等于交流电流为极大的 L_1 内的磁能$\frac{1}{2}L_1i_{1r\max}^2$，于是 $i_{1r\max}$可求．

【解】 1．设 $RL_1L_2C_1C_2$ 并联电路的复导纳为 $\widetilde{Y}$，则

$$\widetilde{Y}=\widetilde{Y}_R+\widetilde{Y}_L+\widetilde{Y}_C=\frac{1}{R}-\frac{j}{\omega L}+j\omega C=\frac{1}{R}+j\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)$$

$$Y=\sqrt{\frac{1}{R^2}+\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2}=\frac{1}{Z}$$

故并联电路的阻抗 Z 为

$$\frac{1}{Z^2}=\frac{1}{R^2}+\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2$$

式中

$$C=C_1+C_2,\quad L=\frac{L_1L_2}{L_1+L_2},\quad \omega=2\pi f$$

有功功率为

$$P_{有功}=\frac{U^2}{R}=\frac{I^2Z^2}{R}=\frac{I^2}{R\left[\frac{1}{R^2}+\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2\right]} \tag{1}$$

式中 I 恒定．

当 $\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)=0$ 时，即当

$$P_{有功}=P_{\max}=I^2R$$

时，并联谐振，故谐振频率 f_m 为

$$f_m=\frac{1}{2\pi}\omega_m=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

若

$$P_{有功}=\frac{1}{2}P_{\max}=\frac{1}{2}I^2R$$

则由(1)式，得

$$\frac{1}{2}I^2R=\frac{I^2}{R\left[\frac{1}{R^2}+\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2\right]}$$

或

$$\frac{1}{R^2}\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2$$

解出

$$\frac{1}{R}=\omega_+C-\frac{1}{\omega_+L}$$

$$-\frac{1}{R}=\omega_-C-\frac{1}{\omega_-L}$$

即

$$\omega_+=\frac{\frac{L}{R}+\sqrt{\frac{L^2}{R^2}+4LC}}{2LC}$$

$$\omega_-=\frac{-\frac{L}{R}+\sqrt{\frac{L^2}{R^2}+4LC}}{2LC}$$

故

$$\Delta\omega=\omega_+-\omega_-=\frac{1}{RC}$$

$$\Delta f=\frac{1}{2\pi}\Delta\omega=\frac{1}{2\pi RC}$$

比值

$$\frac{f_m}{\Delta f}=R\sqrt{\frac{C}{L}}=150$$

2.L_1C_1 与 L_2C_2 并联回路的固有振荡频率均为

$$f=\frac{1}{2\pi\sqrt{L_1C_1}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{L_2C_2}}=15.9\ \text{kHz}$$

3.在 t_0 时刻,流入 A 点的电流为 i_{01} 和 i_{C_1},流出 A 点的为 i_{AB};流入 B 点的为 i_{02} 和 i_{C_2},流出的为 i_{BA}. 由基尔霍夫定律

$$i_{AB}=i_{01}+i_{C1}$$

$$i_{BA}=i_{02}+i_{C2}$$

又

$$i_{AB}=-i_{BA}$$

故

$$i_{01}+i_{C1}=i_{02}-i_{C2}$$

C_1 与 C_2 并联,其间有

$$\frac{q_{C_1}}{C_1}=\frac{q_{C_2}}{C_2}$$

两边对 t 求导,得

$$\frac{i_{C_1}}{C_1}=\frac{i_{C_2}}{C_2}$$

代入,得

$$i_{AB}=\frac{i_{01}}{3}-\frac{2i_{02}}{3}=-0.1\ \text{A}$$

4.在 t_0 时刻,流过 L_1 的振荡电流用 i_{01r} 表示,则 i_{01r} 应等于 t_0 时刻流过 L_1 的总电流 i_{01} 与非振荡电流 i_{AB} 之差,即

$$i_{01r}=i_{01}-i_{AB}=0.2\ \text{A}$$

在 L_1C_1 回路中,因电流振荡而在 L_1 中储存的磁能与在 C_1 中储存的电能之和应守恒 . 设电流振荡的振幅为 $i_{1r\max}$,则由能量守恒,得

$$\frac{1}{2}L_1\ r_{1r\ \max}^2=\frac{1}{2}L_1\ i_{01r}^2+\frac{1}{2}C_1U_0^2$$

故

$$i_{1r\ \max}=\sqrt{i_{01r}^2+\frac{C_1}{L_1}U_0^2}=1.28\ \text{A}$$

【本题是 1983 年第 14 届 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)试题 .】

【题 12】 角频率为 ω 的正弦交流电电流波沿着如电图5－12－1所示的无限 LC 网络传播,相邻

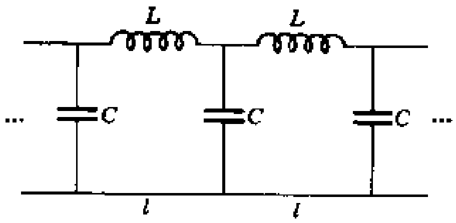
两电容上的交流电压的相移均为 φ.

1. 试确定 φ 对 ω, L, C 的函数关系 .

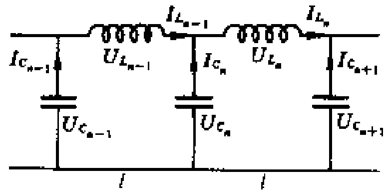
2. 如果每个网络的长度为 l,试求电流波的传播速度 .

3. 试说明在什么条件下电流波的传播速度几乎与 ω 无关,并求出这种情况下电流波的传播速度 .

【分析】 为了分析无限 LC 网络构成的交流电路,可以从中任取一个编号为 n 的网络,如电图 5－12－2 所示,把该网络中每一个元件上的电压和电流都标示在电图 5－12－2 上 . 这些电压和电流之间的关系可由交流电路的基尔霍夫定律确定 . 同时,应利用网络为无限的特点 .



电图 5－12－1



电图 5－12－2

因网络无限,各电容位置相当,两端电压的幅值应相同,均记为 U_0. 题设相邻电容上交流电压的相移为 φ,故可写成

$$U_{C_n} = U_0 \sin(\omega t - n\varphi)$$

$$U_{C_{n+1}} = U_0 \sin[\omega t + (-n+1)\varphi]$$

等等 . 根据电容两端电压及电流的关系,I_{C_n} 及 $I_{C_{n+1}}$ 可知,利用电压定律可从 U_{C_n} 及 $U_{C_{n+1}}$ 得出 U_{L_n}. 由 U_{L_n} 可给出 I_{L_n}. 另外,由 U_{L_n} 与 $U_{L_{n-1}}$ 的差别也仅在相移 φ. 对于每一个节点,电流关系也可知 . 这样,网络中各元件的电压,电流及其间的关系都清楚了,于是 $\varphi(\omega, L, C)$ 即可求出 .

电流波是电流随时空周期性变化形成的波动(勿与电磁场随时空变化形成的电磁波混淆). 电流波的传播速度 v 可由波行进一个网格(长为 l)所需的时间 Δt 求出,相邻电容上交流电压的相移即相位差 φ,正是电流波在不同时间(相差 Δt)到达所致,由此即可求出 v.

显然,v 是角频率 ω 的函数,给出"v 几乎不依赖 ω"的数学表述,即可求出在这种情形电流波的传播速度 .

【解】 若编号为 0 的电容两端电压为

$$U_{C0} = U_0 \sin\omega t$$

则其中电流为

$$I_{C0} = I_0 \cos\omega t$$

若编号为 0 的电感两端电压为

$$U_{L0} = U_0 \cos\omega t$$

则其中电流为

$$I_{L0} = I_0 \sin\omega t$$

因无限 LC 网络左右对称,可假设电流波向右传播,按电图 5－12－2 的标记,有

$$U_{C_n}=U_0\sin(\omega t-n\varphi) \tag{1}$$

$$I_{C_n}=I_0\cos(\omega t-n\varphi)=\omega CU_0\cos(\omega t-n\varphi) \tag{2}$$

由电压关系

$$U_{C_n}+U_{L_n}-U_{C_{n+1}}=0$$

即

$$\begin{aligned}U_{L_n}&=U_{C_{n+1}}-U_{C_n}\\&=U_0\{\sin[\omega t+(-n+1)\varphi]-\sin(\omega t-n\varphi)\}\\&=2U_0\sin\frac{\varphi}{2}\cos\left[\omega t+\left(-n+\frac{1}{2}\right)\varphi\right]\end{aligned} \tag{3}$$

于是，电感 L_n 中的电流为

$$I_{L_n}=\frac{2U_0}{\omega L}\sin\frac{\varphi}{2}\sin\left[\omega t+\left(-n+\frac{1}{2}\right)\varphi\right] \tag{4}$$

由电流关系

$$I_{C_n}=I_{L_n}-I_{L_{n-1}}$$

把(2)式和(4)式代入上式，得出 φ 所遵循的方程为

$$\omega CU_0\cos(\omega t-n\varphi)=\frac{2U_0}{\omega L}\sin\frac{\varphi}{2}\left\{\sin\left[\omega t+\left(-n+\frac{1}{2}\right)\varphi\right]-\sin\left[\omega t+\left(-n-\frac{1}{2}\right)\varphi\right]\right\}$$

即

$$\omega C\cos(\omega t-n\varphi)=\frac{4}{\omega L}\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos(\omega t-n\varphi)$$

上式对任意时刻 t 都成立，故

$$\omega^2LC=4\sin^2\frac{\varphi}{2}=2(1-\cos\varphi)$$

解出

$$\cos\varphi=1-\frac{1}{2}\omega^2LC$$

即

$$\varphi=\arccos\left(1-\frac{1}{2}\omega^2LC\right)$$

要求

$$-1\leqslant1-\frac{1}{2}\omega^2LC\leqslant1$$

即

$$\omega\leqslant\frac{2}{\sqrt{LC}}$$

2. 设电流波行进长为 l 的一个网格需时 Δt，则波的传播速度为

$$v=\frac{l}{\Delta t}$$

波行进一个网格后形成 φ 的相位差，故

$$\varphi=\omega\Delta t$$

于是

$$v=\frac{\omega l}{\varphi}=\frac{\omega l}{\arccos\left(1-\frac{1}{2}\omega^2 LC\right)}$$

3. 由 $v=\frac{\omega l}{\varphi}$ 可知，当 $\varphi\propto\omega$ 时，v 便与 ω 无关．然而这只在 φ 很小时才能近似成立，因为当 φ 很小时，有

$$\cos\varphi\approx 1-\frac{1}{2}\varphi^2$$

在第 2 问中已经得出

$$\cos\varphi=1-\frac{1}{2}\omega^2 LC$$

因此，φ 很小时，有

$$\varphi\approx\omega\sqrt{LC}\ll 1$$

即要求

$$\omega\ll\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

此时电流波的传播速度为

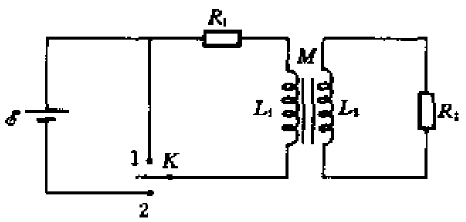
$$v=\frac{\omega l}{\varphi}\approx\frac{l}{\sqrt{LC}}$$

总之，在 φ 很小时，$\varphi\approx\omega\sqrt{LC}$，即 $\varphi\propto\omega$，此时 $v\approx\frac{l}{\sqrt{LC}}$ 几乎与 ω 无关．

【本题是 1987 年第 18 届 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)的试题．】

【题 13】 如图所示是一对互感耦合的 LR 电路．试证明，在无漏磁条件下，两电路充、放电的时间常量都是

$$\tau=\frac{L_1}{R_1}+\frac{L_2}{R_2}$$



电图 5-13-1

【分析】 本题讨论的是充电和放电的暂态过程．充电时，先断路，再接通电源；放电时，先接通电源，再短路放电．充电时，在 L_1R_1 电路中，电源电动势 $\mathscr{E}$ 以及自感电动势和互感电动势都起作用；在 L_2R_2 电路中只有自感和互感电动势．放电时，$\mathscr{E}$ 不起作用，余类似．无漏磁是指两回路的互感系数 $M=\sqrt{L_1L_2}$．列方程，解出 I_1 和 I_2 随时间 t 的变化，即可求出时间常量 τ．

【解】 放电过程．设两回路中的电流分别为 $I_1(t)$ 和 $I_2(t)$．放电时，电键 K 先接 2 与电源接通，电流稳定后，迅速断开电源接通 1 放电．于是有

$$\begin{cases} L_1\dot{I}_1+R_1I_1+M\dot{I}_2=0 & (1)\\ L_2\dot{I}_2+R_2I_2+M\dot{I}_1=0 & (2)\end{cases}$$

因无漏磁，有

$$M=\sqrt{L_1L_2}$$

代入(2)式，得

$$I_2=-\frac{R_2}{L_2}I_2-\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}I_1$$

把上式代入(1)式，得

$$I_2=\frac{R_1}{R_2}\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}I_1 \tag{3}$$

将(3)式求导后再代入(1)式，得

$$I_1+\frac{R_1R_2}{L_1R_2+L_2R_1}I_1=0$$

解出，

$$I_1=I_{10}e^{-t/\tau}$$

$$\tau=\frac{L_1R_2+L_2R_1}{R_1R_2}=\frac{L_1}{R_1}+\frac{L_2}{R_2}$$

把上式代入(3)式，得

$$I_2=I_{20}e^{-t/\tau},\quad I_{20}=\frac{R_1}{R_2}\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}I_{10} \tag{4}$$

因此，在放电过程中两回路的时间常量均为 τ.

充电过程，开始时断路无电流，再接通 2 充电．方程为

$$\begin{cases}L_1I_1+R_1I_1+MI_2=\mathscr{E}\\L_2I_2+R_2I_2+MI_1=0\end{cases}$$

把 $M=\sqrt{L_1L_2}$代入，类似于(3)式，可得

$$\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}R_2I_2=R_1I_1-\mathscr{E} \tag{5}$$

代入以上两式，得

$$I_1+\frac{I_1}{\tau}=\frac{\mathscr{E}}{R_1\tau}$$

$$I_2+\frac{I_2}{\tau}=0$$

解出

$$I_1=I_A\,e^{-t/\tau}+\frac{\mathscr{E}}{R_1},\quad I_2=I_B\,e^{-t/\tau}$$

可见，在充电时，I_1 和 I_2 的充电时间常量也都是 τ，式中 I_A 和 I_B 是由初条件确定的电流参量．

【附注】 满足似稳条件，但有漏磁即 $M<\sqrt{L_1L_2}$时的充放电过程．

仍以上述电路为例，则充电和放电过程的微分方程可统一表为，

$$\begin{cases}L_1I_1+R_1I_1+MI_2=\mathscr{E} & (6)\\ L_2\dot{I}_2+R_2I_2+M\dot{I}_1=0 & (7)\end{cases}$$

充电时取 $\mathscr{E}\neq0$,放电时取 $\mathscr{E}=0$

由(7)式,得

$$I_1=-\frac{L_2}{M}\dot{I}_2-\frac{R_2}{M}I_2 \tag{8}$$

把(8)式代入(6)式,得

$$(M^2-L_1L_2)\dot{I}_2-L_1R_2I_2+MR_1I_1=M\mathscr{E}$$

两边求导(注意,求导会使积分常量的关系受到影响,故最后务必通过代入(6)、(7)、(8)式之一来弥补),得

$$(M^2-L_1L_2)\ddot{I}_2-L_1R_2\dot{I}_2+MR_1\dot{I}_1=0$$

再将(8)式代入,得

$$(L_1L_2-M^2)\ddot{I}_2+(L_1R_2+L_2R_1)\dot{I}_2+R_1R_2I_2=0 \tag{9}$$

类似地可以得出 I_1 的二阶微分方程为

$$(L_1L_2-M^2)\ddot{I}_1+(L_1R_2+L_2R_1)\dot{I}_1+R_1R_2I_1=R_2\mathscr{E} \tag{10}$$

(9)式和(10)式分别是 I_2 和 I_1 的微分方程,其齐次通解为

$$I=I_{10}\,\mathrm{e}^{r_1t}+I_{20}\,\mathrm{e}^{r_2t} \tag{11}$$

式中 r_1 和 r_2 是下述代数方程

$$(L_1L_2-M^2)r^2+(L_1R_2+L_2R_1)r+R_1R_2=0$$

的两个根,为

$$r_1=\frac{-(L_1R_2+L_2R_1)+\sqrt{(L_1R_2+L_2R_1)^2-4(L_1L_2-M^2)R_1R_2}}{2(L_1L_2-M^2)}$$

$$r_2=\frac{-(L_1R_2+L_2R_1)-\sqrt{(L_1R_2+L_2R_1)^2-4(L_1L_2-M^2)R_1R_2}}{2(L_1L_2-M^2)}$$

很容易看出,r_1 和 r_2 都是负的实数.

(10)式的特解为

$$I_1^*=\frac{\mathscr{E}}{R_1} \tag{12}$$

其实这也可视为一阶二元微分方程组(6)式和(7)式的特解,即

$$\begin{cases}I_1^*=\dfrac{\mathscr{E}}{R_1}\\ I_2^*=0\end{cases}$$

于是,I_1 和 I_2 的通解可表为

$$\begin{cases}I_1=I_{11}\mathrm{e}^{r_1t}+I_{12}\mathrm{e}^{r_2t}+\dfrac{\mathscr{E}}{R_1}\\ I_2=I_{21}\mathrm{e}^{r_1t}+I_{22}\mathrm{e}^{r_2t}\end{cases} \tag{13}$$

因 r_1 和 r_2 均为负实数，指数项均随时间 t 衰减．(13)式中的四个电流参量 $I_{11},I_{12},I_{21},I_{22}$ 可由初条件及(8)式确定．初条件为

$$\begin{cases}I_1(t=0)=I_{10}\\I_2(t=0)=I_{20}\end{cases}$$

由(13)式代入(8)式，并利用上述初条件，得

$$\begin{cases}I_{11}+I_{12}+\dfrac{\mathscr{E}}{R_1}=I_{10}\\I_{21}+I_{22}=I_{20}\\r_1I_{11}e^{r_1t}+r_2I_{12}e^{r_2t}=-\dfrac{L_2}{M}(r_1I_{21}e^{r_1t}+r_2I_{22}e^{r_2t})-\dfrac{R_2}{M}(I_{21}e^{r_1t}+I_{22}e^{r_2t})\end{cases}$$

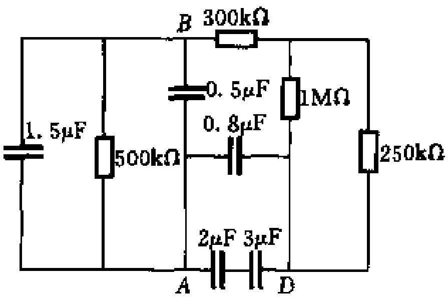
其中第三式对任何时刻 t 都成立，考虑到两个指数项彼此独立，第三式实际上包括两个关系式．即以上三式相当于以下四式，

$$\begin{cases}I_{11}+I_{12}+\dfrac{\mathscr{E}}{R_1}=I_{10}\\I_{21}+I_{22}=I_{20}\\Mr_1I_{11}+(L_2r_1+R_2)I_{21}=0\\Mr_2I_{12}+(L_2r_2+R_2)I_{22}=0\end{cases}\tag{14}$$

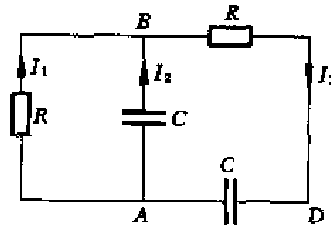
由上述代数方程组可以解出 $I_{11},I_{12},I_{21},I_{22}$(略)．(13)式就是在似稳条件以及 $M<\sqrt{L_1L_2}$ 条件下，本题电路充电和放电过程的解，它说明在充电和放电过程中电流 I_1 和 I_2 随时间 t 的变化．(13)式中的四个电流参量 $I_{11},I_{12},I_{21},I_{22}$ 是代数方程组(14)式的解．

【题 14】 在如电图 **5-14-1** 所示的电路中，各元件的值均已标明．设在 $t=0$ 时刻，A 到 B 的电压值为 U_{10}，B 到 D 的电压值为 U_{20}．试求尔后 A 和 B 之间的电压随时间 t 的变化．

【分析】 这是一个由电阻和电容构成的电路．先利用电阻串、并联和电容串、并联的关系，把电路简化为如电图 5-14-2 所示的等效电路．



电图 5-14-1



电图 5-14-2

电路中虽无电源，但 $t=0$ 时，AB 间和 BD 间均有电压，所以，电容器带电的两极板会放电，电阻中就会有电流通过．在任意时刻 t，AB 间的电压与 R 中电流 I_1 的关系，以及与 C 两极板上电量的关系(从而与 I_2 的关系)均可知；BD 间类似．又，I_1,I_2,I_3 的关系亦可知(因有电容，不会在 B 积累电荷)．利用这些关系，即可得出 $U_{AB}(t)$ 遵循的方程，解出 $U_{AB}(t)$．

【解】 如电图 5－14－1，A 和 D 之间是 2 μF 与 3 μF 两电容串联后，再与 0.8 μF 电容并联，等效电容为 $C=2.0$ μF. A 和 B 之间是 0.5 μF 和 1.5 μF 两电容并联，等效电容也是 $C=2.0$ μF. A 和 B 之间的电阻 $R=500$ kΩ. B 和 D 之间是 1 MΩ 与 250 kΩ 两电阻并联后再与 300 kΩ 电阻串联，等效电阻也是 $R=500$ kΩ. 由此，电图 5－14－1 的电路可简化为电图 5－14－2 的等效电路，在电图 5－14－2 电路中的二个 R 和二个 C 相同，无需区分 .

电图 5－14－2 电路中各支路的电流 I_1, I_2, I_3 的方向标示如图，并令

$$U_1=U_{AB},\ U_2=U_{BD}$$

则有

$$\begin{cases} I_1=\dfrac{U_1}{R} \\ I_2=\dfrac{\mathrm{d}Q_2}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(CU_1)=C\dfrac{CU_1}{\mathrm{d}t} \\ I_3=\dfrac{\mathrm{d}Q_3}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(CU_{DA})=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[C(-U_2-U_1)]=-C\left(\dfrac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}U_2}{\mathrm{d}t}\right) \\ I_3=I_1+I_2 \\ I_3=\dfrac{U_2}{R} \end{cases}$$

由以上五式，消去 I_1, I_2, I_3, U_2，得出

$$(RC)^2\frac{\mathrm{d}^2U_1}{\mathrm{d}t^2}+3RC\frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}t}+U_1=0$$

以及

$$U_2=U_1+RC\frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}t}$$

令

$$\tau=RC=500\times10^3\times2.0\times10^{-6}=1\ \mathrm{s}$$

则以上两式可简单表述为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}t^2}+3\dfrac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}t}+U_1=0 \\ U_2=U_1+\dfrac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

这就是 $U_1(t)$ 遵循的方程，它是常系数线性齐次二阶微分方程 . 其通解为

$$U_1=C_1\mathrm{e}^{r_1t}+C_2\mathrm{e}^{r_2t} \tag{1}$$

式中 r_1 和 r_2 是下述二次代数方程的根，

$$r^2+3r+1=0$$

故

$$\begin{cases} r_1=-\dfrac{1}{2}(3-\sqrt{5}) \\ r_1=-\dfrac{1}{2}(3+\sqrt{5}) \end{cases}$$

于是 $U_2(t)$ 为

$$U_2=U_1+\frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}t}=C_1(1+r_1)e^{r_1t}+C_2(1+r_2)e^{r_2t} \tag{2}$$

由(1)式和(2)式，在 $t=0$ 时，有

$$\begin{cases}U_{10}=C_1+C_2\\U_{20}=C_1(1+r_1)+C_2(1+r_2)\end{cases}$$

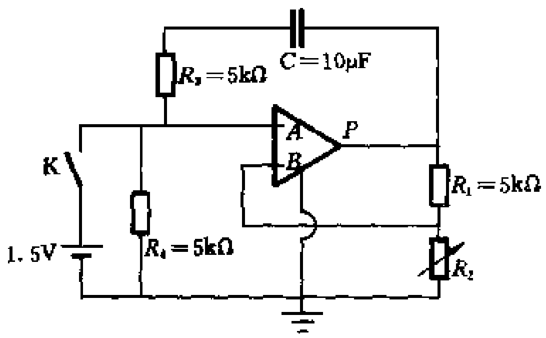
解出 C_1 和 C_2，并把 r_1 和 r_2 的值代入，得

$$\begin{cases}C_1=\frac{1}{10}[(5+\sqrt{5})U_{10}+2\sqrt{5}U_{20}]\\C_2=\frac{1}{10}[(5-\sqrt{5})U_{10}-2\sqrt{5}U_{20}]\end{cases}$$

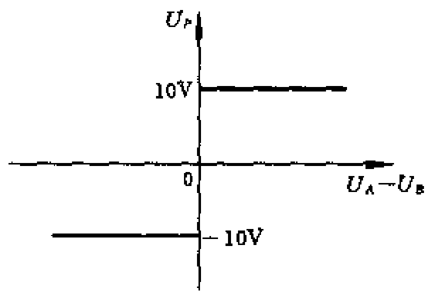
把上述 C_1 和 C_2 代入(1)式，得出 AB 之间的电压 $U_1(t)$ 为

$$U_1(t)=\frac{1}{10}[(5+\sqrt{5})U_{10}+2\sqrt{5}U_{20}]\exp[-\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})t]$$
$$+\frac{1}{10}[(5-\sqrt{5})U_{10}-2\sqrt{5}U_{20}]\exp[-\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})t]$$

【题 15】 在如电图5－15－1所示的电路中，A 和 B 为放大器的输入端，P 为输出端，输出电压 U_P 取决于 A 和 B 之间的电势差(U_A-U_B)，其间的关系如电图 5－15－2 所示．



电图 5－15－1



电图 5－15－2

1. 设开始时电键 K 断开，放大器尚未工作，电容 C 中也不带电荷，且可变电阻器阻值 $R_2=0$，然后将 K 迅速合上并立即断开，使放大器被触发而开始工作．试求放大器输出的电流 I_P 随时间 t 的变化．

2. 开始的情况如同第 1 问所述，但 $R_2=1\ \text{k}\Omega$，同样将 K 迅速合上并立即断开．试求 U_P 最终达到的稳定的变化周期 T．

【分析】 在电图 5－15－1 的电路图中，三角形 ABP 是放大器，如电图 5－15－2，当(U_A-U_B)>0 时，$U_P=10\text{V}$，当(U_A-U_B)<0 时，$U_P=-10\text{V}$．这是一种阶跃式的放大器，(U_A-U_B)=0 即 $U_A=U_B$ 是 U_P 阶跃的转折点．放大器一端接地，U_P 即为P 与地之间的电压．

合上 K，$U_A>U_B$，放大器即被触发以 $U_P=10$ V 输出，K 随即断开．于是以 $U_P=10$ V 为初始电压，放大器的电路包括两支(彼此并联)，一支由 P 经 C、R_3、R_4 串联接地，这是直流充电电

路，其中电流 I_1 随时间 t 的变化不难求出；另一支由 P 经 R_1（在第1问中 $R_2=0$）接地，其中电流为 I_2. 放大器输出电流 I_P 即为 I_1 与 I_2 之和．值得注意的是，因为 B 点经 R_2（$R_2=0$）接地，故 $U_B=0$；而 A 点经 R_4 接地，在充电过程中 $U_A=I_1R_4>0$. 因此在整个过程中始终有(U_A-U_B)>0，从而 $U_P=10$ V 是恒定的．

在第2问上，$R_2=1\text{k}\Omega\neq 0$，则 $U_B=I_2R_2>0$，不再确保 $U_A>U_B$，一旦 U_A 降到与 U_B 同值并稍小时，U_P 便会从 10 V 变为 −10 V，这将使电容器 C 反向充电．反向充电到 U_A 与 U_B 再度相等时，又将正向充电，如此往复．正向与反向充电的区别只是电源（放大器输出）的正、负极颠倒，从而使电容器两板带电的正、负颠倒而已，有关过程的讨论完全类似．

但应注意，第一次正向充电时，电容器两板初始的电量为零，而第一次反向充电以及第二次正、反向充电，第三次正、反向充电，……时，电容器两板的初始电量均不为零．由于初始条件不同，第一次正向充电的时间与第一次反向充电的时间以及尔后各次正向或反向充电的时间应有所不同．所谓 U_P 稳定变化的周期，是指除第一次正向充电外，相邻两次正向或反向充电之间的时间间隔．

【解】 由电图 5-15-2，U_P 与(U_A-U_B)的关系为

$$U_P=\begin{cases}10\text{ V}, \text{当 } U_A>U_B\\ -10\text{ V}, \text{当 } U_A<U_B\end{cases}$$

即 $U_A=U_B$ 是 U_P 的阶跃转折点．

1. 合上 K，$U_A>U_B$，放大器触发，$U_P=10$ V 输出，K 随即断开．设由 P 点经 C, R_3, R_4 串联接地的直流充电电路中的电流为 I_1，则

$$I_1=I_0e^{-t/\tau}$$

式中 $t=0$ 时刻的 I_0 值以及时间常数 τ 分别为

$$I_0=\frac{U_P}{R_3+R_4},\quad \tau=(R_3+R_4)C=0.1\text{ s}$$

可见，$U_A=I_1R_4>0$，又因 $R_2=0$，B 点直接接地，故 $U_B=0$. 因此，在充电过程中总有 $U_A>U_B$，及 $U_P=10$ V.

设由 P 点经 R_1 接地的支路中的电流为 I_2，则

$$I_2=\frac{U_P}{R_1}$$

故放大器输出电流 I_P 为

$$\begin{aligned}I_P&=I_1+I_2=\frac{U_P}{R_3+R_4}e^{-t/\tau}+\frac{U_P}{R_1}\\&=\left(\frac{10}{5+5}e^{-10t}+\frac{10}{5}\right)\times 10^{-3}=(2+e^{-10t})\times 10^{-3}\text{ A}\end{aligned}$$

2. 现在 $R_2=1\text{k}\Omega\neq 0$，故

$$I_2=\frac{U_P}{R_1+R_2}$$

于是

$$U_B=I_2R_2=\frac{U_P}{R_1+R_2}R_2=\frac{1}{6}U_P$$

不再确保 $U_A > U_B$，一旦 U_A 降到与 U_B 同值，U_P 便会从 10V 变为 -10V，使电容器反向充电．

第一次正向充电过程．充电方程为

$$U_P = \frac{Q}{C} + I_1(R_3 + R_4) = \frac{Q}{C} + \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}(R_3 + R_4)$$

式中 Q 是 t 时刻电容器正极板上的电量．为了适应下面对第一次反向充电过程以及第二、三等次正向和反向充电过程讨论的需要，普遍地设初条件为 $t=0$ 时，电容器正极板上已有电量 $-q_0$．对于第一次正向充电过程，初条件为 $t=0$ 时，$q_0=0$，即

$$Q_{t=0} = -q_0$$

则可解出

$$Q = (-q_0 - CU_P)\mathrm{e}^{-t/(R_3+R_4)C} + CU_P$$

$$I_1 = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{R_3 + R_4}\left(\frac{q_0}{C} + U_P\right)\mathrm{e}^{-t/(R_3+R_4)C}$$

A 点电势为

$$\begin{aligned} U_A &= I_1 R_4 \\ &= \frac{R_4}{R_3 + R_4}\left(\frac{q_0}{C} + U_P\right)\mathrm{e}^{-t/(R_3+R_4)C} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{q_0}{C} + U_P\right)\mathrm{e}^{-t/\tau} \end{aligned}$$

设经 t_1 时间，U_A 降到与 U_B 相同，则有

$$\frac{1}{6}U_P = \frac{1}{2}\left(\frac{q_0}{C} + U_P\right)\mathrm{e}^{-t_1/\tau}$$

即

$$\mathrm{e}^{-t_1/\tau} = \frac{CU_P}{3(q_0 + CU_P)}$$

t_1 时刻电容器正极板上的电量 q_1 为

$$\begin{aligned} q_1 &= Q(t_1) \\ &= (-q_0 - CU_P)\frac{CU_P}{3(q_0 + CU_P)} + CU_P = \frac{2}{3}CU_P \end{aligned}$$

可见，q_1 与 q_0 无关，即无论在初始的 $t=0$ 时刻 q_0 为何值，当 $U_A = U_B$ 即当 U_P 跃变时，电容器在极板上的电量总是相同的 q_1 值（$q_1 = \frac{2}{3}CU_P$）．

第一次正向充电过程持续的时间为（注意，应取 $q_0=0$），

$$t_1 = \tau\ \ln\frac{3(q_0 + CU_P)}{CU_P}\bigg|_{q_0=0} = \tau\ln 3$$

第一次反向充电过程与上述相同，只是正负极倒置而已．另外，过程开始时（即 $t=0$ 时刻）极板上的初始电量 q_0 应为上述 $q_1 = \frac{2}{3}CU_P$，即初条件与第一次正向充电过程不同．因此，过程持续时间为

$$t_2 = \tau\ln\frac{3(q_0 + CU_P)}{CU_P}\bigg|_{q_0 = q_1}$$

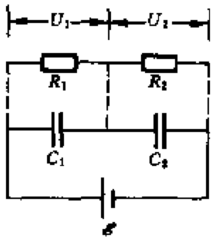
$$=\tau\ln\left[\frac{3\left(\frac{2}{3}CU_P+CU_P\right)}{CU_P}\right]=\tau\ln5$$

第二次正向充电过程是上述第一次反向充电过程的逆过程，并且初条件也类似，故持续时间也将是 t_2. 以后各次正向和反向充电过程的持续时间也都是 t_2. 因此，放大器输出电压 U_P 往返变化一次的时间，即 U_P 稳定的变化周期 T 为

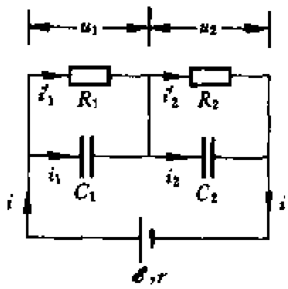
$$T=2t_2=2\tau\ln5=0.32\ \text{s}$$

【题16】 两个理想电容器 C_1 和 C_2 串联起来接在直流电源上，电压分配为 $U_1:U_2=C_2:C_1$. 实际电容器都有一定的漏阻，漏阻相当于并联在理想电容器 C_1、C_2 上的电阻 R_1、R_2，如电图 5-16-1 所示．当漏阻趋于无穷时，实际电容器趋于理想电容器．将两个实际电容器接在直流电源上，根据稳恒条件，电压分配应为 $U_1:U_2=R_1:R_2$. 设 $C_1:C_2=R_1:R_2=1:2$，并设想 R_1 和 R_2 按此比例趋于无穷．试问，这时电压分配 $U_1:U_2$ 如何？一种看法认为，这时两个电容器都是理想的，故应为 $U_1:U_2=C_2:C_1=2:1$. 另一种看法认为，电压的分配只与 R_1 和 R_2 的比值有关，而此比值不变，故当 $R_1\to\infty$ 及 $R_2\to\infty$ 时，电压分配仍应为 $U_1:U_2=R_1:R_2=1:2$. 试问，哪一种看法正确．

【分析】 用直流电源为电容 C_1、C_2 充电的过程是一个暂态过程，最后达到稳定状态时，电流只在电阻 R_1、R_2 上流过，电容 C_1、C_2 上的电压分配必定与电阻 R_1、R_2 上的电压分配相同，即为 $U_1:U_2=R_1:R_2$. 值得研究的是，在充电过程中，是否会出现瞬态电压 $u_1:u_2=C_2:C_1$ 的分配关系．这正是本题要求解答者讨论的内容，这一讨论自然要从暂态过程开始．



电图 5-16-1



电图 5-16-2

需要注意的是，题文中没有说明，与电容串联的回路是否有其他的串联电阻．如果没有串联电阻，在充电过程的初始时刻，C_1 和 C_2 尚无电荷，即 $u_1=0$，$u_2=0$，这将与任何时刻均需满足的 $u_1+u_2=\mathscr{E}$ 的关系发生矛盾，由此得出的暂态过程解将是错误的．真实的或者说物理上允许的充电过程必须有串联电阻（或者串联电感），不妨假定这个串联电阻就是直流电源非零的小内阻 r. 作此假定后，即可讨论充电的暂态过程，分析过程中出现瞬态 $u_1:u_2=C_2:C_1$ 的可能性．

【解】 如电图 5-16-2 所示，设直流电源的电动势为 $\mathscr{E}$，内阻为 r，且设

$$r\ll R_1,R_2$$

因 r 很小，在稳态电路问题中常可略去，故题文未提及此量，但在暂态过程中 r 虽小其作用不可忽略．在充电的暂态过程中，各支路的瞬态电流标示如电图 5-16-2，则可列出方程组

$$\begin{cases} i_1 = \dfrac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} \\ i_2 = \dfrac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t} \\ i'_1 = \dfrac{u_1}{R_1} = \dfrac{q_1}{C_1R_1} \\ i'_2 = \dfrac{u_2}{R_2} = \dfrac{q_2}{C_2R_2} \\ i = \dfrac{1}{r}(\mathscr{E} - u_1 - u_2) = \dfrac{1}{r}\left(\mathscr{E} - \dfrac{q_1}{C_1} - \dfrac{q_2}{C_2}\right) \end{cases}$$

又

$$i = i_1 + i_2 = i'_1 + i'_2$$

得出

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathscr{E}}{r} - \dfrac{q_1}{R_1C_1} - \dfrac{q_1}{rC_1} - \dfrac{q_2}{rC_2} \\ \dfrac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathscr{E}}{r} - \dfrac{q_2}{R_2C_2} - \dfrac{q_2}{rC_2} - \dfrac{q_1}{rC_1} \end{cases}$$

由以上两式，消去 q_1，得

$$rC_1\frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t^2} + \left(1 + \frac{r}{R_1} + \frac{C_1}{C_2} + \frac{C_1r}{C_2R_2}\right)\frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{1}{R_2C_2} + \frac{1}{R_1C_2} + \frac{r}{R_1R_2C_2}\right)q_2 = \frac{\mathscr{E}}{R_1}$$

这是一个关于 q_2 的二阶常系数线性非齐次微分方程，其特解为

$$q_2 = \frac{R_2C_2\mathscr{E}}{R_1 + R_2 + r}$$

齐次特征方程为

$$rC_1x^2 + \left(1 + \frac{r}{R_1} + \frac{C_1}{C_2} + \frac{C_1r}{C_2R_2}\right)x + \left(\frac{R_1 + R_2 + r}{R_1R_2C_2}\right) = 0$$

其根为

$$x_{1,2} = \frac{1}{2A_1}(-A_2 \mp \sqrt{A_2^2 - 4A_1A_3})$$

式中

$$\begin{cases} A_1 = rC_1 \\ A_2 = 1 + \dfrac{r}{R_1} + \dfrac{C_1}{C_2} + \dfrac{C_1r}{C_2R_2} \\ A_3 = \dfrac{R_1 + R_2 + r}{R_1R_2C_2} \end{cases}$$

因 r 为小量，A_1 也是小量，有近似展开

$$\sqrt{A_2^2 - 4A_1A_3} = A_2\left(1 - \frac{2A_1A_3}{A_2^2}\right)$$

因此，

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{2A_1}\left[-A_2-A_2\left(1-\dfrac{2A_1A_3}{A_2^2}\right)\right]\approx-\dfrac{A_2}{A_1}\approx-\dfrac{C_1+C_2}{rC_1C_2} \\ x_2=\dfrac{1}{2A_1}\left[-A_2+A_2\left(1-\dfrac{2A_1A_3}{A_2^2}\right)\right]\approx-\dfrac{A_3}{A_2}\approx-\dfrac{R_1+R_2}{R_1R_2(C_1+C_2)} \end{cases}$$

于是，得出 q_2 的通解为

$$q_2=P_1e^{-t/\tau_1}+P_2e^{-t/\tau_2}+\frac{R_2C_2}{R_1+R_2+r}\mathscr{E}$$

其中

$$\begin{cases} \tau_1=-\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{C_1C_2r}{C_1+C_2} \\ \tau_2=-\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{R_1R_2(C_1+C_2)}{R_1+R_2} \end{cases}$$

因 $t=0$ 时，$q_1=0,q_2=0$，故 $i'_1=0,i'_2=0,i=\dfrac{\mathscr{E}}{r}$. 由此，得出初条件为

$t=0$ 时

$$\begin{cases} q_2=0 \\ \dfrac{dq_2}{dt}=i_2=i-i'_2=i=\dfrac{\mathscr{E}}{r} \end{cases}$$

利用初条件，得出 q_2 通解中的 P_1 和 P_2 为

$$\begin{cases} P_1=-\dfrac{C_1C_2\mathscr{E}}{C_1+C_2} \\ P_2=\left(\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}-\dfrac{R_2C_2}{R_1+R_2+r}\right)\mathscr{E} \end{cases}$$

代入，q_2 的通解为

$$\begin{aligned} q_2&=-\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\mathscr{E}e^{-t/\tau_1}+\left(\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}-\frac{R_2C_2}{R_1+R_2+r}\right)\mathscr{E}e^{-t/\tau_2}+\frac{R_2C_2}{R_1+R_2+r}\mathscr{E} \\ &\approx-\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\mathscr{E}e^{-t/\tau_1}+\left(\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}-\frac{R_2C_2}{R_1+R_2}\right)\mathscr{E}e^{-t/\tau_2}+\frac{R_2C_2}{R_1+R_2}\mathscr{E} \end{aligned}$$

同样，可解出

$$q_1\approx-\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\mathscr{E}e^{-t/\tau_1}+\left(\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}-\frac{R_1C_1}{R_1+R_2}\right)\mathscr{E}e^{-t/\tau_2}+\frac{R_1C_1}{R_1+R_2}\mathscr{E}$$

可见，在充电的暂态过程中，q_1 及 q_2 随时间 t 的变化包含两个指数衰减项，由于

$$\tau_1\ll\tau_2$$

第一项迅速衰减，第二项的衰减相对缓慢，可分阶段进行讨论．

第一阶段．第一项迅速衰减到近似为零，第二项则可认为仍近似处于 $t=0$ 的初值，故第一阶段终态的电量为

$$q_1=\left(\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}-\frac{R_1C_1}{R_1+R_2}\right)\mathscr{E}+\frac{R_1C_1}{R_1+R_2}\mathscr{E}=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\mathscr{E}$$

$$q_2=\left(\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}-\frac{R_2C_2}{R_1+R_2}\right)\mathscr{E}+\frac{R_2C_2}{R_1+R_2}\mathscr{E}=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\mathscr{E}$$

第一阶段终态，电容 C_1 和 C_2 上的电压分别为

$$u_1=\frac{q_1}{C_1}=\frac{C_2}{C_1+C_2}\mathscr{E}$$

$$u_2=\frac{q_2}{C_2}=\frac{C_1}{C_1+C_2}\mathscr{E}$$

其比值为

$$u_1:u_2=C_2:C_1$$

第二阶段．第二项的衰减效果开始显现出来，q_1 和 q_2 可近似表为

$$q_1=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\mathscr{E}e^{-t/\tau_2}+\frac{R_1C_1}{R_1+R_2}\mathscr{E}(1-e^{-t/\tau_2})$$

$$q_2=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\mathscr{E}e^{-t/\tau_2}+\frac{R_2C_2}{R_1+R_2}\mathscr{E}(1-e^{-t/\tau_2})$$

第二阶段经过足够长的时间后，达到稳恒态，有

$$q_1=\frac{R_1C_1}{R_1+R_2}\mathscr{E},\quad q_2=\frac{R_2C_2}{R_1+R_2}\mathscr{E}$$

此时，电容 C_1 和 C_2 上的电压分别为

$$U_1=u_1=\frac{q_1}{C_1}=\frac{R_1}{R_1+R_2}\mathscr{E}$$

$$U_2=u_2=\frac{q_2}{C_2}=\frac{R_2}{R_1+R_2}\mathscr{E}$$

其比值为

$$U_1:U_2=R_1:R_2$$

这表明，串联的漏阻电容器在充电过程的终态(即稳态)，其电压分配即为由漏阻构成的电阻器的串联电压分配．

综上所述，本题的完整回答应为：对于漏阻 R_1 和 R_2 按 1:2 趋于无穷的理想电容器串联，在充电过程中，理论上的终态电压比应为 $U_1:U_2=R_1:R_2=1:2$，但因时间常数 τ_2 趋于无穷，相应的暂态过程(即上述第二阶段)不可进行，此终态不可接近．因此，在有限时间内测得的串联电容器的电压之比应为 $u_1:u_2=C_2:C_1=2:1$(即为上述第二阶段初态的电压比)．

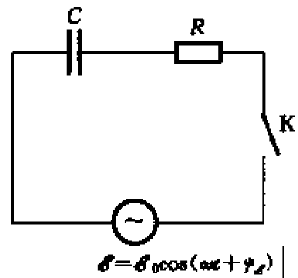
【本题由于海涛同学提供解答．他是参加 1995 年第 26 届 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)的中国队队员．】

【题 17】 电路如图所示，开始时断路，电容器上无电量，在 $t=0$ 时刻合上电键 K. 已知交流电源的电动势为

$$\mathscr{E}=\mathscr{E}_0\cos(\omega t+\varphi_{\mathscr{E}})$$

试求电流随时间 t 的变化 $i(t)$.

【分析】 本题讨论接交流电源(而非直流电源)时，RC 串联电路的暂态过程．不难列出微分方程，关键在于求解方程时的计算．容易猜想到，电流 $i(t)$ 应包含一个简谐项以及另一个随时间指数衰减的项，稳定后电压(即电源电动势)的相位应落后于电流的相位．



电图 5-17-1

【解】 合上电键 K 后，电路的基本方程为

$$iR+\frac{Q}{C}=\mathscr{E}$$

其中

$$i(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q(t)$$

代入，得出 $Q(t)$ 遵循的一阶线性非齐次微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\frac{Q}{RC}=\frac{\mathscr{E}}{R}=\frac{\mathscr{E}_0}{R}\cos(\omega t+\varphi_{\mathscr{E}})$$

其解为

$$\begin{aligned}Q&=\mathrm{e}^{-\int\frac{\mathrm{d}t}{RC}}\left[\int\frac{\mathscr{E}}{R}\mathrm{e}^{\int\frac{\mathrm{d}t}{RC}}\mathrm{d}t+A\right]\\&=\mathrm{e}^{-t/RC}\left[\frac{\mathscr{E}_0}{R}\int\cos(\omega t+\varphi_{\mathscr{E}})\mathrm{e}^{t/RC}\mathrm{d}t+A\right]\\&=\mathrm{e}^{-t/RC}\left[\frac{\mathscr{E}_0}{R}\mathrm{e}^{t/RC}\frac{\frac{1}{\omega RC}\cos(\omega t+\varphi_{\mathscr{E}})+\sin(\omega t+\varphi_{\mathscr{E}})}{\left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2+1}+A\right]\\&=\frac{\omega C^2\mathscr{E}_0}{1+\omega^2R^2C^2}\left\{\left[\frac{1}{\omega C}\cos(\omega t+\varphi_{\mathscr{E}})+R\sin(\omega t+\varphi_{\mathscr{E}})\right]+A'\mathrm{e}^{-t/RC}\right\}\end{aligned}$$

式中 A 是特定的积分常量，A' 是另一常量，为

$$A=\frac{\omega C^2\mathscr{E}_0}{1+\omega^2R^2C^2}A'$$

令

$$\cos\varphi'=\frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}},\quad \sin\varphi'=\frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

则

$$\begin{aligned}Q&=\frac{\omega C^2\mathscr{E}_0}{1+\omega^2R^2C^2}\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}\left[\cos\varphi'\cos(\omega t+\varphi_{\mathscr{E}})+\sin\varphi'\sin(\omega t+\varphi_{\mathscr{E}})+A''\mathrm{e}^{-t/RC}\right]\\&=\frac{\mathscr{E}_0}{\omega\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\left[\cos(\omega t+\varphi_{\mathscr{E}}-\varphi')+A''\mathrm{e}^{-t/RC}\right]\end{aligned}$$

式中 A'' 为常量，与 A' 的关系是

$$A'=\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}A''$$

因 $t=0$ 时，$Q=0$，故

$$A''=-\cos(\varphi_{\mathscr{E}}-\varphi')$$

代入，得

$$Q=\frac{\mathscr{E}_0}{\omega\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\left[\cos(\omega t+\varphi_{\mathscr{E}}-\varphi')+\cos(\varphi_{\mathscr{E}}-\varphi')\mathrm{e}^{-t/RC}\right]$$

电流强度为

$$i(t)=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\left[-\sin(\omega t+\varphi_{\mathscr{E}}-\varphi')+\frac{1}{\omega RC}\cos(\varphi_{\mathscr{E}}-\varphi')\mathrm{e}^{-t/RC}\right]$$

引入

$$\varphi_i=\varphi_{\mathscr{E}}-\varphi'+\frac{\pi}{2}$$

则

$$i=I_0\left[\cos(\omega t+\varphi_i)+\frac{1}{\omega RC}\sin\varphi_i\,\mathrm{e}^{-t/RC}\right]$$

式中

$$I_0=\frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

这就是接交流电源的 RC 串联电路，在暂态过程中回路的电流 $i(t)$ 随时间 t 变化的规律．$i(t)$ 包括一个简谐项和一个随时间 t 指数衰减的项．当 $t\to\infty$ 时，后一项为零，即稳定解为

$$\lim_{t\to\infty}i(t)=I_0\cos(\omega t+\varphi_i)$$

这正是交流 RC 串联电路中的电流．因此，稳定后，电源电动势与电流的相位差为

$$\Delta\varphi=\varphi_{\mathscr{E}}-\varphi_i=\varphi_{\mathscr{E}}-\left(\varphi_{\mathscr{E}}-\varphi'+\frac{\pi}{2}\right)=\varphi'-\frac{\pi}{2}$$

故

$$\cos\Delta\varphi=\cos\left(\varphi'-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\varphi'=\frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\sin\Delta\varphi=\sin\left(\varphi'-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\varphi'=\frac{-\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

可见

$$-\frac{\pi}{2}<\Delta\varphi<0$$

即稳定后，电源电动势（即 RC 串联电路两端的电压）的相位要落后于电流的相位，但相位差不超过$\frac{\pi}{2}$．这正是交流 RC 串联电路熟知的性质．它表明上述计算无误．

【题 18】 按照静电学的观点，可以认为地球表面是良导体．设地球表面所带总电量为 Q_0，平均面电荷密度为 σ_0．

1. 天气晴好时，大气中有一垂直向下的电场，记为 E，在地球表面附近其值约为 $E_0=150$ V/m. 试求地球表面的面电荷密度 σ_0 和地球表面所带的总电量 Q_0.

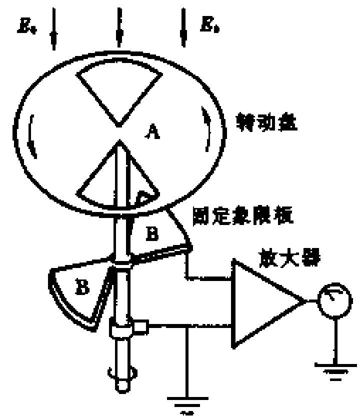
2. 电场强度的绝对值随着高度的增加而减小，在距地面 100 m 的高度处，场强约为 100 V/m. 试求 100 m 高度处与地球表面之间每立方米大气中的平均净电荷量.

3. 在第 2 问中求出的净电荷体密度，实际上是数值几乎相等的单位体积内单价正离子（数密度为 n_+）的电量和负离子（数密度为 n_-）的电量的代数和. 天气晴好时，在地面附近 $n_+\approx n_-=6\times10^8m^{-3}$. 这些离子会在竖直向下电场的作用下运动，它们（实指其中的正离子）的运动速度 v 与场强 E 的关系为

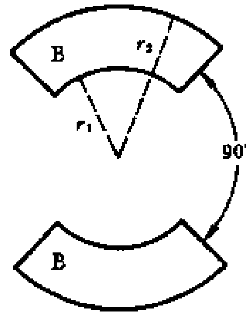
$$v\approx1.5\times10^{-4}E$$

式中 v 的单位取 m/s，E 的单位取 V/m. 若无其他过程（例如闪电）为地球表面充电，试问因大气中离子的运动需经多长时间才能使地球表面的电荷中和掉一半.

4. 用如电图 5－18－1 所示的实验装置，可以测出大气中的电场强度 E 和地球表面的面电荷密度 σ。电图 5－18－1 中，一对固定的金属象限板 B 互相连通，但与转轴绝缘。它们被放在一个具有象限形开孔，匀速转动的金属圆盘 A 下面，金属圆盘 A 及其转轴接地。为了看得清楚，在电图 5－18－1 中，象限板 B、转动盘 A 之间的距离被夸大了. 金属圆盘 A 每旋转一周，象限板 B 完全暴露在电场下两次，并被转动圆盘 A 完全屏蔽两次. 完全暴露与完全屏蔽之间的时间间隔为 $\frac{T}{4}$，其中 T 是金属圆盘 A 的转动周期.



电图 5－18－1



电图 5－18－2

如电图 5－18－2 所示，设 r_1 和 r_2 分别是象限板 B 内圆弧和外圆弧的半径，并设象限板 B 某次被完全屏蔽时为 $t=0$ 时刻.（注意：此时电图 5－18－1 中的导线尚未接通）.

试求从 $t=0$ 到 $t=\frac{T}{2}$，象限板 B 的上表面由于感应而产生的全部电荷 q 随时间 t 变化的函数关系，并作相应的 $q(t)$ 图线. 设大气中离子流的影响可忽略不计.

5. 把第 4 问中描述的实验装置与一个放大器连接，如电图 5－18－3 所示，放大器的输入电路相当于一个电容器（电容为 C）与一个电阻器（电阻为 R）并联的电路. 设象限板 B 系统的电容与 C 相比可以忽略不计.

试求，在以下两种情形，从 $t=0$ 到 $t=T$，电图 5－18－3 中 M 和 N 两点之间的电势差 V 随

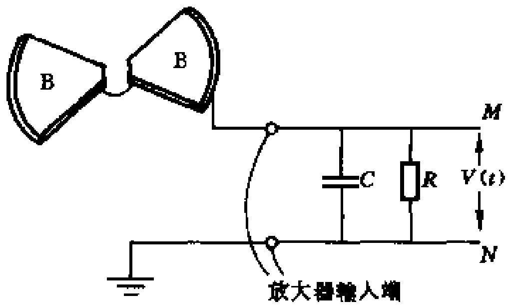
时间 t 变化的函数关系，并作 $V(t)$ 图线．

$(a)T=T_a\ll CR$

$(b)T=T_b\gg CR$

设 C 和 R 的值是固定的，即在(a)和(b)两种情形中 T 的值是不同的．

把(a)和(b)两种情形中，$V(t)$的极大值分别记为 V_a 和 V_b，试求$\frac{V_a}{V_b}$的近似表达式．



电图 5－18－3

6．设 $E_0=150\ \mathrm{V/m}$，$r_1=1\ \mathrm{cm}$，$r_2=7\ \mathrm{cm}$，$C=0.01\ \mu\mathrm{F}$，$R=20\ \mathrm{M\Omega}$．设金属圆盘 A 每秒旋转 50rev．在这种情形，试求一个周期内 $V(t)$极大值的近似值．

【分析】 本题是根据大气电性实验测量而编制的一道电学综合题．涉及的内容有，静电场的高斯定理，导体(题中的地球及象限板 B)静电平衡性质，电流密度，以及 RC 并联电路的暂态过程．全题各小问前后连贯，细审题意，应用有关知识和理论，不难逐一求解．

【解】 1．由静电场的高斯定理，地球作为导体，其表面附近竖直向下的均匀电场强度 E_0 与地球表面的面电荷密度 σ_0 之间的关系是

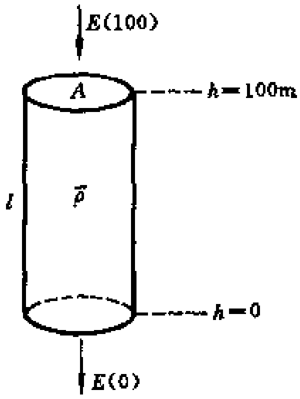
$$\sigma_0=\varepsilon_0(-E_0)=8.85\times10^{-12}\times(-150)\ \mathrm{C/m^2}=-1.3\times10^{-9}\ \mathrm{C/m^2}$$

故地球表面所带的总电量 Q_0 为

$$Q_0=4\pi R^2\sigma_0=-6.7\times10^5\ \mathrm{C}$$

2．取截面积为 A，下底面紧贴地面，上底面与地面相距 $l=100\ \mathrm{m}$ 的正圆柱面，如电图 5－18－4 所示．由静电场的高斯定理，有

$$E(0)A-E(100)A=\frac{1}{\varepsilon_0}\bar{\rho}\,l\,A$$



电图 5－18－4

故每立方米大气中的平均净电荷量(平均体电荷密度)为

$$\bar{\rho}=\frac{\varepsilon_0}{l}[E(0)-E(100)]$$

$$=4.4\times10^{-12}\ \mathrm{C/m^3}$$

3．如果空间每单位体积有 n 个带电粒子，每个粒子所带电量均为 q，且均以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动，则形成的空间电流的电流密度为

$$\boldsymbol{j}=nq\boldsymbol{v}$$

在大气中，同时存在着带正电荷的粒子与带负电荷的粒子，粒子的带电量分别为 e 与 $-e$(e 是电子电量的绝对值)．在竖直向下的电场的作用下，带正电荷的粒子向下运动，带负电荷的粒子向上运动．其中带正电荷的粒子能起到中和地球表面负电荷的作用．由此，取竖直向下的电流密度为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=n_{+}e\,v$$

把

$$v=1.5\times10^{-4}E_0$$

$$E_0=-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

代入,得

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=-\frac{\sigma}{600}$$

解出

$$\sigma=\sigma_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

其中

$$\tau=600\ \mathrm{s}$$

取 $\sigma(t)=\frac{\sigma_0}{2}$,$\sigma_0$ 是 $t=0$ 时地球表面的电荷面密度,得出地球表面电荷中和掉一半所需的时间为

$$t=\tau\ln2=416\ \mathrm{s}\approx7\ \mathrm{min}$$

4. 设 $t=0$ 时刻象限板 B 被完全屏蔽,则有下述关系.

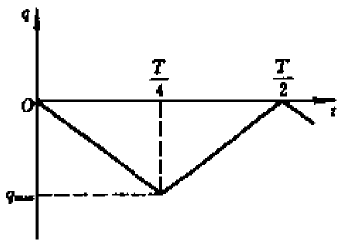
$$q=\begin{cases}-2\pi(r_2^2-r_1^2)\varepsilon_0E_0\dfrac{t}{T},0\leqslant t\leqslant\dfrac{T}{4}\\ -\pi(r_2^2-r_1^2)\varepsilon_0E_0\left(1-\dfrac{2t}{T}\right),\dfrac{T}{4}<t\leqslant\dfrac{T}{2}\end{cases}$$

以后,每两个四分之一周期内都将重复上述变化.

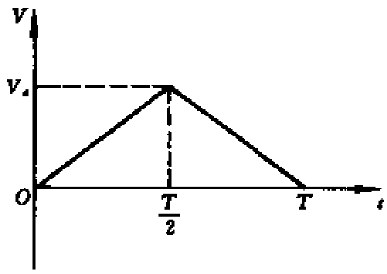
感应电荷的最大值(负值)由下式给出

$$q_{\max}=-\frac{\pi}{2}(r_2^2-r_1^2)\varepsilon_0E_0$$

$q(t)$图线如电图 5-18-5 所示.



电图 5-18-5



电图 5-18-6

5. 讨论本问时,不必求出暂态过程的解析解.解题者应该理解的是,流入放大器的电流中,有一部分为电容 C 充电,此即 $C\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$;另一部分流过电阻 R,此即$\frac{V}{R}$.依据每一个四分之一周期内,通过电阻流掉的电量究竟是远小于 CV 值,还是远大于 CV 值,来讨论两种极端情形.

(a)若 $CV \gg \left(\frac{V}{R}\right)\frac{T}{4}$，即 $T=T_a \ll CR$，则在$\frac{T}{4}$时间内，只有非常少量的电量通过电阻 R 流掉．这样，当绝缘的象限板 B 因感应而带负电时，几乎有等量的正电荷充到电容器 C 上．故在 $t=0$ 到 $t=\frac{T}{4}$期间内，V 近似于线性地增加，而在 $t=\frac{T}{4}$到 $t=\frac{T}{2}$期间内，V 近似于线性地减少．$V(t)$图线如电图 5－18－6 所示，且有

$$V_{max}=V_a \approx \frac{|q_{max}|}{C}$$

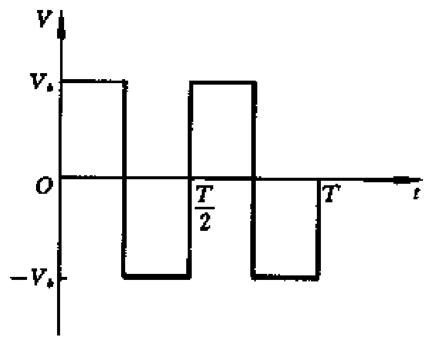
式中的 q_{max}已在第 4 问中解出．

(b)若 $CV \ll \left(\frac{V}{R}\right)\frac{T}{4}$，即 $T=T_b \gg CR$，则绝大部分电量迅速地经电阻 R 流掉．当 q 的绝对值增大时，有一正的恒定电流流过电阻 R，当 q 的绝对值减小时，有一负的等量的恒定电流流过电阻 R. 电流的大小近似等于$|q_{max}|\Big/\frac{T_b}{4}$，电阻 R 两端的电压在每一个四分之一周期内大小相同，正负交替，如电图 5－18－7 所示．此时，

$$V_{max}=V_b \approx \frac{4}{T_b}|q_{max}|R$$

联合(a)、(b)两个 V_{max}的解，得出

$$\frac{V_a}{V_b}=\frac{T_b}{4CR}$$



电图 5－18－7

6. 因

$$CR=10^{-8}\times 20\times 10^{6}\ \text{s}=0.2\ \text{s}$$

$$T=\frac{1}{50}\ \text{s}=0.02\ \text{s}$$

故

$$CR=10T \gg T$$

属于第 5 问(a)的情形．

绝缘的象限板 B 最大静电感应面积为

$$A_{max}=\frac{\pi}{2}(r_2^2-r_1^2)=7.5\times 10^{-3}\ \text{m}^2$$

又由 $E_0=150$ V/m，得出象限板上感应电荷的面密度为

$$\sigma'=\varepsilon_0 E_0=1.33\times 10^{-9}\ \text{C/m}^2$$

因此

$$|q_{max}|=\sigma' A_{max}=1.0\times 10^{-11}\ \text{C}$$

得出

$$V_{max}=\frac{|q_{max}|}{C}=1\ \text{mV}$$

【本题是 1993 年第 24 届 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)试题．】

【题 19】 如果存在磁荷(磁单极子),那么在对磁荷量 q_m 的单位作适当定义后,真空中麦克斯韦方程组的微分形式应补充修改为下述形式

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=\dfrac{\rho_m}{\mu_0}\\ \nabla\cdot\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}-\dfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{j}_m\\ \nabla\cdot\times\boldsymbol{B}=\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\mu_0\boldsymbol{j}\end{cases}$$

其中 ρ 和 $\boldsymbol{j}$ 分别是电荷密度和电流密度,ρ_m 和 $\boldsymbol{j}_m$ 分别是磁荷密度和磁流密度 .

为了寻找磁荷,物理学家设计了如图所示的实验 . 图中,由 n 匝线圈和电量计或电流表 G 构成回路 . 让可能带有磁荷 q_m 的物质碎块连续 N 次通过线圈,若 $q_m\neq0$,则在线圈中会形成可以测出的电流 .

1. 设线圈总电阻为 R,而自感 L 可略 . 试问磁荷 q_m 经线圈环行 N 周后有多少电荷 Q 通过线圈 .

2. 设线圈用超导材料制成,即 R 可略,而 L 不可略,且开始时线圈内无电流 . 试问 q_m 经线圈环行 N 周后,线圈中的电流 I 为多大 .

【分析】 磁荷经线圈环行,形成磁流,产生电场(非静电场). 同时磁荷产生磁场,随着磁荷的运动,通过线圈的磁通量发生变化,产生感应电场(即通常电磁感应的涡旋电场). 这两个因素使包括线圈和 G 的回路中产生电动势,于是形成电流,有电荷迁移 . 其间的关系就是题目给出的修正后麦氏方程组中电场 $\boldsymbol{E}$ 的旋度方程 . 另外,由于线圈不动,因磁通量变化产生的感应电动势应等于线圈中的自感电动势 .

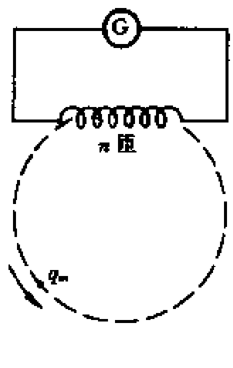
【解】 有磁流时,电场 $\boldsymbol{E}$ 的旋度方程及其积分形式为

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}-\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{j}_m$$

$$\oint_l\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=-\iint_s\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{s}-\frac{1}{\mu_0}\iint_s\boldsymbol{j}_m\cdot d\boldsymbol{s}$$

或

$$\mathscr{E}=-\frac{d\Phi_m}{dt}-\frac{1}{\mu_0}I_m \qquad (1)$$



电图 5-19-1

式中 I_m 是磁荷 q_m 运动形成的磁流强度,为

$$I_m=\iint_s\boldsymbol{j}_m\cdot d\boldsymbol{S}$$

对于每一匝线圈,其中的磁流强度 I_{m1} 为

$$I_{m1}=\frac{dq_m}{dt}$$

现在线圈有 n 匝,故通过线圈的磁流强度 I_m 为

$$I_m = n\,\frac{dq_m}{dt}$$

(1)式中的 $-\dfrac{d\Phi_m}{dt}$ 是通常的因磁通量变化产生的感应电动势，因线圈不动，只有自感电动势，故

$$-\frac{d\Phi_m}{dt} = -L\,\frac{dI}{dt}$$

式中 I 是线圈中的电流强度．(1)式中的 $\mathscr{E}$ 是包括线圈和 G 的回路中的感应电动势，由欧姆定律，为

$$\mathscr{E} = IR$$

把以上三式代入(1)式，得出

$$IR = -L\,\frac{dI}{dt} - \frac{n}{\mu_0}\,\frac{dq_m}{dt} \tag{2}$$

1．$R \neq 0, L = 0$，(2)式变为

$$IR = -\frac{n}{\mu_0}\,\frac{dq_m}{dt}$$

因

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

故

$$dQ = I\,dt = -\frac{n}{\mu_0 R}\,dq_m$$

当 q_m 环行一周后，相应的

$$dq_m = q_m$$

故相应的电量为

$$dQ = Q_1 = -\frac{n}{\mu_0 R}q_m$$

q_m 经线圈环行 N 周后，通过线圈的总电量 Q 为

$$Q = NQ_1 = \frac{nN}{\mu_0 R}q_m$$

2．$R = 0, L \neq 0$，(2)式变为

$$L\,\frac{dI}{dt} = -\frac{n}{\mu_0}\,\frac{dq_m}{dt}$$

即

$$L\,dI = -\frac{n}{\mu_0}\,dq_m$$

当 q_m 环行一周后，相应的 $dq_m = q_m$，故相应的电流增量为

$$\Delta I = -\frac{n}{\mu_0 L}q_m$$

q_m 环行 N 周后，电流增量为 $N\Delta I$，因开始时无电流，故环行 N 周后线圈中的电流为

$$I=N\Delta I=-\frac{nN}{\mu_0 L}q_m$$

因此，在第1、2问两种情形，若能由电量计或电流计G测出通过线圈的电量Q或电流I，即可证实存在着磁荷q_m.

【题20】 高能带电粒子在介质中运动速度超过电磁波在该介质中的传播速度时，便发生切连科夫辐射.

1. 设切连科夫辐射的方向与粒子运动方向之间的夹角为θ. 试导出粒子速度v与真空中光速c的比值β，介质的折射率n以及θ角三者之间的关系.

2. 一个大气压的氢气在20 ℃时的折射率为$n=1+1.35\times10^{-4}$，为使一个电子（质量为$0.5\ \mathrm{MeV}/c^2$）穿过这样的氢气时能发出切连科夫辐射，试问该电子所需的最小动能是多少兆电子伏.

3. 把充有一个大气压、20℃氢气的长管和一个能探测电磁辐射并且可以测量发射角θ（精确到$\delta\theta=10^{-3}$ rad）的系统联合起来，便构成了一个切连科夫辐射粒子的探测器. 设有一束动量为100 GeV/c的带电粒子穿过长管，通过切连科夫辐射角θ的测量，得出该粒子的静止质量m_0为1 Gev/c^2. 试求结果的相对误差$|\delta m_0|/m_0$，要求精确到0.01.

【分析】 第1、2问较简单，见解.

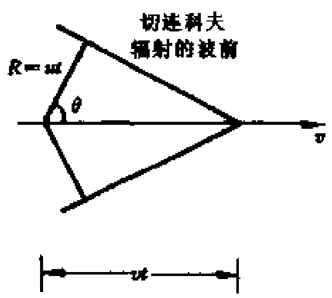
第3问已知的是粒子的m_0，p（动量），介质折射率n（见第2问），切连科夫辐射的角度θ（利用第1问的结果），以及测量θ的精度$\delta\theta$，求的是$|\delta m_0|/m_0$. 为此，应首先找出m_0与有关量的关系. 由于$\delta\theta$的误差，导致$\delta\beta$（或δv）的误差，再导致δm_0的误差，于是可解.

【解】 如图所示，设介质中电磁波的传播速度为u，粒子的运动速度为v，则

$$\cos\theta=\frac{ut}{vt}=\frac{u}{v}$$

介质折射率n定义为

$$n=\frac{c}{u},\text{或}\ u=\frac{c}{n}$$



电图 5-20-1

又

$$\beta=\frac{v}{c},\text{或}\ v=\beta c$$

故

$$\cos\theta=\frac{1}{\beta n}$$

2. 产生切连科夫辐射的条件是

$$v>u$$

即

$$\beta>\frac{1}{n}\approx1-1.35\times10^{-4}$$

或近似有

$$\beta^2>1-2\times1.35\times10^{-4}$$

因此，粒子所需的最小动能为

$$E_k = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)m_0c^2$$
$$= 59.86m_0c^2 = 29.93\ \text{MeV}$$

3. 粒子的动量 p 为

$$p = mv = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\ \beta c$$

故

$$m_0 = \frac{p\sqrt{1-\beta^2}}{c\beta}$$

式中 p 与 c 恒定，δm_0 是由 $\delta\beta$ 引起的，故

$$\delta m_0 = \frac{p}{c\beta^2}\left(\frac{-\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \sqrt{1-\beta^2}\right)\delta\beta = \frac{-p}{c\beta^2\sqrt{1-\beta^2}}\ \delta\beta$$

由第1问，有

$$\cos\theta = \frac{1}{\beta n}$$

或

$$\beta = \frac{1}{n\cos\theta}$$

式中 n 恒定，$\delta\beta$ 是由 $\delta\theta$ 引起的，故

$$\delta\beta = \left(\frac{\sin\theta}{n\cos^2\theta}\right)\delta\theta$$

代入 δm_0，得

$$\frac{|\delta m_0|}{m_0} = \frac{p}{m_0c\beta^2\sqrt{1-\beta^2}}\delta\beta$$
$$= \frac{p}{m_0c\beta^2\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\frac{\sin\theta}{n\cos^2\theta}\delta\theta = \frac{p\sin\theta}{m_0nc\beta^2\sqrt{1-\beta^2}\cos^2\theta}\delta\theta$$

有关数据为

$$p = 100\ \text{GeV}/c,\quad m_0 = 1\ \text{GeV}/c^2,\quad \frac{p}{m_0c} = 100$$

$$n = 1 + 1.35\times10^{-4},\quad m_0 = \frac{p\sqrt{1-\beta^2}}{c\beta},\quad \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{p}{m_0c} = 100$$

$$\beta = 0.99995,\quad \cos\theta = \frac{1}{\beta n} = 1 - 0.85\times10^{-4}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = 1.3\times10^{-2},\quad \delta\theta = 10^{-3}$$

代入，得

$$\frac{|\delta m_0|}{m_0} = 0.13$$

第四部分

光　学

5

第一章 几何光学

【题1】 半圆柱形玻璃的折射率 $n=\sqrt{2}$,放置在空气中．在垂直于半圆柱体轴的平面内,光线以45°角入射在半圆柱体的平表面上．试问光线从半圆柱体的什么范围内透出(以角度表示).

【分析】 如图,倾角为45°的平行光线从空气射向玻璃,经半圆柱体的平表面折射后,成为在半圆柱体内的一束平行光线．这束平行光线以不同的入射角射在圆柱形表面上．由于玻璃折射率大于空气,当入射角大于某一临界值时,将发生全反射,因此只有入射角小于该临界值的光线才能透出．求出该临界值,确定相应的位置,即可求解．

【解】 先确定折射光线能到达圆柱面的范围．如图,从左侧边缘入射的光线,其折射光线就是能到达圆柱面的边缘光线．该边缘光线与圆柱面交点的位置用 ϕ 角表示,由折射定律,有

$$\sin 45^\circ = n\sin\theta_2$$

其中 θ_2 是该边缘光线的折射角,即

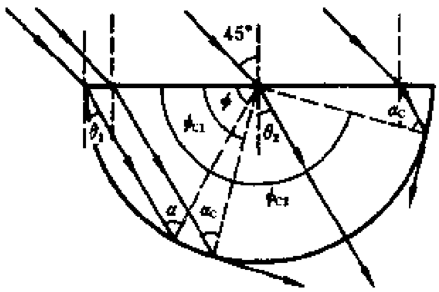
$$\sin\theta_2=\frac{1}{n}\sin 45^\circ=\frac{1}{2}$$

故

$$\theta_2=30^\circ$$

该边缘光线在圆形玻璃表面的入射角 α 为

$$\alpha=90^\circ-30^\circ=60^\circ$$



光图 1-1-1

相应的 ϕ 角为

$$\phi=180^\circ-2\alpha=60^\circ$$

所以能够到达圆形玻璃表面的折射光线其 ϕ 角的范围是

$$\phi\geqslant 60^\circ$$

上述范围内的折射光线要能从玻璃圆柱体透出,其入射角 α 必须小于全反射的临界角 α_c,即

$$\alpha<\alpha_c=\arcsin\frac{1}{n}=45^\circ$$

满足 $\alpha=\alpha_c$ 条件的 ϕ 角有两个值,当 ϕ 为锐角时,有

$$\phi_{c1}=180^\circ-(\alpha_c+60^\circ)=75^\circ$$

当 ϕ 为钝角时,有

$$\phi_{c2}=180^\circ-(60^\circ-\alpha_c)=165^\circ$$

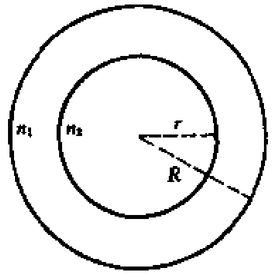
因此,只有 ϕ 角满足

$$75^\circ<\phi<165^\circ$$

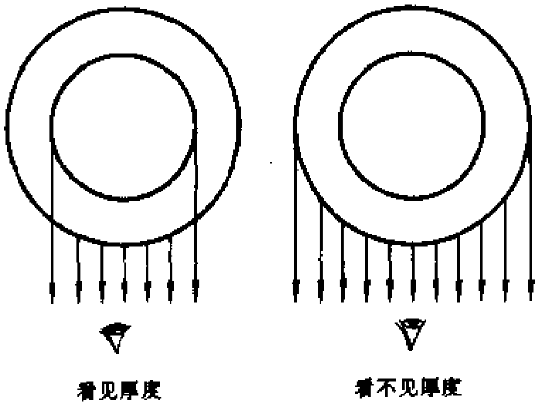
的折射光线能从玻璃圆柱体透出,射向空气．

【本题是1968年第2届IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)试题．】

【题 2】 如光图 1－2－1 所示，在内半径为 r，外半径为 R，折射率为 n_1 的玻璃管内充满了折射率为 n_2 的发光液体。试问，从远处看，当管的厚度消失时，r 和 R 应满足什么条件．



光图 1－2－1



光图 1－2－2

【分析】 液体发出的光线经玻璃两次折射后射出。从远处看，只能接收平行光线。管的厚度消失，意味着经管边缘射向远方的光线应与该处的管直径 $2R$ 垂直，即以 90°出射（见光图 1－2－2 右图）．换言之，该光线从玻璃折向空气时，其入射角应为全反射临界角．于是可以确定该光线来自何处，即确定该光线从液体射向玻璃时的折射角 α．该光线是否确实可能存在呢？由于题目未说明 n_1 和 n_2 的大小，应分别就 $n_1>n_2$ 和 $n_1<n_2$ 两种情形进行讨论，从而确定 r 和 R 应满足的条件．

【解】 如光图 1－2－3 所示，厚度消失时，管边缘 M 点必须存在切向光线 MN，管壁中必须存在相应的 PM 光线。因 MN 光线的折射角为 90°，故 PM 光线的入射角 θ_c 必为全反射临界角，即

$$\sin\theta_c=\frac{1}{n_1}$$

PM 光线是从液体中 P 点发出的，以液体射向玻璃时的折射角为 α，如光图 1－2－3，由正弦定理，有

$$\frac{r}{\sin\theta_c}=\frac{R}{\sin(\pi-\alpha)}$$

故

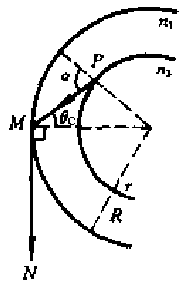
$$\sin\alpha=\frac{R}{r}\sin\theta_c=\frac{R}{n_1 r}$$

管壁中是否存在 PM 光线呢？从 P 点由液体射向玻璃的入射光线的入射角最大为 90°，相应的折射角为 α_{max}．若 $n_2<n_1$，则

$$n_2\sin 90°=n_1\sin\alpha_{max}$$

即

$$\sin\alpha_{max}=\frac{n_2}{n_1}$$



光图 1－2－3

若 $n_2>n_1$，则

$$\sin\alpha_{max}=1$$

存在光线 PM 的条件是

$$\sin\alpha\leqslant\sin\alpha_{max}$$

即要求

$$n_2<n_1\text{ 时},\frac{R}{n_1 r}\leqslant\frac{n_2}{n_1},\text{即}\quad\frac{R}{r}\leqslant n_2$$

$$n_2>n_1\text{ 时},\frac{R}{n_1 r}\leqslant 1,\text{即}\quad\frac{R}{r}\leqslant n_1$$

【题 3】 如图所示，一条光线射入空气中的球状水滴，在水滴内表面反射后又穿出水滴．入射光线与出射光线之间的夹角 δ 称为偏向角．已知水滴的折射率为 n．试问：1 光线在水滴内表面反射时是全反射还是部分反射；2. 当偏向角为最小偏向角时，入射光线的入射角 θ 应满足什么条件．

【分析】 入射光以任意入射角 θ 入射时，根据折射定律可求得光线在内表面反射时的入射角 θ'，由全反射的临界条件，可判断是否属于全反射．

偏向角 δ 与入射角 θ 有关，由 δ 取极值的条件可以得对 θ 角的要求．

【解】 1. 设入射光线的入射角为 θ，在水滴内的折射角为 θ'，由折射定律，得

$$\sin\theta=n\sin\theta'$$

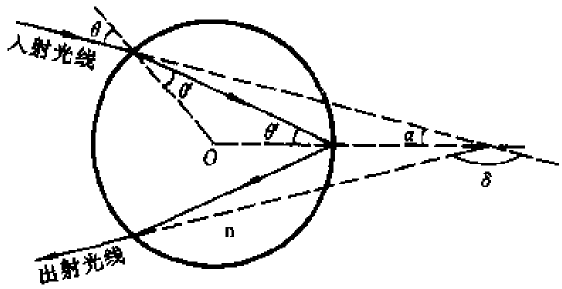
因 $n>1$，故

$$\sin\theta'=\frac{1}{n}\sin\theta<\frac{1}{n}$$

即

$$\theta'<\theta_c=\arcsin\frac{1}{n}$$

可见光线在水滴内表面反射时，不满足全反射条件，属于部分反射．



光图 1－3－1

2. 如图，由几何关系

$$\delta=\pi-2\alpha$$

$$\alpha=\theta'-(\theta-\theta')=2\theta'-\theta$$

故

$$\delta=\pi-4\theta'+2\theta$$

上式中折射角 θ' 由入射角 θ 决定，故偏向角 δ 是 θ 的函数．δ 取极小值时应满足的条件是

$$\frac{d\delta}{d\theta}=-4\frac{d\theta'}{d\theta}+2=0\tag{1}$$

把折射定律微分，得

$$\cos\theta'd\theta'=\frac{1}{n}\cos\theta d\theta$$

即

$$\frac{d\theta'}{d\theta}=\frac{\cos\theta}{n\cos\theta'}=\frac{\cos\theta}{n\sqrt{1-\sin^2\theta'}}=\frac{\cos\theta}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}}$$

代入(1)式，得

$$\frac{\cos\theta}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}}=\frac{1}{2}$$

化简后得

$$\cos^2\theta=\frac{n^2-1}{3}$$

这就是 δ 为最小偏向角时，入射角 θ 应满足的条件．

【题4】 1．设温度计由圆柱形玻璃管做成，内、外直径分别为 $2r=1$ mm 和 $2R=3$ mm，玻璃折射率 $n_1=1.5$，空气折射率 $n_2=1$．试问当从侧面远处观察时，内直径的表观尺寸是多少？

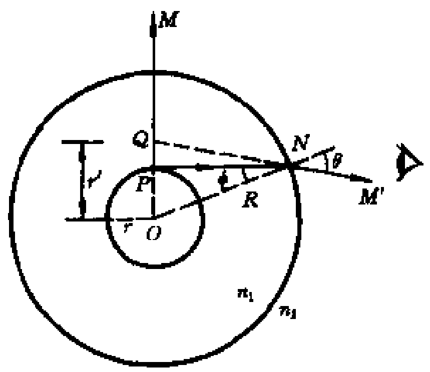
2．某温度计的外直径和玻璃的折射率都与上述温度计相同，但内直径 $2r=0.1$ mm．将此温度计垂直悬挂于盛水玻璃烧杯的中心位置，水的折射率为 $n'_1=\frac{4}{3}$．试问当从烧杯外远处观察时，温度计内、外直径的表观尺寸是多少？

【分析】 1．如光图 1－4－1 所示，在温度计的横截面内观察光线的传播．考虑从内管壁上 P 点发出的两条光线：一条光线 PM 沿半径穿出外管，不发生偏折；另一条 PN 沿内管的切向到达外管壁，经折射后得光线 NM'．两条出射光线 PM 和 NM' 相交于 Q 点，Q 点即 P 点的像点．于是内直径的表观尺寸为 $2r'=2\overline{OQ}$．由折射定律和几何关系可求得 $2r'$．

2．利用第 1 问的一般结果，并在 $r\ll R$ 的条件下取近似，本问可解．

【解】 1．如光图 1－4－1，由几何关系

$$r'=r+\overline{PQ}=r+\sqrt{R^2-r^2}\tan(\theta-\phi)$$
$$=r+\sqrt{R^2-r^2}\,\frac{\sin\theta\cos\phi-\cos\theta\sin\phi}{\cos\theta\cos\phi+\sin\theta\sin\phi}$$



光图 1－4－1

由光图 1－4－1，

$$\sin\phi=\frac{r}{R}=\frac{1}{3}$$

$$\cos\phi=(1-\sin^2\phi)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{8}}{3}$$

由折射定律，

$$\sin\theta=\frac{n_1}{n_2}\sin\phi=n_1\sin\phi=\frac{1.5}{3}=0.5,$$

$$\theta=30^\circ,\quad \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

把上述数据代入 r'式，得内直径的表观尺寸为

$$2r'=1.53\text{ mm}$$

2．当 $r\ll R$ 时，ϕ 角和 θ 角都很小，故有

$$r\approx R\phi,\quad r'\approx R\theta,\quad \theta\approx\frac{n_1}{n_2}\phi$$

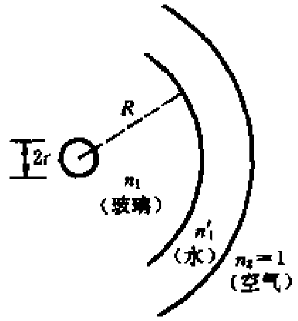
内直径的表观尺寸为

$$2r' = 2\frac{n_1}{n_2}R\phi = 2\frac{n_1}{n_2}r$$

可见，表观尺寸只与折射率 n_1 和 n_2 有关，而与外径 R 无关．

考虑盛水烧杯中的温度计．如光图 1-4-2 所示，与第 1 问不同的是，在空气与温度计之间插入了折射率为 $n'_1=\frac{4}{3}$ 的水．利用上述近似结果，温度计外直径的表观大小为

$$2R' = 2\frac{n'_1}{n_2}R = 2n'_1 R = 4\ \text{mm}$$



光图 1-4-2

温度计内直径的表观大小为

$$2r'' = 2\frac{n'_1}{n_2}r'$$

式中 $2r'$ 是经第一次折射后的表观内直径，为

$$2r' = 2\frac{n_1}{n'_1}r$$

故

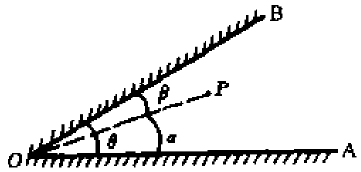
$$2r'' = 2\frac{n_1}{n_2}r$$

可见，表观内直径只与最初和最终的媒质折射率有关，而与中间插入的媒质层无关．因 $n_2=1$，故

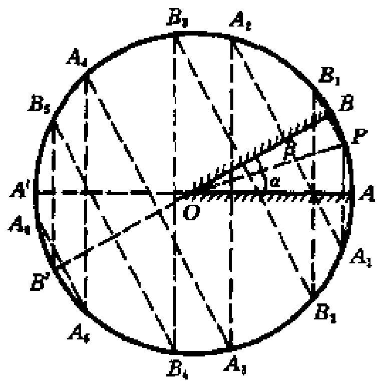
$$2r'' = 2n_1 r = 0.15\ \text{mm}$$

【题 5】 如光图 1-5-1 所示，两平面反射镜 A 和 B 斜交，交棱为 O，两镜夹角为 θ，两反射镜的反射面相对．在两反射镜之间有一物点 P，从 P 点向交棱作垂线 OP，OP 与两镜的夹角分别为 α 和 β，观察者位于 A 和 B 两镜之间．

试问：1. 一般情形下最多能观察到多少个反射像？2. 当 $\theta=\frac{\pi}{5}$，$\theta=\frac{\pi}{3}$，和 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，能观察到几个反射像？各位于何处？



光图 1-5-1



光图 1-5-2

【分析】 物点 P 经平面反射镜A和B的交替反射，将形成一系列反射像．根据平面反射镜的成像法则，物和像的连线必被镜面所平分，故所成诸像均位于以 O 为中心，以 OP 为半径的同一圆上，如光图1－5－2所示．例如，

物点 P 经反射镜A成像，得像点 A_1，

A_1 点经反射镜B成像，得像点 A_2，

A_2 点经反射镜A成像，得像点 A_3，

……

同理，

物点 P 经反射镜B成像，得像点 B_1，

B_1 点经反射镜A成像，得像点 B_2，

B_2 点经反射镜B成像，得像点 B_3，

……

上述各像点的标记法为：从物点 P 开始，凡第一次成像过程由反射镜A完成的各像均标记为 A_n，脚标为交替成像序号；凡第一次成像由反射镜B完成的各像点均标记为 B_n 脚标也是交替成像的序号．

如光图1－5－2所示，经两反射镜的交替反复成像后，A_n 和 B_n 两序列的像点最终必定落到图中的 $A'B'$ 区域（A' 和 B' 分别是反射镜 OA 和 OB 的延长线与圆的交点），该区域是两反射镜的背面，一旦像落到此区域（如光图1－5－2中的 A_6 和 B_6），便不再产生新的像点．根据 θ 角和 α 角的大小，可决定像点的总数及位置．

【解】 1. 首先考虑 A_n 序列的像点．设 $\overline{OP}=1$，由光图1－5－2，

$$\overset{\frown}{PA_1}=2\alpha$$

$$\overset{\frown}{PA_2}=\beta+\overset{\frown}{BA_2}=\beta+\overset{\frown}{BA_1}=\beta+(\beta+2\alpha)=2(\alpha+\beta)=2\theta$$

$$\begin{aligned}\overset{\frown}{PA_3}&=\alpha+\overset{\frown}{AA_3}=\alpha+\overset{\frown}{AA_2}=\alpha+(\theta+\overset{\frown}{BA_2})=\alpha+\theta+\overset{\frown}{BA_1}\\&=\alpha+\theta+(\theta+\alpha)=2\alpha+2\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overset{\frown}{PA_4}&=\beta+\overset{\frown}{BA_4}=\beta+\overset{\frown}{BA_3}=\beta+\theta+\overset{\frown}{AA_3}=\beta+\theta+\overset{\frown}{AA_2}\\&=\beta+\theta+(\theta+\overset{\frown}{BA_2})=\beta+\theta+\theta+\overset{\frown}{BA_1}=\beta+2\theta+(\theta+\alpha)=4\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overset{\frown}{PA_5}&=\alpha+\overset{\frown}{AA_5}=\alpha+\overset{\frown}{AA_4}=\alpha+\theta+\overset{\frown}{BA_4}=\alpha+\theta+\overset{\frown}{BA_3}\\&=\alpha+\theta+(3\theta+\alpha)=2\alpha+4\theta\end{aligned}$$

……

可见，奇数序号的像点 A_1、A_3、A_5、…沿顺时针方向趋近 $A'B'$ 区，相邻两奇数序号像点的角度差为 2θ．偶数序号的像点 A_2、A_4、A_6、…则沿逆时针方向趋近 $A'B'$ 区，相邻两偶数序号像点的角度差也是 2θ．一旦最后一个像点进入 $A'B'$ 区，就不再产生新像点．

设最后的像点属奇数系列（顺时针趋近 $A'B'$），序号为 $(2n+1)$，则有

$$\overset{\frown}{PAA_{2n+1}}>\overset{\frown}{PAB'}$$

其中 $\overset{\frown}{PAA_{2n+1}}$ 为最后像点 A_{2n+1} 离物点 P 的弧距，为

$$\widehat{PAA_{2n+1}}=2\alpha+2n\theta$$

而

$$\widehat{PAB'}=\pi-\beta$$

故有

$$2\alpha+2n\theta>\pi-\beta,\quad 2n\theta>\pi-\alpha-\theta$$

或

$$(2n+1)\theta>\pi-\alpha,\quad 2n+1>\frac{\pi-\alpha}{\theta}$$

可见,最后一个像点的序号$(2n+1)$(正整数)由$\left(\frac{\pi-\alpha}{\theta}\right)$的整数部分决定.

同理,若进入$A'B'$区的最后一个像点属偶数序列(逆时针趋向$A'B'$),序号为$2n$,则有

$$\widehat{PBA_{2n}}>\widehat{PBA'}$$

或

$$2n\theta>\pi-\alpha$$

故

$$2n>\frac{\pi-\alpha}{\theta}$$

可见,最后一个像点的序号$2n$(正整数)仍由$\left(\frac{\pi-\alpha}{\theta}\right)$的整数部分决定.

总之,最后一个像点无论属奇数序列还是偶数序列,其序列号均由刚好比$\left(\frac{\pi-\alpha}{\theta}\right)$略大的整数决定.由此得出,所产生的$A$系列像点总数是刚好比$\left(\frac{\pi-\alpha}{\theta}\right)$大的整数.

以上讨论了A系列的像点.同样,B系列像点的总数是刚好比$\left(\frac{\pi-\beta}{\theta}\right)$大的整数.因此,所生像点的总数$N$为

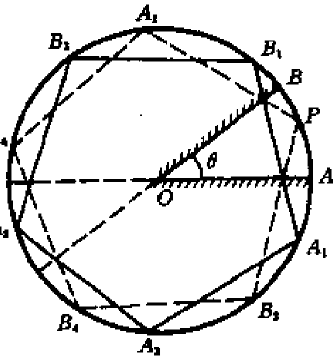
$$N=\text{刚好比}\left(\frac{\pi-\alpha}{\theta}\right)\text{大的整数}+\text{刚好比}\left(\frac{\pi-\alpha}{\theta}\right)\text{大的整数}$$

2. 在$\theta-\frac{\pi}{m}$,m为正整数的特殊情形,有

$$\frac{\pi-\alpha}{\theta}=m-\frac{\alpha}{\theta},\quad \frac{\pi-\beta}{\theta}=m-\frac{\beta}{\theta}$$

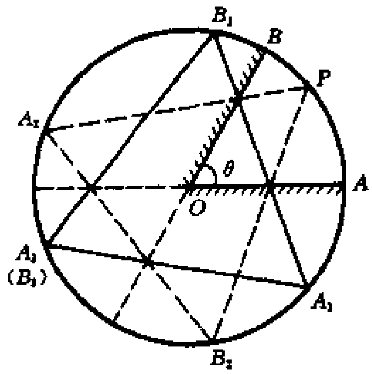
因α和β均小于θ,故$\frac{\alpha}{\theta}$和$\frac{\beta}{\theta}$均为小数,刚好比$\left(\frac{\pi-\alpha}{\theta}\right)$和$\left(\frac{\pi-\alpha}{\theta}\right)$大的整数都是$m$,应有$2m$个像点.

在$m=5,\theta=\frac{\pi}{5}$;$m=3,\theta=\frac{\pi}{3}$;$m=2,\theta=\frac{\pi}{2}$的情形,各像点的位置分别如光图1-5-3,光图1-5-4和光图1-5-5所示。在光图1-5-3中,$m=5,\theta=\frac{\pi}{5}=36°$.沿顺时针把所有奇数脚标的像点$A_1A_3A_5B_3B_1A_1$用直线连结起来,形成正五边形.在光图1-5-3中,从物点P开始逆时针把所有偶数脚标的像点$PA_2A_4B_4B_2P$用直线连结起来,形成另一正五边形.物点和所有像点都位于这两个正五边形的顶点.扣除物点本身,在图3中共有$(2m-1)=9$个像点.



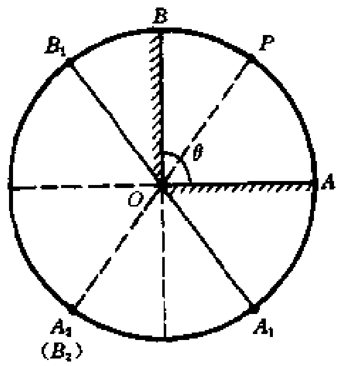
$m=5,\theta=\frac{\pi}{5}=36^\circ$

光图 1－5－3



$m=3,\theta=\frac{\pi}{3}=60^\circ$

光图 1－5－4



$m=2,\theta=\frac{\pi}{2}=90^\circ$

光图 1－5－5

在光图 1－5－4 中，$m=3,\theta=\frac{\pi}{3}=60^\circ$. 奇数脚标像点位于 $A_1A_3B_1$ 正三角形的顶点．偶数脚标像点和物点位于正三角形 PA_2B_2 的顶点．除物点 P 外，共有 $(2m-1)=5$ 个像点．

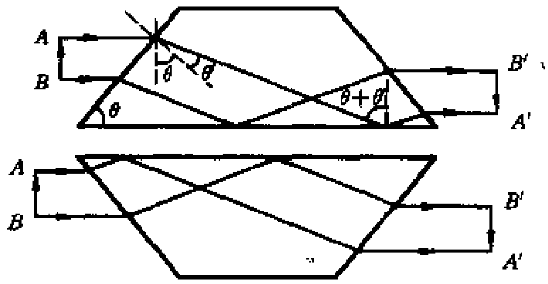
在光图 1－5－5 中，$m=2,\theta=\frac{\pi}{2}=90^\circ$. 如光图 1－5－3 和光图 1－5－4 中的正多边形退化成 A_1B_1 和 PA_2 两条直线，共有 $(2m-1)=3$ 个像点．

【题 6】 如光图 1－6－1 所示，等腰玻璃三棱镜的折射率 $n=1.50$，顶部截去，底部浸在水中，水的折射率 $n_{水}=1.33$，入射的平行光与底面平行．

试问：1. 角 θ 至少应多大才能使光线在棱镜底面上产生全反射？2. 透过上述棱镜观察远处的物，并使棱镜以入射光线为轴以角速度 ω 旋转，将观察到什么现象？



光图 1－6－1



光图 1－6－2

【分析】 由折射定律和全反射条件，可得所需的最小的 θ 角．当棱镜以 ω 绕入射光线旋转时，像将相应地旋转，利用某些特例，例如棱镜旋转 180°后像的位置，即可确定像旋转的角速度．

【解】 1. 如光图 1－6－2 所示，入射角为 $(90^\circ-\theta)$，设折射角为 θ'，由折射定律，有

$$\sin(90^\circ-\theta)=n\sin\theta'$$

即

$$\cos\theta=n\sin\theta' \tag{1}$$

折射光线要在底面上产生全反射，必须满足

$$n\sin(\theta+\theta')\geqslant n_{水}$$

即

$$\sin\theta\cos\theta'+\sin\theta'\cos\theta\geqslant\frac{n_{水}}{n}\tag{2}$$

由(1)式，得

$$\sin\theta'=\frac{\cos\theta}{n}$$

$$\cos\theta'=\sqrt{1-\sin^2\theta'}=\frac{1}{n}\sqrt{n^2-\cos^2\theta}$$

代入(2)式，得

$$\sqrt{1-\cos^2\theta}\sqrt{n^2-\cos^2\theta}\geqslant n_{水}-\cos^2\theta$$

或

$$(n^2-2n_{水}+1)\cos^2\theta\leqslant n^2-n_{水}^2$$

$$\cos^2\theta\leqslant\frac{n^2-n_{水}^2}{n^2-2n_{水}+1}$$

故

$$\theta\geqslant25.4°$$

即 θ 角至少应为 25.4°才能使光线在棱镜底面上产生全反射．

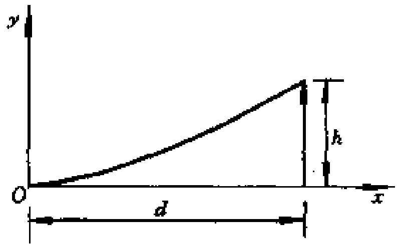
2．如光图 1－6－2 所示，当棱镜以入射光线为轴以角速度 ω 旋转时，像 $A'B'$ 相应地旋转．当棱镜转过 180°角时，像转了 360°角，因此像旋转的角速度为 2ω，是棱镜角速度的两倍．

【题 7】 已知飞机场跑道上空空气的折射率随高度 y 变化的规律为

$$n=n_0(1+\alpha y)$$

式中 $\alpha=1.5\times10^{-6}\ \mathrm{m}^{-1}$，$n_0$ 是地面处空气的折射率．某人站在跑道上观看远处的跑道，他的眼睛离地面的高度为 $h=1.7$ m．试求该人能看到的跑道的长度 d．

【分析】 如光图 1－7－1 所示，由于空气的折射率 n 随高度的增加而增加，从跑道发出的光线向上弯曲传播，如果光线来自较远处的跑道，传播到人所在位置时，其高度超过人眼，就无法看到，所以人眼能看到的跑道的长度是有限的，设为 d，如光图 1－7－1 所示．为求 d，需知光线传播的轨迹．因 $n=n(y)$，可将跑道上的空气分割成许多平行于地面的薄层，每薄层的折射率可看作常量．从跑道发出的沿跑道传播的光线经各薄层时遵循折射定律，加上几何关系，可得出光线轨迹的方程，代入有关数据即可求出 d．



光图 1－7－1

【解】 取直角坐标 Oxy 如光图 1－7－1 所示，原点 O 与人的距离即为所求的 d．将跑道上的空气分割或许多平行于地面的薄层，各层的折射率分别为 n_0(地面)，n_1，n_2，…，其中离地面高度为 y，厚为 $\mathrm{d}y$ 的任一薄层的折射率为 n，如光图 1－7－2 所示．由折射定律，从跑道发出的沿跑道传播的光线经各薄层时应遵循以下关系．

$$n_0=n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2=\cdots=n\sin\theta=\cdots$$

式中 θ 是光线在折射率为 n，高度为 y，厚度为 $\mathrm{d}y$ 的任一薄层中传播时，光线与界面法线的夹角．题设

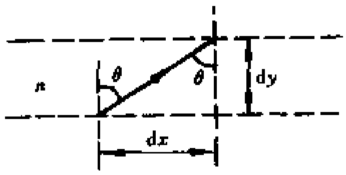
$$n = n_0(1+\alpha y)$$

由以上两式，得

$$n_0 = n\sin\theta = n_0(1+\alpha y)\sin\theta \tag{1}$$

由几何关系（见光图 1－7－2）

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cot\theta$$



光图 1－7－2

得

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{1}{1+\cot^2\theta}} = \sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}}$$

把上式代入(1)式，得

$$1+\alpha y = \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\alpha}\right)^2}$$

即
$$1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = 1+2\alpha y+\alpha^2 y^2$$

因 α 很小，y 有限，故 $\alpha^2 y^2$ 项可略，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{2\alpha y}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} = \sqrt{2\alpha}\,\mathrm{d}x$$

这就是光线轨迹所遵循的微分方程．积分，得

$$2\sqrt{y} = \sqrt{2\alpha}x + C$$

因 $x=0$ 处，$y=0$，故积分常量 $C=0$．代入，得出光线的轨迹为

$$y = \frac{\alpha}{2}x^2$$

这是抛物线．当 $y=h$ 时，有

$$d = \sqrt{\frac{2h}{\alpha}} = 1.5\times10^3\ \mathrm{m}$$

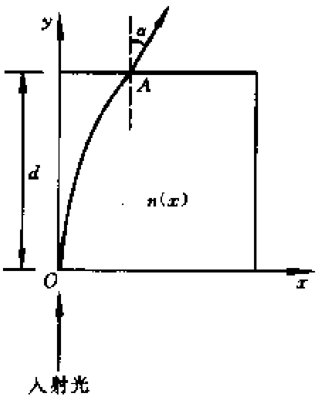
即高度为 1.7 m 的人眼所能看到的跑道最远处与他相距 1 500 m，再远就看不见了．

【题 8】 如光图 1－8－1 所示，平板玻璃的折射率 n 随 x 变化的规律为

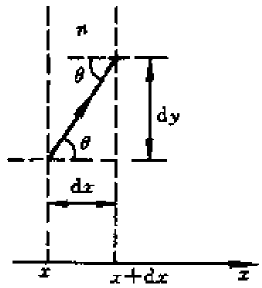
$$n(x) = \frac{n_0}{1-\frac{x}{r}}$$

式中 $n_0=1.2$，$r=13$ cm．光线从 $x=0$ 处沿 y 轴入射，经平板玻璃后从 A 点以 $\alpha=30°$ 角射出．试求：1．光线在平板玻璃中的轨迹．2．A 点处平板的折射率．3．平板的厚度 d．

【分析】 与上题类似，因 n 随 x 增大而增大，光线在平板中传播时将逐渐向右弯曲(如光图 1－8－1 所示)．可将平板分成许多与 y 轴平行的薄层，各层的折射率可视为常数．由光线在各层传播时遵循的折射定律及几何关系，可得出光线在平板中传播的轨迹．进而再得出 A 点处的折射率 n_A 以及平板的厚度 $d=y(x_A)$．



光图 1－8－1



光图 1－8－2

【解】 1. 把平板分成许多与 y 轴平行的薄层，其中在 x 处，厚为 $\mathrm{d}x$ 的任一薄层的折射率为 n，如光图 1－8－2 所示．光线在该薄层两界面上的折射角和入射角均为 θ(见光图 1－8－2)，则由折射定律和几何关系，有

$$n_0=n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2=\cdots=n\sin\theta=\cdots$$

由题设

$$n(x)=\frac{n_0}{1-\frac{x}{r}}$$

故

$$n_0=\frac{n_0\sin\theta}{1-\frac{x}{r}}$$

又，如光图 1－8－2，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$$

由以上两式，得

$$\mathrm{d}y=\frac{\left(1-\frac{x}{r}\right)\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\left(1-\frac{x}{r}\right)^2}}$$

积分，得

$$y=-r\sqrt{1-\left(1-\frac{x}{r}\right)^2}+C$$

因在 $x=0$ 处，$y=0$，故积分常量 $C=0$．代入，得出光线在平板玻璃中传播的轨迹方程为

$$y=-r\sqrt{1-\left(1-\frac{x}{r}\right)^2}$$

平方，得

$$y^2=r^2\left(1-1+\frac{2x}{r}-\frac{x^2}{r^2}\right)=2rx-x^2=-(x-r)^2+r^2$$

即

$$(x-r)^2+y^2=r^2$$

因此，光线在平板中的轨迹是以$(r,0)$为圆心，以 r 为半径的圆．

2．如光图 1－8－3 所示，把折射定律用于 A 点处的平板界面，得

$$n_A\sin(90°-\theta_A)=\sin\alpha$$

又

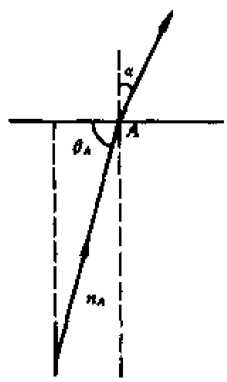
$$n_0=n_A\sin\theta_A$$

由以上两式，得

$$n_A=\frac{\sin\alpha}{\cos\theta_A}=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\theta_A}}=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_A}\right)^2}}=\frac{n_A\sin\alpha}{\sqrt{n_A^2-n_0^2}}$$

即

$$n_A=\sqrt{n_0^2+\sin^2\alpha}=1.3$$



光图 1－8－3

3．由光线的轨迹方程

$$y^2=2rx-x^2$$

平板的厚度 d 是 $x=x_A$ 处的 y 值，即

$$d=y(x_A)=\sqrt{x_A(2r-x_A)}$$

因

$$n_A=\frac{n_0}{1-\frac{x_A}{r}}$$

故

$$x_A=\frac{n_A-n_0}{n_A}r=1\ \text{cm}$$

代入，得

$$d=\sqrt{25}=5\ \text{cm}$$

【本题是 1974 年第 7 届 IPhO（国际中学生物理奥林匹克竞赛）试题．】

【题 9】 白天沙漠上空的气温随高度 y 增加而递减，下层空气温度较高，密度和折射率较小，上层空气则相反．这种折射率的不均匀分布造成了所谓海市蜃楼的光学现象．比较符合实际的折射率随高度变化的规律为

$$n^2(y)=n_0^2+n_p^2(1-e^{-\alpha y})$$

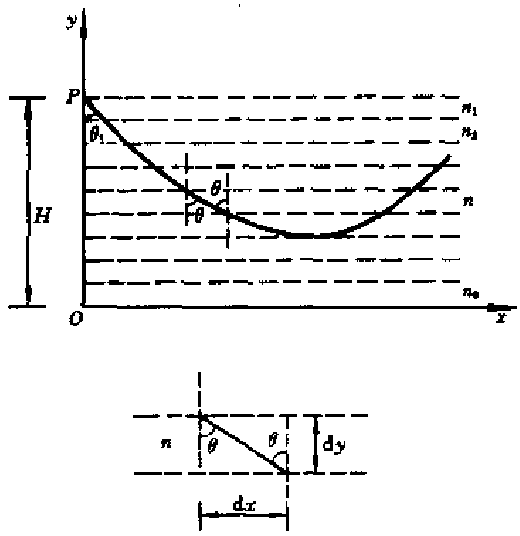
式中 n_0 是 $y=0$ 处的折射率，n_p 和 α 是两个常数，由温度分布确定。

今在 $x=0, y=H$（x 为水平轴）处有一物点，考虑该物点发出的某条与地面法线夹角为 θ_1 的光线．试求该光线在空气中传播的轨迹方程，作图，并由此解释海市蜃楼现象．

【分析】 海市蜃楼亦称蜃景，是光线经不同密度的空气层发生显著折射（有时伴有全反射）时，把远处景物显示在空中或地面的奇异幻景，常发生在海边和沙漠地区．一般有上现蜃景（正像），下现蜃景（倒像）和侧现蜃景三种，也有其他更复杂的蜃景．北宋沈括著《梦溪笔谈》中即有记载："登州海中，时有云气，如宫室、台观、城堞、人物、车马、冠盖，历历可见，谓之海市。"

与以上两题类似，把空气分成许多与地面平行的薄层，由折射定律和几何关系可以确定光线的轨迹．根据光线的轨迹即可说明蜃景的成因（本题是下现蜃景，呈倒像）．

【解】 如光图 1-9-1 所示，取 Oxy 坐标，并将空气分成许多平行地面的薄层．物点 P 所在薄层的折射率为n_1，光线与地面法线的夹角为 θ_1；以下各层依次为 $n_2, \theta_2; n_3, \theta_3; \cdots$．任一薄层为 n, θ，其厚度为 $\mathrm{d}y$．由折射定律与几何关系，有



光图 1-9-1

$$n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2 = \cdots = n\sin\theta = \cdots$$

及

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}}$$

故

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2\theta} - 1 = \frac{n^2}{n_1^2\sin^2\theta_1} - 1 \qquad (1)$$

因$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}<0$，上式开方后$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$取负值．由题设，

$$n^2(y) = n_0^2 + n_p^2(1-\mathrm{e}^{-\alpha y})$$

代入，得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\sqrt{\frac{n^2}{n_1^2\sin^2\theta_1}-1} \\ &= -\frac{1}{n_1\sin\theta_1}\left[n_0^2+n_p^2(1-\mathrm{e}^{-\alpha y})-n_1^2\sin^2\theta_1\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{n_1\sin\theta_1}\left[(n_0^2+n_p^2-n_1^2\sin^2\theta_1)-n_p^2\mathrm{e}^{-\alpha y}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{n_p\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}y}}{n_1\sin\theta_1}\left[\frac{n_0^2+n_p^2-n_1^2\sin^2\theta_1}{n_p^2\mathrm{e}^{-\alpha y}}-1\right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}\phi &= \left[\frac{n_0^2+n_p^2-n_1^2\sin^2\theta_1}{n_p^2\mathrm{e}^{-\alpha y}}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\frac{n_0^2+n_p^2-n_1^2\sin^2\theta_1}{n_p^2}\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}y} = k\,\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}y} \qquad (2)\end{aligned}$$

式中

$$k=\left[\frac{n_0^2+n_p^2-n_1^2\sin^2\theta_1}{n_p^2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

于是方程变为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{n_p\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}y}}{n_1\sin\theta_1}(\phi^2-1)^{\frac{1}{2}}$$

或

$$\mathrm{d}x=-\frac{n_1\sin\theta_1\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}y}}{n_p(\phi^2-1)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}y$$

由(2)式，有

$$\mathrm{d}\phi=\frac{k\alpha}{2}\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}y}\mathrm{d}y$$

代入 $\mathrm{d}x$ 表达式，得

$$\mathrm{d}x=-\frac{2}{k\alpha}\frac{n_1}{n_p}\sin\theta_1\frac{\mathrm{d}\phi}{(\phi^2-1)^{\frac{1}{2}}}$$

积分，得

$$x=-\frac{2}{k\alpha}\frac{n_1}{n_p}\sin\theta_1\mathrm{Arch}\,\phi+C$$

$$\mathrm{Arch}\,\phi=-\frac{k\alpha n_p}{2n_1\sin\theta_1}(x-C)$$

$$\phi=\cosh\left[-\frac{k\alpha n_p}{2n_1\sin\theta_1}(x-C)\right]=k\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}y}$$

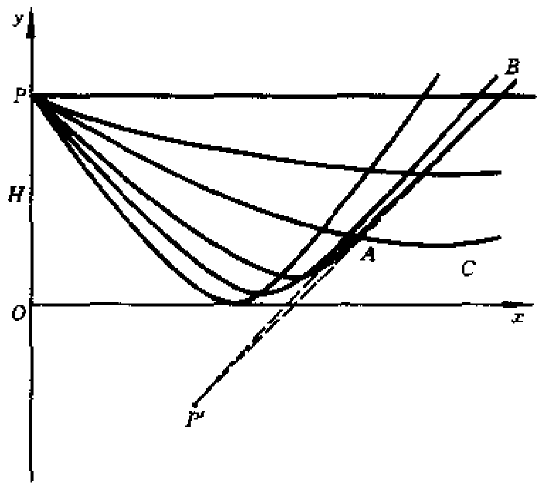
故

$$y=\frac{2}{\alpha}\ln\left\{\frac{\cosh\left[-\frac{k\alpha n_p}{2n_1\sin\theta_1}(x-C)\right]}{k}\right\}$$

这就是光线的轨迹方程．式中 k 由(3)式给出，n_1 是 $y=H$ 处的折射率，积分常量 C 由 $x=0$ 处 $y=H$ 确定，为

$$C=\frac{2n_1\sin\theta_1}{k\alpha n_p}\mathrm{Arch}(k\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}H})$$

由光线的轨迹方程，从 P 点以不同的角 θ_1 发出的各条光线的轨迹大致如光图 1－9－2 所示．由于 y 减小，n 增大，相应的角 θ 亦增大，会出现全反射．人在 A 处观看，以为光线来自 P'（P'是物点 P 的倒影），却看不到物点 P 本身．人在 B 处，既可以看到物点 P，又可以看到倒影 P'．人在 C 处，物点 P 和倒影 P' 都看不到．因此，随着人的移动，景像时有时无，不断变化，这正是海市蜃楼的特点．



光图 1－9－2

【题 10】 在湿冷的海水上空，空气折射率随高度增加而递减，由于光线向下弯曲，会出现上现蜃景．空气折射率包括一常数项和另一随高度 y 变化的项，为

$$n^2=n_0^2+n_p^2\mathrm{e}^{-\alpha y}$$

式中 n_0 为常数，在一定的温度梯度下 n_p 和 α 也是常数．设物体离海平面的高度为 y_0．试求光线的轨迹方程，并解释上现蜃景现象．

【分析】 见上题．

【解】 把空气分成许多水平薄层，考虑在 $y=y_0$ 处以 θ_1 为入射角的光线，其轨迹方程可由下列方程解出（参看上题），

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\pm\sqrt{\frac{n^2}{n_1^2\sin^2\theta_1}-1}$$

式中 n_1 是 $y=y_0$ 处的折射率，式中 $n(y)$ 为

$$n^2=n_0^2+n_p^2\mathrm{e}^{-\alpha y}$$

代入，得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=\pm\frac{1}{n_1\sin\theta_1}\left[n_p^2\mathrm{e}^{-\alpha y}-(n_1^2\sin^2\theta_1-n_0^2)\right]^{\frac{1}{2}}\\&=\pm\frac{n_p\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}y}}{n_1\sin\theta_1}\left[1-\frac{n_1^2\sin^2\theta_1-n_0^2}{n_p^2}\mathrm{e}^{\alpha y}\right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

令

$$k=\sqrt{\frac{n_1^2\sin^2\theta_1-n_0^2}{n_p^2}},\quad \phi=k\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}y}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\pm\frac{n_p\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}y}}{n_1\sin\theta_1}(1-\phi^2)^{\frac{1}{2}}$$

因 $n_1>n_0$，对于不太小的 θ_1 角，总有 $n_1^2\sin^2\theta-n_0^2>0$．把上式改写为

$$\mathrm{d}x=\pm\frac{n_1\sin\theta_1}{n_p\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}y}}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-\phi^2}}=\pm\frac{2n_1\sin\theta_1}{k\alpha n_p}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-\phi^2}}$$

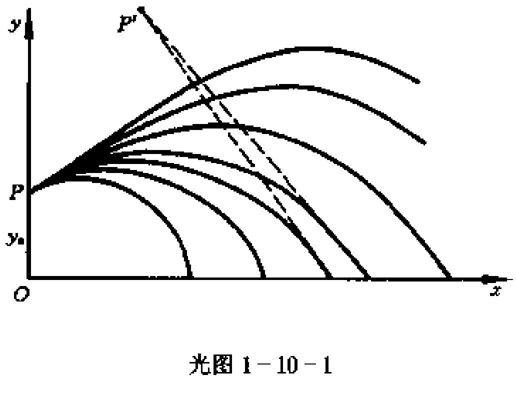
积分，得

$$x=\pm\frac{2n_1\sin\theta_1}{k\alpha n_p}\arcsin\left(k\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}y}\right)+C$$

或

$$\arcsin\left(k\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}y}\right)=\pm\frac{k\alpha n_p}{2n_1\sin\theta_1}(x-C)$$

$$y=\frac{2}{\alpha}\ln\left\{\frac{1}{k}\sin\left[\pm\frac{k\alpha n_p}{2n_1\sin\theta_1}(x-C)\right]\right\}$$



光图 1-10-1

式中积分常量 C 由 $x=0$ 处 $y=y_0$ 决定，为

$$C=\mp\frac{2n_1\sin\theta_1}{k\alpha n_p}\arcsin\left(k\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}y_0}\right)$$

从 P 点发出的不同 θ_1 的光线的轨迹如光图 1－10－1 所示，结果出现了上现蜃景．

【题 11】 已知光学纤维的折射率 n 沿径向的分布为

$$n^2=n_0^2(1-\alpha^2r^2)$$

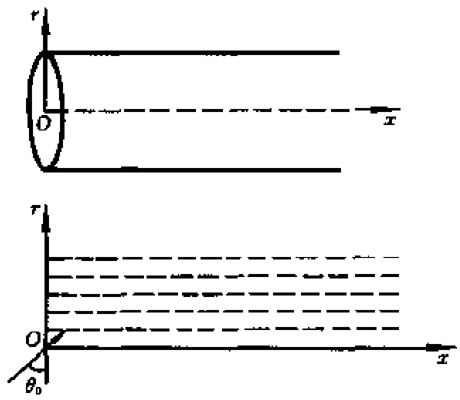
式中 n_0 为中心的折射率，α 为比 1 小得多的正数．试求光线在纤维中传播的轨迹．

【分析】 光学纤维是一种带涂层的透明细丝，其直径为几十微米至几百微米．涂层的折射率小于芯层的折射率，使进入纤维端面的光线能在涂层与芯层的界面上多次全反射而传播到另一端．纤维可以弯曲，用于传递图像．光学纤维可用于光通信、医用内窥镜等许多方面．

本题讨论的就是聚光纤维内光线的轨迹．将纤维分割或许多同轴薄圆筒，每层薄圆筒内的折射率可看作为常量．由对称性，只需分析纤维轴线的截面内的光线传输即可．由折射定律和几何关系就可以确定光线在该平面内传播的轨迹．由此可知聚光纤维对光线具有聚焦作用．

【解】 取坐标如光图 1－11－1 所示，纤维轴线为 x 轴，其横截面的径向为 r 轴．考察光线在 xr 平面内的传播，把平面分成许多平行于 x 轴的窄条，每一窄条对应薄圆筒的厚度．设光线从 $r=0$ 处以 θ_0 角入射，则由折射定律和几何关系得(参看本章题 9 的(1)式)，

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}\right)^2=\frac{n^2}{n_0^2\sin^2\theta_0}-1$$



光图 1－11－1

对 x 求导，得

$$2\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{n_0^2\sin^2\theta_0}\frac{\mathrm{d}n^2}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}$$

其中

$$n^2=n_0^2(1-\alpha^2r^2)$$

代入，得

$$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{2n_0^2\sin^2\theta_0}\frac{\mathrm{d}n^2}{\mathrm{d}r}=-\frac{\alpha^2}{\sin^2\theta_0}r$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\alpha^2}{\sin^2\theta_0}r=0$$

解出

$$r=A\sin\left(\frac{\alpha}{\sin\theta_0}x+\varphi_0\right)$$

式中的常量 A 和 φ_0 可由入射光的方向和入射点的位置确定．因．

$$x=0\text{ 处},r=0$$

故

$$A\sin\varphi_0=0$$

因

$$x=0\text{ 处},\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=A\frac{\alpha}{\sin\theta_0}\cos\varphi_0=\cot\theta_0$$

故

$$A\alpha\cos\varphi_0=\cos\theta_0$$

由以上两式,解出

$$\varphi_0=0\text{ 或 }\pi,\quad A=\frac{\cos\theta_0}{\alpha\cos\varphi_0}$$

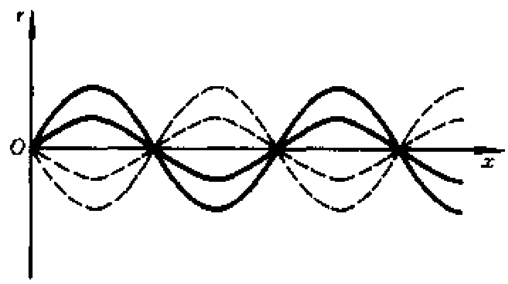
当入射光向右上入射时,$\cos\theta_0>0$,故 $\cos\varphi_0>0$,$\varphi_0=0$,$A=\frac{\cos\theta_0}{\alpha}$;当入射光向右下入射时,$\cos\theta_0<0$,故 $\cos\varphi_0<0$,$\varphi_0=\pi$,$A=-\frac{\cos\theta_0}{\alpha}$.

因此,入射光从 O 点入射时,光线的轨迹方程为

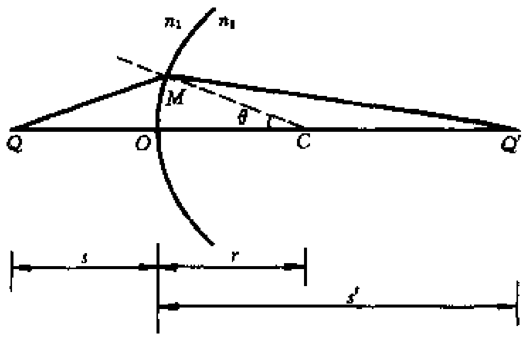
$$r=\frac{\cos\theta_0}{\alpha}\sin\left(\frac{\alpha}{\sin\theta_0}x\right),\text{向右上方入射}$$

$$r=-\frac{\cos\theta_0}{\alpha}\sin\left(\frac{\alpha}{\sin\theta_0}x+\pi\right),\text{向右下方入射}$$

可见,光线的轨迹为正弦波形,其空间周期为 $T=\frac{2\pi}{\alpha}\sin\theta_0$. 显然,从不同方向入射的光线,其 θ_0 不同,T 也不同．但对小角度入射的光线,$\theta_0\approx\frac{\pi}{2}$,$\sin\theta_0\approx1$,具有近似相同的空间周期 $T=\frac{2\pi}{\alpha}$,它们的轨迹如光图 1-11-2 所示．故小角度入射的光线在纤维内有自聚焦的作用．



光图 1-11-2



光图 1-12-1

【题 12】 如图所示,在半径为 r 的球面两侧,介质的折射率分别为 n_1 和 $n_2(n_1<n_2)$,在主光轴上有一点光源 Q,它与球面顶点 O 相距为 s,另一任意点 Q'与 O 点相距为 s'. 试问:在傍轴条件下,从 Q 点发出的光线中哪些光线能到达 Q'点,其光程是极大、极小还是稳定值? s 和 s'应满足什么条件,Q'才是 Q 的像点．

【分析】 费马原理指出,光沿着光程为极值的路径传播．由 Q 发出经球面折射到达 Q'的光线,其光程应为极值,这是确定实际存在的光线的依据．

【解】 如图,任取一条光线 QM,设经球面折射后到达 Q'. M 与球心 C 的连线与主光轴的夹角

为θ. 光线 QMQ'是否存在,取决于其光程 L 是否为极值 .L 为

$$L=n_1\overline{QM}+n_2\overline{MQ'}$$

由余弦定理,$\overline{QM}$为

$$\overline{QM}=[r^2+(s+r)^2-2r(s+r)\cos\theta]^{\frac{1}{2}}$$

在傍轴条件下

$$\cos\theta\approx 1-\frac{\theta^2}{2}$$

代人,得

$$\overline{QM}=s\left[1+\frac{r(s+r)}{s^2}\theta^2\right]^{\frac{1}{2}}\approx s\left[1+\frac{r(s+r)}{2s^2}\theta^2\right]=s+\frac{r(s+r)}{2s}\theta^2$$

同理,$\overline{MQ'}$为

$$MQ'=s'-\frac{r(s'-r)}{2s'}\theta^2$$

故光程 L 为

$$L=n_1\left[s+\frac{r(s+r)}{2s}\theta^2\right]+n_2\left[s'-\frac{r(s'-r)}{2s'}\theta^2\right]$$

根据费马原理,L 取极值的光线是真实存在的 .L 取极值的条件是,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta}&=n_1\frac{r(s+r)}{s}\theta-n_2\frac{r(s'-r)}{s'}\theta\\&=r\theta\left(n_1\frac{s+r}{s}-n_2\frac{s'-r}{s'}\right)=0\end{aligned}$$

因此,满足上述条件的光线是:$\theta=0$,即沿主光轴传播的那条光线;以及 $\theta\neq0$,但 s 和s'满足下述条件的光线

$$n_1\frac{s+r}{s}-n_2\frac{s'-r}{s'}=0$$

即

$$\frac{n_1}{s}+\frac{n_2}{s'}=\frac{n_2-n_1}{r}$$

此即球面折射成像公式(傍轴条件下). 可见,当 Q'是Q 的像点时,$\theta\neq0$ 的傍轴光线的光程满足极值条件,都能到达 Q'点 .

再看上述光线的光程是极大、极小还是稳定值 . 因

$$\frac{\mathrm{d}^2L}{\mathrm{d}\theta^2}=r\left(n_1\frac{s+r}{s}-n_2\frac{s'-r}{s'}\right)=0$$

故 L 取稳定值 . 即若 Q'是Q 的像点,则从 Q 点发出的傍轴光线经球面折射后均可到达Q'点,这些光线的光程取稳定值,这就是成像系统的等光程原理 .

若 Q'不是Q 的像点,则

$$n_1\frac{s+r}{s}-n_2\frac{s'-r}{s'}\neq0$$

只有 $\theta=0$ 的那条光线才能到达 Q'点 . 当 Q'点在像点的左方,即当

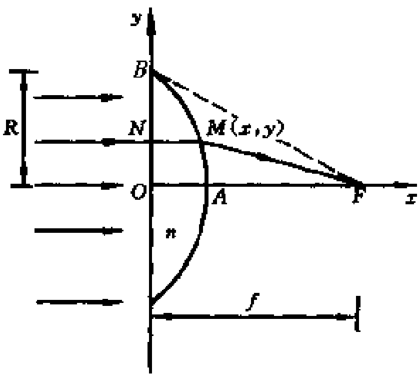
$$n_1\frac{s+r}{s}-n_2\frac{s'-r}{s'}>0$$

时，$\frac{d^2L}{d\theta^2}>0$，L 取极小值．当 Q' 点在像点的右方，即当

$$n_1\frac{s+r}{s}-n_2\frac{s'-r}{s'}<0$$

时，$\frac{d^2L}{d\theta^2}<0$，L 取极大值．

【题 13】 如光图 1－13－1 所示，一平凸透镜的折射率为 n，放置在空气中．透镜孔径的半径为 R，在透镜外主光轴上取一点 F，$\overline{OF}=f$．当平行光沿主光轴入射时，为使所有光线都会聚在 F 点，试问透镜凸面应取什么形状，透镜顶点 A 点与 O 点相距多少，对透镜的孔径 R 有何限制．



光图 1－13－1

【分析】 根据费马原理，以平行光入射并会聚于 F 点的所有光线应有相等的光程．即最边缘的光线 BF 与任一条光 NMF 的光程应相等〔M 是凸面上任一点，其坐标为 $M(x,y)$〕，由此，可以确定凸面的方程．其余问题亦可迎刃而解．

【解】 取 Oxy 坐标如光图 1－13－1 所示，由光线 BF 和 NMF 的等光程性，得

$$L=nx+\sqrt{(f-x)^2+y^2}=\sqrt{f^2+R^2}$$

把上式取平方，稍加整理，得出透镜凸面上任一点 $M(x,y)$ 的坐标 (x,y) 应满足的方程为

$$(n^2-1)\left[x-\frac{n\sqrt{f^2+R^2}-f}{n^2-1}\right]^2-y^2=\frac{(nf-\sqrt{f^2+R^2})^2}{n^2-1}$$

令

$$x_0=\frac{n\sqrt{f^2+R^2}-f}{n^2-1}$$

$$a=\frac{nf-\sqrt{f^2+R^2}}{\sqrt{n^2-1}}$$

则方程简化为

$$(n^2-1)(x-x_0)^2-y^2=a^2$$

这是双曲线的方程．由旋转对称性，透镜的凸面应是旋转双曲面．

透镜顶点 A 点的位置 x_A 应满足

$$(n^2-1)(x_A-x_0)^2=a^2$$

故

$$x_A=x_0+\frac{a}{\sqrt{n^2-1}}=\frac{\sqrt{f^2+R^2}+f}{n+1}$$

可见，对于一定的 n 和 f，x_A 由 R 决定．

因 F 点在透镜外，即

$$x_A \leqslant f$$

这是对 R 的限制条件，即

$$\frac{\sqrt{f^2+R^2}+f}{n+1} \leqslant f$$

也即要求

$$R \leqslant \sqrt{n^2-1}f$$

在极限情形，即当

$$R=\sqrt{n^2-1}f$$

时，有如下结果，

$$x_A=\frac{\sqrt{f^2+(n^2-1)f^2}+f}{n+1}=f$$

即 A 点与 F 点重合．又因在此极限情形，

$$x_0=\frac{n^2f-f}{n^2-1}=f, \quad a=0$$

故透镜凸面的双曲线方程变为

$$(n^2-1)(x-f)^2-y^2=0$$

即

$$y=\pm\sqrt{n^2-1}(x-f)$$

双曲线退化成通过 F 点的两条直线，即这时透镜的凸面变成以 F 点为顶点的圆锥面，如光图 1－13－2 所示．考虑任意一条入射光线 NM，由折射定律，有

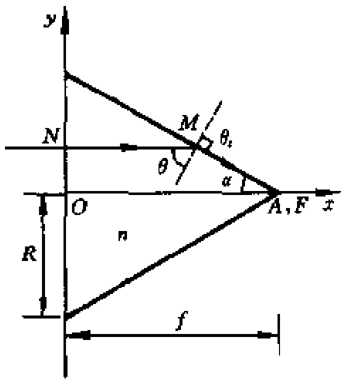
$$n\ \sin\ \theta=\sin\theta_t$$

由几何关系

$$\sin\theta=\cos\alpha=\frac{f}{\sqrt{f^2+R^2}}$$

故

$$\sin\theta_t=\frac{nf}{\sqrt{f^2+R^2}}=1, \quad \theta_t=\frac{\pi}{2}$$



光图 1－13－2

即所有入射的平行光线，折射后均沿圆锥面到达 F 点，此时的 θ 角就是全反射的临界角．

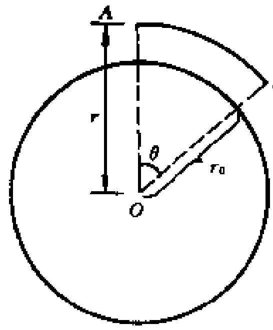
【题 14】 大气折射率 n 与空气的密度有关，假设 $(n-1)$ 与密度 ρ 成正比．由于大气密度遵从玻尔兹曼分布律，大气折射率将随高度的增加而递减，使得光线在大气中弯曲传播．为使光线能沿着地球表面的圆弧线弯曲传播，试问地表的空气密度应是实际密度的多少倍？

设大气层是等温的，温度 $T=300$ K．地表空气的实测折射率为 $n_0=1.0003$，空气的平均分

子量 $\mu=29$，地球半径 $r_0=6\,400\times10^3$ m.

【分析】 由空气密度的玻尔兹曼分布以及 $(n-1)\propto\rho$ 可以得出空气折射率 n 随高度变化的规律．为了使光线在空气中沿圆弧线传播，根据费马原理，该光线的光程应满足极值条件．由此，即可确定对地球表面空气密度的要求，以及与地球表面实际空气密度的关系．

【解】 如光图 1－14－1 所示，O 点是地球中心，r_0 是地球半径，地球表面外 A 点与 O 点的距离为 r.



光图 1－14－1

由玻尔兹曼分布律，大气密度 ρ 随 r 变化的规律为

$$\rho=\rho_0\exp\left[-\frac{\mu g}{RT}(r-r_0)\right]$$
$$=\rho_0\exp\left(-\frac{r-r_0}{C}\right)$$

式中 ρ_0 是地球表面的大气密度，C 是常量，为

$$C=\frac{RT}{\mu g}=\frac{8.31\times300}{29\times10^{-3}\times9.8}=8\,772\text{ m}$$

由题设，大气折射率 n 与密度 ρ 的关系为

$$n-1=\alpha\rho=\alpha\rho_0\exp\left(-\frac{r-r_0}{C}\right)$$

式中 α 为比例系数．上式即为

$$n=1+\alpha\rho_0\exp\left(-\frac{r-r_0}{C}\right)\tag{1}$$

如图，设光线沿半径为 r 的圆周绕地球从 A 点传播到 B 点，则其光程为

$$L=nr\theta$$

由费马原理，该光线路径实际存在的条件是，其光程为极值，即

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}r}=0$$

或

$$\theta\left(r\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r}+n\right)=0$$

或

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r}=-\frac{n}{r}\tag{2}$$

由(1)式，得

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r}=-\frac{\alpha\rho_0}{C}\exp\left(-\frac{r-r_0}{C}\right)$$

把上式与(1)式代入(2)式，得

$$-\frac{\alpha\rho_0}{C}\exp\left(-\frac{r-r_0}{C}\right)=-\frac{1}{r}\left[1+\alpha\rho_0\exp\left(-\frac{r-r_0}{C}\right)\right]$$

即

$$\alpha\rho_0\left(\frac{r}{C}-1\right)\exp\left(-\frac{r-r_0}{C}\right)=1$$

对地球表面的圆弧形光线，因 $r=r_0$，要求

$$\alpha\rho_0=\frac{1}{\frac{r_0}{C}-1}=1.37\times10^{-3}$$

设地球表面空气的实际密度为 ρ'_0，则由题设

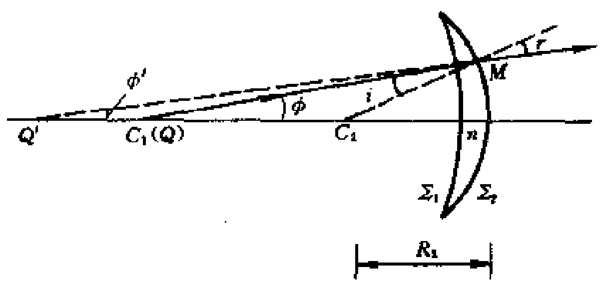
$$\alpha\rho'_0=n_{实际}-1=1.0003-1=0.0003$$

故

$$\frac{\rho_0}{\rho'_0}=\frac{1.37\times10^{-3}}{0.0003}=4.58$$

为了使光线能绕地球表面的圆弧线传播，要求地球表面的空气密度为实际密度的 4.58 倍．

【题 15】 球面透镜一般只对傍轴光线才能近似地成像．对于如图所示的弯月形透镜，当物点位于主光轴上的特殊点时，即使是非傍轴光线，经透镜折射后的出射光线均能交于同一点，即能理想成像．



光图 1－15－1

如图的弯月形透镜，透镜折射率为 n，放置在空气中，它的两个球面 Σ_1 和 Σ_2 的球心分别为 C_1 和 C_2，球面 Σ_2 的半径为 R_2．已知$\overline{C_1C_2}=\frac{R_2}{n}$，物点 Q 位于 C_1 点．试证明从 Q 点发出的任何光线（包括非傍轴光线）经透镜折射后，出射光线都能相交于同一像点 Q'．

【分析】 因物点 Q 位于 Σ_1 球面的球心 C_1，故从 Q 点发出的任何光线到达 Σ_1 时，均无偏折地进入透镜，然后在 Σ_2 球面上折射后，成为出射光线，其延长线与主光轴交于 Q' 点．只需证明 Q' 点的位置与入射光线的方向无关，则 Q' 就是 Q 的像，而且是不受傍轴条件限制的理想成像．

【解】 如图，从物点 Q 点（即从 C_1 点）发出的任意一条光线 QM（即 C_1M）与主光轴的夹角表为 φ，经球面 Σ_1 后，无偏折地进入透镜，在球面 Σ_2 上折射，入射角表为 i，折射角为 r，则由折射定律

$$n\sin i=\sin r \tag{1}$$

对 ΔC_1MC_2 应用正弦定理，有

$$\frac{\sin i}{\overline{C_1C_2}}=\frac{\sin\varphi}{R_2}$$

其中

$$\overline{C_1C_2}=\frac{R_2}{n}$$

代入,得

$$\sin\ i=\frac{R_2}{n}\cdot\frac{\sin\varphi}{R_2}$$

即

$$n\sin\ i=\sin\varphi$$

与(1)式相比较,得

$$\varphi=r$$

由图可知,出射光线与主光轴的夹角 φ' 为

$$\varphi'=\varphi-(r-i)=i$$

对 $\Delta Q'MC_2$ 应用正弦定理,有

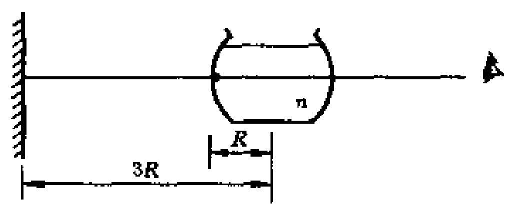
$$\frac{\overline{Q'C_2}}{\sin r}=\frac{R_2}{\sin\varphi'}$$

即

$$\overline{Q'C_2}=\frac{\sin r}{\sin\varphi'}R_2=\frac{\sin r}{\sin i}R_2=nR_2$$

可见,Q'点的位置与入射光线的方向角 φ 无关,这说明所有出射光线的延长线均交于同一点 Q',即 Q'点是 Q 点(C_1 点)的像,能理想成像,不受傍轴条件的限制.

【题 16】 如光图 1-16-1 所示,薄壁球形玻璃鱼缸的半径为 R,所盛水的折射率 $n=\frac{4}{3}$.鱼缸左侧与轴线垂直的平面反射镜离球心的距离为 $3R$.一条位于左球面顶点处的小鱼沿缸壁以速度 v 游动.从鱼缸右侧观察鱼的直接像与反射像(先经平面镜反射,再经鱼缸所成的像).试求两像之间的相对速度.



光图 1-16-1

【分析】 直接像是从物点(鱼)发出的光线向右传播,经右侧球面折射后形成的虚像.反射像是从物点发出的光线向左传播,经平面镜反射后向右传播,再经球形水缸折射后形成的实像.

利用球面折射的成像公式,可以求出直接像的位置和横向放大率 M_1.利用逐次成像法可求出反射像的位置和横向放大率 M_2.两种像的速度分别为 $v_1=M_1v$ 和 $v_2=M_2v$,相对速度为 (v_1-v_2).

【解】 1.直接像.

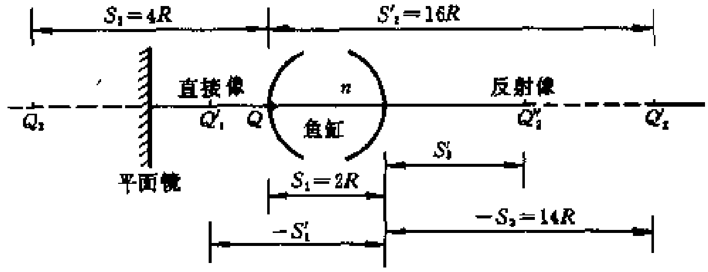
如光图 1-16-2 所示,设鱼位于 Q 点,对右侧球面应用球面折射成像的公式,有

$$\frac{n}{s_1}+\frac{1}{s_1'}=\frac{1-n}{-R}$$

式中

$$s_1=2R,n=\frac{4}{3}$$

代入,解出



光图 1－16－2

$$s'_1=\frac{2R}{n-2}=-3R$$

由横向放大率公式，得

$$M_1=-\frac{ns'_1}{s_1}=-\frac{\frac{4}{3}\times(-3R)}{2R}=2$$

所以，直接像位于右球面左方 $3R$ 处（平面镜右方 R 处），是放大的正立虚像，如光图 1－16－2 所示．直接像的运动速度为

$$v_1=M_1v=2v$$

直接像运动速度 v_1 的方向，与鱼游动速度 v 的方向相同．

2. 反射像．

如光图 1－16－2 所示，物点 Q 发出的向左传播的光线先经平面镜成虚像于 Q_2 点．Q_2 点的位置已在光图 1－16－2 中标明．

Q_2 点对球形水缸而言是虚物，它先经水缸左球面成像于 Q'_2，又经水缸右球面成像于 Q''_2，Q''_2 就是第二个反射像．

先讨论物点 Q_2 经左球面折射成像于 Q'_2. 物距为 $s_2=4R$

由成像公式

$$\frac{1}{s_2}+\frac{n}{s'_2}=\frac{n-1}{R}$$

解出

$$s'_2=\frac{4n}{4n-5}R=16R$$

即像 Q'_2 点位于左球面右侧 $16R$ 处．相应的横向放大率为

$$M'_2=-\frac{s'_2}{ns_2}=-\frac{4}{n}$$

再讨论物点 Q'_2 经右球面折射成像于 Q''_2. 物距为

$$s_3=14R$$

由成像公式

$$\frac{n}{s_3}+\frac{1}{s'_3}=\frac{1-n}{-R}$$

解出

$$s'_3=\frac{14}{15n-14}R=\frac{7}{3}R$$

即像 Q''_2 点(最后的反射像)位于右球面右侧$\frac{7}{3}R$ 处．相应的横向放大率为

$$M''_2=-\frac{ns'_3}{s_3}=-\frac{\frac{7}{3}Rn}{-14R}=\frac{n}{6}$$

总之,物点 Q 经 Q_2,Q'_2,Q''_2 三次成像,最后的反射像为 Q''_2,Q''_2 位于右球面右侧$\frac{7}{3}R$ 处．总的横向放大率为(第一次经平面镜成像的横向放大率为 1),

$$M_2=M'_2M''_2=-\frac{4}{n}\cdot\frac{n}{6}=-\frac{2}{3}$$

是缩小的倒立实像．反射像的运动速度为

$$v_2=M_2v=-\frac{2}{3}v$$

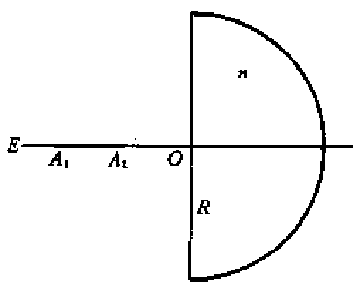
反射像运动速度 v_2 的方向,与鱼游动速度 v 的方向相反．

因此,两像的相对速度为

$$v_1-v_2=2v-\left(-\frac{2}{3}v\right)=\frac{8}{3}v$$

【本题是 1971 年第 5 届 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)试题．】

【题 17】 如光图 1-17-1 所示,有一半径 $R=0.128$ m 的玻璃半球,在其主光轴上放一长 $l=0.020$ m的条形物 A_1A_2. 在 E点附近可同时观察到 A_1A_2 的两个像,它们分别是经玻璃半球的平面和凹球面反射而得．并且,当条形物的 A_2 端与半球平面相距 0.020 m 时,两个像恰好连接在一起．试求玻璃半球的折射率 n.



光图 1-17-1

【分析】 第一个像是光线经平面反射所成,与平面反射镜结果相同．第二个像是光线经平面折射,进入玻璃半球,又经凹球面反射,再经平面折射而成,即是三次成像的结果．利用逐次成像法,分别讨论平面折射成像和球面反射成像,得出先后三个像的位置．再根据两像相连的条件即可求出玻璃的折射律 n.

【解】 第一个像是经平面反射成像．如光图 1-17-2 所示,从 E 处看来,条形物 A_1A_2 经平面反射后,成虚像于 $A'_1A'_2$,且有

$$\overline{OA'_2}=\overline{A_2O}=0.020\text{ m}$$

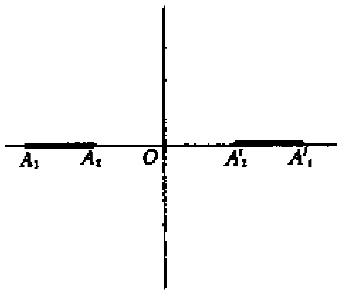
第二个像是先经平面折射成像,又经凹球面反射成像,再经平面折射成像的结果,如光图 1-17-3所示．

先看折射成像．如光图 1-17-3,主光轴上一点 A,经平面折射后成像于 B 点．设$\overline{AO}=s$,由几何关系,有

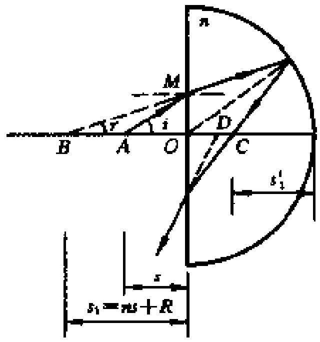
$$\overline{OM}=\overline{AO}\tan i=\overline{BO}\tan r$$

对傍轴光线，

$$\frac{\overline{BO}}{\overline{AO}}=\frac{\tan i}{\tan r}=\frac{\sin i}{\sin r}$$



光图 1－17－2



光图 1－17－3

由折射定律，

$$\sin i=n\sin r$$

故

$$\overline{BO}=\frac{\sin i}{\sin r}\overline{AO}=ns$$

B 点作为物点(虚物)，经凹面镜反射成像于 C 点．物距为

$$s_1=ns+R,$$

像距为 s'_1，由球面反射成像公式

$$\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s'_1}=-\frac{2}{r}$$

根据符号法则，式中 $r=-R$，故上式为

$$\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s'_1}=\frac{2}{R}$$

把 s_1 代入，得

$$\frac{1}{s'_1}=\frac{2}{R}-\frac{1}{s_1}=\frac{2s_1-R}{Rs_1}$$

$$=\frac{2(ns+R)-R}{R(ns+R)}=\frac{2ns+R}{R(ns+R)}$$

故

$$s'_1=\frac{R(ns+R)}{2ns+R}$$

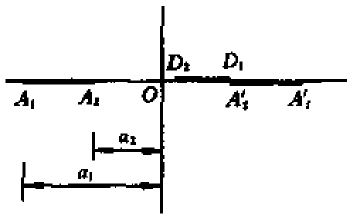
如光图 1－17－3，C 点与 O 点的距离为

$$\overline{CO}=R-s'_1=R\left[1-\frac{ns+R}{2ns+R}\right]=\frac{ns}{2ns+R}R$$

C 点作为物点，经平面折射后成像于 D 点．D 点就是从 E 处观察到的最后像．由折射定律，得

$$\overline{OD}=\frac{\overline{CO}}{n}=\frac{sR}{2ns+R}$$

从上式可知，如光图1－17－2，物点 A 离 O 越近，即 s 越小，则 $\overline{OD}$ 也越小，即物点 A 的最后像 D 离 O 越近．如光图1－17－4，当 A(光图1－17－3中的)为条形物的 A_1 端时，其像为 D_1；当 A 为条形物的 A_2 端时，其像为 D_2．光图1－17－4中的 $A'_2A'_1$ 则是物 A_1A_2 经平面反射后成的像．题设当



光图1－17－4

$$\overline{A_2O}=0.020\ \text{m}$$

时，两像恰好相连，意即 D_1 与 A'_2 重合(如光图1－17－4)，即有

$$\overline{OD_1}=\overline{OA'_2}=\overline{A_2O}$$

设条形物 A_1A_2 的两端 A_1 和 A_2 与 O 点的距离分别为 a_1 和 a_2(如光图1－17－4)，则

$$\overline{OD_1}=\frac{a_1R}{2na_1+R},\quad \overline{A_2O}=a_2$$

两像相连时，有

$$a_2=\frac{a_1R}{2na_1+R}$$

解出

$$n=\frac{a_1-a_2}{2a_1a_2}R=\frac{lR}{2a_1a_2}=1.6$$

【题18】 如图，已知杯高 $h_0=15$ cm，在杯底放一钱币，其直径 $D=1.5$ cm，杯口放一薄凸透镜，它在空气中的焦距 $f=10$ cm，杯中盛水，高度为 h，水的折射率 $n=\frac{4}{3}$．试求：在傍轴条件下，当 $h=0.8h_0$ 时，钱币的像的位置和大小．

【分析】 钱币发出的光线从水中向空气折射，然后经薄凸透镜成像．换言之，在物(钱币)与透镜之间存在两种媒质，应先将实际物距折合成空气中的有效物距，再求解．

【解】 如图所示，从水面正上方观察水中的钱币，由于折射，设钱币(物)离水面的高度为 h'，大小不变，则对透镜的有效物距为

$$s_e=h_0-h+h'$$

由折射定律，有

$$n\ \sin\theta_i=\sin\theta_t,$$

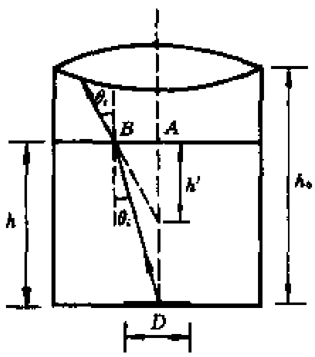
由几何关系，

$$AB=h\tan\theta_i=h'\tan\theta_t$$

故

$$\frac{h'}{h}=\frac{\tan\theta_i}{\tan\theta_t}$$

在傍轴条件下，$\tan\theta\approx\sin\theta$，故



光图1－18－1

$$\frac{h'}{h}\approx\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t}=\frac{1}{n}=\frac{3}{4},\quad h'=\frac{3}{4}h$$

有效物距为

$$s_e=h_0-h+h'=h_0-\frac{h}{4}=12\ \text{cm}$$

由成像公式

$$\frac{1}{s_e}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f}$$

故像距为

$$s'=\frac{s_e f}{s_e-f}=\frac{\left(h_0-\frac{h}{4}\right)}{h_0-\frac{h}{4}-f}=60\ \text{cm}$$

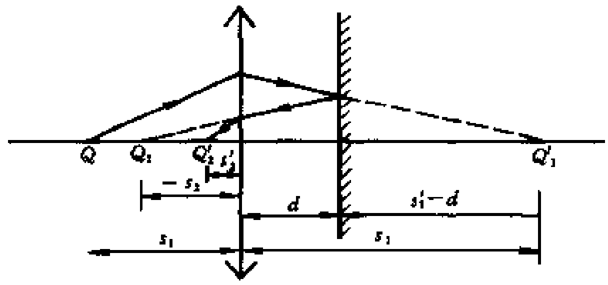
横向放大率为

$$M=-\frac{s'}{s_e}=-5$$

故像的直径为

$$D'=|M|D=7.5\ \text{cm}$$

【题 19】 如图所示，已知正的薄透镜的焦距为 $f=10$ cm，在透镜后与它相距 $d=10$ cm 处垂直主光轴放置一平面反射镜．物在透镜前方，物距 s_1 分别为 15 cm 和 40 cm. 试求：在傍轴条件下最后像的位置．



光图 1-19-1

【分析】 由于透镜后有平面镜，会多次成像．如图，物点 Q 经薄透镜第一次成像于 Q_1'. Q_1' 作为平面镜的物（虚物），经反射成实像于 Q_2. Q_2 对透镜可能是实物也可能是虚物，经透镜第二次成像于 Q_2'，Q_2'，是最后的像．用逐次成像法即可求解．

本题的特例（$s_1=f,d=0$）提供了用自准法测透镜焦距的原理．

【解】 物点 Q 经透镜第一次成像于 Q_1'，像距为

$$s_1'=\frac{s_1 f}{s_1-f}=\begin{cases}30\ \text{cm，当}\ s_1=15\ \text{cm}\\ \frac{40}{3}\ \text{cm，当}\ s_1=40\ \text{cm}\end{cases}$$

Q_1' 作为虚物，经平面镜成像于 Q_2，物距为 $(s_1'-d)$，成实像于平面镜前方（图中左方）$(s_1'-d)$

处的 Q_2 点，有

$$s'_1-d=\begin{cases}20\ \text{cm},当\ s_1=15\ \text{cm}\\ \dfrac{10}{3}\ \text{cm},当\ s_1=40\ \text{cm}\end{cases}$$

Q_2 作为物点，经透镜第二次成像于 Q'_2. 物距为

$$s_2=-[(s'_1-d)-d]=-(s'_1-2d)$$
$$=\begin{cases}-10\ \text{cm},当\ s_1=15\ \text{cm},为虚物点\\ \dfrac{20}{3}\ \text{cm},当\ s_1=40\ \text{cm},为实物点\end{cases}$$

像距为

$$s'_2=\frac{s_2f}{s_2-f}=\begin{cases}5\ \text{cm},\quad 当\ s_1=15\ \text{cm},为实像\\ -20\ \text{cm},当\ s_1=40\ \text{cm},为虚像\end{cases}$$

最后成像位置的一般公式为

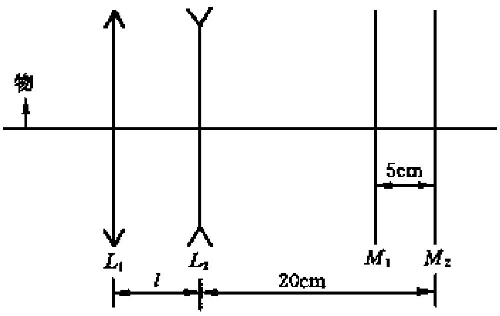
$$s'_2=\frac{s_2f}{s_2-f}=\frac{-(s'_1-2d)f}{-s'_1+2d-f}$$
$$=\frac{\left(\dfrac{s_1f}{s_1-f}-2d\right)f}{\dfrac{s_1f}{s_1-f}-2d+f}=\frac{[s_1f-2d(s_1-f)]f}{s_1f-(s_1-f)(2d-f)}$$

特例，当物距等于焦距，即当 $s_1=f$ 时，由上式得 $s'_2=f$，即最后像与物位于同一平面．若再加上特例条件 $d\approx0$，即薄透镜与平面反射镜紧靠在一起，则 $s_2=-s'_1$. 在这些条件下，横向放大率为

$$M=\frac{s'_1}{s_1}\cdot\frac{s'_2}{s_2}=\frac{s'_1}{s_1}\cdot\frac{s_1}{-s'_1}=-1$$

即最后像与物在同一平面内，且大小相同，正倒相反，这正是用自准法侧透镜焦距 f 的基本原理．

【题 20】 如图所示，L_1 和 L_2 分别为薄凸透镜和薄凹透镜，前面放一小物，移动屏幕到 L_2 后 20 cm处，即 M_1 处接收到像．现将薄凹透镜 L_2 撤去，将屏幕移前 5 cm 至 M_2 处，重新接收到像。试求薄凹透镜 L_2 的焦距 f_2.



光图 1－20－1

【分析】 当 L_1 与 L_2 共存时，物先经 L_1 成像，再经 L_2 成像于 M_1 处．撤去 L_2，仅存 L_1 时，物成像于 M_2 处，这些，利用薄透镜成像公式均易于求解．

本题的意义在于，由于单个薄凹透镜是发散透镜，不能成实像于屏幕上，从而难于直接测量其焦距．为了测量薄凹透镜的焦距，可加一个薄凸透镜，使两透镜的组合起到会聚透镜的作用，产生实像，以利测量．这是光学实验室中测量发散透镜焦距的常用

方法．

【解】 当 L_1 与 L_2 共存时，物先经 L_1 成像，有

$$\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s'_1}=\frac{1}{f_1} \tag{1}$$

再经 L_2 成像，有

$$\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s'_2}=\frac{1}{f_2} \tag{2}$$

其中

$$\begin{cases} s_2=l-s'_1 \\ s'_2=20\ \text{cm} \end{cases} \tag{3}$$

撤去 L_2，仅存 L_1，物经 L_1 成像，有

$$\frac{1}{s_1}+\frac{1}{l+20-5}=\frac{1}{f_1} \tag{4}$$

(1)式减(4)式，得

$$s'_1=l+15 \tag{5}$$

把(5)式代入(3)式，得

$$s_2=l-s'_1=l-(l+15)=-15\ \text{cm} \tag{6}$$

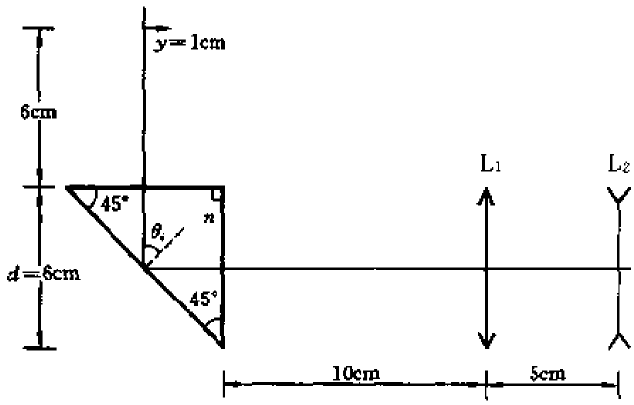
把(3)、(6)式代入(2)式，得

$$\frac{1}{f_2}=\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s'_2}=-\frac{1}{15}+\frac{1}{20}$$

故薄凹透镜 L_2 的焦距 f_2 为

$$f_2=-60\ \text{cm}$$

【题 21】 如光图 1－21－1 所示是由一个棱镜和两个薄透镜组成的光学系统．棱镜是等腰直角棱镜，腰长 $d=6$ cm，折射率 $n=1.5$．物高 $y=1$ cm，先经棱镜斜面反射，再入射到由 L_1 和 L_2 组成的薄透镜系统，两薄透镜的焦距分别为 $f_1=20$ cm 和 $f_2=-10$ cm，它们的间距为 5 cm，L_1 与直角棱镜的距离为 10 cm．



光图 1－21－1

试求最后像的位置，虚实和正倒．

【分析】 垂直入射的光进入棱镜后在斜面上反射，入射角为 $\theta_i=45°$，因全反射的临界角 $\theta_c=\arcsin\frac{1}{n}=42°<\theta_i$，故从物发出的光（傍轴光线）在棱镜斜面上全反射，在棱镜左侧形成虚像．注意到光线在直角棱镜中传播的距离等于棱镜的腰长 d，故棱镜的作用等价于厚度为 d 的平行平板．于是可把上述虚像当作物，经厚度为 d 的平板后，相继地经透镜 L_1 和 L_2 成像．

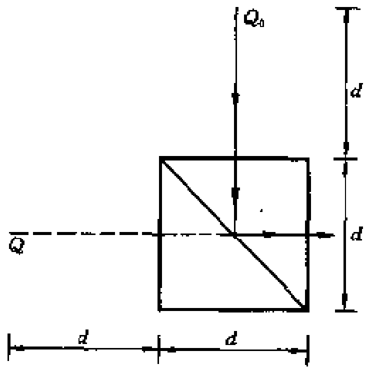
必须注意，由于平板的折射作用，透镜 L_1 的有效物距将发生变化，应先求出有效物距，才能利用逐次成像法求得最后的像．

【解】 如光图 1－21－2 所示，物点 Q_0 经棱镜斜面的全反射成像后，形成虚像点 Q．棱镜等价于厚度为 d 的平板．于是，整个问题变为，物点 Q 经平板的折射成像后，再经透镜 L_1 和 L_2 成像．

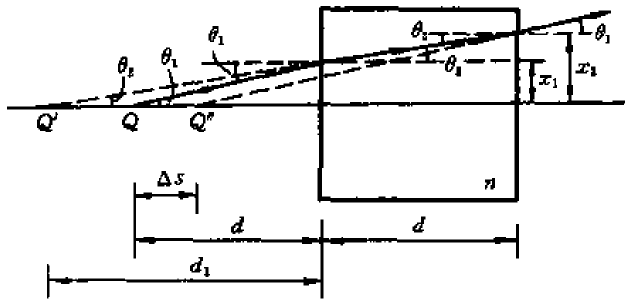
如光图 1－21－3 所示，从 Q 点发出的光线以 θ_1 角入射到平板左侧平面，折射后得虚像点 Q'，再经平板右侧平面第二次折射后，得虚像点 Q''．可见，平板的存在使物点的位置从 Q 点移到 Q''，移动的距离用 Δs 表示．如光图 1－21－3，有

$$\tan\theta_1=\frac{x_1}{d}$$

$$\tan\theta_2=\frac{x_1}{d_1}$$



光图 1－21－2



光图 1－21－3

故

$$\frac{d_1}{d}=\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}$$

对于傍轴光线，θ_1 和 θ_2 都很小，有

$$\frac{d_1}{d}\approx\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=n \tag{1}$$

又，如光图 1－21－3 所示，有几何关系

$$\tan\theta_1=\frac{x_2}{2d-\Delta s},\quad \tan\theta_2=\frac{x_2}{d+d_1}$$

故

$$\frac{d+d_1}{2d-\Delta s}=\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}\approx n$$

即

$$\frac{1+\frac{d_1}{d}}{2-\frac{\Delta s}{d}}=n$$

把(1)式代入，得

$$\frac{1+n}{2-\frac{\Delta s}{d}}=n$$

解出

$$\Delta s=d\left(1-\frac{1}{n}\right)=2\ \text{cm}$$

对 L_1 来说，有效物距为

$$s_1=10+2d-\Delta s=20\ \text{cm}$$

物距恰好等于 L_1 的焦距，即

$$s_1=f_1$$

故像距

$$s'_1=\infty$$

对 L_2 来说，物距为

$$s_2=s'_1=\infty$$

故像距

$$s'_2=f_2=-10\ \text{cm}$$

所以，最后像位于 L_2 左侧 10 cm 处，是虚像．

两次透镜成像的总横向放大率为

$$M=\frac{s'_1}{s_1}\cdot\frac{s'_2}{s_2}=\frac{s'_2}{s_1}=\frac{f_2}{f_1}=-0.5$$

故最后像的高度为

$$y'=My=-0.5\ \text{cm}$$

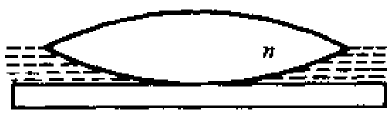
总之，最后像是位于 L_2 左侧 10 cm 处的倒立的缩小一半的虚像．

【题 22】 如图所示，双凸薄透镜两个球面的曲率半径相同，平放在平面反射镜上，其间充满了水，水的折射率为 n_W，试导出测定透镜折射率的公式，并简述测量方法．

【分析】 这是由双凸透镜（玻璃）和平凹透镜（水）组成的密接透镜组，两透镜在空气中的焦距 f_L 和 f_W 可用其折射率及曲率半径表示．密接透镜的焦距 f 则可由 f_L 和 f_W 给出。于是即可得出用焦距表示的透镜折射率 n 的公式．利用本章题 19 的自准法可以测量 f_2 和 f，从而 n 可知．

【解】设双凸玻璃透镜的折射率为 n，两球面的曲率半径分别为 $r_1=r$ 和 $r_2=-r$，则透镜在空气中的焦距为

$$f_L=\frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}=\frac{r}{2(n-1)}$$



光图 1-22-1

平凹水透镜在空气中的焦距为

$$f_W=\frac{1}{(n_W-1)\left(-\frac{1}{r}\right)}=-\frac{r}{n_W-1}$$

由以上两式，消去 r，得

$$f_W=-\frac{2(n-1)}{n_W-1}f_L \tag{1}$$

设由双凸玻璃透镜和平凹水透镜组成的密接透镜组的焦距为 f，则由密接透镜的焦距公式

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{f_L}+\frac{1}{f_W}$$

即

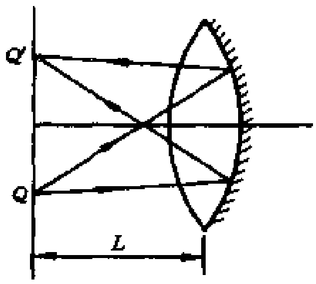
$$f_W=\frac{f_L f}{f_L-f} \tag{2}$$

由(1)、(2)式，得

$$n=1+(n_W-1)\frac{f}{2(f-f_L)}$$

利用自准法(见本章题 19)测出双凸透镜和密接透镜组在空气中的焦距 f_L 和 f，水的折射率 n_W 已知，则由上式即可得出透镜玻璃的折射率 n.

【题 23】 如图所示，两个完全相同的球面薄表壳玻璃合在一起，中空，其中一块涂银成为球面反射镜．屏上小孔 Q 为点光源，它发出的光经反射后成像于 Q'点．调整屏与表壳玻璃之间的距离 L，当 $L=20$ cm 时，像点 Q'正好落在屏上．然后在表壳玻璃间注满折射率 $n=\frac{4}{3}$ 的水．试问，当 L 为何值时，像点 Q'仍落在屏上?



光图 1-23-1

【分析】 当表壳间为空气时，第一块表壳玻璃对光传播的影响可略，只有涂银的那块起球面反射镜的作用，由球面反射成像公式可求出球面的曲率半径 r.

表壳间注满水后，成为薄凸水透镜及球面反射镜的组合，物点 Q 经历三次成像过程：第一次经水透镜成像，再经球面反射镜成像，最后经水透镜第三次成像．利用有关的成像公式及题目给定的要求，即可求解．

【解】 当表壳间为空气时，物点 Q 经球面反射成像．设表壳玻璃的曲率半径为 r，由球面反射成像公式，有

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=-\frac{2}{r}$$

当 $s=s'=L=20$ cm 时，得

$$r=-L=-20\text{ cm}$$

当表壳间注满水，成为薄凸水透镜时，其焦距为

$$f=\frac{|r|}{2(n-1)}=30\ \text{cm}$$

物点 Q 经水透镜第一次成像．设物距为 s_1，像距为 s'_1，则

$$\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s'_1}=\frac{1}{f}\tag{1}$$

再以物距 $s_2=-s'_1$ 经球面反射镜第二次成像．设像距为 s'_2，则

$$\frac{1}{s'_2}+\frac{1}{s_2}=-\frac{2}{r}$$

即

$$\frac{1}{s'_2}-\frac{1}{s'_1}=-\frac{2}{r}\tag{2}$$

最后经水透镜第三次成像，有

$$\frac{1}{s'_3}+\frac{1}{s_3}=\frac{1}{f}$$

其中物距 $s_3=-s'_2$，代入，得

$$\frac{1}{s'_3}-\frac{1}{s'_2}=\frac{1}{f}\tag{3}$$

(1)式和(2)式相加，得

$$\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s'_2}=\frac{1}{f}-\frac{2}{r}\tag{4}$$

(3)式和(4)式相加，得

$$\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s'_3}=\frac{2}{f}-\frac{2}{r}\tag{5}$$

式中 s_1 是最初的物距，s'_3 是最终的像距．

题目要求，最后的像点与物点落在同一屏幕上(如图)，即要求

$$s_1=s'_3=L\tag{6}$$

由(5)式和(6)式，得

$$\frac{2}{L}=\frac{2}{f}-\frac{2}{r}$$

式中 $f=30$ cm，$r=-20$ cm，代入，得

$$L=\frac{fr}{r-f}=12\ \text{cm}$$

当屏幕与注水表壳玻璃的间距 $L=12$ cm 时，物点与像点均在该屏幕上．

【题 24】 如光图1－24－1所示，一个双凸薄透镜的两个球面的曲率半径均为 r，透镜的折射率为 n，考察由透镜后表面反射所形成的实像．试问物放于何处，可使反射像与物位于同一平面内(不考虑多重反射)．

【分析】 从物点发出的光经透镜前表面(即左表面)反射后形成虚像，不合题意，无须考虑．

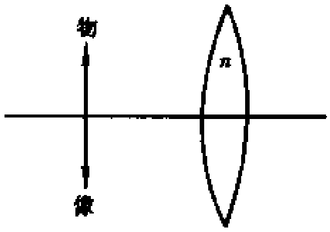
从物点发出的光经透镜前表面折射后，再经透镜后表面反射折回，又经前表面折射，共三次

成像，最后像是实像，符合题意．利用球面折射和反射的成像公式，结合物与像共面的要求，即可求解．

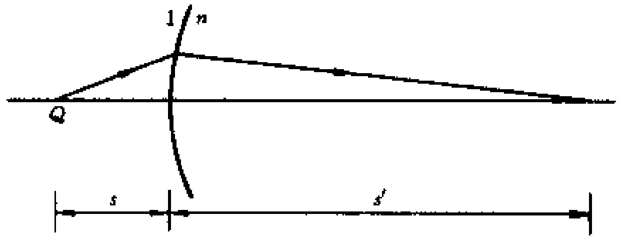
【解】 如光图 1－24－2 所示，物点 Q 发出的光线经透镜前表面折射后成像于 Q'，设物距为 s，像距为 s'，由球面折射成像公式，有

$$\frac{1}{s}+\frac{n}{s'}=\frac{n-1}{r} \tag{1}$$

这是第一次成像．



光图 1－24－1



光图 1－24－2

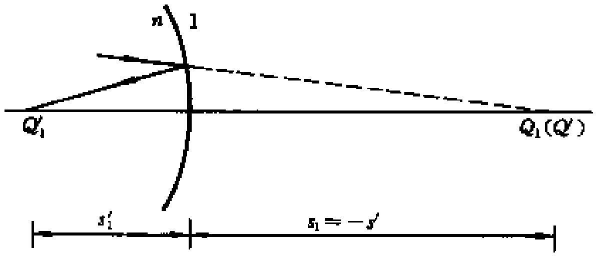
如光图 1－24－3，以 Q'（即 Q_1）为物点，以 $s_1=-s'$ 为物距，经透镜后表面反射后成像于 Q'_1，像距为 s'_1．由球面反射成像公式，得

$$\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s'_1}=\frac{2}{r}$$

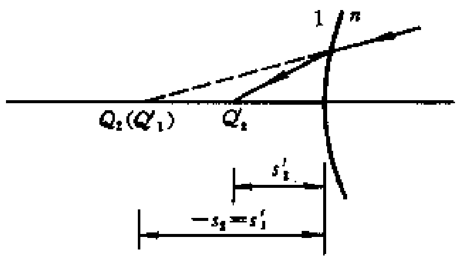
即

$$-\frac{1}{s'}+\frac{1}{s'_1}=\frac{2}{r} \tag{2}$$

这是第二次成像．



光图 1－24－3



光图 1－24－4

如光图 1－24－4，以 Q_2（即 Q'_1）为物点，以 $s_2=-s'_1$ 为物距，经前表面折射成像于 Q'_2，像距为 s'_2．由球面折射成像公式

$$\frac{n}{s_2}+\frac{1}{s'_2}=\frac{1-n}{-r}$$

即

$$-\frac{n}{s'_1}+\frac{1}{s'_2}=\frac{n-1}{r} \tag{3}$$

这是第三次成像．

由(1)式和(2)式,得

$$\frac{1}{s}+\frac{n}{s_1'}=\frac{3n-1}{r}$$

把上式与(3)式相加,得

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s_2'}=\frac{2(2n-1)}{r}$$

为使物点 Q 与像点 Q_2' 在同一平面,要求

$$s=s_2'$$

故物距应为

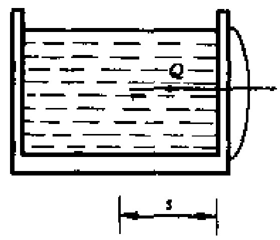
$$s=\frac{r}{2n-1}$$

观察反射像,调整物距使反射像与物在同一平面上,测出物距 s,由上式即可利用已知的透镜折射率 n 求出球面的曲率半径 r,或反过来由已知的 r 求折射率 n.

【题 25】 如图所示,在薄壁玻璃水槽的外壁贴着由同种玻璃制成的平凸薄透镜,透镜在空气中的焦距为 f_0. 已知水,玻璃,空气的折射率分别为 $n_1=\frac{4}{3}$, $n=\frac{3}{2}$, $n_2=1$. 在透镜光轴上距内壁 $s=f_0$处有一物点 Q. 试求:1. 像的位置和横向放大率 .2. 若将透镜贴在水槽内壁,结果如何?

【分析】 由槽壁与平凸透镜组成的新的平凸薄透镜处在水和空气之间 . 利用空气中薄透镜的焦距公式可求出其凸 面的曲率半径,再计算它处于水和空气之间时的物方焦距和像方焦距,然后用高斯成像公式求像距和横向放大率 . 透镜贴在水槽内壁时类似 .

【解】 空气中薄透镜的焦距公式为



光图 1－25－1

$$f_0=\frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}=\frac{1}{-(n-1)\frac{1}{r_2}}$$

$$=-\frac{r_2}{n-1}=-2r_2$$

式中 $r_1=\infty$, $n=\frac{3}{2}$. 故凸面的曲率半径为

$$r_2=-\frac{f_0}{2}$$

由槽壁与平凸透镜组成的新的平凸薄透镜,处在水($n_1=\frac{4}{3}$)与空气($n_2=1$)之间,其物方焦距为

$$f=\frac{n_1}{\frac{n-n_1}{r_1}+\frac{n_2-n}{r_2}}=\frac{n_1r_2}{n_2-n}$$

$$=\frac{\frac{4}{3}r_2}{1-\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}f_0=n_1f_0$$

设其像方焦距为 f',则

$$\frac{f'}{f}=\frac{n_2}{n_1}$$

故

$$f'=\frac{n_2}{n_1}f=f_0$$

设物距为 s，像距为 s'，由高斯公式

$$\frac{f}{s}+\frac{f'}{s'}=1$$

即

$$\frac{n_1f_0}{s}+\frac{f_0}{s'}=1$$

故像距为

$$s'=\frac{sf_0}{s-n_1f_0}=\frac{f_0}{1-n_1}=-3f_0$$

其中用到 $s=f_0$. 横向放大率为

$$M=-\frac{fs'}{f's}=3n_1=4$$

即在与槽壁相距为 $3f_0$ 处得到放大 4 倍的正立虚像．

若透镜贴在水槽的内壁，则 $r_1=\frac{f_0}{2}$，$r_2=\infty$，故

$$f=\frac{n_1}{\frac{n-n_1}{r_1}+\frac{n_2-n}{r_2}}=6n_1r_1=4f_0$$

$$f'=\frac{n_2}{n_1}f=3f_0$$

代人高斯公式，得

$$\frac{4f_0}{s}+\frac{3f_0}{s'}=1$$

故

$$s'=\frac{3sf_0}{s-4f_0}$$

当 $s=f_0$ 时，像距为

$$s'=-f_0$$

横向放大率为

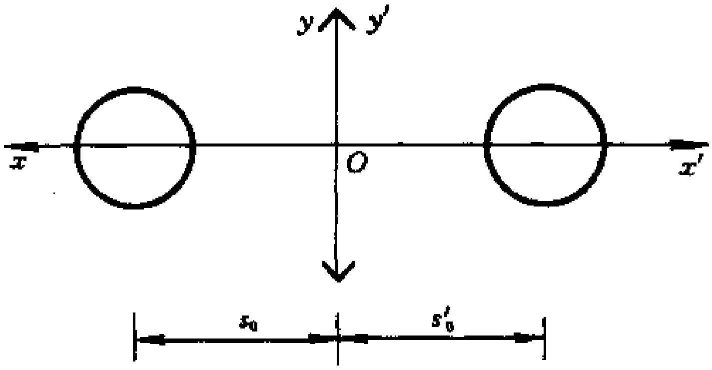
$$M=-\frac{fs'}{f's}=\frac{4}{3}$$

物与像在同一位置，像是放大 $\frac{4}{3}$ 倍的正立虚像．

【题 26】 已知一薄凸透镜的焦距为 f. 设物是一个半径为 R 的球面，球心在光轴上，试分析像

仍为一球面的可能性及条件．

【分析】 如图所示，为了方便，在物空间和像空间分别设置坐标 Oxy 和 $Ox'y'$，x 轴和 x' 轴分别



光图 1－26－1

沿光轴指向左方和右方，原点重合，y 轴与 y' 轴重合．

在图平面中，物是一个圆，圆心在 O 点左方 s_0 处，圆上任一点（即物上任一点）的 x 坐标和 y 坐标分别是该物点的物距和物高，x 和 y 应遵循圆的方程．该物点 (x,y) 经透镜成像于 (x',y') 点，x' 是像距，y' 是像高．x 和 x' 的关系由高斯公式给出，y 和 y' 的关系由横向放大率给出．为了使各个像点都在同一圆上，x' 和 y' 也应遵循圆的方程．由此即可确定物圆所成之像能否也是圆，条件是什么，进而判断形状为球面之物所成之像是否也有可能是一球面．

【解】 如图，在物空间和像空间分别取 Oxy，$Ox'y'$ 坐标．在此二维图中物为圆，设圆心的物距为 s_0，圆上任一点的坐标为 (x,y)，则物圆的方程为

$$(x-s_0)^2+y^2=R^2$$

或

$$y^2=R^2-(x-s_0)^2 \tag{1}$$

式中 x 和 y 分别是物圆上任一点的物距和物高．设该物点成像于 (x',y') 点，x' 为像距，y' 为像高．由高斯公式

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x'}=\frac{1}{f}$$

得

$$x'=\frac{fx'}{x'-f} \tag{2}$$

像的横向放大率为

$$|M|=\frac{x'}{x}=\frac{x'-f}{f}=\frac{y'}{y}$$

故像高 y' 满足

$$y'^2=\frac{(x'-f)^2}{f^2}y^2$$

把(1)式和(2)式代入上式，得

$$y'^2=\frac{(x'-f)^2}{f^2}\left[R^2-\left(\frac{fx'}{x'-f}-s_0\right)^2\right]$$

$$=\frac{(x'-f)^2R^2}{f^2}-\left[x'-\frac{s_0}{f}(x'-f)\right]^2$$

$$=\frac{1}{f^2}[R^2-(f-s_0)^2]x'^2-\frac{2}{f}[R^2+s_0(f-s_0)]x'+R^2-s_0^2 \tag{3}$$

(3)式给出了像上各点的 x' 和 y' 满足的方程．为了使方程代表一个圆，即使得像也是一个圆，必须有

$$\frac{1}{f^2}[R^2-(f-s_0)^2]=-1$$

即

$$R=\sqrt{s_0(s_0-2f)} \tag{4}$$

此时(3)式变为

$$x'^2+y'^2-2s_0x'=R^2-s_0^2$$

或

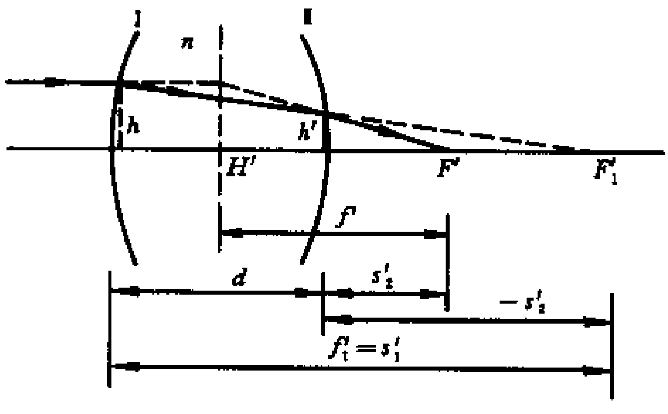
$$(x'-s_0)^2+y'^2=R^2$$

这是圆心位于 $x'=s_0$，半径为 R 的圆．

由此可见，为了使得像仍是一个圆，物圆圆心的物距 s_0 和物圆的半径 R 以及透镜的焦距 f 必须满足(4)式的关系，并要求 $s_0>2f$．这样，所得像圆与物圆处于透镜两侧对称的位置上($s_0'=s_0$)，且像圆与物圆的大小相同(半径均为 R)．把物圆绕主光轴旋转一周即得物球面，与此同时，像圆相应旋转亦得像球面．所以，物球面成像仍为球面的条件及要求，与物圆成像为圆的条件与要求相同．

【题 27】 厚度为 d 的厚透镜放置在空气中，对于波长为 λ_a 和 λ_b 的光，该透镜的折射率分别为 n_a 和 n_b．试求：1．该厚透镜主面的位置及有效焦距．2．为使波长为 λ_a 和 λ_b 的两种光有相同的有效焦距，厚透镜两个球面的曲率半径 r_1 和 r_2 应满足什么关系？

【分析】 如图所示，厚透镜是由两个共轴的球面折射系统组成的，利用球面折射成像的有关公式



光图 1-27-1

(焦距公式，高斯成像公式)以及共轴球面系统主平面与有效焦距的定义即可求解．一般共轴球面系统的有关公式也可仿此得出．

【解】 球面折射成像的普遍公式为

焦距公式：$f'=\dfrac{n_2r}{n_2-n_1}$，$f=\dfrac{n_1r}{n_2n_1}$

高斯成像公式：$\dfrac{f}{s}+\dfrac{f'}{s'}=1$

如图，对于球面 I，$n_1=1$，$n_2=n$，$r=r_1$，故

$$f'_1=\frac{nr_1}{n-1},\quad f_1=\frac{r_1}{n-1}$$

对于球面Ⅱ，$n_1=n$，$n_2=1$，$r=r_2$，故

$$f'_2=\frac{r_2}{1-n},\quad f_2=\frac{nr_2}{1-n}$$

如图，考虑平行于主光轴并与主光轴相距为 h 的入射光线．它先经球面Ⅰ折射成像，因物距 $s_1=\infty$，故像距 s'_1 等于像方焦距 f'_1，$s'_1=f'_1$，像点即像方焦点 F'_1．再经球面Ⅱ折射成像，F'_1 为物点，物距为 s_2，像距为 s'_2．由高斯公式，得

$$\frac{f_2}{s_2}+\frac{f'_2}{s'_2}=1$$

像距为

$$s'_2=\frac{s_2f'_2}{s_2-f_2}$$

由图可知，

$$-s_2=f'_1-d$$

代入上式，得

$$s'_2=\frac{(d-f'_1)f'_2}{d-f'_1-f_2}$$

如图，有几何关系

$$\frac{h'}{h}=\frac{s'_2}{f'}=\frac{f'_1-d}{f'_1}$$

式中 f' 是像方主点 H' 到像方焦点 F' 的距离，即像方有效焦距．由上式，得

$$f'=\frac{f'_1s'_2}{f'_1-d}$$

把 s'_2 的表达式代入，得

$$f'=\frac{f'_1}{f'_1-d}\cdot\frac{(d-f'_1)f'_2}{(d-f'_1-f_2)}$$

$$=-\frac{f'_1f'_2}{d-f'_1-f_2}$$

$$=-\frac{f'_1f'_2}{\Delta}$$

式中

$$\Delta=d-f'_1-f_2$$

是折射球面Ⅰ的像方焦点到折射球面Ⅱ的物方焦点之间的距离，称为光学间隔．

由图可知，从折射球面Ⅱ到像方主点 H' 的距离为

$$x'_H=s'_2-f'=\frac{(d-f'_1)f_2}{\Delta}+\frac{f'_1f'_2}{\Delta}=\frac{d}{\Delta}f'_2$$

同理，物方有效焦距 f，以及折射球面Ⅰ到物方主点的距离 x_H 分别为

$$f=-\frac{f_1f_2}{\Delta}$$

$$x_H=\frac{d}{\Delta}f_1$$

把 f'_1、f_2 和 f'_2 的表达式代入 f' 的公式，得出像方有效焦距为

$$f'=\frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}+\frac{n-1}{n}\frac{d}{r_1r_2}\right)}$$

容易证明，当厚透镜两侧均为空气时，像方有效焦距与物方有效焦距相等，即

$$f'=f$$

统称有效焦距．

当以 λ_a 和 λ_b 两种波长的光分别入射时，若有效焦距相同，即

$$f'_a=f'_b$$

则

$$(n_a-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}+\frac{n_a-1}{n_a}\frac{d}{r_1r_2}\right)=(n_b-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}+\frac{n_b-1}{n_b}\frac{d}{r_1r_2}\right)$$

或

$$(n_a-1)\left(r_2-r_1+\frac{n_a-1}{n_a}d\right)=(n_b-1)\left(r_2-r_1+\frac{n_b-1}{n_b}d\right)$$

$$(r_2-r_1)(n_a-n_b)=d\left[\frac{(n_b-1)^2}{n_b}-\frac{(n_a-1)^2}{n_a}\right]$$

$$=\frac{d}{n_an_b}[n_an_b(n_b-n_a)-(n_b-n_a)]=\frac{d(n_a-n_b)}{n_an_b}(1-n_an_b)$$

故

$$r_1-r_2=d\left(1-\frac{1}{n_an_b}\right)$$

这就是为了使 $f'_a=f'_b$，对厚透镜两球曲率半径 r_1 和 r_2 的要求．当 d,n_a,n_b 给定时，(r_1-r_2) 为确定的正值．因此，厚透镜不能是平凸、平凹或双凹透镜，否则有一个 $r=\infty$ 或 $(r_1-r_2)<0$，与上式不符．

【题 28】 玻璃球的半径为 $r=2.00$ cm，折射率为 $n=1.50$，放置在空气中．1．试求焦距以及主点和焦点的位置．2．在球面上有一小物，从另一侧观察，试求像的位置和横向放大率，并作图验证之．

【分析】 玻璃球是由两个共轴的球面折射系统构成的厚透镜，利用上题的公式即可求解．

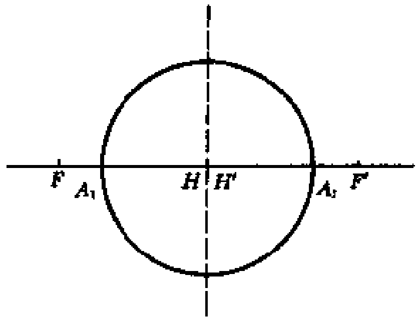
【解】 两个球面作为单独的球面折射系统，其焦距分别为

$$f_1=\frac{r}{n-1}=4.00\ \text{cm}$$

$$f'_1=\frac{nr}{n-1}=6.00\ \text{cm}$$

$$f_2=\frac{nr}{1-n}=6.00\ \text{cm}$$

$$f'_2=\frac{r}{1-n}=4.00\ \text{cm}$$



光图 1－28－1

两球面之间的光学间隔为

$$\Delta=d-f'_1-f_2=4-6-6=-8.00\ \text{cm}$$

由上题，玻璃球的有效焦距为

$$f=-\frac{f_1f_2}{\Delta}=3.00\ \text{cm}$$

$$f'=-\frac{f'_1f'_2}{\Delta}=3.00\ \text{cm}$$

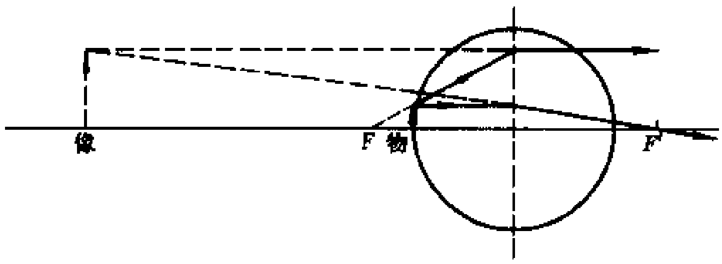
物方主点 H 与左侧球面顶点 A_1 的距离为

$$x_H=\frac{\mathrm{d}}{\Delta}f_1=\frac{4}{-8}\times 4=-2.00\ \text{cm}$$

即 H 在 A_1 右方 2.00 cm 处，故 H 位于球心．像方主点 H' 与右侧球面顶点 A_2 的距离为

$$x'_H=\frac{d}{\Delta}f'_2=-2.00\ \text{cm}$$

即 H' 在 A_2 左方 2.00 cm 处，故 H' 也位于球心．两主点重合于球心．物方焦点 F 位于球心左方 3.00 cm 处，像方焦点 F' 位于球心右方 3.00 cm 处．如光图 1－28－1 所示．



光图 1－28－2

对于在 A_1 点处的小物，物距 $s=2.00$ cm．由高斯公式

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f}$$

故像距为

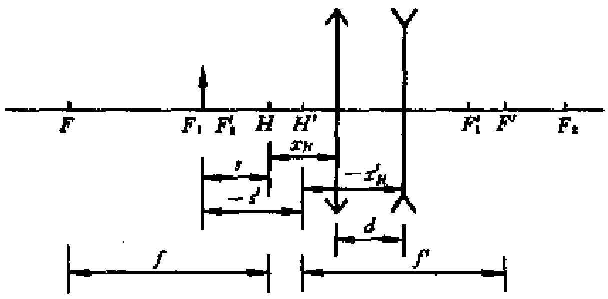
$$s'=\frac{sf}{s-f}=-6.00\ \text{cm}$$

横向放大率为

$$M=-\frac{s'}{s}=3.00$$

这是放大正立虚像，作图如光图 1－28－2 所示．

【题 29】 如图所示，两薄透镜共轴，一为会聚透镜，其焦距为 $f_1=10$ cm，另一为发散透镜，其焦距为 $f_2=-15$ cm，发散透镜位于会聚透镜后 5 cm 处．一物放置在会聚透镜前方 10 cm 处．



光图 1－29－1

试求：透镜组的焦点和主点位置，并求最后像的位置、大小、虚实和正倒．

【分析】 可用逐次成像法求得最后像，也可先求出透镜组的有效焦距和主点位置，再用高斯公式求得最后的像．

【解】 由题设

$$f_1=f'_1=10\ \text{cm},\quad f_2=f'_2=-15\ \text{cm},\quad d=5\ \text{cm}$$

有效焦距为

$$f=f'=-\frac{f_1f_2}{\Delta}=-\frac{f_1f_2}{d-f_1-f_2}=15\ \text{cm}$$

主点位置为

$$x_H=\frac{d}{\Delta}f_1=\frac{5}{10}\times 10=5\ \text{cm}$$

$$x'_H=\frac{d}{\Delta}f_2=\frac{5}{10}\times(-15)=-7.5\ \text{cm}$$

主点 H 位于会聚透镜前方 5 cm 处，H' 位于发散透镜前方 7.5 cm 处．故透镜组的焦点 F 位于会聚透镜前方 $15+5=20$ cm 处，F' 位于发散透镜后方 7.5 cm 处．如图所示．

由高斯公式

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f}$$

即

$$s'=\frac{sf}{s-f}$$

式中物距 $s=5$ cm，故

$$s'=\frac{5\times 15}{5-15}=-7.5\ \text{cm}$$

即像位于 H' 左方 7.5 cm 处，恰好与原物重合．横向放大率为

$$M=-\frac{s'}{s}=\frac{7.5}{5}=1.5$$

最后的像是位于原物位置的正立放大 1.5 倍的虚像．

【题 30】 为了说明照相机远摄镜(长焦距镜头)的工作原理,讨论以下问题．

1. 在物距比焦距大得多的条件下,试证明对于一定距离外的物体,相机镜头的横向放大率与焦距成正比．

2. 远摄镜由前方的会聚透镜和后方的发散透镜组成,其主要作用除成像外,还可在不改变机身大小的情况下增加焦距,以增加横向放大率．试用作图法解释增加焦距的原理．

3. 已知两透镜间距 $d=60$ mm, $f_1=76$ mm, $f_2=-25$ mm. 试求有效焦距．

【分析与解】 1. 对于一般的共轴球面系统,由高斯公式,像距为

$$s'=\frac{sf}{s-f}$$

若物距远大于焦距,有

$$s\gg f$$

故

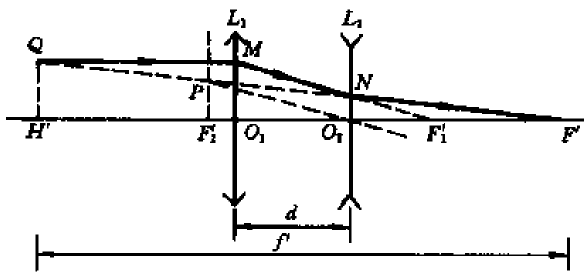
$$s'\approx f$$

横向放大率为

$$|M|=\frac{s'}{s}\approx\frac{f}{s}$$

用照相机拍摄远方($s\gg f$)景物时,由上式,对于同样远处的景物,镜头焦距 f 越长,横向放大率越大,底片上影像的尺寸也越大．因此,为了使远方的景物能在底片上留下足够大的像,必须设法加大镜头的焦距,这就是远摄镜要采用长焦距镜头的原因．

2. 如图,会聚透镜 L_1 和发散透镜 L_2 的像方焦点分别是 F'_1 和 F'_2.



光图 1-30-1

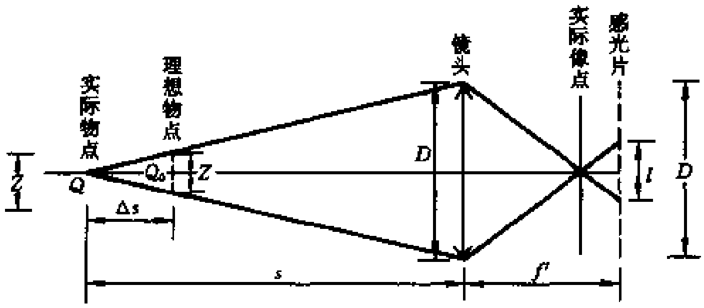
光线 QM 平行于主光轴入射,经 L_1 后沿 MF'_1 射出,MF'_1 与 L_2 相交于 N,MN 经 L_2 后射向 F',F' 即是透镜组的像方焦点．

为了确定 F' 的位置,通过发散透镜 L_2 的光心 O_2 作平行于 MN 的光线．该光线与 L_2 的像方焦面(通过 F'_2 并与主光轴垂直)相交于 P 点,联接 PN,其延长线与主光轴交于 F' 点,则 F' 点就是透镜组的像方焦点．PN 延长线的另一端与平行主光轴入射的 QM 光线相交于 Q 点,过 Q 点作主光轴的垂线与主光轴相交于 H' 点,则 H' 点就是透镜组的像方主点．图中 $f'=H'F'$ 就是像方焦距．远摄镜是在不改变焦平面的条件下,将像方主面向前方(左方)推移,以达到增加透镜组焦距的目的．

3. 透镜组的有效焦距为

$$f=-\frac{f_1f_1}{\Delta}=-\frac{f_1f_2}{d-f_1-f_2}=\frac{76\times25}{60-76+25}=211\ \text{mm}$$

【题 31】 已知照相机镜头的焦距为 f'，通光孔径为 D，物离照相机镜头的距离为 s，物点在感光片上形成的弥散圆直径不得大于 l，试导出"景深"Δs 的公式，并分析"景深"与各量的关系．



光图 1－31－1

【分析】 如图所示，实际使用照相机时，物距 s 比镜头焦距要大得多，故像距 s' 近似等于焦距 f'，并由固定的机身长度决定．若要使物点在感光片上形成精确的像点，则物点必须位于精确的 Q_0 点．若实际的物点 Q 偏离 Q_0 点，偏离量为 Δs，则在感光片上将形成一个弥散圆，其直径为 l．显然，偏离量 Δs 越大，弥散圆直径 l 也越大．为使感光片上形成的"像"有足够的清晰度，弥散圆的直径就存在一个上限，相应地，物距的偏离量 Δs 也有一个上限，这个偏离量的上限称为"景深"，意即物距偏离量小于"景深"的各物点均可获得满意的清晰度．

只要理解了"景深"的含意，利用几何关系和成像规律，不难导出"景深"与镜头的相对孔径 $\frac{D}{f'}$，物距 s，焦距 f' 以及容许的弥散圆直径 l 等各量的关系．

【解】 如图，设物点 Q_0 能在感光片上精确成像．实际物点位于 Q，偏离量为 Δs，在感光片上形成一直径为 l 的弥散圆．由几何关系，得

$$\frac{D}{z}=\frac{s}{\Delta s}$$

镜头的横向放大率为

$$|M|=\frac{f'}{s}$$

考虑到 l 与 z 具有共轭关系，故有

$$|M|=\frac{l}{z}$$

由以上三式，得

$$\Delta s=\frac{s}{D}z=\frac{ls^2}{Df'}=\frac{ls^2}{\left(\frac{D}{f'}\right)f'}$$

上述结果表明：

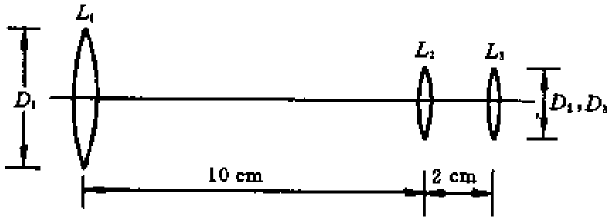
1．对同一架照相机和同样的物距，相对孔径 $\frac{D}{f}$ 越大，（即光圈系数 $F=\frac{f'}{D}$ 越小），"景深"就

越小．为避免杂乱背景的干扰，有时选用大光圈（小 F 值）来压缩“景深”，以达到突出主题的效果．反之，若选用小光圈（大 F 值），可扩大“景深”，使前后景物都有比较满意的清晰度．

2. 对同一架照相机和同一相对孔径，物距 s 越大，“景深”也越大．即近物有较小的“景深”，远物有较大的“景深”．

3. 对相同物距和同一相对孔径（相同 F 值），镜头的焦距 f' 越短，“景深”就越大．一些普及型照相机具有较短的焦距，“景深”很大，以致无需调节距离也能获得比较满意的清晰度．

【题 32】 如光图 1－32－1 所示为一简单望远镜．物镜 L_1 的焦距 $f_1=10$ cm，孔径 $D_1=4$ cm；在物镜 L_1 的像方焦点处放置凸透镜 L_2，其焦距 $f_2=2$ cm，孔径 $D_2=1.2$ cm；目镜 L_3 放置在 L_2 后2 cm处，其焦距 $f_3=2$ cm，孔径 $D_3=1.2$ cm.

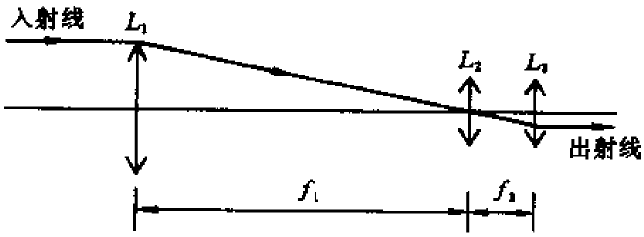


光图 1－32－1

1. 试求该望远镜出射光瞳的位置和大小．2. 试简述透镜 L_2 的作用．3. 试讨论该望远镜是否与眼睛相匹配．

【分析】 1. 出射光瞳是孔径光阑被后方光学系统所成像．为求出射光瞳的位置和大小，必须首先确定望远镜的孔径光阑．望远镜用来观察远方物体，故可认为物在无穷远处．考虑被物镜 L_1 的边框限制的最边缘的入射线，经 L_1 后交于 L_1 的像方焦点，透镜 L_2 对此光线不起偏折作用，经目镜 L_3 折射后变成平行于主光轴的出射光线．由光图 1－32－2 可知，出射光束的直径为

$$\frac{f_3}{f_1}D_1=\frac{2}{10}\times4=0.8\ \text{cm}<D_3$$



光图 1－32－2

所以通过望远镜的光束宽度是由物镜 L_1 所限制，L_1 是孔径光阑，L_1 前方无其他光学系统，故 L_1 也是入射光瞳．

孔径光阑 L_1 被透镜组 L_2 和 L_3 所成的像便是出射光瞳，根据物像公式不难得到出射光瞳的位置和大小．

2. 略．

3. 望远镜是目视光学仪器，望远镜的特性与人眼特征应很好匹配．

(*a*)望远镜的分辨率不应低于人眼的分辨率．望远镜分辨细节的能力由物镜的直径 D_1 决定,根据衍射理论,物镜的最小分辨角

$$\delta\theta_{min}=1.22\frac{\lambda}{D_1}$$

式中 $\lambda=550.0$ nm 为人眼最敏感的黄绿色光的波长．D_1 以毫米为单位时,

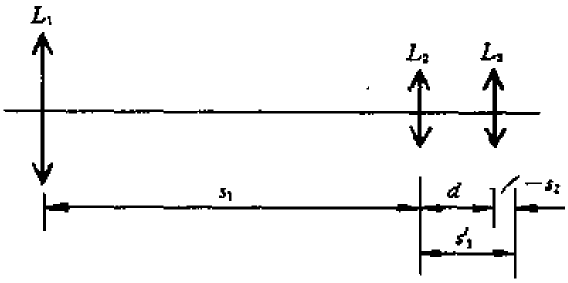
$$\delta\theta_{min}=\frac{1.22\times5.5\times10^{-4}}{D_1}\ \text{rad}=\left(\frac{140}{D_1}\right)''=3.5''$$

人眼的最小分辨角约 60″,故望远镜的分辨绰绰有余．换言之,望远镜的分辨能力尚未被充分利用．

(*b*)观察时,人眼瞳孔应与出射光瞳重合,出射光瞳的位置应在目镜 L_3 后方 5 mm 处(相当于眼睫毛的长度).

(*c*)出射光瞳不能大于人眼瞳孔,否则入射光能量不能全部进入眼睛．

【解】 1. 由以上分析,物镜 L_1 为孔径光阑,其后方光学系统为 L_2 和 L_3 组成的透镜组,用逐次成像法可求得孔径光阑的像,即出射光瞳．如光图 1－32－3,L_2 成像公式为



光图 1－32－3

$$\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_1'}=\frac{1}{f_2}$$

L_3 成像公式为

$$\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s_2'}=\frac{1}{f_3}$$

式中 $s_1=10$ cm,$f_2=2$ cm,$-s_2=s_1'-d$,$d=2$ cm,$f_3=2$ cm. 把这些数据代入成像公式,解得

$$s_1'=2.5\text{ cm},\quad s_2'=0.4\text{ cm}$$

即出射光瞳位于目镜 L_3 后方 4 mm 处．

物镜的直径为 $D_1=4$ cm,设出射光瞳直径为 $D_出$,两者有共轭关系,故横向放大率为

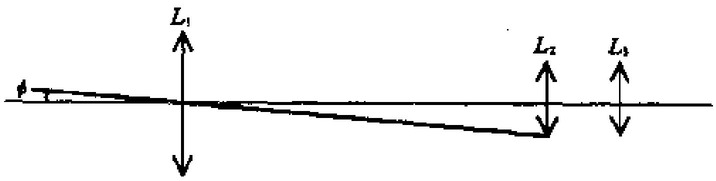
$$|M|=\frac{D_出}{D_1}$$

而

$$|M|=\left|\frac{s_1's_2'}{s_1s_2}\right|=\frac{2.5\times0.4}{10\times0.5}=0.2$$

故出射光瞳直径为

$$D_出=|M|D_1=0.2\times4=0.8\text{ cm}=8\text{ mm}$$



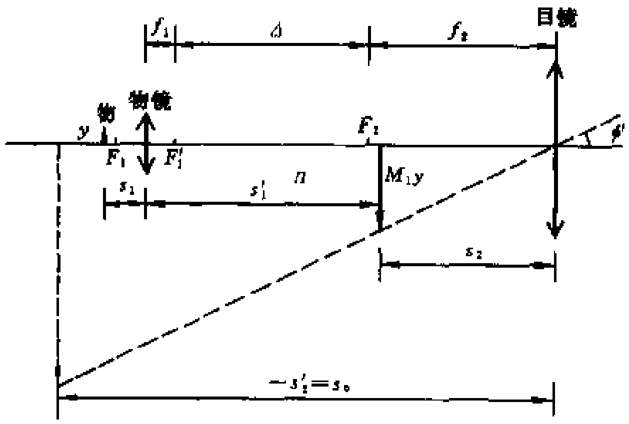
光图 1－32－4

2. 透镜 L_2 的作用有二，其一是可缩小照到目镜 L_3 上的光束，以减小目镜的大小；其二是可增大视场角．如光图 1-32-4，因物镜 L_1 本身为入射光瞳，L_2 起视场光阑的作用，视场角为 ϕ．当无 L_2 时，目镜 L_3 为视场光阑，具有较小的视场角．

3. 根据前面的分析，望远镜的分辨率问题可不必考虑．剩下的问题是出射光瞳的位置及大小，正确的观察方法是使眼睛瞳孔与出射光瞳重合．眼睛与目镜之间必须留一定间距，该间距不应小于眼睫毛的长度．例如，若要求该间距不得小于 5 mm，则上面算出的 4 mm 间距略小一些．另外，为使入射光能全部进入眼睛，就要求出射光瞳不得大于眼睛瞳孔．上面算出的出射光瞳直径为 8 mm，大于眼睛瞳孔的直径(2～4 mm)，进入望远镜的能量不能全部进入眼睛，不匹配．

【题 33】 已知显微镜物镜的焦距为 $f_1=2$ mm，目镜的焦距为 $f_2=20$ mm，光学筒长 $\Delta=153$ mm，最后像离目镜的距离为明视距离 $s_0=250$ mm．试求：1．物离物镜的距离．2．显微镜的视角放大率．3．显微镜的焦深．

【分析】 如图所示，显微镜是将微小物体放大供人眼观察的光学仪器，由短焦距的物镜以及目镜组成．为了消除像差，物镜和目镜都是适当的透镜组，相当于凸透镜．被观察物体放在物镜物方焦点外侧附近，在物镜后成放大实像，其位置恰好在目镜物方焦点的内侧附近，经目镜把上述实像放大为虚像供人眼观察．显微镜应具有足够的视角放大率和相应的分辨本领．



光图 1-33-1

【解】 1．由高斯公式

$$\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_1'}=\frac{1}{f_1}$$

$$\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s_2'}=\frac{1}{f_2}$$

故

$$s_2=\frac{s_2'f_2}{s_2'-f_2}=\frac{s_0f_2}{s_0+f_2}=\frac{250\times 20}{270}=18.52\ \mathrm{mm}$$

因

$$\Delta+f_1+f_2=s_1'+s_2$$

故

$$s'_1 = \Delta + f_1 + f_2 - s_2 = 175 - 18.5 = 156.5 \text{ mm}$$

$$s_1 = \frac{s'_1 f_1}{s'_1 - f_1} = 2.026 \text{ mm}$$

2. 先导出显微镜视角放大率的公式．如图，设物高为 y，在明视距离 s_0 处用眼观察时，视角为

$$\phi = \frac{y}{s_0}$$

通过目镜观察中间像的视角为

$$\phi' = \frac{M_1 y}{s_2}$$

其中 M_1 为物镜的横向放大率．故显微镜的视角放大率 V 为

$$V = \frac{\phi'}{\phi} = M_1 \frac{s_0}{s_2} = M_1 s_0 \frac{s_0 + f_2}{s_0 f_2} = M_1\left(1 + \frac{s_0}{f_2}\right)$$

目镜的视角放大率为 $\left(1 + \frac{s_0}{f_2}\right)$．故显微镜的视角放大率等于物镜的横向放大率与目镜的视角放大率的乘积．因

$$M_1 = -\frac{s'_1}{s_1} = -\frac{s'_1(s'_1 - f_1)}{s'_1 f_1} = -\frac{s'_1 - f_1}{f_1}$$

又因中间像很接近目镜的像方焦点，故

$$s'_1 = \Delta + f_1$$

代入，得

$$M_1 = -\frac{\Delta + f_1 - f_1}{f_1} = -\frac{\Delta}{f_1}$$

$$V = -\left(1 + \frac{s_0}{f_2}\right)\frac{\Delta}{f_1}$$

代入有关数据，得

$$|V| = 1033$$

3. 通过目镜观察中间像时，最后的虚像只能在明视距离 s_0 以外，即像距 $-s'_2$ 介于 s_0 和 ∞ 之间．若用 x'_2 表示目镜像方焦点到像的距离，则 $-x'_2$ 应介于 $(s_0 + f_2)$ 和 ∞ 之间．由牛顿成像公式

$$x_2 x'_2 = f_2^2$$

有

$$x_2 = \frac{f_2^2}{x'_2}$$

式中 x'_2 介于 $-(s_0 + f_2)$ 与 $-\infty$ 之间，x_2 介于 $-\frac{f_2^2}{s_0 + f_2}$ 与 0 之间．故目镜的焦深为

$$\Delta x_2 = \frac{f_2^2}{s_0 + f_2} = \frac{20^2}{250 + 20}$$

把牛顿成像公式用于物镜，得

$$x_1=\frac{f_1^2}{x'_1}$$

因此，显微镜的焦深为

$$|\Delta x_1|=\frac{f_1^2}{x'^2_1}\Delta x_2=\frac{f_1^2}{(s'_1-f_1)^2}\cdot\frac{f_2^2}{(s_0+f_2)}$$
$$=2.5\times10^{-4}\text{ mm}$$

可见显微镜的焦深是很小的．

【题 34】 惠更斯目镜由向场镜 L_1 和接目镜 L_2 组合而成，L_1 和 L_2 的焦距 f_1 和 f_2 以及两透镜的间隔 d 满足 $f_1:f_2:d=3:1:2$．光阑 AA 位于两透镜之间的正中央处．L_1 和 L_2 以及光阑的孔径直径依次为 D_1 和 D_2 以及 D．

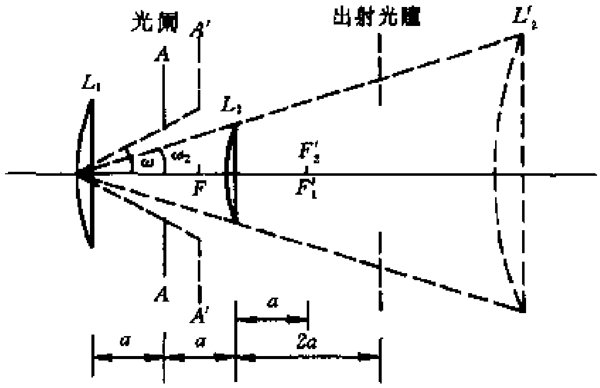
试问：1．为使 L_1 成为孔径光阑，AA 成为视场光阑，有关孔径的大小应满足什么条件？2．在上述条件下，计算出射光瞳的位置和大小．

【分析】 惠更斯目镜是一种通用的目镜，由两个用同种玻璃制成的平凸透镜制成，凸面对着物体，向场镜和接目镜的焦距以及两透镜间隔的关系如题所述．惠更斯目镜用来观察前方光学系统所成的像，不能当作放大镜单独使用．

孔径光阑是光学系统中限制成像光束截面大小的光阑．视场光阑则是光学系统中限制成像景物范围大小的光阑．入射光瞳是孔径光阑被前方光学系统成的像，出射光瞳是孔径光阑被后方光学系统成的像．

本题具体分析见解．

【解】 如光图 1－34－1 所示，设 $f_2=a$，则 $f_1=3a$，$d=2a$，光学间隔 $\Delta=d-f_1-f_2=-2a$．



光图 1－34－1

1．(a)确定目镜的物方焦点 F 的位置

目镜用来观察前方光学系统所成的像，该像作为目镜的物必须位于目镜物方焦点 F 以内，以便得到放大的虚像．找出焦点 F，也就确定了目镜的物面所在位置．也只有在确定了物面位置后，才能确定何者是孔径光阑．

目镜焦距为

$$f=f'=-\frac{f_1f_2}{\Delta}=\frac{3a}{2}$$

像方主点与 L_2 的距离为

$$x'_H=\frac{d}{\Delta}f_2=-a \quad (\text{在 } L_2 \text{ 左方 } a \text{ 处})$$

物方主点与 L_1 的距离为

$$x_H=\frac{d}{\Delta}f_1=-3a \quad (\text{在 } L_1 \text{ 右方 } 3a \text{ 处})$$

故目镜的物方焦点 F 在 H 左方 $\frac{3a}{2}$ 处，即 L_2 左方 $\frac{a}{2}$ 处．像方焦点 F' 在 H' 右方 $\frac{3a}{2}$ 处，即 L_2 右方 $\frac{a}{2}$ 处．如光图 1－34－2 所示．

可见惠更斯目镜的特点之一是，其物方焦点 F 在目镜系统的内部．为了得到放大的虚像，前方系统的像必须成在 F 附近，即物方焦面为目镜的物面．

(b)所有孔径经 L_1 成像后，像的位置和大小

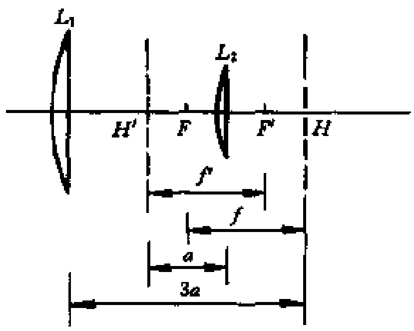
透镜 L_1 的像就是它本身，直径为 D_1．光阑为 AA，物距 $s=a$，像距为

$$s'=\frac{sf_1}{s-f_1}=\frac{3a^2}{-2a}=-\frac{3}{2}a$$

横向放大率为

$$|M|=\frac{s'}{s}=\frac{3}{2}$$

故 AA 经 L_1 所成的像 $A'A'$ 位于 L_1 右方 $\frac{3a}{2}$ 处，即与目镜的物面重合．



光图 1－34－2

透镜 L_2 的物距 $s=2a$，像距为

$$s'=\frac{sf_1}{s-f_1}=\frac{6a^2}{-a}=-6a$$

横向放大率为

$$|M|=\frac{s'}{s}=3$$

故透镜 L_2 经 L_1 所成的像 L'_2 位于 L_1 右方 $6a$ 处，其直径 $D'_2=3D_2$．如光图 1－34－1 所示．

(c)确定孔径光阑

比较 L_1 和 L'_2 以及 $A'A'$ 对物面上 F 点所张的角，即可确定孔径光阑．因 $A'A'$ 就在物面上，它不可能是入射光瞳，AA 也就不可能是孔径光阑．设 L_1 对 F 点所张的角为 u_1，则

$$\tan u_1=\frac{\frac{D_1}{2}}{\frac{3a}{2}}=\frac{D_1}{3a}$$

设 L'_2 对 F 点所张的角为 u_2，则

$$\tan u_2=\frac{\frac{D'_2}{2}}{6a-\frac{3a}{2}}=\frac{\frac{3}{2}D_2}{4.5a}=\frac{D_2}{3a}$$

因此，为使 L_1 成为入射光瞳和孔径光阑，必须满足

$$u_1 < u_2$$

即

$$D_1 < D_2$$

(d)确定视场光阑

设光阑 AA(或 $A'A'$)及透镜 L_2(或 L'_2)对入射光瞳(即 L_1 本身)中心 O_1 点所张的角分别为 ω 和ω_2,如光图 1－34－1 所示,则

$$\tan\omega = \frac{D}{a}$$

$$\tan\omega_2 = \frac{D_2}{2a}$$

为使 AA 成为视场光阑,必须满足

$$\omega < \omega_2$$

即

$$D < \frac{D_2}{2}$$

2. 当 L_1 为孔径光阑时,出射光瞳为 L_1 经 L_2 所成的像．物距 $s = 2a$,像距为

$$s' = \frac{sf_2}{s - f_2} = \frac{2a \times a}{a} = 2a$$

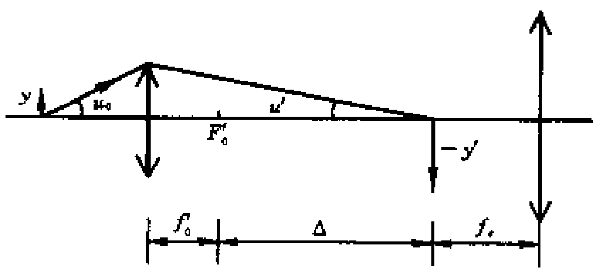
横向放大率为

$$|M| = \frac{s'}{s} = 1$$

因此,出射光瞳位于 L_2 右方 $2a$ 处,孔径大小与 L_1 相同．

【题 35】 试证明,在傍轴条件下,显微镜数值孔径一定时,其出射光瞳的直径与显微镜的视角放大率成反比．

【分析】 通常,显微镜物镜的边框构成了它的孔径光阑,孔径光阑经目镜所成的像就是出射光瞳．利用高斯公式,找出出射光瞳直径与物镜直径的关系,再利用几何关系和阿贝正弦条件即可求解．



光图 1－35－1

【解】 如图所示,设物镜像方焦距为 f'_0,目镜焦距为 f_e,光学筒长为 Δ,入射孔径角为 u_0,物所在空间的折射率为 n,物镜直径为 D.

物镜边框是显微镜的孔径光阑,它经目镜所成的像就是出射光瞳．物距是物镜到目镜的距

离，即

$$s=\Delta+f'_0+f_e$$

由高斯公式，出射光瞳与目镜的距离（即像距）为

$$s'=\frac{sf_e}{s-f_e}=\frac{\Delta+f'_0+f_e}{\Delta+f'_0}f_e$$

横向放大率为

$$|M_e|=\frac{s'}{s}=\frac{f_e}{\Delta+f'_0}$$

故出射光瞳的直径为

$$D'=M_eD=-\frac{f_e}{\Delta+f'_0}D$$

如图，有几何关系

$$\frac{D}{2}=(\Delta+f'_0)\tan u'\approx(\Delta+f'_0)\sin u'$$

代入上式，得

$$D'=-\frac{2f_e(\Delta+f'_0)}{\Delta+f'_0}\sin u'=-2f_e\sin u'$$

由阿贝正弦条件

$$yn\sin u_0=y'\sin u'$$

即

$$\sin u'=\frac{n\sin u_0}{\dfrac{y'}{y}}=\frac{n\sin u_0}{M_0}$$

式中

$$M_0=\frac{y'}{y}=-\frac{\Delta}{f'_0}$$

M_0 是物镜的横向放大率，代入，得

$$\sin u'=-\frac{n\sin u_0}{\Delta}f'_0$$

代入 D' 表达式，得

$$D'=2f_e\frac{n\sin u_0}{\Delta}f'_0=2n\sin u_0\frac{f_ef'_0}{\Delta}$$

$$=\frac{2s_0n\sin u_0}{\dfrac{\Delta s_0}{f'_0f_e}}=\frac{2s_0n\sin u_0}{|V|}$$

式中 s_0 为明视距离，$|V|$ 近似为显微镜的视角放大率（参看本章题 33）. 可见，显微镜出射光瞳的直径 D' 与其视角放大率 $|V|$ 成反比 .

题 36】 已知冕牌玻璃对可见光波段的平均折射率为 $n_0=1.499$，在 $\Delta\lambda=170.0$ nm 范围内的

平均色散率为$\frac{dn_0}{d\lambda}=-4.74\times10^{-5}\ \mathrm{nm}^{-1}$. 火石玻璃的相应数据为 $n_f=1.610$, $\frac{dn_f}{d\lambda}=-9.76\times10^{-5}\ \mathrm{nm}^{-1}$. 今用这两种玻璃制成透镜,胶合起来做成消色差透镜．试证明:

1. 两种透镜的焦距必须满足

$$\frac{\Delta_c}{f_c}+\frac{\Delta_f}{f_f}=0$$

式中 f_c 为冕牌玻璃透镜的焦距,f_f 为火石玻璃透镜的焦距,Δ 为

$$\Delta=\frac{1}{n-1}\frac{dn}{d\lambda}\Delta\lambda$$

即

$$\Delta_c=\frac{1}{n_c-1}\frac{dn_c}{d\lambda}\Delta\lambda,\quad \Delta_f=\frac{1}{n_f-1}\frac{dn_f}{d\lambda}\Delta\lambda$$

2. 只有用冕牌玻璃做成会聚透镜,用火石玻璃做成发散透镜,才有可能得到会聚的消色差镜头．

【分析】 对于每一种玻璃的薄透镜,因其折射率随波长变化,故其焦距亦随波长变化,导致色差．两种玻璃的薄透镜胶合成密接薄透镜,要求消色差,即要求密接薄透镜的焦距不随波长变化．利用密接薄透镜的焦距与两透镜焦距的关系即可求解第一问．要求密接薄透镜是会聚的消色差镜头,意即既要满足第一问的结论,又要使密接薄透镜的焦距大于零．

【解】 1. 把两种透镜都当作薄透镜,并在空气中使用,根据薄透镜的焦距公式,有

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

式中 $n=n_c$ 或 n_f, $f=f_c$ 或 f_f, r_1 和 r_2 分别是每一种薄透镜两个球面的曲率半径．

对于固定的曲率半径 r_1 和 r_2,波长改变引起了折射率的变化和焦距的变化．微分上式,得

$$\frac{\Delta f}{f^2}=-\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\frac{dn}{d\lambda}\Delta\lambda$$

$$=-\frac{1}{(n-1)f}\frac{dn}{d\lambda}\Delta\lambda=-\frac{\Delta}{f}$$

式中 $n=n_c$ 或 n_f, $f=f_c$ 或 f_f,

$$\Delta=\frac{1}{n-1}\frac{dn}{d\lambda}\Delta\lambda$$

表示 $\Delta_c=\frac{1}{n_c-1}\frac{dn_c}{d\lambda}\Delta\lambda$ 或 $\Delta_f=\frac{1}{n_f-1}\frac{dn_f}{d\lambda}\Delta\lambda$.

两薄透镜胶合成密接薄透镜,密接薄透镜的焦距 $f_合$ 与两薄透镜焦距 f_c 和 f_f 的关系为

$$\frac{1}{f_合}=\frac{1}{f_c}+\frac{1}{f_f} \tag{1}$$

微分,得

$$\frac{\Delta f_合}{f_合^2}=\frac{\Delta f_c}{f_c^2}+\frac{\Delta f_f}{f_f^2}$$

要求密接薄透镜消色差,即要求上式中

$$\Delta f_合=0$$

即要求

$$\frac{\Delta f_c}{f_c^2}+\frac{\Delta f_f}{f_f^2}=0$$

利用上面得出的公式$\frac{\Delta f}{f^2}=-\frac{\Delta}{f}$,把上式写成

$$\frac{\Delta_c}{f_c}+\frac{\Delta f}{f_f}=0 \tag{2}$$

注意,Δf_c 或 Δf_f 或 $\Delta f_{合}$ 或 $\Delta\lambda$ 中的 Δ 是微分符号,而 Δ_c 或 Δ_f 则是题目中定义的 $\Delta=\frac{1}{n-1}\frac{dn}{d\lambda}\Delta\lambda$,不要混淆．(2)式就是第1问要求证明的结果．

2. 由题目所给数据,得

$$\Delta_c=\frac{1}{n_c-1}\frac{dn_c}{d\lambda}\Delta\lambda=0.0161$$

$$\Delta_f=\frac{1}{n_f-1}\frac{dn_f}{d\lambda}\Delta\lambda=0.0272$$

故

$$\Delta_f>\Delta_c$$

要求组合的密接薄透镜是会聚的消色差镜头,即要求

$$f_{合}>0$$

且满足上述(1)式和(2)式．由(1)式和(2)式,解出

$$\frac{1}{f_c}=\frac{\Delta_f}{\Delta_f-\Delta_c}\frac{1}{f_{合}}$$

$$\frac{1}{f_f}=-\frac{\Delta_c}{\Delta_f-\Delta_c}\frac{1}{f_{合}}$$

因 $\Delta_c>0,\Delta_f>0,\Delta_f>\Delta_c$ 及 $f_{合}>0$,故要求

$$f_c>0,\quad f_f<0$$

即冕牌玻璃应做成会聚透镜,火石玻璃应做成发散透镜,这样密接组合的镜头既可消色差又是会聚的．

【题37】 两个分离的薄透镜组合成透镜组,它们的焦距分别为 f_1 和 f_2,在所使用的光波波段内的平均折射率分别为 n_1 和 n_2,平均色散率分别为 D_1 和 D_2. 试问:为使透镜组具有最小的色差,两透镜的间隔应为多大?

【分析】 与上题(本章题36)的区别是两透镜分离而不密接．利用透镜有效焦距的公式,把它对波长求导,最小色差时有效焦距的相应变化为零,于是可解．

【解】 透镜组的有效焦距 $f_{合}$ 满足

$$\frac{1}{f_{合}}=-\frac{\Delta}{f_1f_2}=-\frac{d-f_1-f_2}{f_1f_2}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}-\frac{d}{f_1f_2} \tag{1}$$

薄透镜1或2的焦距为

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

式中 $f=f_1$ 或 f_2，$n=n_1$ 或 n_2，r_1 和 r_2 是两透镜两个球面的曲率半径．若波长改变 $\Delta\lambda$ 时，焦距 f_1 和 f_2 分别改变了 Δf_1 和 Δf_2，有

$$-\frac{\Delta f_1}{f_1^2}=\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\frac{\mathrm{d}n_1}{\mathrm{d}\lambda}\Delta\lambda=\frac{D_1}{(n_1-1)f_1}\Delta\lambda$$

$$-\frac{\Delta f_2}{f_2^2}=\frac{D_2}{(n_2-1)f_2}\Delta\lambda$$

对(1)式求微分，得

$$\begin{aligned}-\frac{\Delta f_{合}}{f_{合}^2}&=-\frac{\Delta f_1}{f_1^2}-\frac{\Delta f_2}{f_2^2}+\frac{d\Delta f_1}{f_1^2f_2}+\frac{d\Delta f_2}{f_1f_2^2}\\&=-\left[\frac{D_1}{(n_1-1)f_1}+\frac{D_2}{(n_2-1)f_2}\right]\Delta\lambda+\left[\frac{D_1}{n_1-1}+\frac{D_2}{n_2-1}\right]\frac{d}{f_1f_2}\Delta\lambda\end{aligned}$$

透镜组无色差时

$$\Delta f_{合}=0$$

即应满足

$$\frac{d}{f_1f_2}\left(\frac{D_1}{n_1-1}+\frac{D_2}{n_2-1}\right)=\frac{D_1}{(n_1-1)f_1}+\frac{D_2}{(n_2-1)f_2}$$

故

$$d=\frac{\dfrac{f_2D_1}{n_1-1}+\dfrac{f_1D_2}{n_2-1}}{\dfrac{D_1}{n_1-1}+\dfrac{D_2}{n_2-1}}$$

当两透镜用同种材料制成时，有

$$n_1=n_2$$
$$D_1=D_2$$

代入，得

$$d=\frac{1}{2}(f_1+f_2)$$

即当两透镜的间距 d 等于它们两个焦距 f_1 和 f_2 的平均值时，透镜组有最小的色差．惠更斯目镜的设计正符合此情形(参看本章题 34)．

【题 38】 用两个薄会聚透镜组装成一架简易开普勒望远镜，要求该望远镜能分辨 100 m 远物面上 1 mm 间隔的两条刻线．已知镜筒长度(两薄透镜之间的距离)为 62 cm，已知人眼的最小分辨角为 3×10^{-4} rad.

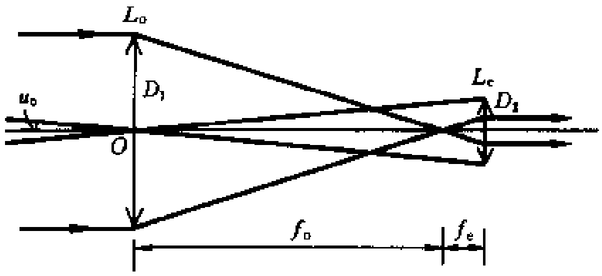
试问：1．物镜直径应选多大？2．物镜和目镜的焦距各为多少？3．当目镜直径选用 2 cm 时，望远镜的视场角是多少？

【分析】 1．由于物镜的衍射效应，望远镜能分辨的最小分辨角 $\delta\theta_t$ 由物镜的尺寸决定，即

$$\delta\theta_t=1.22\frac{\lambda}{D_1}$$

式中 D_1 为物镜的直径，$\lambda=550$ nm 为人眼最敏感的黄绿光波长，现要求最小分辨角为

$$\delta\theta_m=\frac{1\ \text{mm}}{100\ \text{m}}=1\times10^{-5}\ \text{rad}$$



光图 1-38-1

故应有

$$\delta\theta_i\leqslant\delta\theta_m$$

于是 D_1 可求．

2．注意到人眼的最小分辨角为

$$\delta\theta_e=3\times10^{-4}\ \text{rad}$$

望远镜必须具有一定的视角放大率 V 才能被人眼所分辨，即

$$V=\frac{\delta\theta_e}{\delta\theta_m}=\frac{3\times10^{-4}\ \text{rad}}{1\times10^{-5}\ \text{rad}}=30$$

利用望远镜的视角放大率公式和筒长，可求得物镜和目镜的焦距．

3．找出望远镜的入射光瞳和视场光阑即可求出视场角．

【解】 1．由前面的分析，望远镜物镜的最小分辨角 $\delta\theta_i$ 应小于题目要求的最小分辨角 $\delta\theta_m$，即应有

$$1.22\frac{\lambda}{D_1}\leqslant1\times10^{-5}\ \text{rad}$$

故物镜直径 D_1 应为

$$D_1\geqslant\frac{1.22\lambda}{1\times10^{-5}}=\frac{1.22\times5.5\times10^{-5}}{1\times10^{-5}}\ \text{cm}=6.7\ \text{cm}$$

2．由望远镜的视角放大率公式

$$V=\frac{f_o}{f_e}=30$$

由望远镜的成像特征，筒长等于物镜和目镜的焦距之和，即

$$f_o+f_e=62\ \text{cm}$$

由以上两式解出

$$f_o=60\ \text{cm}$$

$$f_e=2\ \text{cm}$$

3．由作图可知，通过望远镜的光束受物镜 L_o 限制，因而物镜本身是孔径光阑，也是入射光瞳．目镜 L_e 则限制了视场大小，因而是视场光阑．视场光阑对物镜中心 O 所张的角 u_0 为视场

角．如图，由几何关系，得

$$u_0=\arctan\frac{D_2}{2(f_o+f_e)}=\arctan\frac{2}{2\times 62}=55.4'$$

【题 39】 均匀发光圆盘的半径为 R，亮度为 B．试计算其中垂轴上与盘心相距为 z，与轴垂直的面上的照度．设圆盘为朗伯体．

【分析】 如图，在圆盘中垂轴上与盘心相距为 z 处取一与轴垂直的小面积 σ'，再在圆盘上任取一面元 dS，根据亮度的定义可写出 dS 面元照到 σ' 上的光通量．在整个圆盘上积分，可得出整个圆盘照到 σ' 上的光通量 Φ'，于是 σ' 上的照度为 $E=\frac{\Phi'}{\sigma'}$．

【解】 如图，在圆盘上任取面元 dS，其面积为

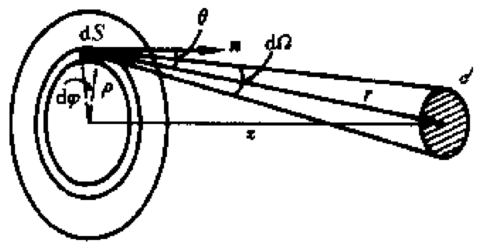
$$dS=\rho d\rho d\varphi$$

由定义，dS 面元的亮度为

$$B=\frac{d\Phi}{d\Omega dS\cos\theta}$$

式中 $d\Omega$ 是面积 σ' 对面元 dS 所张的立体角，$d\Phi$ 是面元 dS 发出的在 $d\Omega$ 内的光通量，θ 是面元 dS 的法线 $\boldsymbol{n}$ 与立体角轴线 $\boldsymbol{r}$ 之间的夹角，故面元 dS 照到 σ' 上的光通量为

$$d\Phi'=d\Phi=B\cos\theta\, dS\, d\Omega$$



光图 1－39－1

其中

$$d\Omega=\frac{\sigma'\cos\theta}{r^2}$$

把 dS 和 $d\Omega$ 代入 $d\Phi'$，得

$$d\Phi'=B\cos\theta\cdot\rho\, d\rho\, d\varphi\cdot\frac{\sigma'\cos\theta}{r^2}$$

$$=B\sigma'\frac{\rho\cos^2\theta d\rho\, d\varphi}{r^2}$$

由几何关系，

$$r^2=\rho^2+z^2$$

$$\cos\theta=\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$$

代入 $d\Phi'$，得

$$d\Phi'=B\sigma'\frac{z^2\rho d\rho\, d\varphi}{(\rho^2+z^2)^2}$$

对圆盘积分，得出照到 σ' 上的总光通量 Φ' 为

$$\Phi'=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R B\sigma'\frac{z^2\rho d\rho}{(\rho^2+z^2)^2}$$

因圆盘为朗伯体，亮度与方向无关，是一恒量，故有

$$\Phi'=2\pi B\sigma' z^2\int_0^R\frac{\rho d\rho}{(\rho^2+z^2)^2}=\frac{\pi R^2 B\sigma'}{R^2+z^2}$$

由照度定义，σ'上的照度为

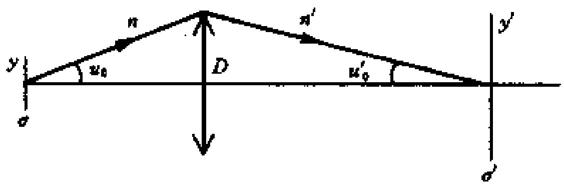
$$E=\frac{\Phi'}{\sigma'}=\frac{\pi R^2 B}{R^2+z^2}$$

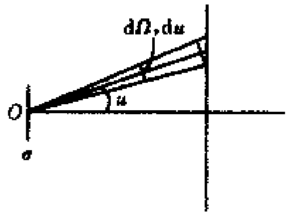
【题40】 透镜主光轴上一发光小物的亮度为B，透镜物方折射率为n，像方折射率为n'，透镜的透光系数（出射光通量与入射光通量之比）为k．试求像的亮度．设发光小物为朗伯体．

【分析】 为简单起见，把透镜当作薄透镜（此假定不影响结果的普遍性），此时透镜本身即孔径光阑、入射光瞳和出射光瞳．如图所示，设入射孔径角为u_0，出射孔径角为u'_0．首先计算入射光通量Φ与物的亮度B，入射孔径角u_0及小物面积σ的关系．同理可得出射光通量Φ'与像的亮度B'，出射孔径角u'_0及像的面积σ'的关系．再利用阿贝正弦条件和横向放大率公式，即可求得B'与B的比值．

【解】 先计算入射总光通量Φ．设小物面积为σ，由亮度定义，在u方向立体角元$d\Omega$内（如图所示）的光通量为

$$d\Phi=B\sigma\cos u\,d\Omega$$





光图1-40-1

在以O为原点的球坐标系中，立体角元

$$d\Omega=\sin u\,du\,d\varphi$$

代入，得

$$d\Phi=B\sigma\sin u\cos u\,du\,d\varphi$$

对u和φ积分，u从0到u_0，φ从0到2π，得出入射总光通量为

$$\Phi=\int_0^{u_0}B\sigma\sin u\cos u\,du\int_0^{2\pi}d\varphi$$

对于朗伯体，B为常量，故

$$\Phi=\pi B\sigma\sin^2 u_0$$

同理，可得出射总光通量为

$$\Phi'=\pi B'\sigma'\sin^2 u'_0 \qquad (1)$$

由以上两式，得

$$\frac{B'}{B}=\frac{\Phi'}{\Phi}\cdot\frac{\sin^2 u_0}{\sin^2 u'_0}\cdot\frac{\sigma}{\sigma'}$$

式中

$$\frac{\Phi'}{\Phi}=k\ (\leqslant 1)$$

$$\frac{\sigma}{\sigma'}=\left(\frac{y}{y'}\right)^2$$

y和y'分别是物和像的高度．再由阿贝正弦条件，有

$$ny\sin u_0=n'y'\sin u'_0$$

得

$$\frac{B'}{B}=k\left(\frac{n'}{n}\right)^2 \tag{2}$$

若透镜两侧均为空气,或均为其他同一媒质,即若

$$n=n'$$

则有

$$B'=k\,B$$

通常,$k<1$,若不计由吸收、反射和散射引起的能量损失,则 $k\approx1$,$B'\approx B$,即像的亮度近似等于物的亮度．可见,任何光学成像系统,不管放大率多大,物的距离远近如何,基本上不改变像的亮度．

【题 41】 试证明,用照相机拍摄远物时,感光片上像的照度与物的远近基本无关,而与镜头的相对孔径的平方成正比．

【分析】 利用上题(本章题 40)得到的关于出射光光通量 Φ' 的公式,可求得一般情形下像面上的照度．应用到照相机的特殊情形,当物足够远时,像距近似等于焦距,照度与镜头相对孔径的关系即可得证．

【解】 根据上题(本章题 40)得到的透镜出射光光通量的公式(1)式和(2)式,照到像面上面积为 σ' 的垂直面积上的光通量为

$$\Phi'=\pi B'\sigma'\sin^2 u'_0=k\pi\left(\frac{n'}{n}\right)^2 B\sigma'\sin^2 u'_0$$

式中 B 和 B' 分别是物和像的亮度,u'_0 为出射孔径角(参看本章题 40 中的图).

照相机镜头两侧均为空气,$n'=n$,故像面上的照度为

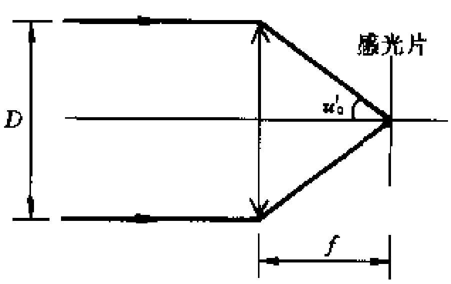
$$E=\frac{\Phi'}{\sigma'}=k\pi B\sin^2 u'_0$$

当物足够远时,如图所示,像距近似等于镜头的焦距 f,即

$$\sin u'_0\approx\frac{D}{2f}$$

式中 D 为镜头的直径,故得

$$E=\frac{k\pi B}{4}\left(\frac{D}{f}\right)^2$$



光图 1-41-1

式中 $\frac{D}{f}$ 称为镜头的相对孔径．

上述结果表明,感光片上的照度 E 与物距的大小无关,这就是摄取不同远近景物时无需改变曝光量的原因．另外,照度 E 与相对孔径的平方成正比,相对孔径 $\left(\frac{D}{f}\right)$ 的大小通常用光圈系数 $\left(\frac{f}{D}\right)$(相对孔径的倒数)表示．镜头上刻有光圈系数的标记值,例如 1.4,2,2.8,4,5.6,8,11,16,…．在这个序列中,后一个数近似为前一个数的 $\sqrt{2}$ 倍,即相对孔径值按 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的比值递减,因而照度按 $\frac{1}{2}$ 的比值递减．在上述光圈系数序列中,前一个数相应的曝光量是后一个数的 2 倍．

【题 42】 正入射的太阳光照射到一屏幕上，另用一半径为 r、焦距为 f 的透镜将太阳光聚焦在屏幕上．试求上述两种情形下的照度之比．又，对于一定的 r，试问 f 为何值时，两种情形的照度相等．设太阳为朗伯体，观察太阳的视角为 0.01 rad．设透镜的透光系数为 1．

【分析】 设太阳亮度为 B，利用本章题 39 的结果可算出太阳光直接照射屏幕时的照度．利用本章题 41 的结果可得出经透镜聚焦后的照度．于是可解．

【解】 太阳光直接照射到屏幕时，照度为（参看本章题 39）

$$E=\frac{\pi R^2 B}{R^2+z^2}$$

式中 B 为太阳的亮度，R 是太阳半径，z 是太阳到屏幕的距离．因 $R\ll z$，故有

$$E=\pi B\left(\frac{R}{z}\right)^2=(0.01)^2\pi B$$

式中$\frac{R}{z}=0.01$ rad 是观察太阳的视角．

利用本章题 41 的结果，太阳光在透镜焦距 f 处的照度为

$$E'=\frac{k\pi B}{4}\left(\frac{D}{f}\right)^2=k\pi B\left(\frac{r}{f}\right)^2$$

因

$$k=1$$

故

$$E'=\pi B\left(\frac{r}{f}\right)^2$$

两种情形下，屏幕上照度之比为

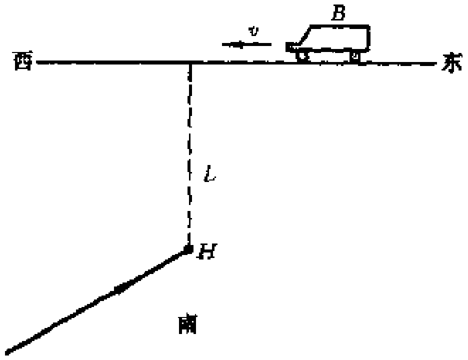
$$\frac{E'}{E}=\frac{r^2}{(0.01f)^2}$$

为了使 $E'=E$，对于半径为 r 的透镜，其焦距 f 应为

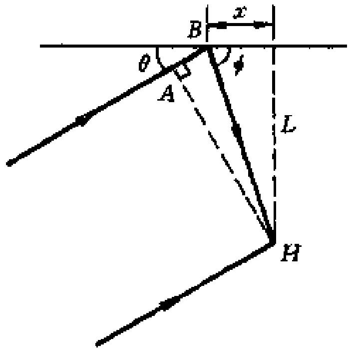
$$f=\frac{r}{0.01}$$

第二章 光的干涉

【题1】 如光图 2－1－1 所示，汽车 B 沿公路由东向西作匀速直线运动. 路南房子 H 中一电视机正在接收从西南远方传来的频率为 $f=60$ MHz 的电磁波. 房子 H 到公路的垂直距离 $L=100$ m. 汽车驶过房子所在地区时，电视机接收到的信号强度将发生起伏. 当汽车处于正对房子的位置时，测得强度起伏频率为 2Hz；当汽车离正对位置距离为 200 m 时，起伏频率突然降为零. 试求电磁波的发射方位及汽车的行驶速度 v.



光图 2－1－1



光图 2－1－2

【分析】 如光图 2－1－2 所示，电视机同时接收到两个电磁波信号，一是从远方传来的直接信号，另一是被汽车散射后传来的信号，两个信号是相干的，叠加后的强度取决于波程差 Δ，而 Δ 则与汽车的位置 x 有关. 当汽车匀速行驶时，Δ 将连续改变，因而电视机接收到的信号强度将作强弱交替变化. 设在 $\mathrm{d}t$ 时间内波程差改变 $\mathrm{d}\Delta$，单位时间内波程差改变为 $\dfrac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}t}$，因 Δ 每改变一个波长 λ，信号强弱改变一次，故信号起伏频率为 $\left|\dfrac{\mathrm{d}\Delta}{\lambda\mathrm{d}t}\right|$. 算出 Δ，进而求得起伏频率与汽车位置的关系，再根据题目所给的条件，即可求得电磁波的方位和汽车的行驶速度.

【解】 如光图 2－1－2 所示，设汽车位于 x 处，电磁波的传播方位用 θ 表示，散射波的方位用 ϕ 表示. 则在 H 处叠加的两波的波程差为

$$\Delta = AB + BH$$

式中

$$AB = BH\cos(\pi-\theta-\phi) = -BH\cos(\theta+\phi)$$

$$BH=\frac{L}{\sin\phi}$$

代入，得

$$\Delta=\frac{L}{\sin\phi}[1-\cos(\theta+\phi)]$$

$$=\frac{L}{\sin\phi}[1-\cos\theta\ \cos\phi+\sin\theta\ \sin\phi]$$

$$=\frac{L}{\sin\phi}-\frac{L\ \cos\theta}{\tan\phi}+L\sin\theta$$

注意,式中 θ 为常量.对 ϕ 求导,得

$$\frac{d\Delta}{d\phi}=-\frac{L\ \cos\phi}{\sin^2\phi}+\frac{L\cos\theta}{\sin^2\phi}=-\frac{L}{\sin^2\phi}(\cos\phi-\cos\theta)$$

因

$$x=\frac{1}{\tan\phi}$$

故

$$\frac{d\phi}{dt}=-\frac{\sin^2\phi}{L}\frac{dx}{dt}=-\frac{\sin^2\phi}{L}v$$

式中 $v=\frac{dx}{dt}$是汽车行驶速度.故有

$$\frac{d\Delta}{dt}=\frac{d\Delta}{d\phi}\cdot\frac{d\phi}{dt}=v(\cos\phi-\cos\theta)$$

强度起伏频率为

$$\left|\frac{1}{\lambda}\frac{d\Delta}{dt}\right|=\frac{v}{\lambda}|\cos\phi-\cos\theta|$$

由题设,

$$x=200\ \text{m 时},\left|\frac{1}{\lambda}\frac{d\Delta}{dt}\right|=0$$

得

$$\phi=\theta$$

此时

$$\tan\theta=\tan\phi=\frac{L}{x}=\frac{1}{2}$$

故电磁波的发射方位角为

$$\theta=\arctan\frac{1}{2}=22.6^\circ$$

又,当汽车在房子的正对位置,即当 $\phi=90^\circ$时,起伏频率为 2 Hz,即有

$$2=\frac{v}{\lambda}\cos\theta=\frac{fv}{c}\cos\theta$$

故

$$v=\frac{2c}{f\cos\theta}$$

把 $c=3\times10^8$ m, $f=60$ MHz, $\theta=22.6^\circ$代人,得

$$v=11.2\ \text{m/s}$$

【题 2】 某射电天文台的接收天线位于海平面上方高度为 $h=2.00$ m 处,接收机只记录电场强度的水平分量.当一颗能发射波长为 $\lambda=21.0$ cm 电磁波的射电星从海平面升起时,接收机将相

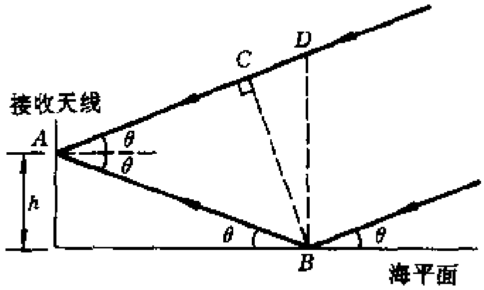
继地记录下一系列极大值和极小值.

1. 试确定观察到极大值和极小值时电磁波的方向,用与海平面的夹角表示该方向.

2. 当射电星从海平面上方出现时,试问接收到的电磁波的强度是增加还是减小?

3. 试求观察到的相继各极大值与极小值的相对强度.

【分析】 如图所示,遥远的射电星发来的平行电磁波束与海平面的夹角为 θ,一部分直接射向接收天线,另一部分经海平面反射后射向接收天线.因此,接收到的是直射波与反射波相干的结果,海平面的作用类似于洛埃镜.随着射电星从海平面冉冉升起,θ 从零不断增大,直射波与反射波的波程差相应增大(注意,反射波反射时,相位有 π 的突变,应附加$\frac{\lambda}{2}$的波程差),使接收到的电磁波的强度相继出现极大值和极小值,它们分别相应于波程差为 $k\lambda$ 和$\left(k+\frac{1}{2}\right)\lambda$ 的情形.



光图 2-2-1

直射波和反射波相干极大值和极小值的强度取决于两者的振幅.对于垂直于入射面的电矢量分量(即接收机能记录的电场强度的水平分量),反射波振幅与入射波(即直射波)振幅的关系由菲涅耳公式给出,与在空气中的入射角 θ 以及在水中的折射角 θ_r 有关,并与空气和海水的折射率有关.由此可见,相应于不同 k(即不同 θ)的极大值与极小值的强度比是不同的,可以求出.

【解】 1. 如图,反射波和直射波的波程差为

$$\Delta L' = AB - AC = AD - AC = CD = 2h\ \sin\theta$$

考虑到反射波有$\frac{\lambda}{2}$的附加波程差,实际的波程差为

$$\Delta L = 2h\sin\theta + \frac{\lambda}{2}$$

接收到极大值时,相应的 θ_{max}应满足

$$2h\ \sin\ \theta_{max} + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$$

即

$$\sin\theta_{max} = \frac{\lambda}{2h}\left(k-\frac{1}{2}\right),\qquad k=1,2,\cdots \tag{1}$$

同理,接收到极小值时,相应的 θ_{min}满足

$$2h\sin\theta_{min} + \frac{\lambda}{2} = \left(k+\frac{1}{2}\right)\lambda$$

即

$$\sin\theta_{min} = \frac{\lambda}{2h}k,\qquad k=0,1,2,\cdots \tag{2}$$

2. 由(2)式,当 $k=0$ 时,$\theta_{min}=0$,故射电星刚从海平面露出时,接收到的是极小值,随着 θ 的增大,接收到的强度将逐渐增大到干涉极大值.

3. 空气的折射率 $n_1=1$,设海水的折射率 $n_2=n$,由菲涅耳公式,对垂直于入射面的电矢量分量(即接收机能够记录的电场强度的水平分量),反射波振幅 E 与入射波振幅E_0 的关系为

$$E = \left|\frac{n_1\sin\theta - n_2\cos\theta_r}{n_1\sin\theta + n_2\cos\theta_r}\right|E_0$$

式中 θ_r 为电磁波在水中的折射角，因入射角 θ 很小，折射角 θ_r 也很小，故

$$\cos\theta_r \approx 1$$

代入，得

$$E = \frac{n - \sin\theta}{n + \sin\theta} E_0$$

对接收到的干涉极大值，直射波和反射波的相位相同，合振幅为两者之和，相应的 θ 用 θ_{max} 表示，故有

$$E_{max} = E_0 + E\ (\theta = \theta_{max})$$
$$= E_0 + \frac{n - \sin\theta_{max}}{n + \sin\theta_{max}} E_0 = \frac{2n}{n + \sin\theta_{max}} E_0$$

对接收到的干涉极小值，直射波和反射波的相位差 π，合振幅为两者之差，相应的 θ 用 θ_{min} 表示，故有

$$E_{min} = E_0 - E\ (\theta = \theta_{min})$$
$$= E_0 - \frac{n - \sin\theta_{min}}{n + \sin\theta_{min}} E_0 = \frac{2\sin\theta_{min}}{n + \sin\theta_{min}} E_0$$

干涉极大值和干涉极小值的强度分别为

$$I_{max} = E_{max}^2 = \left(\frac{2n}{n + \sin\theta_{max}}\right)^2 E_0^2$$
$$= \left[\frac{2n}{n + \frac{\lambda}{2h}\left(h - \frac{1}{2}\right)}\right]^2 E_0^2, k = 1, 2, \cdots$$

$$I_{min} = E_{min}^2 = \left(\frac{2\sin\theta_{min}}{n + \sin\theta_{min}}\right)^2 E_0^2 = \left[\frac{\left(\frac{\lambda}{h}\right)k}{\left(n + \frac{\lambda k}{2h}\right)}\right]^2 E_0^2, k = 0, 1, 2, \cdots$$

各级极小和极大的强度列表如下.

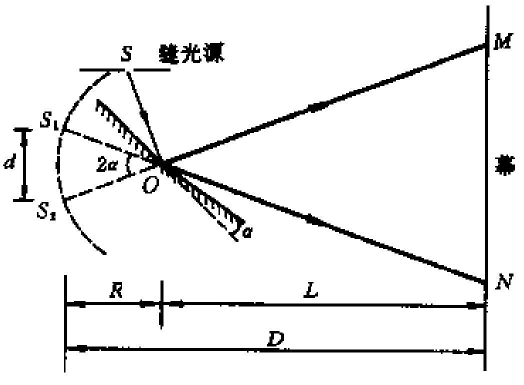
k_{min}	k_{max}	θ_{min}	θ_{max}	强度极小值	强度极大值
0		0		0	
	1		1.504°		$3.976\,8\ E_0^2$
1		3.009°		$0.000\,136\ E_0^2$	
	2		4.517°		$3.930\,9\ E_0^2$
2		6.027°		$0.000\,532\ E_0^2$	
	3		7.542°		$3.885\,8\ E_0^2$
3		9.062°		$0.001\,8\ E_0^2$	

【题3】 如图所示，已知菲涅耳双面镜两镜之间的夹角 $\alpha = 20'$，缝光源与两镜交线的距离 $R =$

10 cm,单色光的波长 $\lambda=600$ nm,观察屏幕与两虚光源的连线平行,与两镜交线相距 $L=210$ cm.

试问:1. 幕上干涉条纹的间距多大? 在幕上最多能看到多少条干涉条纹? 2.若光源到两镜交线的距离增大一倍,干涉条纹怎样变化? 3.若缝光源横向移动 δs,干涉条纹如何变化? 4.为了能观察到干涉条纹,光源的极限宽度为多大?

【分析】 如图,缝光源 S 以及经两平面镜所成的虚像 S_1 和 S_2,均位于以 O 为圆心,以缝光源与交线距离 R 为半径的圆上,S_1O 和 S_2O 的延长线与幕相交于N 和M 两点. OM 和ON 是缝光源S 发出的光线SO 经两镜边缘反射的光线,MN 之间就是两束相干光能够重叠干涉的区域,仅在其间才能观察到干涉条纹.



光图 2－3－1

缝光源与两镜交线的距离增大后,相干光束的重叠区域几乎不变,但因两像光源的间距相应增大,干涉条纹的间距将减小,条纹更加密集.

缝光源横向移动 δs,R 不变,S_1 和 S_2 将沿半径为 R 的圆相应移动而间距d 不变,因此幕上干涉条纹的间距保持不变,整体移动.

当缝光源有一定宽度时,可把它等分成许多窄缝,由于各窄缝的位置有所不同,屏幕上相应干涉条纹的极大值的位置也有所不同,使得极大值有一定的分布宽度.当干涉条纹某极大值的分布宽度与相邻条纹的宽度(即间距)相等时,便无法观察到干涉条纹的强弱分布,由此即可确定缝光源的极限宽度(即临界宽度).

有关几何关系可从图中得到.

【解】 1.相邻干涉条纹的间距为

$$\Delta x=\frac{D}{d}\lambda=\frac{R+L}{2\alpha R}\lambda=1.13\ \text{mm}$$

屏幕上两相干光束重叠区域 MN 的大小为

$$MN\approx 2\alpha D$$

因此,在幕上能够看到的干涉条纹的数目为

$$\Delta N=\frac{MN}{\Delta x}=\frac{2\alpha D}{\Delta x}=22\ 条$$

2.当 R 增大为 $2R$ 时

$$D'=L+2R,\quad d'=2\alpha\times 2R=2d$$

因 $R\ll L$,故 $D'\approx D$,重叠区域几乎不变.但因两像光源间距增大一倍,故条纹间距为

$$\Delta x'=\frac{D}{2d}\lambda=\frac{1}{2}\Delta x$$

即条纹间距减为原来之半,条纹更加密集.

3.缝光源沿圆周移动了 δs,则 S_1 和 S_2 均移动 δs,其间距 d 不变,故条纹间距 Δx 不变.两像光源沿圆周移动 δs,即绕圆心 O 转了

$$\beta=\frac{\delta s}{R}$$

的角度，故干涉条纹的零级也相应地绕 O 转了 β 角，因此屏幕上干涉条纹整体移动的距离为

$$\delta x=L\beta=\frac{L\delta s}{R}$$

4. 设缝光源宽度为 b，则幕上干涉条纹某级极大值的分布宽度为

$$\delta x=\frac{L}{R}b$$

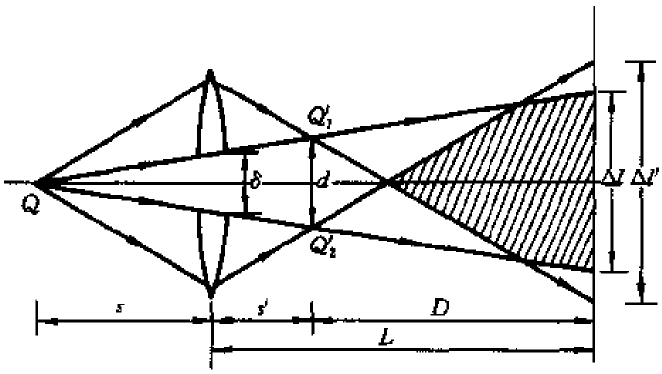
即相当于缝光源横向移动了 b 的距离. 当 δx 等于干涉条纹间距 Δx 时，便无法观察干涉条纹，相应的缝光源宽度即为临界宽度 b_c，故

$$\Delta x=\frac{L}{R}b_c$$

即

$$b_c=\frac{R}{L}\Delta x=\frac{R}{L}\frac{D}{d}\lambda=\frac{R(R+L)}{Ld}\lambda=\frac{R}{d}\left(1+\frac{R}{L}\right)\lambda$$
$$\approx\frac{R}{d}\lambda=\frac{\lambda}{2\alpha}=0.05\ \text{mm}$$

【题 4】 如图所示，焦距 $f=10$ cm 的薄透镜沿其直径剖切为二，再沿切口的垂直方向将两半移



光图 2－4－1

开一距离 $\delta=1.0$ mm. 在透镜前方，在对称轴上与透镜相距为 $s=20$ cm 处放一单色点光源 Q，其波长 $\lambda=500$ nm，在透镜另一侧与透镜相距为 $L=50$ cm 处，与对称轴垂直地放一屏幕. 试求幕上出现的干涉条纹的数目.

【分析】 如图，点光源 Q 发出的光经透镜的上半部和下半部后分别成像于 Q'_1 和 Q'_2. 这是两个相干的点光源，它们发出的两束相干光在图中画斜线的区域内重叠，在重叠区域内的屏幕上可以观察到干涉条纹.

【解】 点光源 Q 经透镜两半后成像于 Q'_1 和 Q'_2，由薄透镜成像公式，像距为

$$s'=\frac{sf}{s-f}=20\ \text{cm}$$

Q'_1 与 Q'_2 的间距 d 可由几何关系求出，

$$\frac{d}{\delta}=\frac{s+s'}{s}$$

即

$$d=\frac{(s+s')}{s}\delta=\frac{\delta}{s}\left(s+\frac{sf}{s-f}\right)=\frac{\delta s}{s-f}=0.2\ \text{cm}$$

Q_1' 和 Q_2' 为相干点光源，幕上干涉条纹的间距为

$$\Delta x=\frac{D}{d}\lambda\quad=\frac{L-s'}{d}\lambda=\frac{L-\dfrac{sf}{s-f}}{\dfrac{s\delta}{s-f}}\lambda$$

$$=\frac{\lambda}{s\delta}[L(s-f)-sf]=7.5\times10^{-3}\ \text{cm}$$

如图，幕上两束光重叠的范围为

$$\Delta l=\frac{\delta}{s}(s+L)=0.35\ \text{cm}$$

因此，幕上出现的干涉条纹的数目为

$$N=\frac{\Delta l}{\Delta x}=46.7$$

即出现46条干涉条纹.

讨论. 在上述计算中实际上已假设图中的 $\Delta l'>\Delta l$. 如果是 $\Delta l'<\Delta l$，则幕上两束相干光重叠的范围将是 $\Delta l'$ 而不是 Δl，出现的条纹数目应由 $N=\dfrac{\Delta l'}{\Delta x}$ 得出.

$\Delta l'$ 的大小与透镜直径 $2R$ 的大小有关，其间的关系是

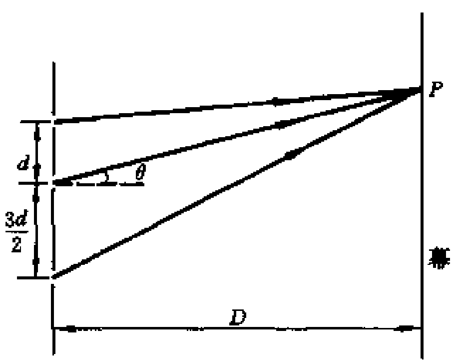
$$\Delta l'=\frac{2R+\delta-d}{s'}\left(D-\frac{d}{2R+\delta-d}s'\right)\approx\frac{2R}{s'}\left(D-\frac{ds'}{2R}\right)$$

若 $2R=5$ cm，利用题设数据得出

$$\Delta l'\approx12\ \text{cm}$$

因 $\Delta l'>\Delta l(\Delta l=0.35\ \text{cm})$，故上述计算适用. 若 R 或 D 较小，使得 $\Delta l'<\Delta l$，则应由 $N=\dfrac{\Delta l'}{\Delta x}$ 计算幕上的干涉条纹数目.

【题5】 如光图2－5－1所示，在杨氏干涉装置中，用三个平行狭缝代替双缝，三缝的缝宽相同 $\left(\text{都}<\dfrac{\lambda}{2}\right)$，缝距分别为 d 和 $\dfrac{3}{2}d$，设单色缝光源与三狭缝的距离足够远，因而到三缝的光程可看作相同，设幕与三缝的距离 D 也足够远. 试求：1. 幕中心小范围内的强度随 θ 变化的分布公式. 2. 一级极大的角位置 θ_1. 3. 在 $\theta=\dfrac{\theta_1}{2}$ 方向的强度与一级极大强度之比.



光图2－5－1

【分析】 首先利用题设的条件作适当近似. 由于缝宽都小

于$\frac{\lambda}{2}$，三狭缝可看作发出强度相同的子波波源，又因幕距 D 足够大，观察范围又很小，故 $\sin\theta \approx \theta$，在幕上 P 点叠加的三束相干光线近似平行，三子波在 P 点引起的光振动的振幅相等，设为 A_0. 在 P 点，三子波的光程差分别为

$$\Delta_1 = d\sin\theta \approx d\theta$$

$$\Delta_2 = \frac{3}{2}d\sin\theta \approx \frac{3}{2}d\theta$$

相应的相位差为

$$\delta_1 = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta_1 = \frac{2\pi d}{\lambda}\theta = 2\beta$$

$$\delta_2 = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta_2 = \frac{3\pi d}{\lambda}\theta = 3\beta$$

式中

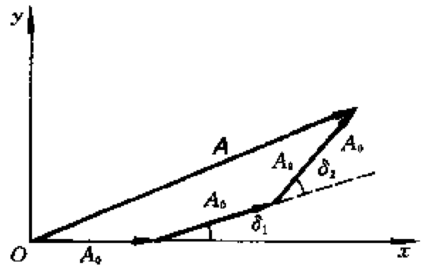
$$\beta = \frac{\pi d}{\lambda}\theta \tag{1}$$

应用矢量图解法不难求得三子波在 P 点叠加后的合振幅，从而可以得出幕上强度的角分布. 对强度求极值，可得出一级极大的角位置 θ_1.

【解】 1. 在 P 点三个振动叠加，其振幅矢量的关系如光图 2－5－2 所示. 合振动的振幅矢量 $\boldsymbol{A}$ 在 x 轴和 y 轴上的分量分别为

$$A_x = A_0[1 + \cos\delta_1 + \cos(\delta_1 + \delta_2)] = A_0(1 + \cos2\beta + \cos5\beta)$$

$$A_y = A_0[\sin\delta_1 + \sin(\delta_1 + \delta_2)] = A_0(\sin2\beta + \sin5\beta)$$



光图 2－5－2

故有

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 = A_0^2[3 + 2(\cos2\beta + \cos3\beta + \cos5\beta)]$$

幕上强度的角分布为

$$I = I_0[3 + 2(\cos2\beta + \cos3\beta + \cos5\beta)] \tag{2}$$

式中 β 如(1)式.

2. 为求强度分布的极值，把 I 对 β 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\beta} = -2I_0(2\sin2\beta + 3\sin3\beta + 5\sin5\beta)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}\beta^2} = -2I_0(4\cos2\beta + 9\cos3\beta + 25\cos5\beta)$$

I 为极值的条件是

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\beta} = 0$$

即

$$\beta = k\pi,\quad \theta = k\frac{\lambda}{d},\qquad k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

当 k 为 0 和偶数时，$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}\beta^2}<0$，$I$ 为极大值．当 k 为奇数时，$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}\beta^2}>0$，$I$ 为极小值．因此，$k=0$，即 $\theta=0$ 时，对应零级极大；$k=2$，即 $\theta=\frac{2\lambda}{d}$ 时，对应一级极大．故一级极大的角位置 θ_1 为

$$\theta_1=\frac{2\lambda}{d}$$

对应的 $\beta=2\pi$，代入强度分布公式(2)，得出一级极大的强度为

$$I_{\max}=I_0(3+2\times3)=9I_0$$

3．当 $\theta=\frac{\theta_1}{2}=\frac{\lambda}{d}$ 时，相应的 $\beta=\pi$，由强度公式(2)，θ 方向的强度为

$$I_\theta=I_0(3-2)=I_0$$

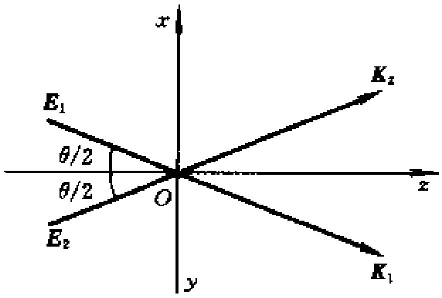
故一级极大的强度与 $\theta=\frac{\theta_1}{2}$ 方向的强度之比为

$$\frac{I_\theta}{I_{\max}}=\frac{1}{9}$$

【题 6】 波长均为 λ，振幅比为 2∶1 的两相干平行光束，以 θ 的夹角射入，观察屏幕与 θ 角的角平分线相垂直．试求：1．幕上干涉条纹的反衬度．2．干涉条纹的间距．

【分析】 为了确定两相干光在幕上形成的干涉条纹的强度分布，关键在于两相干光在幕上任一点引起的振动的相位差．为此，适当选取坐标，根据题目给定的几何条件，写出两相干光在幕上任一点引起的振动的表达式，即可求解．

【解】 如图所示，取直角坐标系 $Oxyz$，屏幕在 Oxy 平面，z 轴沿两相干平行光束的角平分线，x、y、z 轴的单位矢量为 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，则两束相干平行光在屏幕上任一点引起的振动为



光图 2－6－1

$$u_1=E_1\cos(\omega t-\boldsymbol{K}_1\cdot\boldsymbol{r})$$

$$u_2=E_2\cos(\omega t-\boldsymbol{K}_2\cdot\boldsymbol{r})$$

式中

$$E_1:E_2=2:1$$

是振动的振幅比，式中

$$\boldsymbol{K}_1=\frac{2\pi}{\lambda}\left(-\sin\frac{\theta}{2}\boldsymbol{i}+\cos\frac{\theta}{2}\boldsymbol{k}\right)$$

$$\boldsymbol{K}_2=\frac{2\pi}{\lambda}\left(\sin\frac{\theta}{2}\boldsymbol{i}+\cos\frac{\theta}{2}\boldsymbol{k}\right)$$

是两束波的波矢，式中

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$$

是屏幕上任一点的位矢．代入，得

$$u_1=E_1\cos\left(\omega t+\frac{2\pi}{\lambda}\sin\frac{\theta}{2}\cdot x\right),\quad u_2=E_2\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}\sin\frac{\theta}{2}\cdot x\right)$$

叠加后，屏幕上各点的干涉强度随 x 的分布为

$$I=E_1^2+E_2^2+2E_1E_2\cos\delta$$

其中

$$\delta=\frac{4\pi}{\lambda}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)x$$

是屏幕上 x 处两个振动的相位差.当 $\delta=0$ 时,

$$I_{\max}=(E_1+E_2)^2$$

当 $\delta=\pi$ 时,

$$I_{\min}=(E_1-E_2)^2$$

因此,干涉条纹的反衬度为

$$\gamma=\frac{I_{\max}-I_{\min}}{I_{\max}+I_{\min}}=\frac{2E_1E_2}{E_1^2+E_2^2}=\frac{4}{5}=0.8$$

干涉条纹的强度分布只与 x 有关,即干涉条纹是与 x 轴垂直而与 y 轴平行的直线,极大值的位置由

$$\delta=\frac{4\pi}{\lambda}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)x=2k\pi,\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

确定.

设相邻条纹的间距为 Δx,则 Δx 满足

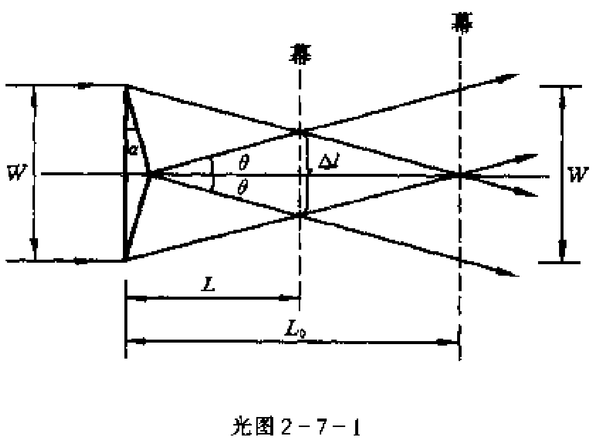
$$\frac{2}{\lambda}\sin\frac{\theta}{2}\cdot\Delta x=1$$

故

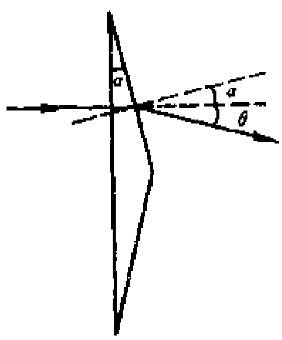
$$\Delta x=\frac{\lambda}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

可见,当 θ 增大时,Δx 减小,条纹变密.

【题7】 波长 $\lambda=632.8$ nm 的平行激光束垂直入射到双棱镜上,双棱镜的顶角 $\alpha=3'30''$,宽度 $W=4.0$ cm,折射率 $n=1.5$.试问:当幕与双棱镜的距离 L 分别为多大时,在幕上观察到的干涉条纹的总数最少和最多?最多时能看到几条干涉条纹?



光图 2-7-1



光图 2-7-2

【分析】 如光图 2-7-1 所示，平行光垂直入射，经双棱镜上半和下半折射后，成为两束倾角均为 θ 的相干平行光（一束向上倾斜，另一束向下倾斜）. 当幕与双棱镜的距离大于或等于光图 2-7-1 中的 L_0 时，两束光在幕上的重叠区域为零，干涉条纹数为零，最少. 当幕与双棱镜的距离为光图 2-7-1 中的 L 时，两束光在幕上的重叠区域最大，为 Δl，干涉条纹数最多. 利用折射定律求出倾角 θ，再利用干涉条纹间距的公式及几何关系，即可求解.

【解】 如光图 2-7-2 所示，由折射定律，

$$n\sin\alpha=\sin(\theta+\alpha)$$

采用小角近似，有

$$n\alpha=\theta+\alpha$$

即

$$\theta=(n-1)\alpha$$

式中 α 是双棱镜顶角，θ 是入射的平行光束经双棱镜上下两半折射后，射出的两束相干平行光的倾角.

在幕上，干涉条纹的间距为（参看本章题 6 的有关公式）

$$\Delta x=\frac{\lambda}{2\sin\theta}=\frac{\lambda}{2(n-1)\alpha}=0.62\ \text{mm}$$

可见干涉条纹的间距与幕的位置无关.

幕上可以观察到的干涉条纹的总数，由两束倾角均为 θ（一向上倾斜，另一向下倾斜）的相干平行光在幕上重叠区域的大小确定，如光图 2-7-1，当幕与双棱镜的距离等于或大于 L_0 时，重叠区域为零，条纹总数为零，L_0 为

$$L_0=\frac{W}{2\theta}=\frac{W}{2(n-1)\alpha}=39.3\ \text{m}$$

当幕与双棱镜相距为 L 时，如光图 2-7-1 所示，重叠区域最大，条纹总数最多，

$$L=\frac{1}{2}L_0=19.6\ \text{m}$$

相应的重叠区域为

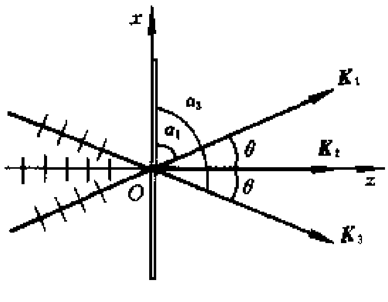
$$\Delta l=2L\theta=2(n-1)\alpha L=(n-1)\alpha L_0=9.98\ \text{mm}$$

其中的干涉条纹总数为

$$\Delta N=\frac{\Delta l}{\Delta x}=16\ \text{条}$$

【题 8】 如图 2-8-1 所示，三束波长均为 λ 的平面波沿 xz 平面入射到位于 $z=0$ 平面的屏幕上，它们的波矢分别为 $\boldsymbol{K}_1$，$\boldsymbol{K}_2$ 和 $\boldsymbol{K}_3$，其中 $\boldsymbol{K}_2$ 与 z 轴一致，$\boldsymbol{K}_1$ 和 $\boldsymbol{K}_3$ 与 z 轴夹角为 θ，振幅依次为 A_0，$2A_0$ 和 A_0，在坐标原点 O 的初相位均为零.

试在以下三种情形下求幕上的干涉强度分布，条纹的反衬度和条纹间距. 1. $\boldsymbol{K}_1$，$\boldsymbol{K}_2$ 和 $\boldsymbol{K}_3$ 波同时存在. 2. 只存在 $\boldsymbol{K}_1$ 和 $\boldsymbol{K}_3$ 波. 3. 只存在 $\boldsymbol{K}_1$ 和 $\boldsymbol{K}_2$ 波. 试比较三种情形的干涉条纹特性.



光图 2-8-1

【分析】 三平面波的波动表达式为

$$u_1 = A_0\cos(\omega t - \boldsymbol{K}_1\cdot\boldsymbol{r})$$
$$u_2 = 2A_0\cos(\omega t - \boldsymbol{K}_2\cdot\boldsymbol{r})$$
$$u_3 = A_0\cos(\omega t - \boldsymbol{K}_3\cdot\boldsymbol{r})$$

式中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}_1\cdot\boldsymbol{r} &= \frac{2\pi}{\lambda}(x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1)\\ &= \frac{2\pi}{\lambda}(x\cos\alpha_1 + z\cos\gamma_1)\\ \boldsymbol{K}_2\cdot\boldsymbol{r} &= \frac{2\pi}{\lambda}(x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2)\\ &= \frac{2\pi}{\lambda}(x\cos\alpha_2 + z\cos\gamma_2)\\ \boldsymbol{K}_3\cdot\boldsymbol{r} &= \frac{2\pi}{\lambda}(x\cos\alpha_3 + y\cos\beta_3 + z\cos\gamma_3)\\ &= \frac{2\pi}{\lambda}(x\cos\alpha_3 + z\cos\gamma_3)\end{aligned}$$

式中的 cos 函数分别是 $\boldsymbol{K}_1,\boldsymbol{K}_2$ 和 $\boldsymbol{K}_3$ 的方向余弦，因三波均沿 xz 平面传播，故 $\cos\beta_1=\cos\beta_2=\cos\beta_3=0$. 对幕上的任一叠加点，有 $z=0$，因而在幕上的相位分布为

$$\boldsymbol{K}_1\cdot\boldsymbol{r} = \frac{2\pi}{\lambda}x\cos\alpha_1 = \frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta$$
$$\boldsymbol{K}_2\cdot\boldsymbol{r} = 0$$
$$\boldsymbol{K}_3\cdot\boldsymbol{r} = \frac{2\pi}{\lambda}x\cos\alpha_3 = -\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta$$

幕上叠加点的三个振动为

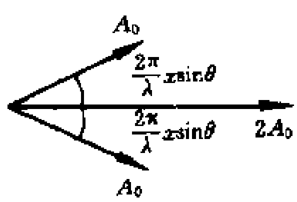
$$u_1 = A_0\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta\right)$$
$$u_2 = 2A_0\cos\omega t$$
$$u_3 = A_0\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta\right)$$

用矢量法或复数法可求得合振动，从而得到干涉强度分布，进而可求条纹反衬度和条纹间距.

【解】 1. $\boldsymbol{K}_1,\boldsymbol{K}_2$ 和 $\boldsymbol{K}_3$ 三波同时存在

用矢量法：三振动的振幅矢量图如光图 2－8－2 所示，合振动的振幅为

$$\begin{aligned}A &= 2A_0 + 2A_0\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta\right)\\ &= 2A_0\left[1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta\right)\right]\end{aligned}$$



光图 2－8－2

干涉强度为

$$\begin{aligned}I &= A^2 = 4A_0^2\left[1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta\right)\right]^2\\ &= 4I_0\left[1+2\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta\right)\right]\end{aligned}$$

用复数法：三波在幕上的复振幅分布为

$$\tilde{u}_1 = A_0 \exp\left(\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta\right)$$

$$\tilde{u}_2 = 2A_0$$

$$\tilde{u}_3 = A_0 \exp\left(-\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta\right)$$

叠加后的总复振幅为

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 + \tilde{u}_3 \\ &= 2A_0 + A_0\left[\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta\right) + \exp\left(-\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta\right)\right] \\ &= 2A_0\left[1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta\right)\right]\end{aligned}$$

光强为

$$I = \tilde{u}\tilde{u}^* = 4A_0^2\left[1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta\right)\right]^2$$

结果与矢量法相同.

可见,干涉强度只与 x 有关,是与 x 轴垂直的平行条纹.当 x 满足

$$\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta = 2k\pi$$

即当

$$x = \frac{k\lambda}{\sin\theta},\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{1}$$

时,为干涉极大,其强度为

$$I_{\max} = 4I_0[1+2+1] = 16\,I_0$$

当 x 满足

$$\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta = (2k+1)\pi$$

即当

$$x = \frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\sin\theta}\lambda,\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

时,为干涉极小,其强度为

$$I_{\min} = 4I_0[1-2+1] = 0$$

由(1)式,条纹间距为

$$\Delta x_1 = \frac{\lambda}{\sin\theta}$$

由反衬度定义

$$\gamma_1 = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = 1$$

2. 只存在 $\boldsymbol{K}_1$ 和 $\boldsymbol{K}_3$ 波

合振幅为

$$A = 2A_0\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta\right)$$

干涉强度为

$$I=4I_0\cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta\right)$$

干涉极大满足

$$\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta=k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

即

$$x=\frac{k\lambda}{2\sin\theta}$$

条纹间距为

$$\Delta x_2=\frac{\lambda}{2\sin\theta}$$

干涉极大和极小的强度分别为

$$I_{\max}=4I_0,\quad I_{\min}=0$$

故反衬度为

$$\gamma_2=1$$

3. 只存在 $\boldsymbol{K}_1$ 和 $\boldsymbol{K}_2$ 波

合振幅为

$$A=2A_0+A_0\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta\right)$$

干涉强度为

$$\begin{aligned}I&=A^2=A_0^2\left[2+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta\right)\right]^2\\&=I_0\left[4+4\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta\right)\right]\end{aligned}$$

干涉极大满足

$$\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta=2k\pi$$

$$x=\frac{k\lambda}{\sin\theta},\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

干涉极大的强度为

$$I_{\max}=I_0[4+4+1]=9I_0$$

条纹间距为

$$\Delta x_3=\frac{\lambda}{\sin\theta}$$

干涉极小满足

$$\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta=(2k+1)\pi$$

干涉极小的强度为

$$I_{\min}=I_0[4-4+1]=I_0$$

故条纹反衬度为

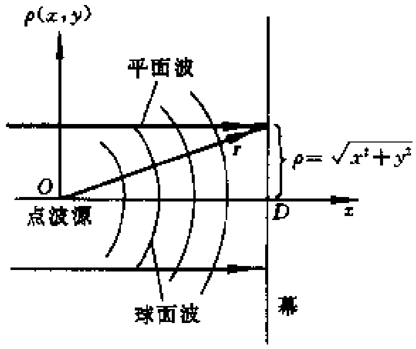
$$\gamma_3=\frac{I_{max}-I_{min}}{I_{max}-I_{min}}=\frac{9-1}{9+1}=0.8$$

以上三种情形的干涉结果,可以列表比较如下.

	条纹间距 Δx	I_{max}	I_{min}	反衬度 γ
$\boldsymbol{K}_1,\boldsymbol{K}_2,\boldsymbol{K}_3$	$\frac{\lambda}{\sin\theta}$	$16\ I_0$	0	1
$\boldsymbol{K}_1,\boldsymbol{K}_3$	$\frac{\lambda}{2\sin\theta}$	$4\ I_0$	0	1
$\boldsymbol{K}_1,\boldsymbol{K}_2$	$\frac{\lambda}{\sin\theta}$	$9\ I_0$	I_0	0.8

注意到第一种 情形具有最高的条纹锐度和最大的反衬度.

【题 9】 如图所示,一波矢为 $\boldsymbol{k}$,振幅为 A 的简谐平面波沿 $+z$ 方向传播.同时在 z 轴上 O 点处有一同频率的点波源发出简谐球面波.在与 O 点距离为 D 处放置一个与 z 轴垂直的幕.假定平面波与球面波在 O 点有相同的初相位,球面波在与点波源 O 点的距离为一个单位长度处的振幅是平面波振幅的 D 倍,幕与 z 轴交点处的光强为 I_0.试求幕上近轴区域干涉强度的分布公式,干涉条纹的特征如何?



光图 2-9-1

【分析】 平面波照到幕上时,各点具有相同的振幅和相位;球面波照到幕上时,与幕中心等距的各点有相同的相位.所以,与幕中心等距的各点有相同的相位差,两波叠加后有相同的干涉强度.因此,幕上的干涉条纹为一组同心圆环.

写出平面波和球面波在幕上的复振幅分布,叠加后即可得出强度分布.

【解】 如图,取点波源 O 为坐标原点,幕上任一点的位矢为 $\boldsymbol{r}(x,y,0)$,该点与幕心的距离为 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$.平面波在幕上的复振幅分布为

$$\tilde{u}_1=Ae^{ikD}$$

式中波矢 $k=\frac{2\pi}{\lambda}$,λ 为波长.球面波在幕上的复振幅分布为

$$\tilde{u}_2=\frac{AD}{r}e^{ikr}$$

式中

$$\begin{aligned}r&=\sqrt{x^2+y^2+D^2}\\&=\sqrt{\rho^2+D^2}\end{aligned}$$

对于近轴区域,$\rho\ll 0$,故有

$$r=(D^2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}\approx D\left(1+\frac{\rho^2}{2D^2}\right)\approx D$$

球面波复振幅表达式中的分母 r 可用 r 的零级近似 D 代替,而相位因子中的 r 则必须用 r 的一

级近似$D\left(1+\frac{\rho^2}{2s^2}\right)$代替(因为对于光波,其波数 k 是一个很大的数),于是球面波的复振幅可简化为

$$\tilde{u}_2=\frac{AD}{r}e^{ikr}\approx A\ e^{ikD\left(1+\frac{\rho^2}{2D^2}\right)}=Ae^{ikD}e^{i\frac{k}{2D}\rho^2}$$

两波叠加后的复振幅为

$$\tilde{u}=\tilde{u}_1+\tilde{u}_2=Ae^{ikD}(1+e^{ik\frac{\rho^2}{2D}})=Ae^{i\frac{2\pi}{\lambda}D}(1+e^{i\frac{\pi}{D\lambda}\rho^2})$$

光强分布为

$$\begin{aligned}I&=\tilde{u}\,\tilde{u}^*=A^2(1+e^{i\frac{\pi}{D\lambda}\rho^2})(1+e^{-\frac{\pi}{D\lambda}\rho^2})\\&=2A^2\left(1+\cos\frac{\pi}{D\lambda}\rho^2\right)=4A^2\cos^2\left(\frac{\pi}{2D\lambda}\rho^2\right)=I_0\cos^2\left(\frac{\pi}{2D\lambda}\rho^2\right)\end{aligned}$$

式中 I_0 是幕中心($\rho=0$)的强度.可见,凡与幕中心等距的点(即 ρ 相同的点),有相同的干涉强度,干涉条纹为同心圆环,亮环的半径 ρ 满足

$$\frac{\pi\rho^2}{2D\lambda}=N\pi,\quad N=0,1,2\cdots$$

即

$$\rho=\sqrt{2ND\lambda}$$

第一亮环($N=1$)的半径为

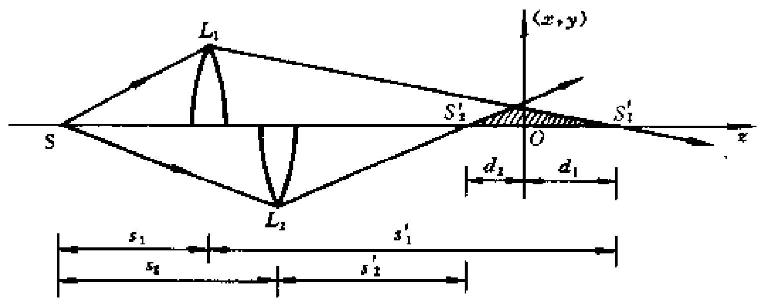
$$\rho_1=\sqrt{2D\lambda}$$

第 N 个亮环的半径为

$$\rho_N=\sqrt{N}\rho_1$$

这种分布与菲涅耳波带片的半径公式一致.

【题 10】 如图的梅斯林干涉装置是将一透镜对剖后沿主光轴错开一定距离.单色点光源 S 位于主光轴上,经上和下两个半透镜成像于 S'_1 和 S'_2,在两束相干光的重叠区域内,垂直于主光轴放一屏幕.



光图 2-10-1

1.试问在幕上的干涉条纹是什么形状? 2.设透镜焦距 $f=30$ cm.点光源与较近的半透镜 L_1 的距离为 60 cm,两个半透镜之间错开的距离为 8.0 cm,单色光的波长为 500 nm,屏幕放在

S'_1 和 S'_2 的中点.试求在傍轴条件下幕上干涉条纹的间距.

【分析】 如图,取 $Oxyz$ 坐标,z 轴沿主光轴,幕在 xy 平面,幕与主光轴的交点为原点 O.

点光源 S 经两个半透镜 L_1 和 L_2 分别成像于 S'_1 和 S'_2,这是两个相干点光源,相应的两束相干光在图中画斜线的区域重叠,置于 $S'_1S'_2$ 中间的屏幕上应观察到干涉条纹.

从点光源 S 发出经 L_1 成像于 S'_1 的这一束光在重叠区域内是会聚的球面波,而从 S 发出经 L_2 成像于 S'_2 的另一束光在重叠区域内是发散的球面波.这两束光在重叠区内任一点叠加后的相干强度取决于两者的振幅以及两者之间的相位差.由会聚和发散球面波复振幅的表达式,结合傍轴条件,即可给出两者的振幅以及相位,再由相位差 $\delta=2k\pi$ 的条件确定 k 级亮纹的形状.利用成像公式确定 S'_1 和 S'_2 的位置,再利用亮纹形状及有关几何关系即可确定条纹间距.

【解】 发散球面波的复振幅为

$$\tilde{u}(\boldsymbol{r})=\frac{A_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}\ \mathrm{e}^{ik(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 是波场中某一点的径矢,$\boldsymbol{r}_0$ 为球心的径矢,$k=\frac{2\pi}{\lambda}$为波矢大小.若球心在 z 轴上,则

$$\boldsymbol{r}_0=(0,0,z_0)$$

复振幅可表为

$$\tilde{u}(x,y,z)=\frac{A_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}\mathrm{e}^{ik[x^2+y^2+(z-z_0)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

位于 $z=0$ 处的 xy 平面上的复振幅为

$$\tilde{u}(x,y)=\frac{A_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}\mathrm{e}^{ik[x^2+y^2+z_0^2]^{\frac{1}{2}}}$$

在傍轴条件下

$$x^2+y^2\ll z_0^2$$

则

$$(x^2+y^2+z_0^2)^{\frac{1}{2}}=z_0\left(1+\frac{x^2+y^2}{z_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}\approx z_0+\frac{x^2+y^2}{2z_0}$$

故复振幅为

$$\tilde{u}(x,y)=\frac{A_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}\ \exp\mathrm{i}kz_0\exp\mathrm{i}\,\frac{k}{2z_0}(x^2+y^2)$$
$$=\tilde{A}\exp\frac{\mathrm{i}k}{2z_0}(x^2+y^2)$$

在傍轴条件下,式中的 $\tilde{A}$ 可看作是恒定的.

会聚球面波的复振幅为

$$\tilde{u}(\boldsymbol{r})=\frac{A_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}\exp[-\mathrm{i}k(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)]$$

若球心在 z 轴上,在傍轴条件下,在 $z=0$ 处的 xy 平面上的复振幅为

$$\tilde{u}(x,y)=\tilde{A}\exp\left[-\frac{\mathrm{i}k}{2z_0}(x^2+y^2)\right]$$

以上是一般讨论.在本题中,重叠区域的两束相干光,一束是从 S 发出经 L_1 成像于 S'_1,并

以 S'_1 为球心的会聚球面波;另一束是从 S 发出经 L_2 成像于 S'_2,并以 S'_2 为球心的发散球面波.它们在 $z=0$ 平面上任一点(x,y)的复振幅分别为

$$\tilde{u}_1(x,y)=\tilde{A}_1\exp\left[-\frac{ik}{2d_1}(x^2+y^2)\right]$$

$$\tilde{u}_2(x,y)=\tilde{A}_2\exp\frac{ik}{2d_2}(x^2+y^2)$$

式中 d_1 和 d_2 分别为球心 S'_1 和 S'_2 到原点 O 的距离.由题设

$$d_1=d_2=d$$

这两束相干光在 $z=0$ 平面上叠加后的相干强度为

$$I=|\tilde{A}_1|^2+|\tilde{A}_2|^2+2|\tilde{A}_1||\tilde{A}_2|\cos\delta$$

式中

$$\delta=\frac{k}{2}\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}\right)(x^2+y^2)$$

是两束相干光在(x,y)点$(z=0)$引起的两个振动的相位差.干涉条纹的 n 级亮纹应满足

$$\frac{k}{2}\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}\right)(x^2+y^2)=2n\pi$$

式中 k 是波矢,为

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}$$

代入,得

$$x^2+y^2=\frac{2n\lambda}{\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}}=\rho^2$$

即

$$\rho^2=\frac{2n\lambda}{\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}}=n\lambda d$$

因此,当幕放在 S'_1 和 S'_2 中央且与主光轴垂直时,幕上的干涉条纹是以原点 O 为中心的一系列同心圆,各圆的半径 ρ 由级次 n 确定.

由高斯成像公式,对 L_1,物距 $s_1=60$ cm,像距 s'_1 为

$$s'_1=\frac{s_1f}{s_1-f}=\frac{60\times30}{30}=60\ \text{cm}$$

对 L_2,物距 $s_2=60+8=68$ cm,像距 s'_2 为

$$s'_2=\frac{s_2f}{s_2-f}=\frac{68\times30}{38}=53.7\ \text{cm}$$

故 S'_1 与点光源 S 的距离为 $60+60=120$ cm,S'_2 与点光源 S 的距离为 $53.7+68=121.7$ cm,S'_1 与 S'_2 的距离为 $121.7-120=1.7$ cm.于是

$$d_1=d_2=d=\frac{1}{2}\overline{S'_1S'_2}=0.85\ \text{cm}$$

第 n 级亮纹的半径为

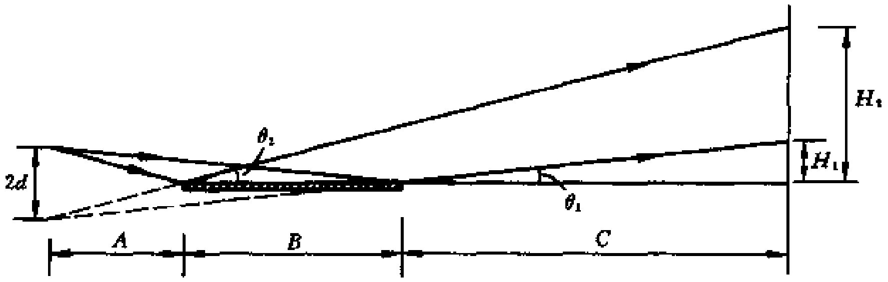
$$\rho=\sqrt{n\lambda d}=6.52\times10^{-5}\sqrt{n}\ \text{m}$$

第 n 级与第$(n+1)$级条纹之间的距离为

$$\Delta\rho=\rho(n+1)-\rho(n)=6.52\times10^{-5}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\ \text{m}$$

可见，幕上以原点 O 为圆心的一系列同心圆形状的干涉条纹的间距是不均匀的.

【题11】 如图的洛埃镜镜长 $B-5.00$ cm，幕与镜的右端相距 $C=5.00$ m，点光源高出镜面的距离为 $d=0.500$ mm，与镜左端的水平距离 $A=2.00$ cm，光波波长 $\lambda=600$ nm.



光图 2－11－1

1. 试求幕上干涉条纹的间距. 2. 试问幕上总共能出现多少条干涉条纹. 3. 为了在叠加区域能看到全部干涉条纹，试问对光谱宽度 $\Delta\lambda$ 有何要求.

【分析】 洛埃镜产生的干涉强度分布与杨氏干涉相仿，可直接利用杨氏条纹的间距公式. 通过作图，利用几何关系可求得叠加区的范围，于是总条纹数可得. 对光谱宽度的要求可用两种方法确定. 其一是求出产生干涉条纹的最大光程差 Δ_m(相应级次最大)，看清最大级次干涉条纹的条件是 Δ_m 不得大于相干长度 L_c，而 L_c 与光谱宽度 $\Delta\lambda$ 有关. 其二是求出干涉条纹的最大级次及相应的条纹宽度 $\Delta x'$(展宽与级次有关)，看清干涉条纹的条件是条纹展宽 $\Delta x'$ 小于条纹间距 Δx.

【解】 1. 条纹间距

$$\Delta x=\frac{A+B+C}{2d}\lambda=3.04\times10^{-3}\ \text{m}$$

2. 反射光与直射光的重叠区(H_2-H_1)也是条纹存在的区域. 由几何关系

$$H_2-H_1=(B+C)\tan\theta_2-C\tan\theta_1=(B+C)\frac{d}{A}-\frac{Cd}{A+B}$$

$$\approx\frac{Cd}{A}-\frac{Cd}{A+B}=\frac{CdB}{A(A+B)}=8.93\times10^{-2}\ \text{m}$$

条纹数

$$N=\frac{H_2-H_1}{\Delta x}=29.4$$

共有 29 条干涉条纹.

3. 由于反射造成的附加光程差$\frac{\lambda}{2}$是一个很小的附加量，可略，在叠加区的最大光程差为

$$\Delta_m=\frac{2d}{A+B+C}H_2=\frac{2d}{A+B+C}\cdot\frac{(B+C)d}{A}\approx\frac{2d^2}{A}=2.5\times10^{-5}\ \text{m}$$

看清全部干涉条纹的条件是

$$\Delta_m \leqslant L_c$$

式中相干长度 L_c 为

$$L_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

式中 $\Delta\lambda$ 为光谱宽度.即要求

$$\Delta\lambda \leqslant \frac{\lambda^2}{\Delta_m} = 1.44\times10^{-8}\ \text{m} = 14.4\ \text{nm}$$

对光谱宽度的限制也可用下法求得.由前,对最边缘的干涉条纹,

$$H_2 = (B+C)\frac{d}{A} = 0.126\ \text{m}$$

相应级次最大,为

$$k_{\max} = \frac{H_2}{\Delta x} = 41.5$$

取 $k_{\max}\approx42$.由于入射光的波长有一定宽度,不同波长的干涉条纹间距不等,借用杨氏干涉的公式,波长为 λ 的光的干涉极大位置为(略去反射造成的半波损)

$$x = k\,\frac{D}{2d}\lambda$$

式中 k 为干涉级次,$D=A+B+C$,$2d$ 为两相干光源的间距.若光谱宽度为 $\Delta\lambda$,则 k 级极大的展宽为

$$\Delta x' = k\,\frac{D}{2d}\Delta\lambda$$

看清 $k_{\max}$级附近条纹的条件为

$$\Delta x' < \Delta x$$

式中 Δx 为条纹间距,即要求

$$k_{\max}\frac{D}{2d}\Delta\lambda < \Delta x$$

即

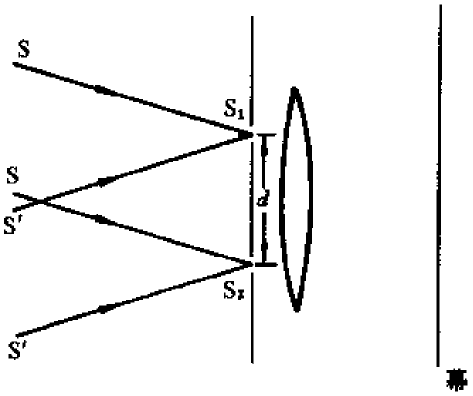
$$\Delta\lambda < \frac{2d\Delta x}{k_{\max}D} = \frac{2d\Delta x}{k_{\max}(A+B+C)} = 1.43\times10^{-8}\ \text{m} = 14.3\ \text{nm}$$

两种方法均为近似计算,结果略有出入不足为奇.

【题 12】 如光图 2－12－1 所示,间距为 d 的双孔 S_1 和 S_2 后放置一会聚透镜,透镜后焦面上放一屏幕.上述干涉装置正对遥远的双星 S 和 S′,在幕上观察双星产生的干涉条纹.当 d 从小连续变大时,干涉条纹的反衬度将作周期性变化.

1. 试解释此现象. 2. 若星光的平均波长为 550 nm,当 d 变到 2.0 mm 时,条纹第一次变模糊,试求双星的角间距.

【分析】 双星可以看作是在无穷远处的两个点光源,入射到双孔的是两束平行光.在幕上形成分别由星 S 和 S′产生的两套干涉条纹,它们的条纹间距相同.如光图 2－12－2 所示,幕上任取一点 P,星 S 在 P 点产生的干涉强度由光程差 Δ 决定,星 S'在 P 点产生的干涉强度由光程差 Δ' 决



光图 2－12－1

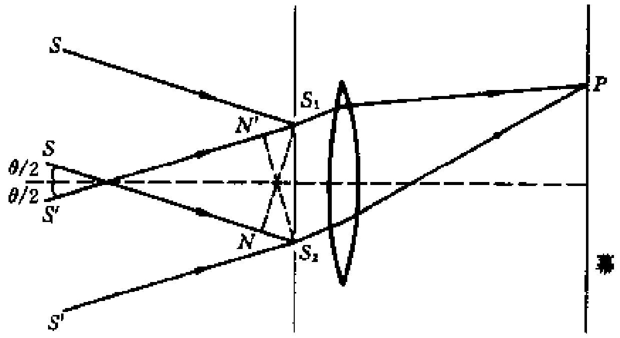
定.若|$\Delta'-\Delta$|正好是波长 λ 的整数倍,则两套条纹的极大与极大重合,极小与极小重合,条纹具有最大的反衬度.若|$\Delta'-\Delta$|正好是半波长的奇数倍,则一套条纹的极大与另一套条纹的极小重合,条纹变模糊.算出|$\Delta'-\Delta$|及相应的级次差 Δk,Δk 与 d 有关,当 d 由小连续变大时,Δk 也作相应变化.当 Δk 为整数时条纹清晰,当 Δk 为半整数的奇数倍时条纹模糊.

【解】 1.如光图 2－12－2,设双星的角距离为 θ,双孔连线的中垂线平分 θ 角.入射光 S 在 P 点的光程差为

$$\Delta=[NS_2]+[S_2P]-[S_1P]$$

入射光 S' 在 P 点的光程差为

$$\Delta'=[S_2P]-[N'S_1]-[S_1P]$$



光图 2－12－2

故

$$\Delta-\Delta'=[NS_2]+[N'S_1]=2\ NS_2\approx 2d\ \frac{\theta}{2}=\theta\ d$$

相应的级次差为

$$\Delta k=\frac{\Delta-\Delta'}{\lambda}=\frac{\theta d}{\lambda}$$

当

$$\Delta k=1,2,3,\cdots \tag{1}$$

时,两套条纹的极大值重合,条纹最清晰.反之,当

$$\Delta k=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\cdots \tag{2}$$

时,S 产生的极大与 S′产生的极小重合,条纹最模糊.当 d 从零开始增大,使 $\Delta k=\frac{1}{2}$ 时,条纹第一次变模糊.故第一次变模糊时的 d 值满足

$$d=\frac{\lambda}{2\theta} \tag{3}$$

d 连续增大时,Δk 将依次取(1)、(2)两式中的各值,故条纹的清晰度将作周期性变化.

2.由(3)式,双星的角间距为

$$\theta=\frac{\lambda}{2d}=\frac{5.5\times10^{-4}}{2\times2.0}=1.4\times10^{-4}\ \text{rad}$$

【题 13】 在杨氏干涉实验中,已知双孔间的距离为 d,光源到双孔的距离为 R,双孔到观察屏幕的距离为 D,单色光源的波长为 λ.

试求:1.屏幕上干涉条纹的反衬度 γ 与光源宽度 b 之间的关系.2.当光源宽度等于临界宽度的 $\frac{1}{4}$ 时,干涉条纹有足够的反衬度,此时 γ 等于多少?

【分析】 干涉条纹的反衬度 γ 定义为强度极大值和极小值之差与之和的比例,即

$$\gamma=\frac{I_{\max}-I_{\min}}{I_{\max}+I_{\min}}$$

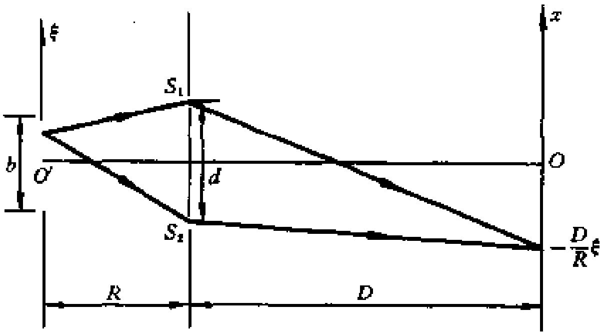
当光源宽度无限窄时,条纹的 $I_{\min}$ 为零,$\gamma=1$.当光源有一定宽度时,可分解为许多窄宽度的光源,由于它们的位置不同,屏幕上相应干涉条纹极大和极小的位置也不同,交叉重叠导致反衬度下降.当光源两端在屏幕上产生的干涉条纹刚好错过半个条纹宽度时,即光源一端的极大刚好与另一端的极小重叠时,反衬度 $\gamma=0$,无法看到干涉条纹,相应的光源宽度称为临界宽度.

把有限宽度的光源,分成许多无限窄的部分,求出任一部分在屏幕上的强度发布,再求和(积分)即可得出屏幕上的强度分布,由其极大与极小值确定反衬度 γ.

【解】 如图所示,在光源面上设 $O'\xi$ 坐标,在屏幕设 Ox 坐标.位于光源中央 O' 点的点光源在屏幕上产生的干涉条纹的强度分布为

$$I(x)\propto\left(1+\cos\frac{2\pi d}{\lambda D}x\right)$$

屏幕中央 $x=0$ 处的 O 点是零级极大的位置.



光图 2-13-1

位于 O' 上方 ξ 处的点光源在屏幕上产生的干涉条纹的零级极大的位置从 O 点下移到 $-\frac{D}{R}\xi$ 处(即整个条纹下移),干涉条纹的强度分布为

$$I(x)\propto\left[1+\cos\frac{2\pi d}{\lambda D}\left(x-\frac{D}{R}\xi\right)\right]$$

在 ξ 处宽度为 $\mathrm{d}\xi$ 的光源产生的干涉条纹的强度分布为

$$\mathrm{d}I(x)\propto\left[1+\cos\frac{2\pi d}{\lambda D}\left(x-\frac{D}{R}\xi\right)\right]\mathrm{d}\xi$$

宽度为 b 的光源在屏幕上产生的干涉条纹的强度分布为

$$I(x)\propto\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left[1+\cos\frac{2\pi d}{\lambda D}\left(x-\frac{D}{R}\xi\right)\right]\mathrm{d}\xi$$

$$=b+\left.\frac{\sin\frac{2\pi d}{\lambda D}\left(x-\frac{D}{R}\right)\xi}{\frac{2\pi d}{\lambda D}\cdot\frac{D}{R}}\right|_{\xi=-\frac{b}{2}}^{\xi=\frac{b}{2}}=b+\frac{\sin\frac{2\pi d}{\lambda D}\left(x+\frac{Db}{2R}\right)-\sin\frac{2\pi d}{\lambda D}\left(x-\frac{Db}{2R}\right)}{\frac{2\pi d}{\lambda R}}$$

$$= b + b\frac{\sin\frac{\pi db}{\lambda R}}{\frac{\pi db}{\lambda R}}\cos\frac{2\pi d}{\lambda D}x = b\left(1 + \frac{\sin\frac{\pi db}{\lambda R}}{\frac{\pi db}{\lambda R}}\cos\frac{2\pi d}{\lambda D}x\right)$$

强度的极大值和极小值分别为

$$I_{\max}\propto 1 + \left|\frac{\sin\frac{\pi db}{\lambda R}}{\frac{\pi db}{\lambda R}}\right|,\quad I_{\min}\propto 1 - \left|\frac{\sin\frac{\pi db}{\lambda R}}{\frac{\pi db}{\lambda R}}\right|$$

干涉条纹的反衬度 γ 为

$$\gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad = \left|\frac{\sin\frac{\pi db}{\lambda R}}{\frac{\pi db}{\lambda R}}\right|$$

当$\frac{\pi db}{\lambda R}=\pi$时，$\gamma=0$(第一极小)．若忽略$\frac{\sin\frac{\pi db}{\lambda R}}{\frac{\pi db}{\lambda R}}$的次极大，则 $\gamma\neq 0$ 的条件为

$$\frac{\pi db}{\lambda R}<\pi$$

即

$$b<\frac{\lambda R}{d}$$

因此，反衬度不为零的光源临界宽度 b_c 为

$$b_c=\frac{\lambda R}{d}$$

当光源宽度为

$$b = \frac{1}{4}b_c=\frac{\lambda R}{4d}$$

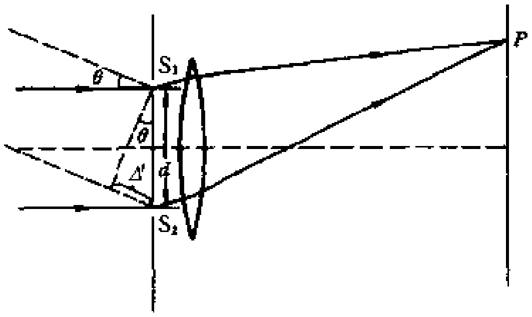
时，反衬度 γ 为

$$\gamma = \left|\frac{\sin\frac{\pi db}{\lambda R}}{\frac{\pi db}{\lambda R}}\right| = \left|\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}}\right| = 0.9$$

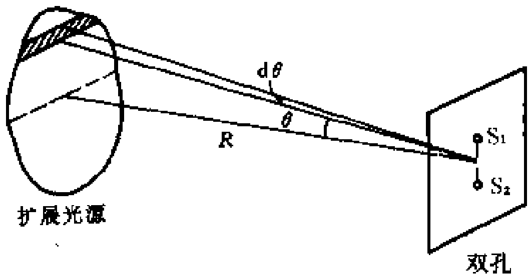
【题 14】 如光图 2－14－1 所示，间距为 d 的双孔 S_1 和 S_2 后放置一会聚透镜，透镜后焦面上放一屏幕(与本章题 12 的装置相同)．该干涉装置正对远处的扩展光源．试导出计算条纹反衬度的一般公式，并将此一般公式应用于发光强度均匀的矩形扩展光源．

【分析】 因光源足够远(R 足够大)，光源上各点发出的光均以平行光形式入射到双孔 S_1 和 S_2 上．如光图 2－14－2 所示，将扩展光源分成许多与 S_1 和 S_2 连线垂直的平行窄条，各窄条的位置可用角距离 θ 标志，窄条的宽度用 $d\theta$ 表示．$\theta=0$ 的窄条发出的光向双孔正入射，经双孔后在幕上的 P 点叠加，设光程差为 Δ_0．现考虑角距离为 θ 的窄条，它发出的光以倾角 θ 向双孔斜入射，

在叠加点 P 的光程差 Δ 为



光图 2－14－1



光图 2－14－2

$$\Delta = \Delta_0 + \Delta' = \Delta_0 + \theta d$$

相应的相位差为

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta = \frac{2\pi}{\lambda}(\Delta_0 + \theta d) \tag{1}$$

该窄条在 P 点形成的干涉强度为(由双光束干涉强度公式)

$$\mathrm{d}I = 2i_0(1 + \cos\delta)\mathrm{d}\theta \tag{2}$$

式中 $\mathrm{d}\theta$ 是该窄条的角宽度，i_0 是角位置为 θ 的单位角宽度窄条发出的光通过单孔(S_1 或 S_2)到达 P 点的光强，它与光源的发光强度分布及窄条的长度(扩展光源的形状)有关，即 i_0 一般是 θ 的函数.

把(2)式在整个光源上积分，即得 P 点的总干涉强度 I，求出 I 的极值(极大值和极小值)，由反衬度 γ 的定义即可得出 γ 的一般公式.

【解】 结合(1)、(2)两式，位于 θ 角位置的窄条在 P 点产生的干涉强度为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}I &= 2i_0\left[1 + \cos\frac{2\pi}{\lambda}(\Delta_0 + \theta d)\right]\mathrm{d}\theta \\ &= \left[2i_0 + 2i_0\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta_0\right)\cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\theta\right) - 2i_0\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta_0\right)\sin\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\theta\right)\right]\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

对光源上各窄条在 P 点的光强贡献求和，即上式对 θ 积分，注意到 i_0 一般与 θ 有关，而 Δ_0 为定值(P 点一定)，故 P 点的总光强为

$$I = 2\int i_0\mathrm{d}\theta + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta_0\right)\int 2i_0\cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\theta\right)\mathrm{d}\theta - \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta_0\right)\int 2i_0\sin\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

上述积分的上限和下限是与光源上最边缘两窄条的角位置.令

$$\begin{cases} A = 2\int i_0\,\mathrm{d}\theta \\ B = 2\int i_0\cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\theta\right)\mathrm{d}\theta \\ C = 2\int i_0\sin\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\theta\right)\mathrm{d}\theta \end{cases} \tag{3}$$

则有

$$I=A+B\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta_0\right)-C\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta_0\right) \tag{4}$$

当扩展光源的发光强度分布以及大小和形状确定后，A、B、C 均为定值. 可见 P 点总光强 I 是 Δ_0 的函数，而 Δ_0 又与 P 点位置有关，故(4)式给出了总干涉强度在幕上的分布. I 的极值应满足

$$\frac{dI}{d\Delta_0}=0=-B\frac{2\pi}{\lambda}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta_0\right)-C\frac{2\pi}{\lambda}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta_0\right)$$

由上式得

$$\tan\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta_0\right)=-\frac{C}{B}$$

因而 I 取极值的条件也可写成

$$\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta_0\right)=\mp\frac{C}{\sqrt{B^2+C^2}}$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta_0\right)=\pm\frac{B}{\sqrt{B^2+C^2}}$$

把以上两式代入(4)式，得出 I 的极值为

$$I_{\text{极值}}=A\pm\frac{B^2}{\sqrt{B^2+C^2}}\pm\frac{C^2}{\sqrt{B^2+C^2}}=A\pm\sqrt{B^2+C^2}$$

所以，I 的极大值和极小值分别为

$$I_{\max}=A+\sqrt{B^2+C^2},\quad I_{\min}=A-\sqrt{B^2+C^2}$$

由反衬度 γ 的定义，得

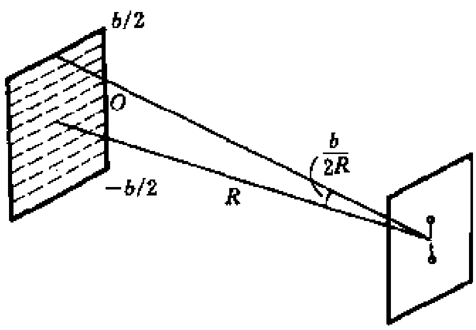
$$\gamma=\frac{I_{\max}-I_{\min}}{I_{\max}+I_{\min}}=\frac{\sqrt{B^2+C^2}}{A} \tag{5}$$

只要给出光源的具体数据，由(3)式可求出 A、B、C，再由(5)式算出 γ 值，以上计算未考虑小孔的衍射现象，我们假定小孔很小，在有限的观察范围内由于衍射而引起的对相干光强度的限制可忽略.

现将以上结果应用于矩形光源. 如光图 2－14－3 所示，光源宽度为 b，并假定发光强度均匀. 在上述条件下，i_0 为定值. 由(3)式

$$A=2\int_{-\frac{b}{2R}}^{\frac{b}{2R}}i_0\mathrm{d}\theta=\frac{2b}{R}i_0$$

式中 R 是光源到双孔的距离 .



光图 2－14－3

$$B=2i_0\int_{-\frac{b}{2R}}^{\frac{b}{2R}}\cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\theta\right)\mathrm{d}\theta=2i_0\frac{\lambda}{\pi d}\sin\left(\frac{\pi bd}{R\lambda}\right)$$

$$C = 2i_0\int_{-\frac{b}{2R}}^{\frac{b}{2R}}\sin\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\theta\right)\mathrm{d}\theta = 0$$

代入(5)式，

$$\gamma = \frac{B}{A} = \frac{R\lambda}{\pi bd}\sin\left(\frac{\pi bd}{R\lambda}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi bd}{R\lambda}\right)}{\frac{\pi bd}{R\lambda}} = \mathrm{sinC}\left(\frac{\pi bd}{R\lambda}\right)$$

此结果与上题(本章题 13)的结果一致.

sinc 函数的第一个极小满足

$$\frac{\pi bd}{R\lambda} = \pi$$

若令 d 由小连续变大，条纹反衬度第一次变为零的 d 值为

$$d = \frac{R\lambda}{b} = \frac{\lambda}{\theta}$$

式中 θ 为光源的角宽度.

在本章题 12 中，光源为两点光源，反衬度第一次变为零的 d 值为

$$d = \frac{\lambda}{2\theta}$$

一般情形下，反衬度第一次变为零的双孔间距可写为

$$d = k\,\frac{\lambda}{\theta}$$

对于等强的两点光源，$k=\frac{1}{2}$；对于发光均匀的矩形光源，$k=1$；对于角直径为 θ 的均匀发光圆盘，$k=1.22$

【题 15】 三个平凸透镜 A、B、C，两两组合成牛顿环干涉装置. 以波长 $\lambda=600$ nm 的单色光垂直入射，观察空气层产生的牛顿环. 当 A 和 B 组合时，测得第 10 个暗环的半径为 $r_{AB}=4.0$ mm；当 B 和 C 组合时，第 10 个暗环的半径为 $r_{BC}=4.5$ mm；当 C 和 A 组合时，第 10 个暗环的半径为 $r_{CA}=5.0$ mm. 设透镜两两组合时接触良好. 试求：三个透镜球面的曲率半径 R_A、R_B 和 R_C.

【分析】 如图是两个平凸透镜组合而成的牛顿环干涉装置. 在两个凸 面之间形成薄空气层，经空气层上表面和下表面反射的两束相干光在空气层表面重叠，产生干涉条纹. 每一个亮纹或暗纹相应的空气层的厚度相同，所以是等厚干涉条纹，条纹的形状是以中央密接点为圆心的一系列同心圆. 由于经空气层下表面反射时要附加 π 的相位差，故中央密接点为暗点.

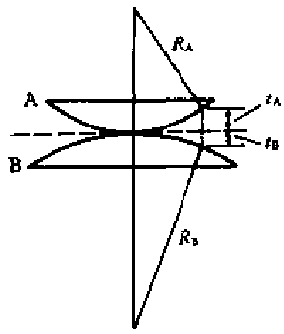
【解】 如图，A 和 B 组合时，设第 10 个暗环的半径为 r_{AB}，该处空气层的厚度为 t_{AB}，则由几何关系，有

$$t_{AB} = t_A + t_B = \frac{r_{AB}^2}{2R_A} + \frac{r_{AB}^2}{2R_B} = \frac{1}{2}r_{AB}^2\left(\frac{1}{R_A}+\frac{1}{R_B}\right)$$

同理，B 和 C 组合以及 C 和 A 组合时，设第 10 个暗环的半径为 r_{BC} 以及 r_{CA}，该处空气层的厚度为 t_{BC} 以及 t_{CA}，则有

$$t_{BC}=\frac{1}{2}r_{BC}^2\left(\frac{1}{R_B}+\frac{1}{R_C}\right)$$

$$t_{CA}=\frac{1}{2}r_{CA}^2\left(\frac{1}{R_C}+\frac{1}{R_A}\right)$$



光图 2-15-1

第 10 个暗环满足

$$2t-\frac{\lambda}{2}=\left(k+\frac{1}{2}\right)\lambda$$

式中$\frac{\lambda}{2}$是附加的光程差，式中的

$$k=9$$

因 $k=-1$ 是中央暗纹. 代入，得

$$2t=(k+1)\lambda=10\lambda$$

故

$$10\lambda=r_{AB}^2\left(\frac{1}{R_A}+\frac{1}{R_B}\right),\quad 10\lambda=r_{BC}^2\left(\frac{1}{R_B}+\frac{1}{R_C}\right),\quad 10\lambda=r_{CA}^2\left(\frac{1}{R_C}+\frac{1}{R_A}\right)$$

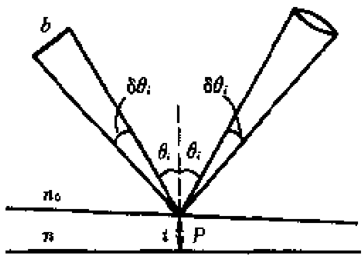
把有关数据代入以上三式，解出

$$R_A=6.28\ \text{m},R_B=4.64\ \text{m},R_C=12.4\ \text{m}$$

【题 16】 沿着与楔形薄膜的法线成 θ_i 角的方向观察薄膜表面 P 点附近的等厚干涉条纹. 设薄膜折射率为 n，P 点处薄膜的厚度为 t，所用单色光波长为 λ，为使干涉条纹有足够的反衬度，同一观察点光程差的差别不得大于$\frac{\lambda}{4}$.

1. 试问对光源宽度有何限制？ 2. 若用眼睛直接观察干涉条纹，试问对薄膜厚度 t 有何限制？已知 $n=1.5$，$\theta_i=30°$，瞳孔直径 $D=3$ mm，眼睛到 P 点的距离 $L=30$ cm，单色光波长 $\lambda=550$ nm，薄膜放在空气中，空气折射率 $n_0=1$.

【分析】 如图，观察薄膜表面 P 点附近的干涉条纹，P 点的干涉强度取决于经薄膜上下表面反射在 P 点重叠的两束相干光的光程差. 当光源有一定宽度时，从光源上不同点发出的射向 P 点的光的入射角 θ_i 各不相同，相应的光程差 Δ 因而也不同，导致干涉条纹反衬度下降. 写出 Δ 的表达式，由题设 $\delta\Delta<\frac{\lambda}{4}$的要求即可确定对光源宽度 b 的限制.



光图 2-16-1

以上讨论并来涉及观察仪器. 当用眼睛或其他光学仪器来观察干涉条纹时，观察仪器的入射光瞳限制了光源的有效宽度(见图). 在有效宽度之外的光源部分所发出的光线经 P 点反射后并不进入观察仪器，因而对 P 点附近干涉条纹的反衬度不再有影响. 由此，为使观察 P 点附近的干涉条纹的反衬度满足题设要求，对薄膜厚度应有所限制.

【解】 1. 设光源上某一点射向 P 点的光线的入射角为 θ_i，经薄膜的折射角为 θ_r，P 点处薄膜的厚度为 t，则经薄膜上、下表面反射后在 P 点重叠的两束相干光的光程差为

$$\Delta=2nt\ \cos\theta_r-\frac{\lambda}{2}$$

若光源有一定宽度 b，则不同点射向 P 点的光线的 θ_i 不同，从而 θ_r 及相应的 Δ 亦不同，因入射角不同引起的光程差改变为（取绝对值）

$$\delta\Delta=2nt\ \sin\theta_r\ \delta\theta_r \tag{1}$$

由折射定律，有

$$n_0\sin\theta_i=n\sin\theta_r$$

微分，得

$$n_0\cos\theta_i\ \delta\theta_i=n\cos\theta_r\delta\theta_r$$

即

$$\delta\theta_r=\frac{n_0\cos\theta_i}{n\ \cos\theta_r}\delta\theta_i$$

代入(1)式，得

$$\begin{aligned}\delta\Delta&=2nt\ \frac{n_0}{n}\sin\theta_i\frac{n_0\cos\theta_i}{n\ \cos\theta_r}\delta\theta_i=2nt\ \frac{n_0^2}{n^2}\frac{\sin\theta_i\cos\theta_i}{\cos\theta_r}\delta\theta_i\\&=t\ \frac{n_0^2}{n}\frac{\sin2\theta_i}{\sqrt{1-\sin^2\theta_r}}\delta\theta_i=\frac{n_0^2t}{n}\frac{\sin2\theta_i}{\sqrt{1-\left(\frac{n_0}{n}\right)^2\sin^2\theta_i}}\delta\theta_i\end{aligned}$$

若光源的角宽度为 $\delta\theta_i$，则 $\delta\Delta$ 就是光程差的最大差别．由题设，为使干涉条纹有足够的反衬度，要求

$$\delta\Delta\leqslant\frac{\lambda}{4}$$

因此，对光源角宽度的限制是

$$\delta\theta_i\leqslant\frac{\lambda}{4}\frac{n\sqrt{1-\left(\frac{n_0}{n}\right)^2\sin^2\theta_i}}{n_0^2\ t\ \sin2\theta_i}$$

2．用眼睛观察时，眼睛瞳孔（入射光瞳）的大小限制了光源的有效宽度．设瞳孔直径为 D，与 P 点的距离为 L，当 D 和 L 固定时，实际被利用的光源的角宽度 $\delta\theta_i$ 是固定的，为

$$\delta\theta_i\approx\frac{D}{L}$$

为使观察的干涉条纹的反衬度达到题设要求，必须满足

$$\delta\Delta=\frac{n_0^2\ t}{n}\frac{\sin2\theta_i}{\sqrt{1-\left(\frac{n_0}{n}\right)^2\sin^2\theta_i}}\frac{D}{L}\leqslant\frac{\lambda}{4}$$

把有关数据代入，得出对薄膜厚度 t 的限制应为

$$t\leqslant\frac{\lambda}{0.006\,1\times4}=2.2\times10^{-5}\ \text{m}=22\ \mu\text{m}$$

【题 17】 钠黄光是由波长为 λ_1 和 λ_2 的两条谱线组成的，平均波长为 589.3 nm．现用钠黄光观

察迈克耳孙干涉仪的圆形条纹. 当连续移动一臂中的平面镜时，干涉条纹从清晰到模糊，又到清晰周期性地变化. 观察视场中某固定点，测出从最清晰到第一次变为最模糊的过程中，经该点移动了 490 条干涉条纹. 试求钠黄光中两波长的波长差.

【分析】 迈克耳孙干涉仪的圆形条纹是等倾干涉的结果. 由于钠黄光包括波长稍有不同的两种波长 λ_1 和 λ_2，它们在同样条件下产生的两组等倾条纹的位置稍有不同. 观察视场中某固定点(意即相干光线的倾角固定)，当 λ_1 的 k_1 级条纹与 λ_2 的 k_2 级条纹(均为亮纹或均为暗纹)在该点重叠时，干涉条纹最清晰；随着一臂平面镜的平行移动(即改变了"膜"的厚度)，当 λ_1 的极大(或极小)与 λ_2 的极小(或极大)在该点重叠时，条纹最模糊. 弄清楚有关现象的物理本质，即可迎刃而解.

也可以由两个波长各自形成的干涉强度分布，得出总的强度分布(两者之和)，再由总强度分布的极大值和极小值给出干涉条纹的反衬度函数. 条纹最清晰与最模糊相应的反衬度为最大和最小. 由此亦可求解.

【解】 方法一. 观察视场中某固定点，当 λ_1 的 k_1 级极大与 λ_2 的 k_2 级极大在该点重叠时，条纹最清晰，即

$$k_1\lambda_1 = k_2\lambda_2 \tag{1}$$

等倾条纹干涉极大应满足的条件是光程差为

$$2t\ \cos\theta_i = k\lambda$$

式中 t 是薄膜厚度，θ_i 是相干光的倾角，λ 为 λ_1 或 λ_2，k 为 k_1 或 k_2. 当干涉仪一臂的平面镜移动，使 t 改变 Δt 时，因 θ_i 和 λ 不变，该点干涉条纹的级次将改变 Δk，有

$$2\Delta t\ \cos\theta_i = \Delta k\lambda$$

可见，对于同样的 Δt，波长较大的条纹的级次变化较小. 若 $\lambda_1<\lambda_2$，则当 λ_1 的条纹的级次变化为 Δk 级，而 λ_2 条纹的级次变化为 $\left(\Delta k-\frac{1}{2}\right)$级时，$\lambda_1$ 的极大将与 λ_2 的极小在该点重叠，这时条纹最模糊，即当

$$(k_1+\Delta k)\lambda_1 = \left(k_2+\Delta k-\frac{1}{2}\right)\lambda_2 \tag{2}$$

时，条纹最模糊.

由(1)式和(2)式解出

$$\lambda_2-\lambda_1=\frac{\lambda_2}{2\Delta k}\approx\frac{\bar{\lambda}}{2\Delta k}=\frac{589.3}{2\times 490}=0.6\ \text{nm}$$

方法二. 把两束相干光在干涉仪中的光程差表为 Δ，则波长为 λ_1 和 λ_2 的光各自形成的两套干涉强度分布分别为

$$I_1 = 2I_0(1+\cos K_1\Delta)$$
$$I_2 = 2I_0(1+\cos K_2\Delta)$$

式中

$$K_1=\frac{2\pi}{\lambda_1},\quad K_2=\frac{2\pi}{\lambda_2}$$

是两种波长光波的波矢. 总的强度分布为两者之和，即

$$I = I_1 + I_2 = 4I_0 + 2I_0(\cos K_1\Delta + \cos K_2\Delta)$$
$$= 4I_0\left[1 + \cos\left(\frac{K_1 - K_2}{2}\Delta\right)\cos\left(\frac{K_1 + K_2}{2}\Delta\right)\right]$$

上式表明，总光强以较高的频率$\frac{1}{2}(K_1 + K_2)$随 Δ 而变，形成干涉条纹；同时干涉条纹的强度又以较低的频率$\left|\frac{1}{2}(K_1 - K_2)\right|$缓慢变化，当

$$\cos\left(\frac{K_1 + K_2}{2}\Delta\right) = \pm 1$$

时，出现干涉极大和极小，相应的总强度为

$$I_{\max} = 4I_0\left[1 + \left|\cos\left(\frac{K_1 - K_2}{2}\Delta\right)\right|\right]$$
$$I_{\min} = 4I_0\left[1 - \left|\cos\left(\frac{K_1 - K_2}{2}\Delta\right)\right|\right]$$

干涉条纹的反衬度函数为

$$\gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$
$$= \left|\cos\left(\frac{K_1 - K_2}{2}\Delta\right)\right|$$

可见，反衬度随光程差 Δ 变化．当 $\Delta = \Delta_1$ 时，且

$$\frac{K_1 - K_2}{2}\Delta_1 = k\pi$$

时，$\gamma = 1$ 为最大，干涉条纹最清晰．当条纹移过 490 条时，即当 $\Delta = \Delta_2$，且

$$\frac{K_1 - K_2}{2}\Delta_2 = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$$

时，$\gamma = 0$ 为最小，条纹最模糊．故

$$\frac{K_1 - K_2}{2}(\Delta_2 - \Delta_1) = \frac{\pi}{2}$$

即

$$\Delta_2 - \Delta_1 = \frac{\pi}{K_1 - K_2} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{\bar{\lambda}^2}{2(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

式中$(\Delta_2 - \Delta_1)$是移过 $N = 490$ 条干涉条纹时光程差的改变，故

$$\Delta_2 - \Delta_1 = N\bar{\lambda}$$

代入，得

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{\bar{\lambda}}{2N} = 0.6\ \text{nm}$$

两种方法的结果相同．

【题 18】 用钠黄光($\lambda = 589.3$ nm)观察迈克耳孙干涉仪的等倾圆条纹，开始时视场中共看到 10 个亮环，中心为亮斑，然后移动干涉仪一臂的平面镜，先后看到共有 10 个亮环缩进中央，而视场中除中心为亮斑外，还剩下 5 个亮环．

试求：1.平面镜移动的距离.2.开始时中心亮斑的干涉级次.3.移动平面镜后最外一个亮环的干涉级次.

【分析】 迈克耳孙干涉仪的等倾条纹是一系列同心的圆条纹，中央亮斑的级次最高，由中央向外各亮环的级次逐个减小，看到的最外围的亮环对应视场或视场角所受到的限制.移动一臂的平面镜后，看到亮环缩进中心，表明中央亮斑级次减小，这是因为空气层的厚度减小了.空气层厚度减小后，等倾圆条纹变得较为稀疏.在同样的视场内看到的亮环数将会减少.本题是通过条纹的相对级次的变化来求条纹的绝对级次.

【解】 1.平面镜移动距离 Δt 后，有 10 个亮环缩进中心，故

$$\Delta t = N\cdot\frac{\lambda}{2} = 10\times\frac{1}{2}\times 5.893\times10^{-7} = 2.947\times10^{-6}\ \mathrm{m}$$

2.设开始时中心亮斑的干涉级次为 k，则最外的第 10 个亮环的级次为 $(k-10)$，故有

$$2t = k\lambda,\quad 2t\cos\theta_i = (k-10)\lambda$$

式中 θ_i 是视场边缘相应的视场角.由以上两式，得

$$\cos\theta_i = \frac{k-10}{k} \tag{1}$$

平面镜移动 Δt 后，中心级次减小 10 级，变为 $(k-10)$，此时视场内共有 5 个亮环，最外的亮环的级次为 $(k-10-5)=(k-15)$，故有

$$2(t-\Delta t) = (k-10)\lambda,\quad 2(t-\Delta t)\cos\theta_i = (k-15)\lambda$$

得出

$$\cos\theta_i = \frac{k-15}{k-10} \tag{2}$$

在两种情况下，视场角 θ_i 不变，由(1)式和(2)式解出

$$k = 20$$

3.移动后中心级次为 $k-10=10$，移动后最外亮环级次为

$$k-15=5$$

【题 19】 迈克耳孙干涉仪一臂中的反射镜以均匀速度 v 平行移动.用透镜将干涉条纹成像于光电元件的取样窗上，条纹移动时，进入取样窗的光强的变化将转换成电信号的变化.

1.若光源波长 $\lambda=600$ nm，测得电信号变化的时间频率为 $\nu=50$ Hz.试求反射镜移动的速度.2.若以平均波长为 589.3 nm 的钠黄光作光源，反射镜平行移动的速度取第 1 问的数值，测得电信号的拍频频率为 5.2×10^{-2} Hz.试求钠黄光中两谱线的波长差.

【分析】 无论是等倾条纹还是等厚条纹，一臂反射镜的匀速平移使空气层厚度变化，导致干涉条纹的移动$\left(\text{干涉条纹每移动一条，相当于空气层厚度改变}\frac{\lambda}{2}\right)$及电信号的变化.

钠黄光有两条谱线，相应的有两套干涉条纹，反射镜的匀速平移使两套条纹移动，产生两种频率相近的电信号，合成后产生的拍频即为这两种频率之差.

【解】 1.设一臂的反射镜在 Δt 时间内移动了 Δh，干涉条纹相应地移动了 ΔN 个条纹，则

$$\Delta h = \Delta N\cdot\frac{\lambda}{2}$$

故移动速度为

$$v=\frac{\Delta h}{\Delta t}=\frac{\Delta N}{\Delta t}\cdot\frac{\lambda}{2}=\nu\cdot\frac{\lambda}{2}=1.5\times10^{-5}\ \mathrm{m/s}$$

式中 ν 是电信号变化的频率.

2 设钠黄光中两谱线的波长为 λ_1 和 λ_2，当反射镜以第 1 问中的速度 v 匀速平移时，两套干涉条纹分别移动，产生两种电信号，它们的频率分别为

$$\nu_1=\frac{2v}{\lambda_1},\quad \nu_2=\frac{2v}{\lambda_2}$$

因 λ_1 与 λ_2 相近，故 ν_1 与 ν_2 相近，合成后产生的拍频为

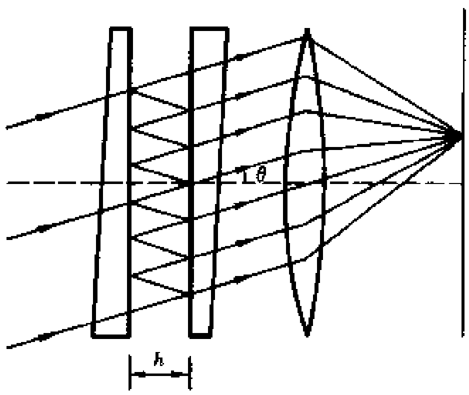
$$\Delta\nu=\nu_1-\nu_2=2v\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)$$

$$=2v\ \frac{(\lambda_2-\lambda_1)}{\lambda_1\lambda_2}\approx2v\ \frac{\Delta\lambda}{\overline{\lambda}^2}$$

故钠黄光两谱线的波长差为

$$\Delta\lambda=\frac{\Delta\nu\overline{\lambda^2}}{2v}=0.6\ \mathrm{nm}$$

【题 20】 法布里－珀罗干涉仪可产生强而锐的干涉条纹，故常用来测量波长差很小的两谱线的波长差. 设平均波长为 $\overline{\lambda}=500$ nm 的某谱线由波长差为 λ_1 和 λ_2 的两条谱线组成，干涉仪两板的间距为 $h=0.25$ mm，波长为 λ_1 的第 2 和第 5 干涉环的半径分别为 2.00 mm 和 3.80 mm，波长为 λ_2 的第 2 和第 5 干涉环的半径分别为 2.10 mm 和 3.85 mm. 试求两谱线的波长差.



光图 2－20－1

【分析】 法布里－珀罗干涉仪属多光束等倾干涉，产生与迈克耳孙干涉仪相仿的环状等倾条纹，只是亮环强度更大更锐，容易区分波长差很小的两套干涉条纹. 波长为 λ 的亮环满足条件

$$2h\cos\theta+\Delta'=k\lambda$$

式中 Δ' 是由于光在金属反射面上反射而引起的附加光程差. 设反射一次引起的相位变化为 ϕ 则相邻两相干光之间的附加相位差为 2ϕ，相应的附加光程差为

$$\Delta'=\frac{\lambda}{2\pi}\cdot2\phi=\frac{\phi}{\pi}\lambda$$

倾角 θ 标志干涉环半径的大小.

圆环中心的级次 k_0 满足

$$2h+\Delta'=k_0\lambda$$

环心不一定是干涉极大，即 k_0 不一定是整数，而是某个整数 k_1 加一个分数 f，即

$$k_0=k_1+f$$

注意到等倾干涉环中央级次高，外围级次低，故 k_1 是观察到的第一个圆环的级次. 利用题目给出

的两个圆环的半径值，可以算出分数 f. 对于不同的波长 λ_1 和 λ_2，f 的值也不同，波长差直接与 f 值的差值有关. 算出 f 的差值，$\Delta\lambda$ 就可求出.

【解】 对于波长为 λ_1 的谱线，设环心的级次为 (k_1+f_1)，则有

$$2h+\Delta'=(k_1+f_1)\lambda_1$$

第 N 个圆环的级次为 $k_1-(N-1)$，故有

$$2h\ \cos\theta_N+\Delta'=[k_1-(N-1)]\lambda_1$$

以上两式相减，得

$$2h(1-\cos\theta_N)=(N-1+f_1)\lambda_1$$

因倾角 θ_N 一般很小，近似有

$$1-\cos\theta_N=\frac{1}{2}\theta_N^2$$

故

$$\theta_N^2=\frac{\lambda_1}{h}(N-1+f_1)$$

在小角近似下，环半径与相应的倾角成正比. 由上式，第 5$(N=5)$和第 2$(N=2)$圆环的半径平方比为

$$\frac{r_5^2}{r_2^2}=\frac{5-1+f_1}{2-1+f_1}=\frac{4+f_1}{1+f_1}$$

解出

$$f_1=\frac{4r_2^2-r_5^2}{r_5^2-r_2^2}=\frac{4\times(2.00\ \text{mm})^2-(3.80\ \text{mm})^2}{(3.80\ \text{mm})^2-(2.00\ \text{mm})^2}=0.149$$

同理，对于 λ_2，环心级次的分数部分 f_2 为

$$f_2=\frac{4\times(2.10\ \text{mm})^2-(3.85\ \text{mm})^2}{(3.85\ \text{mm})^2-(2.10\ \text{mm})^2}=0.270$$

对环心，有

$$k_1+f_1=\frac{1}{\lambda_1}\left(2h+\frac{\phi}{\pi}\lambda_1\right)=\frac{2h}{\lambda_1}+\frac{\phi}{\pi}$$

$$k_1+f_2=\frac{1}{\lambda_2}\left(2h+\frac{\phi}{\pi}\lambda_2\right)=\frac{2h}{\lambda_2}+\frac{\phi}{\pi}$$

两式相减，得

$$f_2-f_1=\frac{2h}{\lambda_1\lambda_2}(\lambda_2-\lambda_1)=\frac{2h}{\overline{\lambda}^2}\Delta\lambda$$

故波长差为

$$\Delta\lambda=\frac{\overline{\lambda}^2}{2h}(f_2-f_1)=\frac{(500\ \text{nm})^2\times(0.270-0.149)}{2\times0.25\times10^6\ \text{nm}}=6.05\times10^{-2}\ \text{nm}$$

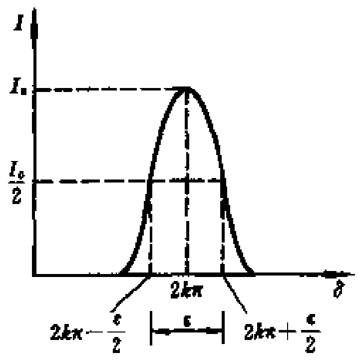
【题 21】 法布里－珀罗干涉仪的干涉强度 I 随相邻两相干光之间的相位差 δ 变化. 在如图所示的 $I(\delta)$ 曲线中，若干涉极大的半强度的宽度用 ε 表示，定义条纹的锐度系数为

$$F=\frac{16}{\varepsilon^2}$$

定义条纹的锐度为

$$S=\frac{2\pi}{\varepsilon}$$

1. 试求锐度系数和锐度与反射率 R 之间的关系. 2. 已知某法布里－珀罗干涉仪金属涂层的反射系数 $r=0.894$. 试求条纹的半强度宽 ε, 锐度系数 F 以及锐度 S.



光图 2－21－1

【分析】 法布里－珀罗干涉仪的强度分布公式为

$$I=\frac{I_0}{1+\dfrac{4R\sin^2\dfrac{\delta}{2}}{(1-R)^2}}$$

式中

$$\delta=\frac{4\pi}{\lambda}nh\cos\theta$$

是相邻两出射光之间的相位差, h 是干涉仪两板的间距, θ 是入射光的倾角, n 为两板间媒质的折射率, $R=r^2$ 是反射层的光强反射率(r 是反射系数), I_0 是干涉极大的强度极大值. 利用上述强度分布公式, 可求出条纹的半强度宽 ε, 从而 F 和 S 可知.

【解】 1. 如图, 当 $\delta=2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时, $I=I_0$ 为干涉极大. 当 $I=\frac{1}{2}I_0$ 时, 相应的 δ 值分别为 $(2k\pi-\frac{\varepsilon}{2})$ 和 $(2k\pi+\frac{\varepsilon}{2})$, 其中 ε 为半强度宽. 因

$$\sin^2\left[\frac{1}{2}\left(2k\pi\pm\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]=\sin^2\frac{\varepsilon}{4}\approx\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2$$

由强度分布公式, 当 $I=\frac{1}{2}I_0$ 时, 有

$$\frac{I}{I_0}=\frac{1}{2}=\frac{1}{1+\dfrac{4R\left(\dfrac{\varepsilon}{4}\right)^2}{(1-R)^2}}$$

解出条纹的半强度宽为

$$\varepsilon=\frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}$$

故锐度系数为

$$F=\frac{16}{\varepsilon^2}=\frac{4R}{(1-R)^2}$$

锐度为

$$S=\frac{2\pi}{\varepsilon}=\frac{\pi}{2}\sqrt{F}=\frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$$

2. 由题设

$$R=r^2=(0.894)^2=0.799$$

由上述诸公式，得

$$\varepsilon = 0.450\ \text{rad}$$
$$F = 79.1$$
$$S = 14.0$$

【题 22】 激光器谐振腔的两平行反射镜可看作是一个法布里－珀罗标准具. 1. 试导出激光器输出的频率间隔公式. 2. 试导出谱线宽度的公式（分别以频率和波长表示宽度）. 3. 已知一个 He－Ne（氦－氖）激光器的腔长 $h = 0.50$ m. 两反射镜的反射率 $R = 0.99$. 试问输出激光的频率间隔和谱线宽度各是多少？设气体折射率 $n = 1$，输出激光的中心波长为 $\lambda = 632.8$ nm.

【分析】 激光器谐振腔工作在正入射情形，透射输出为极大的条件是（参看本章题 21）

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda}nh = 2k\pi$$

即

$$2nh = k\lambda, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

对于一定的谐振腔（即 n 和 h 一定），可有一系列的波长同时满足上述极大条件，即激光输出中包含了一系列的波长（或频率）成分. 相邻两极大的频率差称为频率间隔，用 $\Delta\nu_d$ 表示. 利用上述极大条件，容易求得 $\Delta\nu_d$ 的表示式.

利用本章题 21 中干涉极大的半强度宽 ε，在该题中 ε 是相位差的宽度，可改写为频率宽度或波长宽度.

【解】 1. 由分析中给出的干涉极大条件，激光器的输出波长为

$$\lambda_k = \frac{2nh}{k}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

相应的频率为

$$\nu_k = \frac{c}{\lambda_k} = k\,\frac{c}{2nh}$$

因而频率间隔为

$$\Delta\nu_d = \frac{c}{2nh} \tag{1}$$

2. 在本章题 21 中已经导出了干涉极大半强度宽（用相位差表示）的公式为

$$\varepsilon = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}$$

因与干涉极大相应的相位差为

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda}nh = \frac{4\pi}{c}nh\nu$$

故有

$$\Delta\delta = \frac{4\pi}{c}\,nh\ \Delta\nu$$

若

$$\Delta\delta = \varepsilon$$

则相应的 $\Delta\nu$ 为干涉极大的半强度宽(用频率差表示),故干涉极大的频率宽度为

$$\Delta\nu=\frac{c}{4\pi nh}\varepsilon$$

把上题中 ε 的公式代入,得谱线频宽为

$$\Delta\nu=\frac{c}{2\pi nh}\frac{(1-R)}{\sqrt{R}}$$

上式也可改写为相应的波长宽度,

$$\Delta\lambda=\frac{\lambda^2}{c}\Delta\nu=\frac{\lambda^2}{2\pi nh}\frac{(1-R)}{\sqrt{R}} \tag{2}$$

3. 把题目给定的数据 $R=0.99, h=0.50$ m, $n=1, \lambda=632.8$ nm 代入(1)、(2)两式,得输出频率间隔为

$$\Delta\nu_d=\frac{c}{2nh}=\frac{3\times10^8\ \text{m/s}}{2\times0.50\ \text{m}}=3.0\times10^2\ \text{MHz}$$

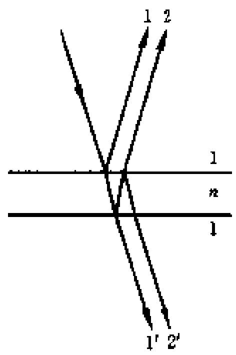
谱线的波长宽度为

$$\Delta\lambda=\frac{\lambda^2}{2\pi nh}\frac{(1-R)}{\sqrt{R}}=\frac{(6.328\times10^{-7})^2(1-0.99)}{2\pi\times0.50\times\sqrt{0.99}}$$
$$=1.28\times10^{-15}\ \text{m}=1.28\times10^{-6}\ \text{nm}$$

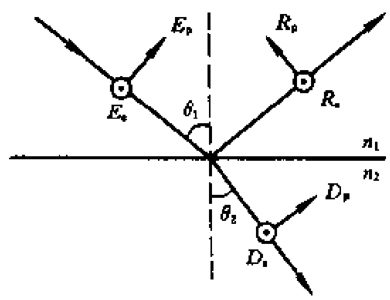
可见,激光谱线的宽度远比普通原子光谱的谱线要窄,即单色性好,其中谐振腔(法布里－珀罗标准具)起了关键作用.

【题 23】 平行平面薄膜的折射率 $n=1.5$,放置在空气中.单色光近乎垂直入射.在垂直于薄膜的方向用望远镜分别观察反射光和透射光的等倾干涉图样.试求两种干涉条纹的反衬度(不计多重反射).

【分析】 如光图 2－23－1 所示,反射光干涉条纹是由光束 1 和光束 2 相干叠加构成的;透射光干涉条纹则由光束 1′和 2′相干叠加构成.前者的反衬度取决于光束 1 的振幅 E_1 和光束 2 的振幅 E_2 之间的关系,后者的反衬度取决于 E'_1 和 E'_2 的关系.因此,关键在于反射光、折射光(即透射光)与入射光振幅的关系,菲涅耳公式解决了这个问题.



光图 2－23－1



光图 2－23－2

菲涅耳公式是描述介质分界面上反射光、折射光的振幅及偏振态与入射光关系的一组公式.

如光图 2－23－2 所示，设界面上、下的折射率分别为 n_1 和 n_2，入射光为线偏振光，其振动矢量与入射面成一角度，它可分解为两个振动面互相垂直而相位相同的线偏振光. 在入射面内振动的分量称为 P 分量，与入射面垂直振动的分量称为 S 分量. 入射光，反射光，折射光(即透射光)中这两个分量的振幅分别表为 E_P 与 E_S，R_P 与 R_S，D_P 与 D_S. 设入射角为 θ_1，折射角为 θ_2. 菲涅耳公式指出，各分量的振幅之间的关系分别为

$$\frac{R_P}{E_P}=\frac{n_2\cos\theta_1-n_1\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_2+n_2\cos\theta_1}$$

$$\frac{R_S}{E_S}=\frac{n_1\cos\theta_1-n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1+n_2\cos\theta_2}$$

$$\frac{D_P}{E_P}=\frac{2n_1\cos\theta_1}{n_2\cos\theta_1+n_1\cos\theta_2}$$

$$\frac{D_S}{E_S}=\frac{2n_1\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_1+n_2\cos\theta_2}$$

在正入射情形，有

$$\theta_1=\theta_2=0$$

菲涅耳公式简化为

$$\frac{R_P}{E_P}=-\frac{R_S}{E_S}=\frac{n_2-n_1}{n_1+n_2}$$

$$\frac{D_P}{E_P}=\frac{D_S}{E_S}=\frac{2n_1}{n_1+n_2}$$

式中的 $\frac{(n_2-n_1)}{(n_1+n_2)}$ 定义为界面的菲涅耳系数，$\frac{R}{E}$ 和 $\frac{D}{E}$ 分别称为反射光和折射光(即透射光)与入射光的振幅比. 菲涅耳公式可用来计算单个界面及多个界面的反射率和透镜率，是薄膜光学最基本的公式之一.

【解】 如光图 2－23－1 所示，由菲涅耳公式，在近乎正入射时，S 分量和 P 分量的振幅反射率和振幅透射率 t 相同(指绝对值)，为

$$|r|=\left|\frac{n_2-n_1}{n_1+n_2}\right|$$

$$t=\frac{2n_1}{n_1+n_2}$$

设入射光振幅为 E_0，则反射光束 1 的振幅 E_1 为

$$E_1=|r_1|E_0=\left|\frac{1-n}{1+n}\right|E_0=0.2\ E_0$$

反射光束 2 的振幅 E_2 为

$$E_2=t_1r_2t'_1=\frac{2}{1+n}\cdot\frac{n-1}{1+n}\cdot\frac{2n}{n+1}E_0$$

$$=\frac{4n(n-1)}{(1+n)^3}E_0=0.192\ E_0$$

反射光的干涉极大和极小分别为

$$I_{max}=(E_1+E_2)^2=0.154\ E_0^2=0.154\ I_0$$
$$I_{min}=(E_1-E_2)^2=6.4\times10^{-5}\ I_0$$

反射光干涉条纹的反衬度为

$$\gamma=\frac{I_{max}-I_{min}}{I_{max}+I_{min}}=0.999$$

透射光束1′和2′的振幅分别为

$$E'_1=t_1t_2E_0=\frac{2}{1+n}\cdot\frac{2n}{1+n}E_0=\frac{4n}{(1+n)^2}E_0=0.96\ E_0$$
$$E'_2=t_1r_2r'_1t_2=\frac{2}{1+n}\cdot\frac{n-1}{1+n}\cdot\frac{n-1}{1+n}\cdot\frac{2n}{1+n}E_0$$
$$=\frac{4n(n-1)^2}{(1+n)^4}E_0=0.0384\ E_0$$

透射光的干涉极大和极小分别为

$$I'_{max}=(E'_1+E'_2)^2=0.997\ I_0$$
$$I'_{min}=(E'_1-E'_2)^2=0.849\ I_0$$

透射光干涉条纹的反衬度为

$$\gamma'=\frac{I'_{max}-I'_{min}}{I'_{max}+I'_{min}}=0.08$$

由此可见，反射光干涉条纹的反衬度 $\gamma=0.999$，远大于透射光干涉条纹的反衬度 $\gamma'=0.08$，因此观察薄膜产生的干涉条纹时，通常总是观察反射光的干涉条纹.

【题24】 在折射率 $n_g=1.50$ 的玻璃平板表面涂一层折射率 $n_f=1.38$ 的氟化镁.波长 $\lambda=550$ nm的单色光从空气垂直入射.

试求：1.为使反射光干涉相消，氟化镁涂层的最小厚度为多少？与不加涂层相比，此时光强反射率降低了多少？2.取第1问的涂层厚度，对波长为400 nm和700 nm的光来说，光强反射率如何？

【分析】 反射光干涉相消的条件是两相干光之间的光程差为$\frac{\lambda}{2}$的奇数倍，由此可求出所需消反射层的最小厚度.相应的反射率以及改换波长后的反射率，可由菲涅耳公式(见本章题23)求出.

本题提醒读者，所谓消反射层只对特殊波长而言.

【解】 1.如图，入射光经氟化镁涂层上、下表面反射后，得两束相干的反射光，因 $n_a<n_f<n_g$，两束反射光均无附加光程差，又因正入射，故其间的光程差为

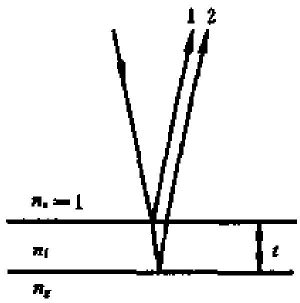
$$\Delta=2n_ft$$

式中 t 为涂层厚度.反射光干涉相消的条件为

$$\Delta=2n_ft=(2k+1)\frac{\lambda}{2},\quad k=0,1,2,\cdots$$

干涉相消时涂层的最小厚度对应 $k=0$，故

$$t_{min}=\frac{\lambda}{4n_f}=\frac{5.5\times10^{-7}}{4\times1.38}=9.96\times10^{-8}\ \text{m}=99.6\ \text{nm}$$



光图 2-24-1

由菲涅耳公式，正入射时，振幅反射率和透射率分别为

$$r=\left|\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right|,\quad t=\frac{2n_1}{n_1+n_2}$$

式中 n_1 和 n_2 分别是界面上、下介质的折射率. 上式对 S 分量和 P 分量均适用. 设入射光振幅为 E_0，则反射光束 1 的振幅 E_1 为

$$E_1=r_1E_0=\left|\frac{1-n_f}{1+n_f}\right|E_0=\frac{0.38}{2.38}E_0=0.160\ E_0$$

反射光束 2 的振幅 E_2 为

$$E_2=t_1r_2t_1'=\frac{2}{1+n_f}\left|\frac{n_f-n_g}{n_f+n_g}\right|\frac{2n_f}{n_f+1}=0.030E_0$$

因此，反射光束 1 与 2 干涉相消时，合振幅为

$$E=|E_1|-|E_2|=0.13\ E_0$$

相应的光强为

$$I=E^2=0.017\ E_0^2=0.017\ I_0$$

故光强反射率为

$$R=\frac{I}{I_0}=0.017=1.7\%$$

即有涂层使反射光干涉相消时，反射光的强度只是入射光强度的 1.7%.

没有涂层，光在玻璃表面反射，振幅反射率为

$$r'=\left|\frac{1-n_g}{1+n_g}\right|=\frac{0.5}{2.5}=0.2$$

相应的光强反射率为

$$R'=0.04=4\%$$

可见涂层使光强反射率降低了

$$\Delta R=R'-R=0.04-0.017=0.023=2.3\%$$

2. 取涂层厚度为 $t=9.96\times10^{-8}$ m，忽略色散（即设涂层的折射率 n_f 不随波长变化），则在正入射时，两束反射光的光程差为

$$\Delta=2n_ft=\frac{\lambda}{2}$$

式中 $\lambda=550$ nm，上式是第 1 问的结果.

对于 $\lambda_v=400$ nm 的紫色光，两束相干的反射光的相位差为

$$\delta_v=\frac{2\pi}{\lambda_v}\Delta=\frac{2\pi}{\lambda_v}\cdot\frac{\lambda}{2}=\pi\frac{\lambda}{\lambda_v}=4.32\ \text{rad}$$

反射光强为

$$I_v=E_1^2+E_2^2+2|E_1||E_2|\cos\delta_v=0.0228\ I_0$$

式中的 E_1 和 E_2 见第 1 问. 故紫光的光强反射率为

$$R_v=0.0228=2.3\%$$

对于 $\lambda_r=700$ nm 的红色光，有

$$\delta_r=\frac{2\pi}{\lambda_r}\Delta=\pi\frac{\lambda}{\lambda_r}=2.47\ \mathrm{rad}$$

反射光强和光强反射率分别为

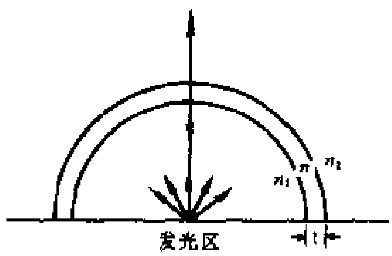
$$I_r=E_1^2+E_2^2+2|E_1||E_2|\cos\delta_r=0.019\ I_0$$

$$R_r=0.019=1.9\%$$

因此,对同样厚度的涂层,不同波长有不同的消反射效果．三种波长相应的光强反射率分别是 $R=1.7\%$,$R_v=2.3\%$ 和$R_r=1.9\%$．可见,所谓消反射层只是对特殊波长而言的,所谓消反射也只是将该波长的光强反射率降低到最小值,一般并非是零.

【题 25】如图所示,砷化镓发光管常制成半球形,以减少位于球心的发光区向外输出功率时的反射损失.为了进一步提高输出光功率常在球形表面涂一层增透膜.砷化镓发光管发光波长 $\lambda=930\ \mathrm{nm}$,砷化镓的折射率 $n_1=3.4$,空气折射率 $n_2\approx1$.

试问:1.不涂增透膜时球面的光强反射率为多大? 2.为使反射光完全干涉相消,增透膜的厚度和折射率应取多大? 3.涂层分别用氟化镁(折射率为 1.38)和硫化锌(折射率为 2.38)时,球面的光强反射率各为多少?能否达到增透的目的?



光图 2-25-1

【分析】 前两题(本章题 23,题 24)已指出,对于给定波长的光,为了减少反射的能量损失,可以涂上一层薄膜(增透膜,即消反射层),使之有适当的厚度,以便反射光干涉相消,达到增透的目的.但一般说来,由于两束反射光的振幅不等,干涉相消可使其强度最小,然而却并不为零.

本题进一步讨论使反射光完全干涉相消,即使反射光强度为零的条件.结果表明,对于给定波长的光,适当选取涂层的厚度以及折射率,即可使两反射光既具有相反的相位,又有相等的振幅,实现完全干涉相消.本题说明增透膜对消反射的显著作用,这是一个有实际意义的问题.当然,解题的依据仍是菲涅耳公式.

【解】 1.因光线正入射到球面上,由菲涅耳公式,光强反射率为

$$R=\left(\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right)^2=\left(\frac{2.4}{4.4}\right)^2=29.8\%$$

2.设涂层厚度为 t,折射率为 n,为使反射光干涉相消,来自涂层两表面的两束反射光应具有相反的相位,即光程差应为$\frac{\lambda}{2}$的奇数倍,即

$$2nt=(2k+1)\frac{\lambda}{2},\quad k=0,1,2,\cdots$$

涂层厚度应取

$$t=(2k+1)\frac{\lambda}{4n}$$

满足上述条件时两束反射光干涉相消.为了达到完全相消,两束反射光除仍应具有相反的相位外,还应具有相等的振幅.若只考虑两束反射光的干涉(而不是多束反射光的干涉),则经涂层内表面反射光的振幅为

$$E_1=r_1E_0=\frac{n_1-n}{n_1+n}E_0$$

式中 E_0 为入射光振幅，r_1 为内表面的振幅反射系数.经涂层外表面反射光的振幅为

$$\begin{aligned}E_2&=t_1r_2t'_1E_0\\&=\frac{2n_1}{n_1+n}\cdot\frac{n-n_2}{n+n_2}\cdot\frac{2n}{n+n_1}E_0=\frac{n-n_2}{n+n_2}\cdot\frac{4n_1n}{(n+n_1)^2}E_0\end{aligned}$$

式中 t_1 是光经内表面透入涂层的振幅透射率，r_2 是在涂层内经涂层外表面反射时的反射率，t'_1 是在涂层内经涂层内表面透射时的透射率.在通常情形下，有

$$\frac{4n_1n}{(n+n_1)^2}\approx1$$

故

$$E_2\approx\frac{n-n_2}{n+n_2}E_0$$

完全干涉相消要求

$$E_1=E_2$$

把上述 E_1 和 E_2 的结果代入，得

$$\frac{n_1-n}{n_1+n}\approx\frac{n-n_2}{n+n_2}$$

即要求

$$n\approx\sqrt{n_1n_2}$$

以上只考虑了两束反射光之间的干涉.实际上光在涂层薄膜内要反复多次反射，因而严格地说应是多束反射光的干涉问题.在正入射条件下，光从单层薄膜反射时的光强反射率为（见本章题 26）

$$R=\frac{(n_1-n_2)^2\cos^2\frac{\delta}{2}+\left(\frac{n_1n_2}{n}-n\right)^2\sin^2\frac{\delta}{2}}{(n_1+n_2)^2\cos^2\frac{\delta}{2}+\left(\frac{n_1n_2}{n}+n\right)^2\sin^2\frac{\delta}{2}}$$

式中

$$\delta=\frac{4\pi}{\lambda}nt$$

是相继的两束反射光之间的相位差，其中 n 和 t 分别为涂层的折射率和厚度．当

$$\delta=(2k+1)\pi$$

即当

$$t=(2k+1)\frac{\lambda}{4n},\quad k=0,1,2,\cdots$$

时，光从涂层反射时的光强反射率为

$$R=\frac{\left(\frac{n_1n_2}{n}-n\right)^2}{\left(\frac{n_1n_2}{n}+n\right)^2}=\left[\frac{n_1-\frac{n^2}{n_2}}{n_1+\frac{n^2}{n_2}}\right]^2$$

可见，当

$$n=\sqrt{n_1n_2}$$

时，光强反射率

$$R=0$$

总之，对于给定的波长为 λ 的光，在正入射条件下，为使反射光完全干涉相消（反射光强度为零），必须同时满足以下两个条件

$$\begin{cases} nt=(2k+1)\dfrac{\lambda}{4} \\ n=\sqrt{n_1n_2} \end{cases}$$

前一条件是实现干涉相消（干涉极小）的相位条件，后一条件是两相干反射光的振幅条件．为了实现这两个条件，必须同时选取适当的涂层厚度 t 和折射率 n．

把有关数据代入，得出涂层的折射率 n 和最小厚度 $t_{\min}$ 分别为

$$n=\sqrt{3.4\times1}=1.84$$

$$t_{\min}=\frac{\lambda}{4n}=\frac{9.3\times10^{-7}}{4\times1.84}=1.26\times10^{-7}\ \text{m}=0.13\ \mu\text{m}$$

3．当涂层的光学厚度 nt 满足干涉极小条件时，一般说来 $n\neq\sqrt{n_1n_2}$，即两束反射光的振幅并不相等，故光强反射率 R 并不为零，为

$$R=\left(\frac{n_1n_2-n^2}{n_1n_2+n^2}\right)^2$$

对氟化镁

$$R=\left(\frac{3.4-1.38^2}{3.4+1.38^2}\right)^2=7.9\%$$

对硫化锌

$$R=\left(\frac{3.4-2.38^2}{3.4+2.38^2}\right)^2=6.2\%$$

在第1问中得出，无涂层时的 $R=29.8\%$．可见，有涂层时，只要厚度适当，能满足干涉极小条件，虽不能达到完全相消，但光强反射率仍大大低于无涂层时的反射率，增透膜的作用是显著的．

【题26】 在玻璃基片上涂一层薄膜，薄膜的折射率为 n，玻璃的折射率为 n_G，另一侧是空气，折射率为 n_0．

1．试证明单色光正入射时，光强反射率为

$$R=\frac{(n_0-n_G)^2\cos^2\dfrac{\delta}{2}+\left(\dfrac{n_0n_G}{n}-n\right)^2\sin^2\dfrac{\delta}{2}}{(n_0+n_G)^2\cos^2\dfrac{\delta}{2}+\left(\dfrac{n_0n_G}{n}+n\right)^2\sin^2\dfrac{\delta}{2}}$$

式中

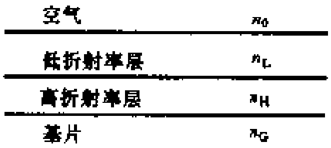
$$\delta=\frac{4\pi}{\lambda}nh$$

h 是薄膜的厚度．

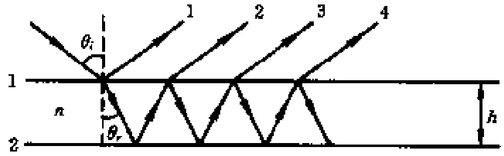
2. 试问，为使薄膜对某一波长的光起完全消反射的作用，薄膜的厚度和折射率应满足什么条件？

3. 如光图 2－26－1 所示，若在折射率为 n_G 的基片上，依次涂上高折射率层（n_H）和低折射率层（n_L），每层的光学厚度均为$\frac{\lambda}{4}$. 试问，为了达到完全消反射，n_H 和 n_L 应满足什么条件？

【分析】 本题把前几题关于消反射的讨论从两束光干涉扩展到多束光干涉，从一层薄膜扩展到两层薄膜. 菲涅耳公式以及完全消反射的要求（反射光的相位相反，振幅相等）仍是讨论的基础. 又，第 1 问中单色光正入射时光强反射率的公式是一个有用的公式.



光图 2－26－1



光图 2－26－2

【解】 1. 如光图 2－26－2 所示，设入射光振幅为 A，入射角为 θ_i，折射角为 θ_r，在界面 1 处向外反射时，振幅反射率为 r_1，在界面 1 处向内反射时，振幅反射率为 r'_1，在界面 1 处从外向里透射时，振幅透射率为 t_1，在界面 1 处从里向外透射时，振幅透射率为 t'_1，在界面 2 处向上反射时，振幅反射率为 r_2，则反射光束 1,2,3,…的复振幅依次为

$$\tilde{u}_1 = r_1 A$$
$$\tilde{u}_2 = t_1 r_2 t'_1 A e^{i\delta}$$
$$\tilde{u}_3 = t_1 t'_1 r_2^2 r'_1 A e^{i2\delta}$$
$$\tilde{u}_4 = t_1 t'_1 r_2^3 r'^2_1 A e^{i3\delta}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

式中

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta = \frac{2\pi}{\lambda}2nh\ \cos\theta_r = \frac{4\pi}{\lambda}nh\ \cos\theta_r$$

反射光的合成复振幅为

$$\begin{aligned}\tilde{u}_R &= \sum_{j=1}^{\infty}\tilde{u}_j \\ &= r_1 A + t_1 t'_1 r_2 A e^{i\delta} + t_1 t'_1 r_2^2 r'_1 A e^{i2\delta} + t_1 t'_1 r_2^3 r'^2_1 A e^{i3\delta} + \cdots\cdots \\ &\quad + t_1 t'_1 r_2^{N-1} r'^{N-2}_1 A e^{i(N-1)\delta} + \cdots\cdots \\ &= r_1 A + t_1 t'_1 r_2 A e^{i\delta}[1 + r_2 r'_1 e^{i\delta} + r_2^2 r'^2_1 e^{i2\delta} + r_2^3 r'^3_1 e^{i3\delta} + \cdots\cdots] \\ &= r_1 A + t_1 t'_1 r_2 A e^{i\delta}\frac{1}{1 - r_2 r'_1 e^{i\delta}}\end{aligned}$$

利用斯托克斯倒逆关系

$$t_1 t'_1 = 1 - r_1^2$$

及

$$r'_1 = -r_1$$

得

$$\tilde{u}_R = r_1 A + (1 - r_1^2) r_2 A\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} \frac{1}{1 + r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}} = \frac{r_1 + r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}}{1 + r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}} A$$

反射光的强度为

$$\begin{aligned} I_R &= \tilde{u}_R \tilde{u}_R^* = \left(\frac{r_1 + r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}}{1 + r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}} \right) \left(\frac{r_1 + r_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}}{1 + r_1 r_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}} \right) A^2 \\ &= \frac{r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos\delta}{1 + r_1^2 r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos\delta} I_0 \end{aligned}$$

利用三角函数公式

$$\cos\delta = \cos^2 \frac{\delta}{2} - \sin^2 \frac{\delta}{2}, \quad 1 = \sin^2 \frac{\delta}{2} + \cos^2 \frac{\delta}{2}$$

可将 I_R 的公式写成如下对称的形式

$$I_R = \frac{(r_1 + r_2)^2 \cos^2 \frac{\delta}{2} + (r_1 - r_2)^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}}{(1 + r_1 r_2)^2 \cos^2 \frac{\delta}{2} + (1 - r_1 r_2)^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}} I_0$$

正入射时，上式同时适用于 S 分量和 P 分量，故上式的 I_R 也是总的反射光强. 正入射时的菲涅耳公式为

$$r_1 = \frac{n_0 - n}{n_0 + n}, \quad r_2 = \frac{n - n_G}{n + n_G}$$

代入 I_R 公式，得出光强反射率为

$$R = \frac{I_R}{I_0} = \frac{(n_0 - n_G)^2 \cos^2 \frac{\delta}{2} + \left(\frac{n_0 n_G}{n} - n \right)^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}}{(n_0 + n_G)^2 \cos^2 \frac{\delta}{2} + \left(\frac{n_0 n_G}{n} + n \right)^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}} \tag{1}$$

式中

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda} nh$$

2. 当薄膜的光学厚度 nh 满足

$$nh = (2k + 1) \frac{\lambda}{4}$$

时，相继的两反射光之间的相位差为

$$\delta = (2k + 1)\pi$$

故

$$\cos^2 \frac{\delta}{2} = 0, \quad \sin^2 \frac{\delta}{2} = 1$$

代入(1)式，得

$$R = \left(\frac{\frac{n_0 n_G}{n} - n}{\frac{n_0 n_G}{n} + n} \right)^2 = \left(\frac{n_0 - \frac{n^2}{n_G}}{n_0 + \frac{n^2}{n_G}} \right)^2 \tag{2}$$

薄膜折射率 n 若满足

$$n_0-\frac{n^2}{n_G^2}=0$$

或

$$n=\sqrt{n_0 n_G} \tag{3}$$

则

$$R=0$$

反射光完全干涉相消,薄膜起到了使入射光全部透射的目的.

实际上即使(3)式不满足,只要薄膜的折射率 n 小于基片的折射率 n_G,涂膜后的反射率总会小于不涂膜的基片的反射率.

3. 光在基片上的反射率为

$$R_0=\left(\frac{n_0-n_G}{n_0+n_G}\right)^2 \tag{4}$$

先考虑涂一层高折射率层(n_H)的情形,由(2)式,此时的反射率为

$$R_1=\left(\frac{n_0-\dfrac{n_H^2}{n_G}}{n_0+\dfrac{n_H^2}{n_G}}\right)^2$$

令

$$\tilde{n}_1=\frac{n_H^2}{n_G}$$

则

$$R_1=\left(\frac{n_0-\tilde{n}_1}{n_0+\tilde{n}_1}\right)^2$$

与(4)式形式相同,故涂一层薄膜时的反射率可等效成在折射率为 $\tilde{n}_1$ 的基片上的反射率.
涂第二层低折射率层(n_L)时,由(2)式,反射率为

$$R_2=\left(\frac{n_0-\dfrac{n_L^2}{\tilde{n}_1}}{n_0+\dfrac{n_L^2}{\tilde{n}_1}}\right)^2=\left(\frac{n_0-\left(\dfrac{n_L}{n_H}\right)^2 n_G}{n_0+\left(\dfrac{n_L}{n_H}\right)^2 n_G}\right)^2$$

为使反射光完全干涉相消,必须有

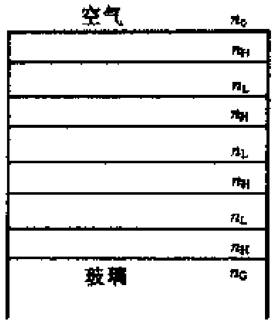
$$n_0-\left(\frac{n_L}{n_H}\right)^2 n_G=0$$

即要求

$$\frac{n_L}{n_H}=\sqrt{\frac{n_0}{n_G}}$$

【题 27】 如图所示,多层高反射膜由光学厚度均满足干涉相消条件的高折射率层(如硫化锌)和低折射率层(如氟化镁)交替重叠而成.与玻璃基片和空气相邻的是高折射率层,故高反射膜的层

数是奇数.



光图 2-27-1

1. 已知空气折射率为 n_0，玻璃折射率为 n_G，高折射率层和低折射率层的折射率分别是 n_H 和 n_L，总的层数为 $(2k+1)$. 试证明，在正入射条件下，多层膜的光强反射率为

$$R_{2k+1}=\left[\frac{n_0-\left(\frac{n_H}{n_L}\right)^{2k}\frac{n_H^2}{n_G}}{n_0+\left(\frac{n_H}{n_L}\right)^{2k}\frac{n_H^2}{n_G}}\right]$$

2. 若 $n_0=1, n_G=1.50, n_H=2.40, n_L=1.38$. 试计算五层膜和九层膜的反射率.

【分析】 在前几题中，涂薄膜的目的在于消反射，使入射光的能量绝大部分透射. 本题涂多层膜的目的则相反，在于增强反射率，使入射光能量的绝大部分反射. 由此可见，涂膜的作用是广泛的. 当然，讨论的依据与前几题相同.

【解】 若玻璃表面无涂层，入射光正入射，则光强反射率为

$$R_0=\left(\frac{n_0-n_G}{n_0+n_G}\right)^2 \tag{1}$$

涂一层高折射率膜(n_H)，由上题，只要膜的光学厚度为$\frac{\lambda}{4}$，则光强反射率为

$$R_1=\left(\frac{n_0-\frac{n_H^2}{n_G}}{n_0+\frac{n_H^2}{n_G}}\right)^2$$

令

$$\tilde{n}_1=\frac{n_H^2}{n_G}$$

则上式可写为

$$R_1=\left(\frac{n_0-\tilde{n}_1}{n_0+\tilde{n}_1}\right)^2$$

上式与(1)式有相同的形式，故单层膜的光强反射率等效于折射率为 $\tilde{n}_1$ 的基片上的光强反射率.

再涂一层低折射率膜(n_L)，光强反射率为

$$R_2=\left(\frac{n_0-\frac{n_L^2}{\tilde{n}_1}}{n_0+\frac{n_L^2}{\tilde{n}_1}}\right)^2$$

令

$$\tilde{n}_2=\frac{n_L^2}{\tilde{n}_1}=\left(\frac{n_L}{n_H}\right)^2 n_G$$

则

$$R_2=\left(\frac{n_0-\tilde{n}_2}{n_0+\tilde{n}_2}\right)^2$$

故涂两层膜的光强反射率等效于折射率为 $\tilde{n}_2$ 的基片上的光强反射率.

涂第三层高折射率膜(n_H),光强反射率为

$$R_3=\left(\frac{n_0-\frac{n_H^2}{\tilde{n}_2}}{n_0+\frac{n_H^2}{\tilde{n}_2}}\right)=\left[\frac{n_0-\left(\frac{n_H}{n_L}\right)^2\frac{n_H^2}{n_G}}{n_0+\left(\frac{n_H}{n_L}\right)^2\frac{n_H^2}{n_G}}\right]^2$$

依此类推,涂第$(2k+1)$层高折射率膜时,光强反射率应为

$$R_{2k+1}=\left[\frac{n_0-\left(\frac{n_H}{n_L}\right)^{2k}\frac{n_H^2}{n_G}}{n_0+\left(\frac{n_H}{n_L}\right)^{2k}\frac{n_H^2}{n_G}}\right]^2$$

可见,高折射率 n_H 和低折射率 n_L 相差越大(即式中$\frac{n_H}{n_L}$越大),层数越多(即 k 越大),则光强反射率 R 就越高.

利用题目所给数据,对于5层膜,光强反射率为

$$R_5=\left[\frac{1-\left(\frac{2.40}{1.38}\right)^4\left(\frac{2.40^2}{1.50}\right)}{1+\left(\frac{2.40}{1.38}\right)^4\left(\frac{2.40^2}{1.50}\right)}\right]^2=0.892=89.2\%$$

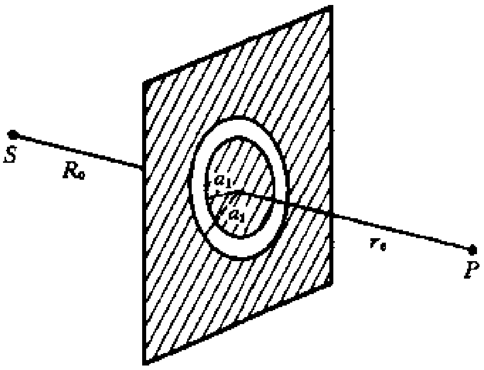
对于9层膜,光强反射率为

$$R_9=\left[\frac{1-\left(\frac{2.40}{1.38}\right)^8\left(\frac{2.40^2}{1.50}\right)}{1+\left(\frac{2.40}{1.38}\right)^8\left(\frac{2.40^2}{1.50}\right)}\right]^2=0.988=98.8\%$$

确实,入射光能量的绝大部分被反射,达到了高反射的目的.

第三章　光的衍射

【题1】 如光图3－1－1所示，波长 $\lambda=500$ nm 的单色点光源 S 与光阑的距离 $R_0=1$ m，光阑上有一个通光的圆环，内半径 $a_1=0.5$ mm，外半径 $a_2=1$ mm，光轴上 P 点与光阑的距离 $r_0=1$ m．试求 P 点的光强与没有光阑时 P 点的光强之比．



光图 3－1－1

【分析】 P 点的光强可根据惠更斯－菲涅耳原理作积分求得，由题目所给数据，在计算时可作适当的近似．

另外，如果对 P 点而言，圆环刚好包含整数个半波带，则由菲涅耳半波带法可以简便地直接得出结果而无须积分．

半波带法把积分化为有限多个有限量的求和，使计算大为简便．但要求露出的波阵面对某点而言，刚好包含整数个带，这就有很大的局限性．另外，因各带面积为有限大．所作假设不够准确，只是粗略的平均．严格的计算需运用惠更斯－菲涅耳原理作积分．

【解】 方法一．由菲涅耳半波带法，当圆孔半径 $\rho\ll R_0$ 和 $\rho\ll r_0$ 时，圆孔所包含的半波带数 n 由下式确定，为

$$n=\frac{\rho^2(R_0+r_0)}{r_0R_0\lambda}$$

故本题通光圆环对 P 点而言，包含的半波带数为

$$n_2-n_1=\frac{(R_0+r_0)}{r_0R_0\lambda}(a_2^2-a_1^2)=\frac{2\times10^{-6}}{5\times10^{-7}}(1-0.25)=3$$

即共包括三个带，其中相邻两带在 P 点干涉相消，故 P 点光强是由一个带的光强所作的贡献，近似等于第一个带的贡献．第一个带在 P 点的振幅是自由光波(无光阑)在 P 点振幅的二倍．故有光阑时 P 点的光强为无光阑(自由光波)时 P 点光强的4倍．

方法二．由惠更斯－菲涅耳原理作积分运算．如光图3－1－2所示，在环孔面上，取平面极坐标(ρ,φ)．点光源 S 发出的球面波在环孔面上 Q 点的复振幅为

$$\tilde{u}(Q)=\frac{A}{R}e^{ikR}$$

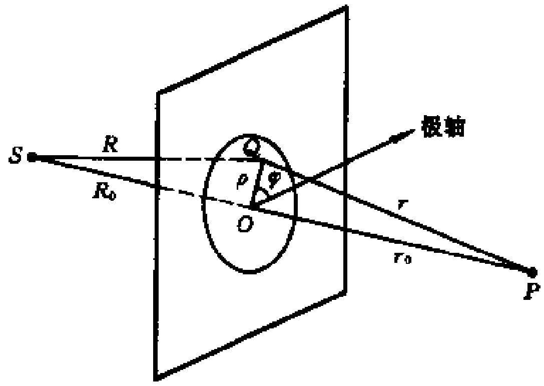
式中 Q 是环孔上一点，$k=\frac{2\pi}{\lambda}$是波矢．由惠更斯－菲涅耳原理，在观察点 P 的复振幅为

$$\tilde{u}(P)=\frac{1}{i\lambda}\iint\tilde{u}(Q)\frac{e^{ikr}}{r}\,dS$$

式中忽略了倾斜因子的影响，式中 $dS=\rho\,d\rho\,d\varphi$ 是环孔面上的面积元．把 $\tilde{u}(Q)$ 代入，得

$$\tilde{u}(P) = \frac{A}{\mathrm{i}\lambda}\iint \frac{1}{Rr}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(R+r)}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{2\pi A}{\mathrm{i}\lambda}\int_{a_1}^{a_2} \frac{1}{Rr}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(R+r)}\rho\,\mathrm{d}\rho$$



光图 3-1-2

由几何关系，有

$$R^2 = R_0^2 + \rho^2,\quad r^2 = r_0^2 + \rho^2$$

微分，得

$$R\mathrm{d}R = \rho\,\mathrm{d}\rho,\quad r\mathrm{d}r = \rho\,\mathrm{d}\rho$$

即

$$\mathrm{d}(R + r) = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)\rho\,\mathrm{d}\rho = \frac{R + r}{Rr}\rho\,\mathrm{d}\rho$$

把上式得出的 $\rho\,\mathrm{d}\rho$ 代入 $\tilde{u}(P)$，得

$$\tilde{u}(P) = \frac{2\pi A}{\mathrm{i}\lambda}\int \frac{1}{R + r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(R+r)}\mathrm{d}(R + r)$$

因环孔半径比 R_0 和 r_0 小得多，上式的分母 $(R + r)$ 可用 $(R_0 + r_0)$ 近似代替，并令

$$\xi = R + r$$

则

$$\tilde{u}(P) = \frac{2\pi A}{\mathrm{i}\lambda(R_0 + r_0)}\int_{\xi_1}^{\xi_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi}\mathrm{d}\xi$$

式中的积分限为

$$\xi_1 = (R_0^2 + a_1^2)^{\frac{1}{2}} + (r_0^2 + a_1^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= R_0\left(1 + \frac{a_1^2}{2R_0^2}\right) + r_0\left(1 + \frac{a_1^2}{2r_0^2}\right)$$

$$\xi_2 = (R_0^2 + a_2^2)^{\frac{1}{2}} + (r_0^2 + a_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= R_0\left(1 + \frac{a_2^2}{2R_0^2}\right) + r_0\left(1 + \frac{a_2^2}{2r_0^2}\right)$$

积分，得

$$\tilde{u}(P) = \frac{2\pi A}{\mathrm{i}\lambda(R_0 + r_0)}\cdot\frac{1}{\mathrm{i}k}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi_2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi_1}) = \frac{A}{R_0 + r_0}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi_2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi_1})$$

故 P 点的光强为

$$I(P) = \tilde{u}(P)\tilde{u}^*(P)$$

$$= \left(\frac{A}{R_0 + r_0}\right)^2[(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi_2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi_1})(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi_2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi_1})]$$

$$= 2\left(\frac{A}{R_0 + r_0}\right)^2[1 - \cos k(\xi_2 - \xi_1)]$$

$$= 4\left(\frac{A}{R_0 + r_0}\right)^2\sin^2\left[\frac{k}{2}(\xi_2 - \xi_1)\right]$$

$$= 4\left(\frac{A}{R_0 + r_0}\right)^2\sin^2\left[\frac{\pi}{\lambda}(\xi_2 - \xi_1)\right]$$

$$= 4\left(\frac{A}{R_0 + r_0}\right)^2 \sin^2\left[\frac{\pi(R_0 + r_0)}{2\lambda R_0 r_0}(a_2^2 - a_1^2)\right]$$

式中

$$I_0 = \left(\frac{A}{R_0 + r_0}\right)^2$$

是无光阑时自由光波在 P 点的光强．故有光阑和无光阑时 P 点光强的比值为

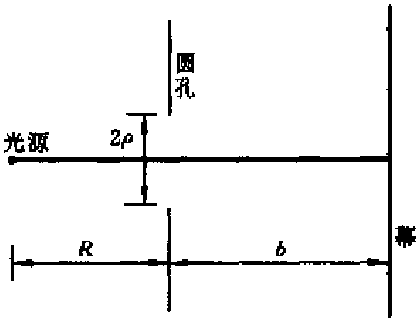
$$\frac{I}{I_0} = 4\sin^2\left[\frac{\pi(R_0 + r_0)}{2\lambda R_0 r_0}(a_2^2 - a_1^2)\right]$$

代人数据，得

$$\frac{I}{I_0} = 4$$

有环孔光阑时 P 点的光强为无光阑时的 4 倍．

【题 2】 如图所示，在菲涅耳圆孔衍射实验中，圆孔半径 $\rho = 2.0\text{mm}$，点光源与圆孔的距离为 $R = 2.0\ \text{m}$，光波波长 $\lambda = 500\ \text{nm}$．当观察幕从很远处向圆孔移近时，试求：1．前三次出现中心亮斑（强度为极大）时幕的位置；2．前三次出现中心暗斑（强度为极小）时幕的位置．3．当幕离圆孔的距离为 $b = 5.0\ \text{m}$ 时，固定其位置，逐渐扩大圆孔半径，试求最先出现中心暗斑和亮斑时圆孔的半径．



光图 3－2－1

【分析】 由菲涅耳圆孔衍射半波带半径的公式，圆孔范围内所露半波带数 k，和观察点与圆孔的距离 b、光源与圆孔的距离 R、圆孔的半径 ρ 以及波长 λ 有关．若 ρ、R 和 λ 一定，则 k 值由 b 决定．幕在无穷远（$b \to \infty$）时，可算出圆孔所露半波带数，幕移近圆孔（b 减小）时 k 值增大，并经历一系列的整数值．当 k 为偶整数时，幕中心为暗斑，当 k 为奇整数时，幕中心为亮斑．

若 R、b 和 λ 一定，则圆孔所露半波带数 k 由圆孔半径决定．圆孔连续增大时，k 值相应增大，当 k 取偶整数时，幕中心为暗斑，当 k 取奇整数时，幕中心为亮斑．

【解】 1．由菲涅耳半波带公式，第 k 个波带的半径 ρ_k 为

$$\rho_k = \sqrt{\frac{Rb}{R + b}k\lambda} \tag{1}$$

故圆孔所露波带数 k 为

$$k = \frac{R + b}{Rb\lambda}\rho^2 = \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{R}\right)\frac{\rho^2}{\lambda} \tag{2}$$

式中 ρ 为圆孔半径．

当幕在无穷远时，$b \to \infty$，圆孔所露波带数为

$$k = \frac{\rho^2}{R\lambda} = \frac{(2.0 \times 10^{-3})^2}{2.0 \times 5 \times 10^{-7}} = 4$$

当幕移近时，b 减小，k 值增加，并先后经历 5,6,7,… 等整数值．

当 $k = 5,7,9$ 等奇整数时，幕中心出现亮斑．由(2)式，前三次幕中心出现亮斑时，幕离圆孔

的距离由下式决定，为

$$b_k = \frac{R\rho^2}{kR\lambda - \rho^2}, k = 5,7,9$$

代入数据，得

$$b_k = \frac{8.0}{k - 4.0}\ \mathrm{m}$$

$$b_5 = \frac{8.0}{5 - 4.0} = 8.0\ \mathrm{m}$$

$$b_7 = \frac{8.0}{7 - 4.0} = 2.7\ \mathrm{m}$$

$$b_9 = \frac{8.0}{9 - 4.0} = 1.6\ \mathrm{m}$$

2. 当 $k = 6,8,10$ 等偶整数时，幕中心出现暗斑，相应的幕离圆孔的距离为

$$b_6 = \frac{8.0}{6 - 4.0} = 4.0\ \mathrm{m}$$

$$b_8 = \frac{8.0}{8 - 4.0} = 2.0\ \mathrm{m}$$

$$b_{10} = \frac{8.0}{10 - 4.0} = 1.3\ \mathrm{m}$$

3. 当 $R = 2.0\ \mathrm{m}, b = 5.0\ \mathrm{m}, \rho = 2.0\ \mathrm{mm}$ 时，圆孔所露波带数为

$$k = \frac{\rho^2}{\lambda} \cdot \frac{R + b}{Rb} = 5.6$$

圆孔扩大时，k 值增加．当 k 增为 6 时，幕中心出现暗斑，此时圆孔半径为

$$\rho_6 = \sqrt{\frac{Rb}{R + b}\lambda}\sqrt{k} = 5.92 \times 10^{-4}\sqrt{k}\ \mathrm{m} = 5.92 \times 10^{-4} \times \sqrt{6}\ \mathrm{m} = 1.5\ \mathrm{mm}$$

当 k 增为 7 时，幕中心出现亮斑，相应的圆孔半径为

$$\rho_7 = 5.92 \times 10^{-4} \times \sqrt{7}\ \mathrm{m} = 1.2\ \mathrm{mm}$$

【题 3】 波长 $\lambda = 550\ \mathrm{nm}$ 的平行单色光，光强为 I_0，垂直入射到直径 $d = 1.1\ \mathrm{mm}$ 的圆孔上，轴上一点 P 与圆孔的距离 $r_0 = 33\ \mathrm{cm}$．1．试求 P 点的光强．2．若在圆孔处放置一个焦距为 33 cm 的会聚薄透镜，试求 P 点的光强．

【分析】 先用半波带法，对 P 点而言，得出圆孔包含 $1\frac{2}{3}$ 个带，不是整数．为作定量计算可借助于振幅矢量叠加法，即将圆孔分成许多同心圆环，每个小圆环在 P 点引起的振动用一小矢量表示，矢量的大小表示该小圆环在 P 点引起振动的振幅，各矢量的夹角则表示不同圆环在 P 点引起振动的相位差，合矢量的大小就是整个圆孔在 P 点引起振动的振幅．在忽略衍射倾斜因子影响时，各小圆环的振动矢量将连成一个圆弧．

当圆孔刚好包含一个带时，首尾两小矢量在 P 点引起振动的相位差为 π，即圆弧成为半圆，此时 P 点的振幅为半圆的直径，它等于自由光波在 P 点振幅的两倍．因此圆弧的半径等于自由光波在 P 点的振幅．当圆孔包含 $1\frac{2}{3}$ 个带时，圆弧的大小如图所示，这样，$\overline{OM}$ 就是 P 点的振幅，于是可解．

也可利用本章题1得出的积分求解．

【解】 1．对于 P 点，每个波带的面积为

$$\Delta S=\frac{\pi R r_0}{R+r_0}\lambda$$

式中 R 是点光源到圆孔的距离．本题入射光为平行光，等效于点光源在无穷远，即

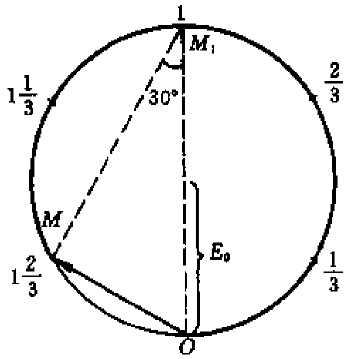
$$R=\infty,\quad \frac{Rr_0}{R+r_0}=r_0$$

故

$$\Delta S=\pi r_0\lambda$$

圆孔包括的半波带数为

$$n=\frac{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2}{\pi r_0\lambda}=\frac{d^2}{4r_0\lambda}=1\frac{2}{3}\text{ 个}$$



光图 3－3－1

如图，借助于振幅矢量的叠加，整个圆孔在 P 点的合振幅为 $\overline{OM}$，由图可知

$$\overline{OM}=\overline{OM_1}\cos 30^\circ=E_0$$

式中 E_0 是圆半径，即自由光波在 P 点的振幅．故 P 点光强为

$$I(P)=E_0^2=I_0$$

在本章题1中运用衍射积分给出了圆环情形的强度公式，为

$$I(P)=\sin^2\left[\frac{\pi(R_0+r_0)}{2\lambda R_0 r_0}(a_2^2-a_1^2)\right]$$

现在，$a_1=0$，$a_2=a$ 为圆孔半径，即得

$$I(P)=4I_0\sin\left[\frac{\pi(R_0+r_0)}{2\lambda R_0 r_0}a^2\right]$$

又因点光源在无穷远，$\frac{R_0+r_0}{R_0r_0}=\frac{1}{r_0}$，代入

$$I(P)=4I_0\sin^2\left(\frac{\pi a^2}{2\lambda r_0}\right)$$

把数据代入，得

$$I(P)=I_0$$

与半波带法的结果相同．

2．当在圆孔面上加会聚薄透镜时，因 P 点位于透镜的焦点，由透镜成像的等光程性，在 P 点作叠加的各个振动有相同的相位，这样，P 点的合振幅 E 应等于图中的弧长 $\overset{\frown}{OM_1M}$，即

$$E=\overset{\frown}{OM_1M}=\frac{5}{6}2\pi E_0=\frac{5}{3}\pi E_0$$

故 P 点的光强为

$$I'(P)=E^2=\left(\frac{5}{3}\pi E_0\right)^2=\frac{25}{9}\pi^2 I_0$$

【题 4】 一非涅耳波带片包含偶数个波带，其中奇数波带是透明的，偶数波带不透明．第一个透明波带的直径 $d = 1$ mm，单色点光源波长 $\lambda = 500$ nm.

1. 已知轴上点光源位于波带片前方 1 m 处．试求像点位置．2. 若用相同孔径的透镜代替波带片，其焦距等于波带片的主焦距．试问其像点的光强是波带片主像点光强的多少倍？

【分析】 菲涅耳波带片的作用有如透镜，它可以使入射光会聚起来．波带片与透镜也有区别，即一个波带片有许多焦点，除主焦点外，还有一系列次焦点，相应地有一系列的焦距．

【解】 1. 波带片的主焦距为

$$f = \frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2}{\lambda} = 0.5 \text{ m}$$

次焦距为$\frac{f}{3}$，$\frac{f}{5}$，$\frac{f}{7}$，… 等，由成像公式

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

像距为

$$s' = \frac{sf}{s - f} = 1 \text{ m},\ 0.2 \text{ m},0.11 \text{ m},\cdots$$

2. 由上题(本章题 3)，一个波带在主像点 P 点的振幅为 $2E_0$，其中 E_0 是自由光波在 P 点的振幅．设波带片总的波带数为 $2N$，则 N 个透明的奇数波带在 P 点的振动相叠加，故 P 点的总振幅为

$$E = N \cdot 2E_0 = 2NE_0$$

总光强为

$$I = E^2 = 4N^2E_0^2 = 4N^2 I_0$$

以透镜代替波带片时，一个波带片面积的光经透镜后同相叠加，由上题，振幅为 πE_0(即为上题附图中以 E_0 为半径的半圆周的长度)．因此 $2N$ 个波带面积在 P 点的总振幅为

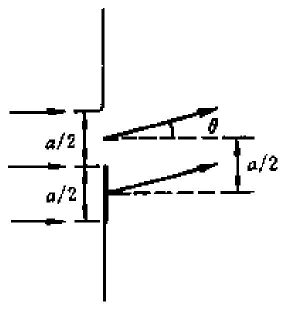
$$2N \cdot \pi E_0 = 2\pi NE_0$$

故 P 点的总光强为

$$I' = (2\pi NE_0)^2 = \pi^2(4N^2E_0^2) = \pi^2 I = 9.9I$$

所以波带片在主焦点所成像的光强约为相等孔径透镜所成像的光强的十分之一．

【题 5】 单缝缝宽为 a，波长为 λ 的单色平行光垂直入射．缝宽的一半复盖一相对位型掩膜，使入射光经掩膜后相对狭缝的另一半产生 π 的相移．1. 试求夫琅禾费衍射的强度分布公式．2. 设缝宽 $a = 10\lambda$，试画出强度分布曲线．



光图 3－5－1

【分析】 如光图 3－5－1 所示，把整个狭缝看作两个宽度各为$\frac{a}{2}$的平行单缝，这两个单缝的中心相距为$\frac{a}{2}$，每一个单缝的衍射光振幅随角 θ 的分布由通常的单缝衍射公式给出，两者是相同的．两束衍射光之间除了因两缝的几何位置不同而有相位差外，还因复盖掩膜需附加 π 的相位差．

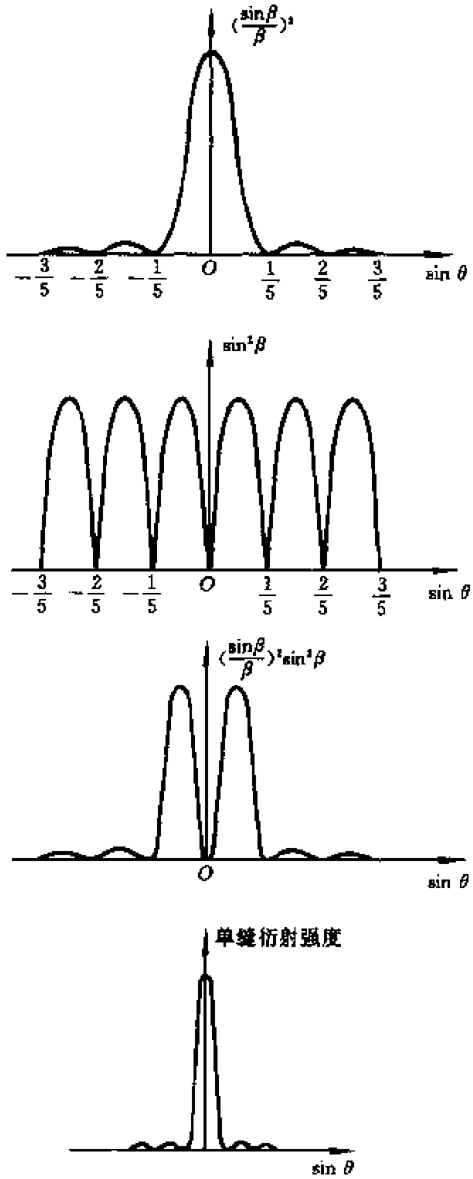
两缝的相干叠加决定了幕上的合振幅及合光强的分布．

【解】 1. 把整个狭缝看作两个宽度为$\frac{a}{2}$，中心间距为$\frac{a}{2}$的双缝，它们各自在θ方向的衍射光振幅相同．由单缝衍射公式，为

$$A_1 = A_2 = A_0\frac{\sin\beta}{\beta}$$

式中A_0为一半狭缝在$\theta = 0$方向的合振幅，式中

$$\beta = \frac{\pi\frac{a}{2}}{\lambda}\sin\theta = \frac{\pi a}{2\lambda}\sin\theta$$



光图 3-5-2

两束衍射光之间的相位差为

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{a}{2}\sin\theta+\pi=\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta+\pi$$

相干叠加后的合振幅平方即为光强，为

$$A^2=2A_0^2\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2(1+\cos\delta)=(2A_0)^2\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2\cos^2\frac{\delta}{2}$$

$$=I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2\cos^2\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)=I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2\sin^2\beta$$

可见，强度分布比不复盖掩膜的情况多了一个 $\sin^2\beta$ 因子．

2. 当 $a=10\lambda$ 时

$$\beta=5\pi\sin\theta$$

光图 3－5－2 中画出了 $\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2$，$\sin^2\beta$，$\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2\sin^2\beta$，随 $\sin\theta$ 变化的曲线，后者乘常量 I_0 即是强度分布曲线．为作对比，也画出了不复盖掩膜时单缝衍射的强度分布曲线（光图 3－5－2 中最下面的曲线）．可以看出，加掩膜造成 π 的相移后，中央 $\theta=0$ 位置不是衍射极大而是衍射极小，另外相邻极小的间距扩大了一倍．

【题 6】 单缝缝宽为 a，复盖一振幅型掩膜．若以缝中心为原点，与缝垂直的方向取为 x 轴．设经掩膜后的振幅透射率为

$$t(x)=\cos\frac{\pi}{a}x$$

波长为 λ 的单色平行光垂直入射．

1. 试求夫琅禾费衍射的强度分布公式，并确定极小值的位置．2. 试求相邻两极小中点处的强度与中央极大强度之比．

【分析】 加振幅型掩膜后，透射光的振幅随 x 有一定的分布．在此条件下，应根据惠更斯－菲涅耳原理重新计算单缝衍射的强度随角 θ 的分布．

结果表明，加掩膜后，次极大的强度随级次的增高迅速衰减，衰减的趋势比普通的单缝衍射要快得多．

把无掩膜时的矩形透射率，利用振幅型掩膜变为透射率连续变化的技术，称为切趾法．对仪器的孔径光阑也可进行切趾．切趾可以使衍射图样的次极大受到压抑，从而突出中央极大，改善仪器的分辨率．

【解】 1. 由惠更斯－菲涅耳原理，考虑到加掩膜后振幅透射率的变化，在夫琅禾费衍射装置的屏幕上，相应于角 θ 的观察点的合成复振幅为

$$A(\theta)=C\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)e^{iKx\sin\theta}\,dx$$

式中 c 是比例常量，$K=\frac{2\pi}{\lambda}$ 是波矢．利用公式

$$e^{iKx\sin\theta}=\cos(Kx\sin\theta)+i\sin(Kx\sin\theta)$$

把上述积分写为

$$A(\theta)=C\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos(Kx\sin\theta)\,\mathrm{d}x+iC\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin(Kx\sin\theta)\,\mathrm{d}x$$

利用积分公式

$$\int\cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x=\frac{\sin(mx+nx)}{2(m+n)}+\frac{\sin(mx-nx)}{2(m-n)}$$

$$\int\sin(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x=-\frac{\cos(mx+nx)}{2(m+n)}-\frac{\cos(mx-nx)}{2(m-n)}$$

得

$$A(\theta)=C\left[\frac{\sin\left(Kx\sin\theta+\frac{\pi}{a}x\right)}{2\left(K\sin\theta+\frac{\pi}{a}\right)}+\frac{\sin\left(Kx\sin\theta-\frac{\pi}{a}x\right)}{2\left(K\sin\theta-\frac{\pi}{a}\right)}\right]_{x=-\frac{a}{2}}^{x=\frac{a}{2}}$$

$$=C\left[\frac{\sin\left(\frac{Ka}{2}\sin\theta+\frac{\pi}{2}\right)}{K\sin\theta+\frac{\pi}{a}}+\frac{\sin\left(\frac{Ka}{2}\sin\theta-\frac{\pi}{2}\right)}{K\sin\theta-\frac{\pi}{a}}\right]$$

$$=C\cos\left(\frac{Ka}{2}\sin\theta\right)\left[\frac{1}{K\sin\theta+\frac{\pi}{a}}-\frac{1}{K\sin\theta-\frac{\pi}{a}}\right]$$

因此，衍射图样的强度分布为

$$I(\theta)=I_0\cos^2\left(\frac{Ka}{2}\sin\theta\right)\left[\frac{1}{K\sin\theta-\frac{\pi}{a}}-\frac{1}{K\sin\theta+\frac{\pi}{a}}\right]^2$$

极小值即 $I(\theta)=0$ 的位置满足

$$\frac{Ka}{2}\sin\theta_k=(2k+1)\frac{\pi}{2},\quad k\neq 0$$

即

$$\sin\theta_k=(2k+1)\frac{\lambda}{2a},\qquad k=1,2,3,\cdots$$

注意，级次 k 与波矢 K 勿混．中央极大的位置为 $\sin\theta=0$，其强度为

$$I(0)=\frac{4I_0}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

作为对比，如所周知，同样宽度的透射率为矩形函数（即不加掩膜情形）时，单缝夫琅禾费衍射图样的极小值的位置满足

$$\sin\theta'_k=k\frac{\lambda}{a}$$

因此

$$\sin\theta_k-\sin\theta'_k=\frac{\lambda}{2a}$$

即相对普通单缝衍射的极小位置而言，加振幅型掩膜后，各级极小的位置均向外侧移动一个距离．

2.$(k-1)$级极小和 k 级极小分别位于

$$\sin\theta_{k-1}=(2k-1)\frac{\lambda}{2a}$$

$$\sin\theta_k=(2k+1)\frac{\lambda}{2a}$$

两者的中间位置位于

$$\sin\theta=k\frac{\lambda}{a}$$

中间位置的强度近似等于次极大的强度,为

$$I=I_0\cos^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}k\frac{\lambda}{a}\right)\left[\frac{1}{\frac{2\pi}{\lambda}k\frac{\lambda}{a}-\frac{\pi}{a}}-\frac{1}{\frac{\pi}{a}(2k+1)}\right]^2$$

$$=\frac{I_0}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)^2=\frac{4I_0}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2(4k^2-1)^2}$$

因此,各级次极大与中央极大强度之比近似为

$$\frac{I}{I(0)}=\frac{1}{(4k^2-1)^2}$$

可见,次极大的强度随级次的增高迅速衰减,比普通单缝衍射的衰减快得多．

【题7】 如光图3－7－1所示,两狭缝宽度不等,分别为 a_1 和 a_2,双缝中心间距为 d,波长为 λ 的单色平行光垂直入射．1. 试求夫琅禾费衍射的强度分布公式．2. 如光图3－7－1中,设 $a_1=2a_2=2a,d=3a$．试讨论强度分布的特点．

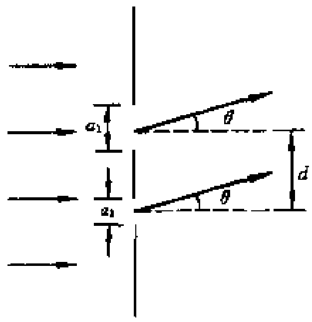
【分析】 这是狭缝宽度不等的双逢衍射．每条狭缝单缝衍射的振幅或强度分布是熟知的,考虑其间的相位差,两者相干叠加给出的就是双缝衍射的结果．

把第2问的结果与通常等宽双缝衍射的强度分布比较,即可看出不等宽双缝衍射的特点．

【解】 1. 由单缝衍射公式,如光图3－7－1,每条狭缝在衍射角为 θ 方向的振幅分别为

$$A_1=Ca_1\frac{\sin\beta_1}{\beta_1},\ \beta_1=\frac{\pi a_1}{\lambda}\sin\theta$$

$$A_2=Ca_2\frac{\sin\beta_2}{\beta_2},\ \beta_2=\frac{\pi a_2}{\lambda}\sin\theta$$



光图3－7－1

两者之间的相位差为

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta$$

双缝干涉的合振幅由下式决定

$$A^2=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\delta$$

故衍射角为 θ 方向的总强度为

$$I(\theta)=A^2$$

$$=C^2\left[a_1^2\left(\frac{\sin\beta_1}{\beta_1}\right)^2+a_2^2\left(\frac{\sin\beta_2}{\beta_2}\right)^2+2a_1a_2\left(\frac{\sin\beta_1}{\beta_1}\right)\left(\frac{\sin\beta_2}{\beta_2}\right)\cos\delta\right]$$

2. 若 $a_1 = 2a_2 = 2a, d = 3a$，则

$$\beta_1 = 2\beta_2 = 2\beta, \beta = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$$

强度分布为

$$I(\theta) = C^2a^2\left[4\left(\frac{\sin 2\beta}{2\beta}\right)^2 + \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 + 4\frac{\sin\beta}{\beta}\cdot\frac{\sin 2\beta}{2\beta}\cos\delta\right]$$

式中

$$\delta = 6\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta = 6\beta$$

故

$$\begin{aligned} I(\theta) &= I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2\left[1 + \frac{\sin^2 2\beta}{\sin^2\beta} + 2\frac{\sin 2\beta}{\sin\beta}\cos 6\beta\right] \\ &= I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2[1 + 4\cos^2\beta + 4\cos\beta\cos 6\beta] \\ &= I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2[3 + 2(\cos 2\beta + \cos 5\beta + \cos 7\beta)] \end{aligned} \tag{1}$$

方法二．在 $a_1 = 2a_2 = 2a, d = 3a$ 的条件下，可看作是三个缝宽均为 a，缝距 $d_1 = a, d_2 = d - \frac{a}{2} = \frac{5}{2}a$ 的三缝衍射．即看作缝宽相同而缝距不等的三缝衍射．

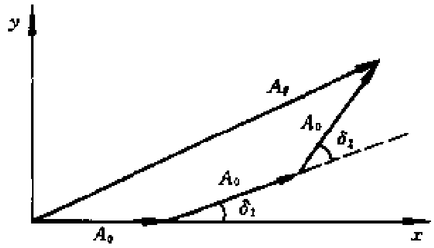
考虑 θ 方向的衍射光束．设每个狭缝在该方向的振幅为 a_θ，三束衍射光相干叠加后的合振幅 A_θ 可用振幅矢量叠加法求得．如光图3－7－2所示，第1和第2两束衍射光之间的相位差 δ_1，以及第2和第3两束衍射光之间的相位差 δ_2，分别为

$$\delta_1 = \frac{2\pi}{\lambda}d_1\sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda}a\sin\theta = 2\beta$$

$$\delta_2 = \frac{2\pi}{\lambda}d_2\sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{5}{2}a\sin\theta = 5\beta$$

式中

$$\beta = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$$



光图3－7－2

由振幅矢量叠加图（见光图3－7－2），合振幅 A_θ 的两个分量为

$$\begin{aligned} A_{\theta x} &= a_\theta[1 + \cos\delta_1 + \cos(\delta_1 + \delta_2)] \\ &= a_\theta[1 + \cos 2\beta + \cos 7\beta] \\ A_{\theta y} &= a_\theta[\sin\delta_1 + \sin(\delta_1 + \delta_2)] \\ &= a_\theta[\sin 2\beta + \sin 7\beta] \end{aligned}$$

故 θ 方向的总光强为

$$\begin{aligned} I(\theta) = A_\theta^2 &= A_{\theta x}^2 + A_{\theta y}^2 \\ &= a_\theta^2[(1 + \cos 2\beta + \cos 7\beta)^2 + (\sin 2\beta + \sin 7\beta)^2] \\ &= I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2[3 + 2(\cos 2\beta + \cos 5\beta + \cos 7\beta)] \end{aligned}$$

式中

$$a_\theta^2 = I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2$$

是单缝(缝宽为 a)衍射的强度分布．上述结果与(1)式相同．

为了弄清这种强度分布的特点，先看(1)式方括号里的干涉因子，它包括一个常数项和三个余弦项，它们依次标志第1和第二束衍射光之间、第2和第3束衍射光之间、以及第3和第1束衍射光之间相干的结果．这三种干涉强度有不同的空间周期．

从干涉因子容易看出，当 $\beta = k\pi$ 时，干涉因子有极值，极值位置满足

$$\sin\theta = k\frac{\lambda}{a} \tag{2}$$

当 k 为奇数时，$\cos2\beta = 1, \cos5\beta = \cos7\beta = -1$，干涉因子等于1，为极小．当 k 等于零或偶数时，$\cos2\beta = \cos5\beta = \cos7\beta = 1$，干涉因子等于9，为极大．可见，干涉因子的极小值不等于零，这正是不等宽狭缝相干叠加的必然结果．

再看衍射因子 $\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2$．当 $\beta = 0$ 时，$\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 = 1$，这是衍射的中央极大．当 $\beta = k\pi(k \neq 0)$ 时，$\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 = 0$，是衍射极小，故衍射极小的位置满足

$$\sin\theta = k\frac{\lambda}{a}, \quad k \neq 0 \tag{3}$$

把(2)式和(3)式相结合，除 $\sin\theta = 0$ 的位置既是衍射极大又是干涉极大外，衍射极小的位置正好都落在各级干涉极大上，因此，只能观察到零级干涉极大．

【题8】 如光图3-8-1所示，三平行狭缝的缝宽均为 a，相邻两缝的间距均为 d，中间狭缝前放置一透明相板，它可使相位改变 π，波长为 λ 的单色平行光正入射，在透镜后焦面上观察衍射花样．

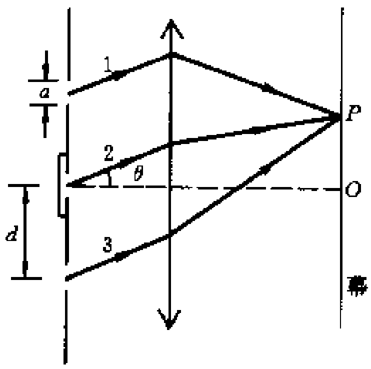
1. 试导出幕上的强度分布公式．2. 试求一级衍射极小，一级干涉极大和一级干涉极小的位置．

【分析】 三狭缝宽度相同，入射的平行光均正入射，故三缝在幕上的衍射分布均相同，振幅分布为

$$A_i = A_0\frac{\sin\beta}{\beta} \tag{1}$$

式中

$$\beta = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$$



光图 3-8-1

把三缝看作三个衍射单元，考虑 θ 角方向的衍射光，被透镜会聚于幕上 P 点，进行相干叠加，它们的振幅相同，由(1)式决定．从上到下，将三束衍射光标记为1,2,3，衍射光2比1落后的相位为 $(\delta+\pi)$(因中缝前有使相位改变 π 的透明相板)，衍射光3比1落后的相位为 2δ，其中

$$\delta = \frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta \tag{2}$$

用复数法求出 P 点的合振幅，平方后得光强，从而极大与极小的角位置易求．

【解】 1．以衍射光 1 为基准，三束衍射光在 P 点的复振幅可表示为

$$\tilde{u}_1 = A_i$$
$$\tilde{u}_2 = A_i\, e^{i(\delta+\pi)}$$
$$\tilde{u}_3 = A_i\, e^{i2\delta}$$

式中 δ 由(2)式决定．P 点的合复振幅为

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 + \tilde{u}_3\\ &= A_i[1 + e^{i(\delta+\pi)} + e^{i2\delta}] = A_i(1 - e^{i\delta} + e^{i2\delta})\\ &= A_i\, e^{i\delta}(e^{-i\delta} - 1 + e^{i\delta}) = A_i\, e^{i\delta}(2\cos\delta - 1)\end{aligned}$$

故 P 点的光强为

$$\begin{aligned}I &= \tilde{u}\tilde{u}^* = A_i^2(2\cos\delta - 1)^2\\ &= I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2(2\cos\delta - 1)^2\end{aligned} \tag{3}$$

上式就是强度分布公式，式中 $\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2$ 为单缝衍射因子，$(2\cos\delta - 1)^2$ 为三缝干涉因子．因

$$2\cos\delta - 1 = \frac{(2\cos\delta - 1)\cos\frac{\delta}{2}}{\cos\frac{\delta}{2}} = \frac{2\cos\delta\cos\frac{\delta}{2} - \cos\frac{\delta}{2}}{\cos\frac{\delta}{2}}$$

利用三角公式，

$$2\cos\delta\cos\frac{\delta}{2} = \cos\frac{3\delta}{2} + \cos\frac{\delta}{2}$$

得

$$2\cos\delta - 1 = \frac{\cos\frac{3}{2}\delta}{\cos\frac{\delta}{2}}$$

(3)式可改写为

$$I = I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2\left[\frac{\cos\frac{3}{2}\delta}{\cos\frac{\delta}{2}}\right]^2 \tag{4}$$

(3)式与(4)式等效．实际上(4)式可直接从光栅的普遍公式导出．光栅强度分布公式为

$$I = I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2\left(\frac{\sin N\gamma}{\sin\gamma}\right)^2$$

式中 N 为总缝数，式中

$$\gamma = \frac{\delta'}{2} = \frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta$$

其中 δ' 是相邻两衍射光之间的相位差．在本题中，$N = 3$，$\delta' = \delta + \pi$，δ 由(2)式决定(注意，$+\pi$ 和 $-\pi$ 效果相同)，故 $\gamma = \frac{\delta}{2} + \frac{\pi}{2}$，代入，得

$$I = I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2\left[\frac{\sin 3\left(\frac{\delta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}\right]^2 = I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2\left(\frac{\cos\frac{3}{2}\delta}{\cos\frac{\delta}{2}}\right)^2$$

这样，就从光栅强度分布公式再次导出了(4)式．

等价的(3)式和(4)式中，干涉因子为$(2\cos\delta-1)^2$或$\left(\frac{\cos\frac{3}{2}\delta}{\cos\frac{\delta}{2}}\right)^2$．当$\delta=\pm(2k+1)\pi$，$k=0,1,2,\cdots$时

$$(2\cos\delta-1)^2=9$$

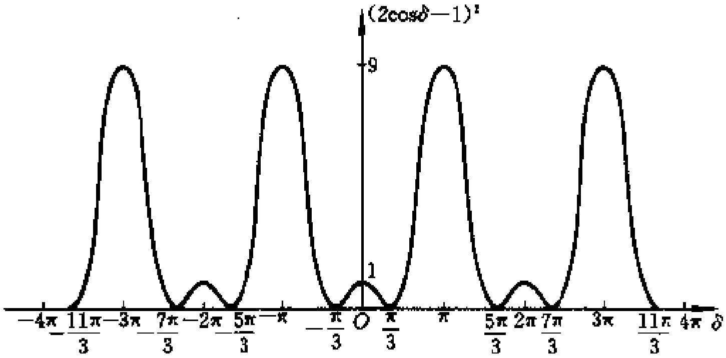
为干涉主极大．当$\delta=\pm 2k\pi$，$k=0,1,2,\cdots$时

$$(2\cos\delta-1)^2=1$$

为干涉次极大．当$\delta=\pm\frac{\pi}{3}$，$\pm\frac{5}{3}\pi$，$\pm\frac{7}{3}\pi$，$\cdots$时，$\cos\delta=\frac{1}{2}$，故

$$(2\cos\delta-1)^2=0$$

为干涉极小．综上，干涉因子$(2\cos\delta-1)^2$与δ的关系曲线如光图3-8-2所示．



光图3-8-2

2. 由单缝衍射因子$\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2$，第一极小满足

$$\beta=\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta=\pm\pi$$

$$\sin\theta=\pm\frac{\lambda}{a}$$

故第一极小的角位置为

$$\theta=\pm\arcsin\frac{\lambda}{a}$$

第一干涉极大满足

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta=\pm\pi$$

$$\sin\theta=\pm\frac{\lambda}{2d}$$

故第一干涉极大的角位置为

$$\theta = \pm \arcsin \frac{\lambda}{2d}$$

第一干涉极小满足

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta = \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\sin\theta = \pm \frac{\lambda}{6d}$$

故第一干涉极小的角位置为

$$\theta = \pm \arcsin \frac{\lambda}{6d}$$

【题9】 如图所示，在夫琅禾费圆孔衍射实验中，单色平行光垂直入射到半径为 a 的圆孔上．观察幕上任一点 P 的强度为

$$I(P) = I_0\left[\frac{2J_1(x)}{x}\right]^2$$

式中 J_1 是一阶贝塞耳函数，式中

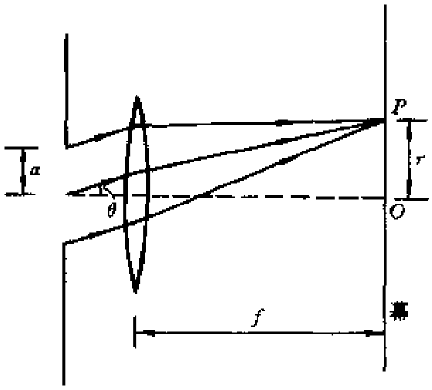
$$x = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta$$

在小角衍射条件下，

$$x = \frac{2\pi a}{f\lambda} r$$

式中 f 为透镜焦距，r 是 P 点与衍射环环心 O 的距离，I_0 为环心光强，I_0 与入射光在圆孔面上的振幅 A_0 以及圆孔面积 πa^2 等有关，具体表示式为

$$I_0 = \frac{A_0^2(\pi a^2)^2}{\lambda^2 f^2}$$



光图 3－9－1

在幕上以 O 为中心，以 r_0 为半径作一圆．试求落到该圆内的能量与入射到圆孔的总能量的比值，并进一步计算受里斑所占能量的百分数．

【分析】 利用所给衍射强度分布的公式，在半径为 r_0 的圆内积分，求得落到该圆面积上的能量通量 $E(r_0)$，它与入射总通量 E 的比值即可求得．计算中要用到关于贝塞耳函数的基本知识．

【解】 在幕上以 O 为原点设置极坐标(r, ϕ)，落到半径为 r_0 的圆内的能量通量为

$$E(r_0) = I_0\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{r_0} \left[\frac{2J_1(x)}{x}\right]^2 r dr$$

式中

$$r = \frac{f\lambda}{2\pi a} x$$

$$r dr = \left(\frac{f\lambda}{2\pi a}\right)^2 x \, dx$$

代入 $E(r_0)$，得

$$E(r_0)=\frac{A_0^2(\pi a^2)^2}{\lambda^2 f^2}\left(\frac{f\lambda}{2\pi a}\right)^2\cdot 2\pi\int_0^{\frac{2\pi a}{f\lambda}r_0}\frac{4J_1^2(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$=2A_0^2(\pi a^2)\int_0^{\frac{2\pi a}{f\lambda}r_0}\frac{J_1^2(x)}{x}\,\mathrm{d}x=2E\int_0^{\frac{2\pi a}{f\lambda}r_0}\frac{J_1^2(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

式中 $E=A_0^2\pi a^2$ 为入射到圆孔的总能量，故

$$\frac{E(r_0)}{E}=2\int_0^{\frac{2\pi a}{f\lambda}r_0}\frac{J_1^2(x)}{x}\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

为求上述积分，应用下述贝塞耳函数的递推关系：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^nJ_n(x)]=x^nJ_{n-1}(x)$$

即

$$nx^{n-1}J_n(x)+x^nJ'_n(x)=x^nJ_{n-1}(x)$$

式中 $J'_n(x)$ 是 $J_n(x)$ 的导数．上式两端除以 x^n，得

$$\frac{nJ_n(x)}{x}+J'_n(x)=J_{n-1}(x)$$

令 $n=1$，得

$$\frac{J_1(x)}{x}+J'_1(x)=J_0(x)$$

两端乘 $J_1(x)$ 得

$$\frac{J_1^2(x)}{x}=J_0(x)J_1(x)-J_1(x)J'_1(x) \tag{2}$$

再应用另一递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-n}J_n(x)]=-x^{-n}J_{n+1}(x)$$

令 $n=0$，得

$$J'_0(x)=-J_1(x)$$

代入(2)式，有

$$\frac{J_1^2(x)}{x}=-J_0(x)J'_0(x)-J_1(x)J'_1(x)$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(J_0^2+J_1^2)$$

于是(1)式变为

$$\frac{E(r_0)}{E}=-\int_0^{\frac{2\pi a}{f\lambda}r_0}\mathrm{d}(J_0^2+J_1^2)$$

$$=\left[J_0^2(x)+J_1^2(x)\right]\Big|_{x=\frac{2\pi a}{f\lambda}r_0}^{x=0}$$

因

$$I_0(0) = 1,\ J_1(0) = 0$$

故

$$\frac{E(r_0)}{E} = 1 - J_0^2\left(\frac{2\pi a}{f\lambda} r_0\right) - J_1^2\left(\frac{2\pi a}{f\lambda} r_0\right) \tag{3}$$

设爱里斑的半径为 r_0,则其角半径

$$\Delta\theta = \frac{r_0}{f} = 0.610\frac{\lambda}{a}$$

故有

$$\frac{2\pi a}{f\lambda} r_0 = 2\pi \times 0.61 = 3.83$$

查贝塞耳函数表,

$$J_0(3.83) = 0.4028$$

$$J_1(3.83) = 0.00069$$

代入(3)式,得

$$\frac{E(r_0)}{E} = 1 - 0.16 = 0.84 = 84\%$$

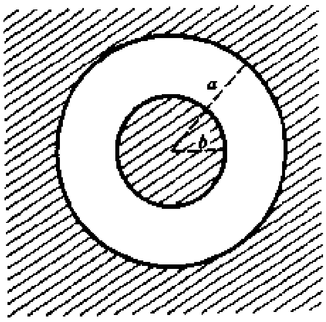
可见,入射能量主要集中在爱里斑.

【题10】 如光图3-10-1所示,一通光圆环,其外半径为 a,内半径为 b,波长为 λ 的单色平行光垂直入射.1.试求夫琅禾费衍射强度分布公式.2.若 $a=2b$,试求环孔衍射和半径为 a 的圆孔衍射的中央极大强度之比.3.若 $a=2b$,试求环孔衍射第一个暗环的角半径.

【分析】 考虑半径分别为 a 和 b 的圆孔,它们的夫琅禾费衍射的振幅分布为(见本章题9)

$$u_a(\theta) = Ca^2\frac{2J_1\left(\frac{2\pi}{\lambda}a\theta\right)}{\frac{2\pi}{\lambda}a\theta)}$$

$$u_b(\theta) = Cb^2\frac{2J_1\left(\frac{2\pi}{\lambda}b\theta\right)}{\frac{2\pi}{\lambda}b\theta}$$



光图3-10-1

式中 θ 为衍射角,C 为与圆孔半径无关的常因子.环孔衍射的振幅分布应是半径为 a 的圆的振幅分布扣除半径为 b 的圆的振幅分布,为

$$u(\theta) = u_a(\theta) - u_b(\theta)$$

环孔衍射的强度分布为

$$I(\theta) = u^2(\theta)$$

必须注意,由于小圆孔是大圆孔的一部分,它们的衍射分布间有相干关系,因此环孔衍射的强度分布不应是两者强度之差,而应先求振幅之差,然后再平方,得出环孔衍射的强度分布.

【解】 1.令

$$x_1 = \frac{2\pi}{\lambda}a\theta = ka\theta$$

$$x_2 = \frac{2\pi}{\lambda}b\theta = kb\theta$$

则环孔衍射的振幅分布为

$$u(\theta) = u_a(\theta) + u_b(\theta)$$
$$= 2C\left[\frac{a^2J_1(x_1)}{x_1} - \frac{b^2J_1(x_2)}{x_2}\right]$$

强度分布为

$$I(\theta) = u^2(\theta)$$
$$= 4C^2\left\{a^4\left[\frac{J_1(x_1)}{x_1}\right]^2 + b^4\left[\frac{J_1(x_2)}{x_2}\right]^2 - 2a^2b^2\frac{J_1(x_1)J_1(x_2)}{x_1x_2}\right\}$$

式中一阶贝塞耳函数的幂级数展开式为

$$J_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}}{k!(k+1)!} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \cdots$$

$$\frac{J_1(x)}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{16}x^2 + \cdots$$

对于中央极大，衍射角 $\theta = 0$，即 $x_1 = x_2 = 0$，故中央极大的强度为

$$I_a(0) = 4C^2\left(\frac{a^4}{4} + \frac{b^4}{4} - \frac{a^2b^2}{2}\right) = C^2(a^2 - b^2)^2$$

2. 当 $a = 2b$ 时，环孔的中央极大强度为

$$I(0) = C^2\left(a^2 - \frac{a^2}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}C^2a^4$$

半径为 a 的圆孔的中央极大强度为

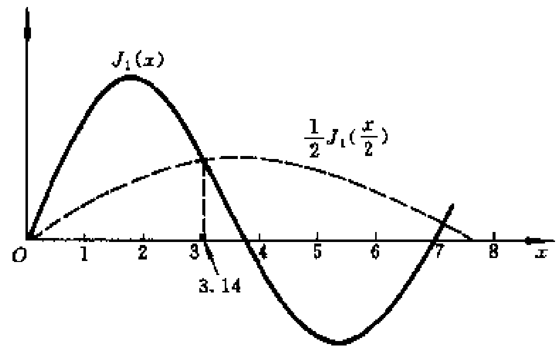
$$I_a(0) = C^2a^4$$

故

$$\frac{I(0)}{I_a(0)} = \frac{9}{16}$$

3. 环孔衍射的暗环应满足

$$u(\theta) = 0$$



光图 3-10-2

即

$$\frac{a^2J_1(x_1)}{x_1} = \frac{b^2J_1(x_2)}{x_2}$$

因 $a = 2b$，$x_1 = ka\theta$，$x_2 = kb\theta$，故上式变为

$$J_1(x) = \frac{1}{2}J_1\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$x = ka\theta = \frac{2\pi}{\lambda}a\theta$$

可用图解法求解上述方程．如光图 3-10-2 所示，根据 $J_1(x)$ 的函数表，分别画出 $J_1(x)$ 和

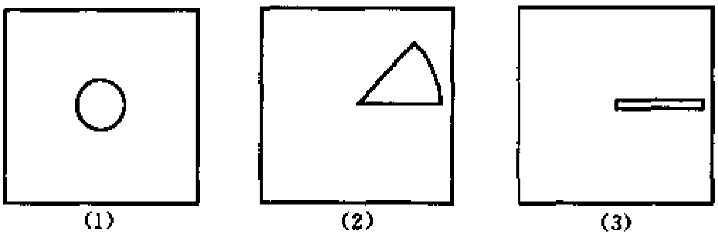
$\frac{1}{2}J_1\left(\frac{x}{2}\right)$的曲线，它们的第一个交点的 x 值对应第一暗环位置，由光图 3－10－2 得出相应的 x 为 3.14．较精确的数值计算得出

$$x=\frac{2\pi}{\lambda}a\theta=3.144$$

故第一个暗环的角半径为

$$\theta=\frac{3.144}{2\pi}\frac{\lambda}{a}=0.50\frac{\lambda}{a}$$

【题 11】 在夫琅禾费圆孔衍射实验中，在观察屏前表面放置一带孔遮板，如光图 3－11－1 所示，孔的形态有如下三种：1．衍射环中心的小圆孔，2．半径足够大的扇形，3．沿半径方向的等宽狭缝．设衍射孔的半径为 a，试证明通过上述三孔的光通量依次正比于 a^4，a^2 和 a^3．



光图 3－11－1

【分析】 每个滤光孔可写出其光强透过率 T．设入射光强为 I_0，出射光强为 I，则透过率

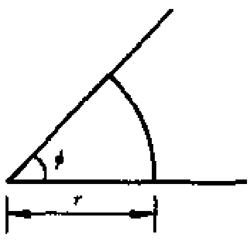
$$T=\frac{I}{I_0}$$

T 一般是衍射角 θ 的函数．

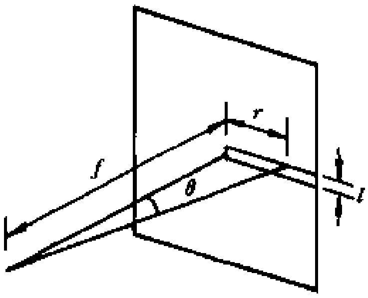
对第一种孔形，其透过率为

$$T_1=\begin{cases}1, r\leqslant a_0\\0, r>a_0\end{cases}$$

式中 a_0 为遮光板上小圆孔的半径．



光图 3－11－2



光图 3－11－3

对第二种孔形，如光图 3－11－2，r 处能透光的圆弧长为 $r\phi$，占整圆弧长的比率为 $\frac{r\varphi}{2\pi r}=\frac{\varphi}{2\pi}$，$\varphi$ 是定值，故扇形孔的透过率为

$$T_2 = \frac{\varphi}{2\pi} = 常量$$

对第三种孔形，如光图 3－11－3，设缝宽为 l，衍射角为 θ 处的透过率为

$$T_3 = \frac{l}{2\pi r}$$

式中 l 为定值，故 $T_3 \propto \frac{1}{r}$，因 $r = f\theta$，f 为透镜焦距，故

$$T_3 \propto \frac{1}{\theta}$$

根据本章题 9 或题 10，无遮光板时观察屏上的光强分布为

$$I = ca^2\left[\frac{J_1(x)}{x}\right]^2$$

式中 c 为常数因子，a 为衍射圆孔的半径，

$$x - \frac{2\pi}{\lambda}a\sin\theta \approx ka\theta$$

θ 为衍射角．经各种透光孔后的光强为

$$I' = IT$$

在孔面上积分后，即可得出通过各孔的总光通量．

【解】 1. 小圆孔．在小圆孔范围内的透过率为 1，故通过圆面上面积元 $r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$ 的光通量为 $Ir\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$．通过小圆孔的总光通量为

$$E_1 = \iint Ir\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = ca^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a_0}\left[\frac{J_1(x)}{x}\right]^2 r\mathrm{d}r$$

参考本章题 9，上述积分可写为

$$E_1 \propto a^2\int_0^{ka\frac{a_0}{f}}\frac{J_1^2(x)}{x}\mathrm{d}x$$

注意 a 与 a_0 的区别，a 是衍射孔半径，a_0 是遮光板上透光圆孔的半径，对一定的遮光板，a_0 是常量．考虑到 a_0 很小，故在上述积分区间内 x 值很小，在 $J_1(x)$ 的幂级数展开式中可忽略 x 的高次项．即

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16} + \cdots$$

$$J_1^2(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{16} + \cdots$$

$$\frac{J_1^2(x)}{x} = \frac{x}{4} - \frac{x^3}{16} + \cdots \approx \frac{x}{4}$$

代入积分式

$$E_1 \propto a^2\int_0^{ka\frac{a_0}{f}}\frac{x}{4}\mathrm{d}x \propto a^2\left(\frac{kaa_0}{f}\right)^2$$

式中 k,a_0 和 f 均为定值,故得

$$E_1 \propto a^4$$

2. 扇形．透过率 T_2 是常量,故通过的总光通量 E_2 与无遮光板时的总光通量只差一个常数因子,根据本章题 9,有

$$E_2 \propto a^2 \int_0^{ka} \frac{J_1^2(x)}{x} \mathrm{d}x$$

注意,x 的严格值为

$$x = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta = ka \sin\theta$$

只在小角衍射时才有 $\sin\theta \approx \theta$,而被积函数也只在小角衍射时才成立(参看本章题 9). 因扇形半径足够大,上述积分需在大衍射角范围内进行,即 θ 趋于 $\frac{\pi}{2}$,$\sin\theta$ 趋于 1,故上述积分的上限应为 ka. 由于主要能量集中在小衍射角范围,大衍射角的能量很弱,故上述积分近似成立．

考虑到 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 是很大的数,故 ka 值很大,例如,对 $\lambda = 500\ \mathrm{nm}$,$a = 0.5\ \mathrm{mm}$,$ka = 2\pi \times 10^3$,因而积分式可写成

$$E_2 \propto a^2 \int_0^\infty \frac{J_1^2(x)}{x} \mathrm{d}x$$

利用本章题 9 的结果

$$E_2 \propto a^2 [J_0^2(x) + J_1^2(x)] \Big|_{x=\infty}^{x=0}$$

因 J_0 和 J_1 函数随 x 值的增大作振荡式衰减,故 $J_0(\infty) = J_1(\infty) = 0$,而 $J_0(0) = 1$,$J_1(0) = 0$,故最后得出

$$E_2 \propto a^2$$

3. 狭缝．透过率为

$$T_3(\theta) \propto \frac{1}{\theta} = \frac{ka}{x}$$

由前,无遮板时的总光通量

$$E_0 \propto a^2 \int_0^{ka} \frac{J_1^2(x)}{x} \mathrm{d}x$$

通过狭缝的总光通量为

$$E_3 \propto a^2 \int_0^{ka} \frac{J_1^2(x)}{x} \cdot \frac{ka}{x} \mathrm{d}x \propto a^3 \int_0^{ka} \frac{J_1^2(x)}{x^2} \mathrm{d}x$$

因 ka 值很大,故

$$E_3 \propto a^3 \int_0^\infty \frac{J_1^2(x)}{x^2} \mathrm{d}x$$

利用积分公式

$$\int_0^\infty \frac{J_1^2(x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{4}{3\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{3\pi}$$

式中的 Γ 函数为

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}x^{n-1}\mathrm{d}x$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

最后得

$$E_3 \propto a^3$$

以上结果对分析检测大量微小球形颗粒的大小具有实用价值．

【题 12】 试设计一透射光栅，要求：1. 使波长 $\lambda = 600$ nm 的第二级谱线的衍射角 $\theta \leqslant 30°$，在此前提下角色散率要尽可能大．2. 第三级光谱缺级．3. 该波长的二级谱线附近至少能分辨 0.02 nm的波长差．满足上述要求的光栅的参数设定后，试问能看到几级波长为 600 nm 的谱线．

【分析】 由光栅方程和角色散率公式选择光栅常数 d 以满足要求 1. 由缺级条件选择适当的缝宽 a 以满足要求 2. 再由对分辨本领的要求选择光栅的总缝数 N. 最后，由 d，λ 以及衍射角 $\theta \leqslant 90°$ 的条件定出能看到光谱的最大级次．

【解】 由光栅方程，光栅常量 d 应满足

$$d = \frac{k\lambda}{\sin\theta} \geqslant \frac{2\times 6.00\times 10^{-7}}{\sin 30°} = 2.4\times 10^{-6}\ \mathrm{m}$$

由角色散率公式

$$D = \frac{k}{d\cos\theta}$$

为使 D 尽可能大，d 应尽可能小，为了同时满足以上两个要求，可取

$$d = 2.4\times 10^{-6}\mathrm{m}$$

要求第三级光谱(干涉极大)与第一级衍射极小重合，即要求

$$3\frac{\lambda}{d} = \frac{\lambda}{a}$$

故缝宽应取

$$a = \frac{d}{3} = 0.8\times 10^{-6}\ \mathrm{m}$$

由光栅的色分辨本领公式

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = kN$$

故总缝数应为

$$N = \frac{\lambda}{k\delta\lambda} = \frac{600}{2\times 0.02} = 15\ 000$$

能看到的最大级次 k 由条件 $\theta = \pm 90°$ 决定，为

$$k=\pm\frac{d}{\lambda}=\pm\frac{2.4\times10^{-6}}{6.00\times10^{-7}}=\pm4$$

第 4 级光谱在 $\theta=\pm90^{\circ}$的方位，实际上看不到，第 3 级缺级，零级无色散，故对波长为 600nm 的谱线，只能看到 ±1 和 ±2 级谱线．

【题 13】 试导出光栅干涉次极大位置的近似公式，并求最靠近主极大的次级大强度与主极大强度的比值．

【分析】 光栅的干涉因子强度为

$$I_i=I_0\left(\frac{\sin N\gamma}{\sin\gamma}\right)^2 \tag{1}$$

式中 N 为总缝数，I_0 由单缝衍射因子决定，

$$\gamma=\frac{\delta}{2}=\frac{\pi d}{2}\sin\theta$$

把(1)式对 γ 求导，令导数为零，可解出 I_i 取极大值时的 γ 值，其中包括主极大与次极大．把第一个次级大所对应的 γ 值代入(1)式，即得强度比值．

【解】 把(1)式对 γ 求导并令其等于零，得

$$\frac{\mathrm{d}I_i}{\mathrm{d}\gamma}=2I_0\left(\frac{\sin N\gamma}{\sin\gamma}\right)\left(\frac{N\sin\gamma\ \cos N\gamma-\sin N\gamma\ \cos\gamma}{\sin^2\gamma}\right)=0$$

即

$$N\sin\gamma\cos N\gamma-\sin N\gamma\cos\gamma=0$$

即

$$\tan N\gamma=N\tan\gamma \tag{2}$$

方程(2)决定了干涉主极大和次极大的位置．方程(2)是超越方程，不能用解析方法求解，可用作图法求出满足方程(2)的 γ 的近似值．为表述简单起见，只考虑 $k=0$ 和 1 级干涉主极大以及两者之间的各个次极大．作函数 $y_1=\tan N\gamma$ 和 $y_2=N\tan\gamma$ 的曲线，两条曲线交点的 γ 值就是方程(2)的解，其中有些 γ 值在主极大的宽度范围内，应排除，余下的就是所求的 γ 值．

如图所示，为具体起见，设 $N=5$，取横坐标为 γ，分别画出 $y_1=\tan5\gamma$ 和 $y_2=5\tan\gamma$ 的函数曲线（实线），同时画出 $k=0$ 和 1 级干涉主极大（虚线）．由图可见，在 0 级和 1 级主极大之间，各次极大近似位于

$$\gamma=\frac{3\pi}{10},\quad\frac{5\pi}{10},\quad\frac{7\pi}{10}$$

即共有三个次极大．一般地讲，次极大近似位于

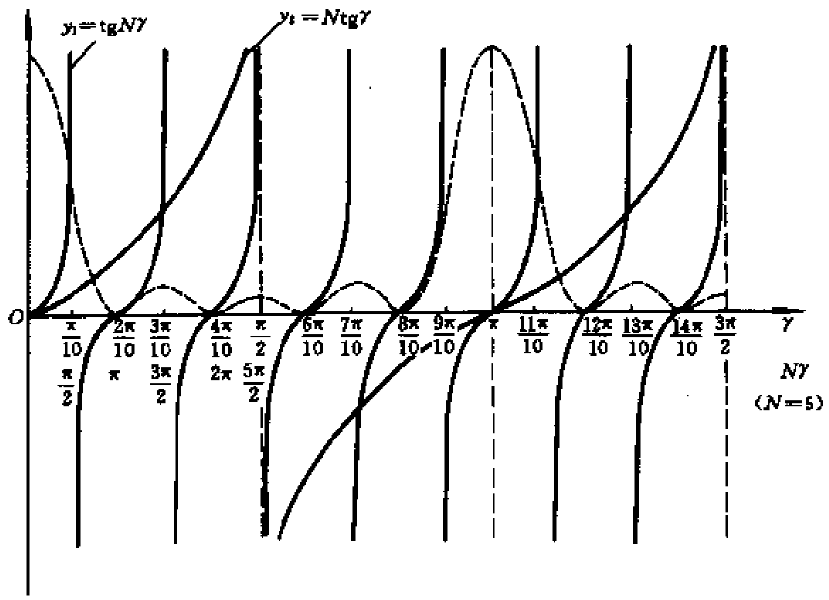
$$\gamma=(2m+1)\frac{\pi}{2N}=\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{N} \tag{3}$$

$$m=\pm1,\pm2,\cdots,\pm(N-2)$$

由(1)式，干涉极小值位于

$$\gamma=m\frac{\pi}{N},m=\pm1,\pm2,\cdots,\pm(N-1)$$

由此可见，次极大近似地位于相邻两极小的正中间．



光图 3-13-1

由(2)式

$$\sin N\gamma=\frac{N}{\sqrt{N^2+\left(\frac{1}{\tan\gamma}\right)^2}}$$

故

$$\sin^2 N\gamma=\frac{N^2}{N^2+\left(\frac{1}{\tan\gamma}\right)^2}=\frac{N^2\tan^2\gamma}{1+N^2\tan^2\gamma}=\frac{N^2\sin^2\gamma}{1+(N^2-1)\sin^2\gamma}$$

所以，干涉强度可写为

$$I_i=I_0\frac{N^2}{1+(N^2-1)\sin^2\gamma}$$

当 $\gamma=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，即满足光栅方程 $d\sin\theta=k\lambda$ 时，得干涉主极大，其强度为

$$(I_i)_{\max}=I_0N^2$$

当 γ 取(3)式的值，即 $\gamma=\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{N}[m=\pm1,\pm2,\cdots,\pm(N-2)]$时，得次极大，其强度为

$$(I_i)'_{\max}=\frac{I_0N^2}{1+(N^2-1)\sin^2\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{N}\right]}\tag{4}$$

对于最靠近 0 级主极大的第一个次极大，$m=1$，

$$\sin\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{N}\right]=\sin\frac{3\pi}{2N}\approx\frac{3\pi}{2N}$$

强度为

$$(I_i)'_{\max}=I_0\frac{N^2}{1+(N^2-1)\left(\frac{3\pi}{2N}\right)^2}$$

当N足够大时，

$$(I_i)'_{\max}=I_0\frac{N^2}{1+\frac{9}{4}\pi^2}=\frac{I_0N^2}{23}$$

故最靠近主极大的次极大的强度与主极大强度之比为

$$\frac{(I_i)'_{\max}}{(I_i)_{\max}}=\frac{1}{23}$$

由(4)式可知，当m值从1增大时，即当次极大远离主极大时，其强度递减．

【题14】 一显微镜物镜的数值孔径N.A.=0.65，物与物镜之间为空气，对人眼最灵敏的黄绿光的波长为$\lambda=550$ nm.

1. 试求显微镜的最小分辨距离．2. 换用油浸物镜，油的折射率$n=1.6$，仍用黄绿光，试问最小分辨距离变为多少？3. 仍用普通物镜，但改用$\lambda=420$ nm的光，试问最小分辨距离变为多少？4. 为充分利用第2问的分辨本领，试问显微镜的放大倍数(视角放大率)应设计为多大？设人眼瞳孔直径为2.5 mm.

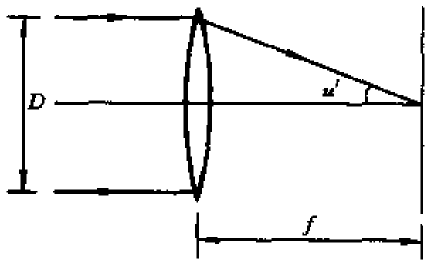
【分析】 显微镜是将微小物体放大供人眼观察的光学仪器，由焦距很短的物镜和短焦距的目镜组成．物经物镜成放大实像于目镜物方焦点的内侧，再经目镜成放大虚像于明视距离供人眼观察．数值孔径是量度显微镜物镜聚光本领的量，定义为物空间孔径角之半的正弦与物空间折射率的乘积，即

$$\text{N.A.}=n\sin u$$

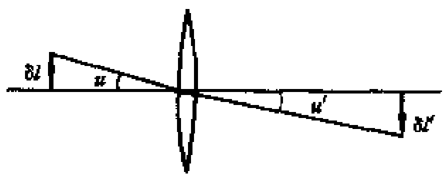
显微镜的最小分辨距离为

$$\delta l=\frac{0.61\lambda}{n\sin u}$$

与数值孔径及照明光波长λ有关．利用短波长的紫外显微镜以及把物体浸在折射率较大的油中以增大其数值孔径的油浸镜头，均可提高显微镜的分辨本领．



光图3-14-1



光图3-14-2

【解】 1. 先导出显微镜的最小分辨距离的公式．如光图3-14-1所示，对望远镜物镜，最小分辨角为

$$\delta\theta_{\min}=1.22\frac{\lambda}{D}$$

式中D为物镜直径．在焦面上的最小分辨距离为

$$\delta l'=1.22\frac{\lambda f}{D}=\frac{1.22\lambda}{\frac{D}{f}}=\frac{0.61\lambda}{\sin u'}$$

式中 f 是物镜焦距．故有

$$\sin u'\cdot\delta l'=0.61\lambda$$

如光图 3－14－2 所示，把上述结果移用到显微镜物镜，由阿贝正弦条件

$$\delta l n\sin u=\delta l'\sin u'=0.61\lambda$$

故显微镜的最小分辨距离为

$$\delta l=\frac{0.61\lambda}{n\sin u} \tag{1}$$

式中 $n\sin u$＝N. A. 就是显微镜的数值孔径．把有关数据代入，得

$$\delta l=\frac{0.61\times5.5\times10^{-7}}{0.65}=5.2\times10^{-7}\,\text{m}=0.52\,\mu\text{m}$$

2. 换用油浸物镜后，显微镜的最小分辨距离为

$$\delta l=\frac{0.61\times5.5\times10^{-7}}{1.6\times0.65}=3.2\times10^{-7}\,\text{m}=0.32\,\mu\text{m}$$

3. 改用 $\lambda=4200\text{nm}$ 的光及普通物镜，得

$$\delta l=\frac{0.61\times4.2\times10^{-7}}{0.65}=3.9\times10^{-7}\,\text{m}=0.39\,\mu\text{m}$$

4. 明视距离 S_0 处的最小分辨距离 δl 对人眼的视角为$\frac{\delta l}{S_0}$，经显微镜放大后的视角为 $M\frac{\delta l}{S_0}$，其中 M 是显微镜的放大倍数．人眼的最小分辨角为 $1.22\frac{\lambda}{d}$，其中 d 为人眼瞳孔直径．为了充分利用显微镜的分辨本领，应有

$$M\frac{\delta l}{S_0}\geqslant1.22\frac{\lambda}{d}$$

即 M 至少应为

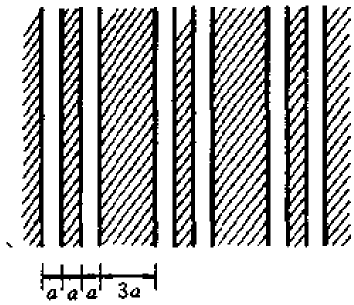
$$M=\frac{1.22\lambda S_0}{\delta l d}=\frac{1.22\times5.5\times10^{-7}\times0.25}{3.2\times10^{-7}\times2.5\times10^{-3}}=210\text{ 倍}$$

【题 15】 一光栅共有$2N$ 条缝宽均为 a 的狭缝，缝间不透明部分的宽度依次按 $a,3a,a,3a,\cdots$ 周期性地变化．波长为 λ 的单色光垂直入射．试求夫琅禾费衍射的强度分布．

【分析】 如光图 3－15－1 所示，把相距为 a 的双缝看作一个衍射单元．由单缝衍射的振幅分布及双缝干涉的结果，可得出每一个衍射单元的振幅分布．再由 N 个衍射单元的相干叠加(相邻两衍射单元的间距为 $6a$)得出总振幅的分布．

也可把 N 条奇数缝和N 条偶数缝看作两个完全相同的衍射单元，两衍射单元的间距为 $2a$．把两衍射单元各自的衍射振幅分布相干叠加即可得出总振幅的分布．

【解】 方法一．把相距为 a 的双缝看作一个衍射单元，缝宽为 a，缝中心间距 $d'=2a$，在衍射角为 θ 的方向，每个狭缝的振幅为 $A_0\frac{\sin\beta}{\beta}$，式中 $\beta=\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$，双缝干涉后的振幅为



光图 3-15-1

$$A_i = 2A_0 \frac{\sin\beta}{\beta} \cos\frac{\delta}{2}$$

式中

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d' \sin\theta = \frac{4\pi}{\lambda} a \sin\theta = 4\beta$$

即

$$A_i = 2A_0 \frac{\sin\beta}{\beta} \cos 2\beta$$

这是一个衍射单元的振幅分布 . N 个衍射单元相干叠加后的总振幅为

$$A = A_i \frac{\sin N\gamma}{\sin\gamma}$$

式中

$$\gamma = \frac{\pi d}{\lambda} \sin\theta = 6\frac{\pi a}{\lambda} \sin\theta = 6\beta$$

式中 $d = 6a$ 是相邻两衍射单元中心的间距，故

$$A = 2A_0 \frac{\sin\beta}{\beta} \cos 2\beta \frac{\sin 6N\beta}{\sin 6\beta}$$

总的强度分布为

$$I = 4I_0 \left(\frac{\sin\beta}{\beta} \cos 2\beta\right)^2 \left(\frac{\sin 6N\beta}{\sin 6\beta}\right)^2$$

式中 $I_0 = A_0^2$ 是单缝衍射中央极大的强度，式中

$$\beta = \frac{\pi a}{\lambda} \sin\theta$$

方法二 . 把 N 条奇数缝和 N 条偶数缝看作两个完全相同的衍射单元 . 每个衍射单元的缝宽为 a，光栅常量 $d = 6a$，故衍射角为 θ 处的振幅为

$$A_i = A_0 \frac{\sin\beta}{\beta} \frac{\sin N\gamma}{\sin\gamma} = A_0 \frac{\sin\beta}{\beta} \frac{\sin 6N\beta}{\sin 6\beta}$$

式中

$$\beta = \frac{\pi a}{\lambda} \sin\theta$$

两衍射单元的间距 $d' = 2a$，相干叠加后的总振幅为

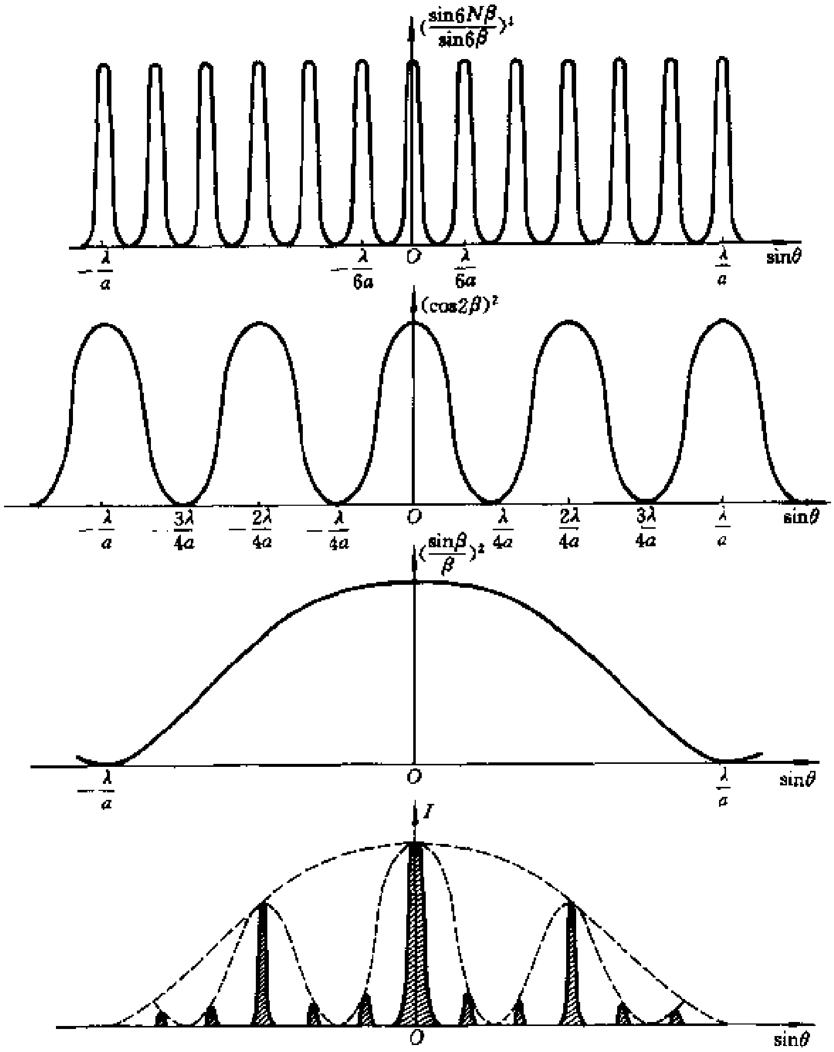
$$A = 2A_i \cos\frac{\delta}{2} = 2A_0 \frac{\sin\beta}{\beta} \frac{\sin 6N\beta}{\sin 6\beta} \cos 2\beta$$

总的强度分布为

$$I = 4I_0 \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 (\cos 2\beta)^2 \left(\frac{\sin 6N\beta}{\sin 6\beta}\right)^2$$

强度分布中包括三个因子 . 单缝衍射因子 $\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2$，其极小位置为

$$\sin\theta = k\frac{\lambda}{a}, k \neq 0$$



光图 3-15-2

N 条光束的干涉因子$\left(\dfrac{\sin 6N\beta}{\sin 6\beta}\right)^2$，当 $6\beta=k\pi$ 时为极大，即极大位置为

$$\sin\theta=k\frac{\lambda}{6a}$$

双光束干涉因子$(\cos 2\beta)^2$，当 $2\beta=k\pi$ 时为极大，当 $2\beta=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$时为极小，即极大位置为

$$\sin\theta=k\frac{\lambda}{2a}$$

极小位置为

$$\sin\theta=(2k+1)\frac{\lambda}{4a}$$

两种方法的结果相同．强度分布曲线如光图 3-15-2 所示．

【题 16】 一光栅的总缝数为$2N$，光栅常量为 d．由于刻制过程的差错，第 N 条缝和$(N+1)$条缝的间距不是 d，而是一任意值 l．试问此光栅与完善的光栅相比，干涉极大的性质有何异同．

【分析】 由于光栅的刻制差错出现在第 N 与第$(N+1)$条缝的间距上，可将此光栅看成由两个完全相同的光栅组成，它们的缝数 N、缝宽 a 和光栅常数d 均相同，彼此经某个任意间距 l 相衔接．每个 N 缝光栅的振幅分布可知，由间距 l 可知两光栅在角θ 方位的相位差δ，其间的相干叠加确定了总的振幅和强度分布．因此，总光强中除了$\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)$和$\left(\frac{\sin N\gamma}{\sin\gamma}\right)$因子外，还将出现与 δ 有关的因子，它有可能产生额外的缺级，色分辨本领也将受到不良影响．

【解】 对完善无缺陷的光栅，若缝数为 $2N$，缝宽为 a，光栅常数为 d，则其强度分布为

$$I=I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2\left(\frac{\sin 2N\gamma}{\sin\gamma}\right)^2 \tag{1}$$

式中

$$\beta=\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta,\quad \gamma=\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta$$

干涉极大的性质包括：

1．强度．由入射总能量和单缝衍射因子决定，前者与总缝数 $2N$ 有关，后者与缝宽 a 有关．

2．是否存在缺级以及哪些级次为缺级，完全由 d 和a 的关系决定．

3．干涉极大位置．由光栅方程

$$d\sin\theta=k\lambda$$

决定，d 给定后各级干涉极大的位置就确定了．光栅的角色散率

$$D=\frac{k}{d\sin\theta} \tag{2}$$

也仅通过 d 与光栅本身的性质相联系．

4．干涉极大的半角宽为

$$\Delta\theta=\frac{\lambda}{2Nd\cos\theta} \tag{3}$$

与总缝数 $2N$ 有关．光栅的色分辨本领

$$R=2kN$$

也直接与 $2N$ 相联系．

以上性质中，1 与 2 两条与单缝衍射因子有关，3 与 4 两条则完全取决于多光束干涉因子．

本题光栅的刻制差错仅表现为其周期性在一半缝数处遭到了破坏，其他地方均无问题．因而，此光栅可看作由两个完全相同的光栅组成，每个光栅的总缝数 N、缝宽 a、光栅常数 d 均相同，两光栅经任意间距 l 相衔接，如图所示．每个光栅的振幅分布为

$$A_i=A_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)\left(\frac{\sin N\gamma}{\sin\gamma}\right)$$

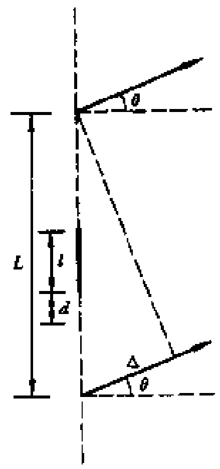
两光栅中心的间距 L 为

$$L=[(N-1)d+l]$$

两光栅的衍射光在 θ 方向处相干叠加时，其间的光程差为 Δ，相位差 δ 为

$$\begin{aligned}\delta&=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta=\frac{2\pi}{\lambda}L\sin\theta\\&=\frac{2\pi}{\lambda}[(N-1)d+l]\sin\theta\end{aligned}$$

相干叠加后，合振幅的平方即总光强为



光图 3-16-1

$$I' = A^2 = 2A_i^2(1+\cos\delta) = 4A_i^2\cos^2\frac{\delta}{2}$$
$$= 4I_0\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^2\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2\left(\frac{\sin N\gamma}{\sin\gamma}\right)^2 \qquad (4)$$

式中 $I_0 = A_0^2$ 是单缝衍射中央极大的光强．

把(4)式与(1)式比较，即可看出有缺陷光栅与完善光栅的干涉极大性质的异同．

1．干涉主极大的宽度．

两种光栅的主极大均满足 $\gamma = k\pi$，由(1)式和(4)式，主极大强度分别为

$$I = 4I_0N^2\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2, \quad I' = 4I_0N^2\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2\left(\cos^2\frac{\delta}{2}\right)^2$$

因缝宽 a 相同，故单缝衍射调制函数 $\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2$ 相同，又总缝数 $2N$ 也相同，两者只相差一个双光束干涉因子 $\left(\cos^2\frac{\delta}{2}\right)^2$．因干涉主极大满足 $\sin\theta = k\frac{\lambda}{d}$，故

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}[(N-1)d+l]\sin\theta = \frac{2k\pi}{d}[(N-1)d+l]$$

若 l 是 d 的整数倍，则 $\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^2 = 1$，从而 $I = I'$，有缺陷光栅的主极大强度不受影响．若 l 不是 d 的整数倍，则 $\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^2 < 1$，$I' < I$，有缺陷光栅的主极大强度受 $\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^2$ 调制有所削弱，甚至造成缺级（见本题 4）．

2．干涉主极大的位置．因两种光栅均遵从光栅方程，且光栅常量相同，故干涉主极大位置不因上述缺陷而受影响．同样，光栅的角色散率也不受影响[见(2)式]．

3．干涉主极大的半角宽由多光束干涉因子决定，即由光栅的有效总缝数决定．对比(1)式和(4)式中的多光束干涉因子可知，有缺陷光栅的有效总缝数只有完善光栅的一半．因此，由(3)式可知，有缺陷光栅的干涉主极大的半角宽为

$$\Delta\theta' = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta} = 2\Delta\theta$$

有效总缝数的减少导致半角宽的增加，色分辨本领也因而降低一半．

4．因两种光栅的干涉主极大位置和单缝衍射因子相同，故它们具有相同的缺级情况（取决于 d 与 a 的关系）．但有缺陷光栅的主极大还要受到 $\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^2$ 函数的调制，可能会产生额外的缺级．例如，若 l 等于 $\frac{d}{2}$ 的奇数倍，即若

$$l = (2m+1)\frac{d}{2}$$

则

$$\delta = \frac{2k\pi}{d}\left[(N-1)d + (2m+1)\frac{d}{2}\right] = k\pi[2(N-1)+(2m+1)]$$

$$\frac{\delta}{2}=k[2(N-1)+(2m+1)]\frac{\pi}{2}=k(2N+2m-1)\frac{\pi}{2}$$

式中$(2N+2m-1)$为奇数,故当 k 为奇数时,$\cos\frac{\delta}{2}=0$,故级次为奇数的干涉主极大缺级．

由此可见,光栅的缺陷会在某些方面带来严重后果．

【题 17】 一衍射光栅每毫米有300条缝,入射光包含红光和紫光两种成分,垂直入射．发现在24.46°角度处的谱线同时含有红光和紫光两种成分．1. 试问在什么角度处还会出现这种复合谱线．2. 试问在什么角度处有单一的红光谱线出现．

【分析】 红光和紫光谱线的位置均由光栅方程 $d\sin\theta=k\lambda$ 确定．两种谱线的重叠条件是 $k_r\lambda_r=k_v\lambda_v$. 能够出现的谱线最大级次由 $\sin\theta\leqslant 1$ 的条件限定．于是可解．

【解】 1. 光栅方程为

$$d\sin\theta=k\lambda$$

式中光栅常量为

$$d=\frac{1}{300}\ \text{mm}=3.333\times10^{-3}\ \text{mm}=3333\ \text{nm}$$

在 $\theta=24.46°$处有复合谱线,相应的

$$k\lambda=d\sin\theta=1380\ \text{nm}$$

红光波长 $\lambda_r\approx700$ nm,故上述复合谱线中红光的级次 $k_r=2$;紫光波长 $\lambda_v\approx400$ nm,故上述复合谱线中紫光的级次 $k_v=3$,即第二级红光谱线与第三级紫光谱线重合,红光与紫光的波长应分别为

$$\lambda_r=\frac{d\sin\theta}{k_r}=\frac{1380}{2}=690\ \text{nm}$$

$$\lambda_v=\frac{d\sin\theta}{k_v}=\frac{1380}{3}=460\ \text{nm}$$

两种谱线重合的条件是

$$k_r\lambda_r=k_v\lambda_v$$

即

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_v}=\frac{k_v}{k_r}=\frac{3}{2}=\frac{6}{4}=\cdots$$

能出现的最大级次受下述条件限制

$$\sin\theta\leqslant1$$

即

$$\frac{k\lambda}{d}\leqslant1\ \text{或}\ k\leqslant\frac{d}{\lambda}$$

对于 λ_r,最大级次

$$k_r\leqslant\frac{3333}{690}=4.8$$

即

$$k_{r,\max}=4$$

对于 λ_v，最大级次

$$k_v \leqslant \frac{3333}{460} = 7.2$$

即

$$k_{v,\max} = 7$$

因此，除了红光第2级与紫光第3级重合外，红光第4级与紫光第6级也将重合，其位置 θ' 满足

$$d\sin\theta' = 4\times690 = 6\times460\ \text{nm}$$

即

$$\sin\theta' = \frac{4\times690}{3333} = 0.828,\quad \theta' = 55.9°$$

2. 因红光最高级次为4级，其中0级、2级、4级与紫光的0级、3级、6级重合，故单一的红光谱线只有1级和3级，它们出现的角度 θ_1 和 θ_3 分别为

$$\sin\theta_1 = \frac{\lambda_r}{d} = 0.2070,\ \theta_1 = 11.9°$$

$$\sin\theta_3 = \frac{3\lambda_r}{d} = 0.6211,\ \theta_3 = 38.4°$$

【题18】 如图所示，一闪耀光栅宽200 mm，每毫米有500个刻槽，闪耀角 $\theta_B = 43°26'$，平行光垂直于槽面入射．

试求：1. 对波长 $\lambda = 550$nm 的光的闪耀级次和色分辨本领．2. 在闪耀方向的角色散率．3. 若入射光垂直光栅平面，则三级光谱中强度最大的波长是什么？

【分析】 闪耀光栅是反射光栅，它利用刻槽的特殊形状使衍射光的能量较多地集中在某一级光谱上．一般光栅的零级主极大(中央亮纹)最强，两侧对称分布的各级主极大的强度要弱得多．如图的闪耀光栅的各级主极大位置仍由光栅方程 $d\sin\theta = k\lambda$ 确定，但单缝衍射的中央极大将不与多缝干涉的零级主极大重合，而移到由槽面方位决定的反射方向上．在这个方向上增强的光谱波长称为“闪耀波长”．

【解】 1. 如图，入射光以及衍射光与光栅平面法线之间的夹角分别为 θ_B 和 θ．多缝干涉主极大的位置满足

$$d(\sin\theta_B + \sin\theta) = k\lambda$$

闪耀方向与槽面垂直并与入射光方向相反，即在 $\theta = \theta_B$ 的方向．故在闪耀方向上，光栅方程为

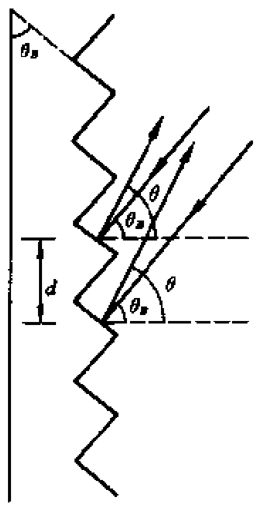
$$2d\sin\theta_B = k\lambda$$

因此，波长 $\lambda = 500$ nm 的光在闪耀方向上的级次为

$$k = \frac{2d\sin\theta_B}{\lambda} = \frac{2\times2\times10^3\times\sin43°26'}{550} = 5$$

光栅总缝数为

$$N = 500\times200 = 10^5$$



光图 3－18－1

故色分辨本领为

$$R = kN = 5\times 10^5$$

2. 角色散率为

$$D = \frac{k}{d\cos\theta_B} = \frac{5}{2\times 10^3\times\cos 43°26'} = 3.44\times 10^{-3}\ \mathrm{rad/nm}$$

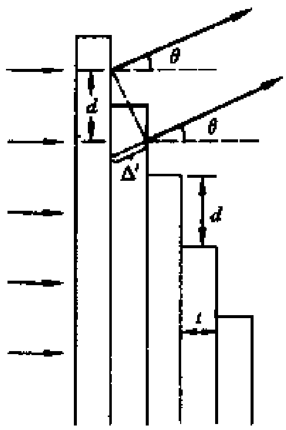
3. 光垂直光栅平面入射，三级干涉主极大位置满足

$$d\sin\theta = 3\lambda$$

在闪耀方向 $\theta = 2\theta_B$ 方向上，谱线有最大强度，其波长为

$$\lambda = \frac{d\sin 2\theta_B}{3} = 665.7\ \mathrm{nm}$$

【题 19】 如光图3－19－1所示，透射式阶梯光栅由一系列厚度均为 t，折射率均为 n 的玻璃板构成，一板要比另一板伸出 d 的距离．平行光垂直入射，用透镜接收衍射光，在透镜后焦面上观察夫琅禾费衍射花样．在衍射角 θ 很小的条件下，1. 试导出衍射强度分布公式，并求干涉极大的角位置．2. 对 $n=1.5$，$t=0.5$ cm，$\lambda=500$ nm，以及 40 阶的光栅，试求 $\theta=0$ 附近的干涉级次，角色散率公式和色分辨本领．3. 综述阶梯光栅的特性．



光图 3－19－1

【分析】 每个阶高 d 相当于宽度为 d 的狭缝，而 d 同时又是相邻两缝的间距，即光栅常量．阶梯光栅的强度分布完全可套用下述普通光栅的分布公式：

$$I = I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2\left(\frac{\sin N\gamma}{\sin\gamma}\right)^2 \tag{1}$$

式中

$$\beta = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$$

a 为单缝缝宽，式中 $\gamma = \frac{\delta}{2}$，

$$\delta = \frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta$$

δ 为相邻两衍射光之间的相位差．将阶梯光栅的 d 替换缝宽 a，又 $N=40$，可算出 δ，代入(1)式，即得所求的强度分布公式．由此公式可得各级干涉极大的角位置，由角色散率和色分辨本领的定义可得相应的公式．

【解】 1. 如光图 3－19－1，相邻两衍射光之间的光程差为

$$\Delta = (n-1)t + \Delta' = (n-1)t + d\theta$$

式中已考虑了衍射角 θ 很小，故有 $\sin\theta\approx\theta$，相应的相位差为

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}[(n-1)t + d\theta] \tag{2}$$

单阶(缝)衍射因子中的 β 为

$$\beta = \frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta \approx \frac{\pi d}{\lambda}\theta \tag{3}$$

由公式(1)，衍射强度分布公式为

$$I=I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2\left(\frac{\sin N\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}\right)^2$$

式中 δ 和 β 分别由(2)式和(3)式决定．当

$$\frac{\delta}{2}=2k\pi$$

即当

$$(n-1)t+d\theta=k\lambda \tag{4}$$

时，为干涉主极大，式中 k 为整数．故干涉主极大的角位置由下式决定

$$\theta_{max}=\frac{1}{d}[k\lambda-(n-1)t]$$

2．由(4)式，干涉级次为

$$k=\frac{1}{\lambda}[(n-1)t+d\theta]$$

在 $\theta=0$ 附近，干涉级次为

$$k=\frac{1}{\lambda}(n-1)t=\frac{(1.5-1)\times0.5\times10^{-2}}{5\times10^{-7}}=5\times10^3$$

可见 $\theta=0$ 附近干涉级次极高，这是阶梯光栅的重要特征之一．

(4)式两端取微分(对一定级次 k)

$$\delta\theta=\frac{k\delta\lambda}{d}$$

故角色散率为

$$D=\frac{\delta\theta}{\delta\lambda}=\frac{k}{d} \tag{5}$$

根据强度分布公式，当 δ 满足

$$\frac{\delta}{2}=k\pi+\frac{m\pi}{N}$$

$$\left|\sin\frac{\delta}{2}\right|=\left|\sin\left(k\pi+\frac{m}{N}\pi\right)\right|=\left|\sin\frac{m}{N}\pi\right|$$

且整数 $m\neq0,\pm N,\pm2N,\cdots$时

$$\left|\sin\frac{\delta}{2}\right|\neq0,\quad\left|\sin\frac{N\delta}{2}\right|=0$$

故强度

$$I=0$$

对应一系列极小，$m=1$ 是最靠近主极大的极小，如光图 3－19－2 所示，其角位置 θ_{min}满足

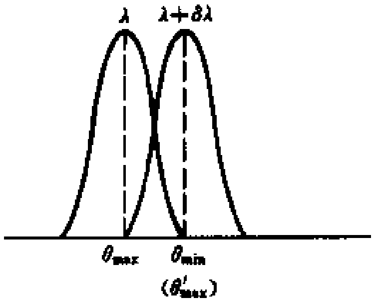
$$\frac{\delta}{2}=\frac{\pi}{\lambda}[(n-1)t+d\theta_{min}]=k\pi+\frac{\pi}{N}$$

或

$$\theta_{min}=\frac{1}{d}\left[k\lambda+\frac{\lambda}{N}-(n-1)t\right]$$

主极大的半角宽为

$$\Delta\theta = \theta_{\min} - \theta_{\max} = \frac{\lambda}{dN}$$



光图 3－19－2

考虑波长为$(\lambda+\delta\lambda)$的 k 级主极大，它的角位置为

$$\theta'_{\max} = \frac{1}{d}[k(\lambda+\delta\lambda)-(n-1)t]$$

如光图 3－19－2 所示，若刚好落在 λ 的极小位置，即两谱线之间的角间距正好等于主极大的半角宽，则由瑞利判据，两谱线刚好能分辨．故刚好能分辨的最小波长差 $\delta\lambda$ 满足

$$\Delta\theta = \theta'_{\max} - \theta_{\max} = \frac{k}{d}\delta\lambda = \frac{\lambda}{dN}$$

故色分辨本领

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = kN \tag{6}$$

此式与普通光栅的色分辨本领公式相同，在 $\theta=0$ 附近，$k=5\times10^3$，$N=40$，代入，得

$$R = 5\times10^3\times40 = 2\times10^5$$

3．阶梯光栅的阶高 d（即光栅常量）不可能做到很小，例如 0.1cm，比普通光栅要大得多，阶数 N（总缝数）也远小于普通光栅．但阶梯光栅一般在小衍射角情形下使用，即在 $\theta\approx0$ 附近观察光谱，此处有极高的干涉级次 k，极高的 k 可以弥补较大的 d 和较小的 N 的不足，以获得足够的角色散率和色分辨本领[见公式(5)和(6)]．

另外，单阶（缝）的衍射峰位于 $\theta=0$，又由于 d 很大，入射能量绝大部分集中在 $\theta=0$ 附近的高级次处，其他方向的衍射光能量极小，故阶梯光栅具有闪耀光栅的性质（闪耀方向在 $\theta=0$ 的高级次处，此处有较大的色散率和分辨本领，见本章题 18），具有较高的能量利用率．

阶梯光栅通常在红外区使用．

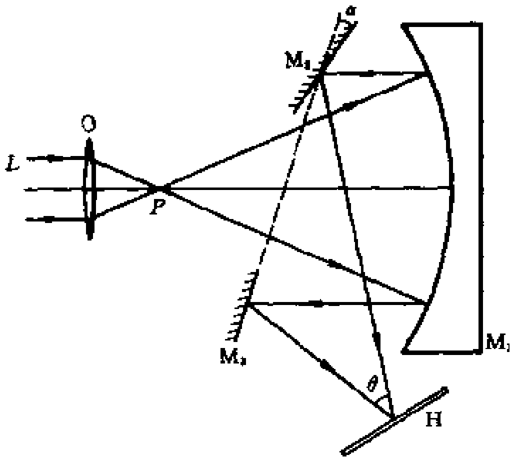
【题 20】 设制作全息光栅时，两束相干平行光的传播方向与感光片法线所夹的角度分虽为 θ_1 和 θ_2，光波波长为 λ，曝光后再经显影处理，假设乳胶特性是线性的．

1．试求所得全息底片的振幅透射率．

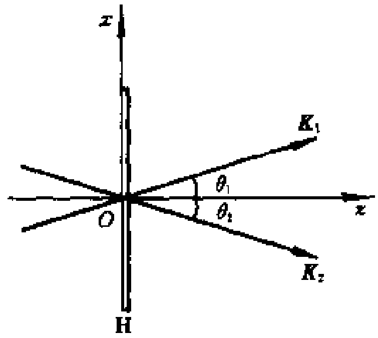
2．以上述全息光栅为衍射器件，并以原来的相干平行光垂直入射，试求夫琅禾费衍射的强度分布公式．

【分析】 全息光栅是利用激光干涉的全息学原理制成的一种光栅．如光图 3－20－1 所示，激光束 L 通过透镜 O 后，在针孔滤波器 P 上聚成一个很小的点光源．它恰好位于一个抛物面反射镜 M_1 的焦点上，故由 M_1 反射后形成一束光强均匀分布的平行光，投射到两平面镜 M_2 和 M_3 上．因两平面镜之间有一夹角 α，它们把平行光反射在基板 H 上，产生夹角 $\theta=2\alpha$ 的双光束干涉．基板表面涂有超微粒感光材料，经过显像处理，再镀上反射膜和保护膜，即制成全息光栅．全息光栅的特点是无周期性误差，光谱中不会出现一般刻槽光栅产生的鬼线．

请参看第二章中的干涉题 6．



光图 3-20-1



光图 3-20-2

【解】 1. 如光图 3-20-2 所示，取 $0xyz$ 坐标，感光片所在平面为 xy 平面，感光片的法线为 z 轴．

两束入射平面波在 xy 平面上的复振幅分布为

$$\tilde{u}_1(x,y)=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}K_1x\sin\theta_1}$$
$$\tilde{u}_2(x,y)=B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}K_2x\sin\theta_2}$$

式中

$$K_1=K_2=K=\frac{2\pi}{\lambda}$$

为波矢．在 xy 平面内的总复振幅为

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x,y)&=\tilde{u}_1(x,y)+\tilde{u}_2(x,y)\\&=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}Kx\sin\theta_1}+B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Kx\sin\theta_2}\end{aligned}$$

强度为

$$\begin{aligned}I(x,y)&=\tilde{u}(x,y)\tilde{u}^*(x,y)\\&=(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}Kx\sin\theta_1}+B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Kx\sin\theta_2})\ (A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Kx\sin\theta_1}+B\mathrm{e}^{\mathrm{i}Kx\sin\theta_2})\\&=A^2+B^2+AB[\mathrm{e}^{\mathrm{i}Kx(\sin\theta_1+\sin\theta_2)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Kx(\sin\theta_1+\sin\theta_2)}]\end{aligned}$$

令

$$\sin\theta=\sin\theta_1=\sin\theta_2$$

则

$$\begin{aligned}I(x,y)&=A^2+B^2+AB(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\frac{\sin\theta}{\lambda}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\frac{\sin\theta}{\lambda}x})\\&=A^2+B^2+2AB\cos\left(2\pi\frac{\sin\theta}{\lambda}x\right)\end{aligned}$$

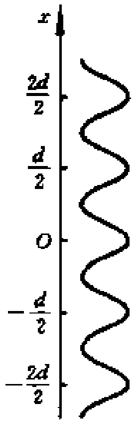
在乳胶的线性区，处理后底片的振幅透射率为

$$t(x,y)=t_0+\beta I$$

式中 β 为比例系数，t_0 为常数，两者与乳胶特性和显影处理有关．把 $I(x,y)$ 代入，得

$$t(x,y)=t_0+\beta(A^2+B^2)+2\beta AB\cos\left(2\pi\frac{\sin\theta}{\lambda}x\right)$$

$$= C_1 + C_2\cos\left(2\pi\frac{\sin\theta}{\lambda}x\right)$$



光图 3-20-3

式中 $C_1 = t_0 + \beta(A^2+B^2)$，$C_2 = 2\beta AB$ 是两个常数．可见，振幅透射率包括常数项 C_1 和周期性的余弦项．余弦项与 y 无关．所以底片上呈现的是一组与 y 轴平行的干涉条纹．当

$$2\pi\frac{\sin\theta}{\lambda}x = 2k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

时，相应的 x 为极大位置．条纹间距即相邻两极大之间的距离为

$$d = \Delta x = \frac{\lambda}{\sin\theta} = \frac{\lambda}{\sin\theta_1+\sin\theta_2}$$

因此，所得底片相当于一个光栅常量为 d 的光栅，只是其振幅透射率是一常数加一余弦函数，这种光栅称为正弦光栅．利用上式，振幅透射率可写为

$$t(x,y) = C_1 + C_2\cos\left(\frac{2\pi}{d}x\right)$$

2．正弦光栅可按其周期划分为许多衍射单元，每个衍射单元的宽度均为 d，在夫琅禾费衍射中，每个衍射单元的作用完全相同．考虑中央的一个衍射单元，其 x 坐标从 $-\frac{d}{2}$ 到 $\frac{d}{2}$（如光图 3-20-3 所示）．平行光正入射时，在衍射角为 θ 的方向上，总复振幅为

$$\begin{aligned}\tilde{u}_i(\theta) &= C\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} t(x,y)e^{iKx\sin\theta}dx = C\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}\left(C_1 + C_2\cos\frac{2\pi}{d}x\right)e^{iKx\sin\theta}dx \\ &= C\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}\left[C_1 + \frac{C_2}{2}\left(e^{i\frac{2\pi}{d}x} + e^{-i\frac{2\pi}{d}x}\right)\right]e^{iKx\sin\theta}dx \\ &= CC_1\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e^{iKx\sin\theta}dx + \frac{CC_2}{2}\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e^{i\left(\frac{2\pi}{d}+K\sin\theta\right)x}dx + \frac{CC_2}{2}\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e^{-i\left(\frac{2\pi}{d}-K\sin\theta\right)x}dx \\ &= \frac{2CC_1}{K\sin\theta}\sin\left(\frac{1}{2}Kd\sin\theta\right) + \frac{CC_2}{\left(\frac{2\pi}{d}+K\sin\theta\right)}\sin\left(\pi + \frac{K}{2}d\sin\theta\right) \\ &\quad + \frac{CC_2}{\left(K\sin\theta - \frac{2\pi}{d}\right)}\sin\left(\frac{K}{2}d\sin\theta - \pi\right)\end{aligned}$$

令

$$\beta = \frac{K}{2}d\sin\theta = \frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta$$

则

$$\tilde{u}_i(\theta) = CC_1 d\,\frac{\sin\beta}{\beta} + \frac{CC_2 d}{2}\cdot\frac{\sin(\beta+\pi)}{(\beta+\pi)} + \frac{CC_2 d}{2}\cdot\frac{\sin(\beta-\pi)}{(\beta-\pi)} \tag{1}$$

设正弦光栅包括 N 个衍射单元，则在衍射角为 θ 的方向上，N 个上述复振幅进行相干叠加，与普通的多光束干涉一样，干涉因子为 $\frac{\sin N\gamma}{\sin\gamma}$，其中 $\gamma = \frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta = \beta$，故总的复振幅为

$$\tilde{u}(\theta) = \left[CC_1 d\,\frac{\sin\beta}{\beta} + \frac{CC_2 d}{2}\,\frac{\sin(\beta+\pi)}{(\beta+\pi)} + \frac{CC_2 d}{2}\,\frac{\sin(\beta-\pi)}{(\beta-\pi)}\right]\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}$$

光强分布为

$$I(\theta)=C^2d^2\left[C_1\frac{\sin\beta}{\beta}+\frac{C_2}{2}\frac{\sin(\beta+\pi)}{(\beta+\pi)}+\frac{C_2}{2}\frac{\sin(\beta-\pi)}{(\beta-\pi)}\right]^2\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$

由上述强度分布公式可知：

1. 多光束干涉的干涉因子决定了主极大的位置，为 $\beta=k\pi$，即

$$\sin\theta=k\frac{\lambda}{d},k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

2. $\beta=0$，即 $\sin\theta=0$ 时，为衍射中央极大．$\beta=\pi$，即 $\sin\theta=\frac{\lambda}{d}$时，衍射因子为$\left(\frac{C_2}{2}\right)^2$．$\beta=-\pi$，即 $\sin\theta=-\frac{\lambda}{d}$时，衍射因子为$\left(\frac{C_2}{2}\right)^2$．$\beta=k\pi(k\neq1)$时，衍射因子为零．

由此可见，衍射因子的各级极小正好落在除 ±1 级以外的所有各级干涉主极大上，造成这些主极大的缺级．由此得出，正弦光栅的夫琅禾费衍射图样只包括三级干涉主极大，即零级（中央主极大）和 ±1 级，分别位于 $\sin\theta=0,\pm\frac{\lambda}{d}$处．

【题 21】 制作上题（本章题 20）的全息光栅时，设两束相干光的强度比为 $R=\left(\frac{A}{B}\right)^2$．1. 试求入射到感光片的光强分布的反衬度．2. 试证明全息光栅的衍射效率与反衬度的平方成反比．3. 试定性讨论束强比 R 的取值原则．

【分析】 感光片上的光强分布已由上题求得，由其极大值和极小值可求出光强分布的反衬度 γ．衍射效率 η 是指衍射图样 1 级主极大的光强与入射光强之比．

【解】 1. 由上题（本章题 20），感光片上的光强分布为

$$I(x)=A^2+B^2+AB\left(e^{i2\pi\frac{\sin\theta}{\lambda}x}+e^{-i2\pi\frac{\sin\theta}{\lambda}x}\right)=A^2+B^2+2AB\cos\left(2\pi\frac{\sin\theta}{\lambda}x\right)$$

极大值和极小值为

$$I_{\max}=A^2+B^2+2AB,\quad I_{\min}=A^2+B^2-2AB$$

由反衬度的定义，得

$$\gamma=\frac{I_{\max}-I_{\min}}{I_{\max}+I_{\min}}=\frac{2AB}{A^2+B^2}=\frac{2A}{B\left(1+\frac{A^2}{B^2}\right)}=\frac{2\sqrt{R}}{1+R}$$

式中

$$R=\frac{A^2}{B^2}$$

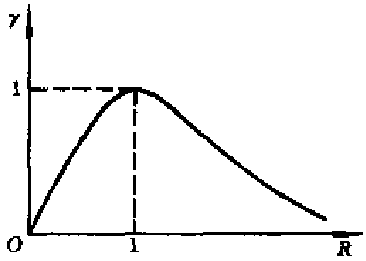
反衬度 γ 随R 变化的曲线如光图 3－21－1 所示．当 $R=1$ 时，$\gamma=1$，即当两束相干光的强度相等时，干涉条纹有最大的反衬度．

2. 由上题（本章题 20），全息光栅的振幅透射率为

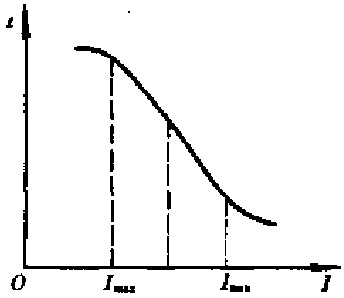
$$\tilde{t}(x)=t_0+\beta I=t_0+\beta(A^2+B^2)+\beta AB\ e^{i2\pi\frac{\sin\theta}{\lambda}x}+\beta AB\ e^{-i2\pi\frac{\sin\theta}{\lambda}x}$$

以振幅为 1，波长为 λ 的平行光正入射时，透过全息光栅的复振幅为

$$\tilde{u}(x)=\tilde{t}(x)=t_0+\beta(A^2+B^2)+\beta AB\ e^{i2\pi\frac{\sin\theta}{\lambda}x}+\beta AB\ e^{-i2\pi\frac{\sin\theta}{\lambda}x}$$



光图 3-21-1



光图 3-21-2

式中右第一项和第二项代表零级衍射光，后二项分别代表±1 级衍射光．在此我们再次看到，全息光栅只存在零级和±1 级三束衍射光．±1 级衍射光的传播方向(用与 z 轴的夹角 θ 表示，参看上题的光图 3-20-2)由下式决定

$$\sin\theta=\sin\theta_1+\sin\theta_2$$

式中 θ_1 和 θ_2 是制作全息光栅时两入射光束与 z 轴的夹角，±1 级衍射光的强度均为$(\beta AB)^2$.

衍射效率 η 定义为衍射到 1 级的光强 I_1 与入射光强 $I_入$ 之比，为

$$\eta=\frac{I_1}{I_入}=\beta^2A^2B^2=\beta^2\frac{4A^2B^2}{(A^2+B^2)^2}\cdot\frac{(A^2+B^2)^2}{4}=\frac{1}{4}\beta^2I_0^2\gamma^2$$

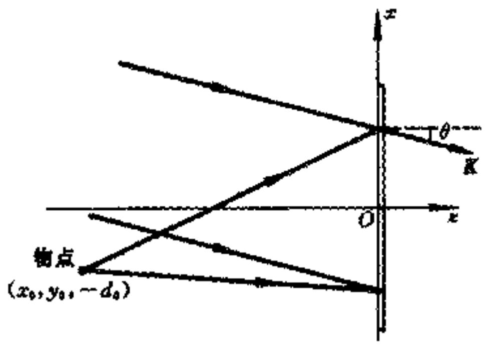
式中 $I_0=A^2+B^2$ 是制作全息光栅时两束入射光的光强之和．

3. 为了提高正弦光栅的衍射效率，反衬度 γ 愈大愈好，但为了得到纯余弦函数的振幅透射率，以使衍射光能量集中到±1 级，γ 值又不能太大．后者是由于受到乳胶线性动态范围的限制造成的．乳胶的振幅透射率 t 与曝光光强 I 的关系如光图 3-21-2 中所示．由曲线可知，只有当光强 I 在一定范围时 t 才是线性的，I_{max}与 I_{min}之差愈大，非线性现象愈明显，这种非线性关系将使全息光栅的振幅透射率不再是纯余弦函数，这将导致高级衍射光的出现．总之，为了使反衬度 γ 提高，必须增大 I_{max}与 I_{min}之差，而为了得到较纯的余弦分布，又要求 I_{max}与 I_{min}之差较小，两者是矛盾的．通常两者兼顾．前已指出，$(I_{max}-I_{min})$决定了反衬度 γ，而 γ 又由束强比R 决定，通常取 $R=3$ 到 10，取值小于这个范围可得到良好的反衬度，但线性不好；取值大于这个范围，则相反．

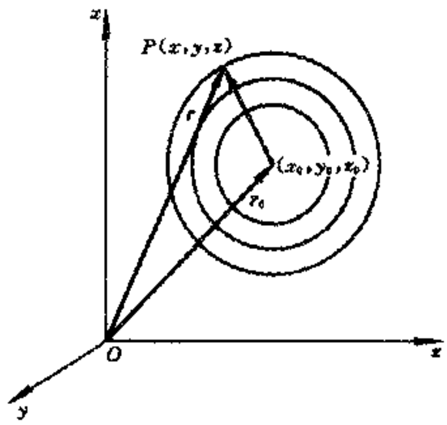
【题 22】 如光图3-22-1所示，全息感光片放置在 $z=0$ 的 xy 平面上，平行的参考光沿 xz 平面入射，其波矢 $\boldsymbol{k}$ 与 z 轴夹 θ 角，物点坐标为(x_0,y_0-d_0)，d_0 是物点到感光片的垂直距离．感光片同时接收参考光和从物点发出的球面波，经显影处理后制成全息片．以原参考光照明全息片．

试证明在全息片后的±1 级衍射光分别形成物点的虚像和实像，并求两像点的位置．

【分析】 写出参考光和物光在感光片上的复振幅分布，叠加后得总的复振幅分布，平方后得光强分布，显影后全息片的振幅透射率与感光时的光强成线性关系．以原参考光照明全息片时，由全息片后的±1 级衍射光的复振幅分布可知，它们分别是发散的球面波和会聚的球面波，分别形成虚像点和实像点．



光图 3-22-1



光图 3-22-2

【解】 参看本章题 20,参考光在感光片上的复振幅分布为

$$\widetilde{R}(x)=A\ \mathrm{e}^{-ikx\sin\theta}=A\mathrm{e}^{-i2\pi ux}$$

式中

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}, u=\frac{\sin\theta}{\lambda}$$

球心位于原点 O 的发散球面波的复振幅为

$$\widetilde{u}(r)=\frac{B_0}{r}\mathrm{e}^{ikr}$$

会聚球面波的复振幅为

$$\widetilde{u}(r)=\frac{B_0}{r}\mathrm{e}^{-ikr}$$

如光图 3-22-2 所示,若球面波球心位于(x_0,y_0,z_0)点,相应径矢为 $\boldsymbol{r}_0$,则发散球面波的复振幅为

$$\widetilde{u}(\boldsymbol{r})=\frac{B_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}\mathrm{e}^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 是空间任一点P 的径矢,上式可写成

$$\widetilde{u}(x,y,z)=\frac{B_0}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{1}{2}}}\exp\{ik(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{1}{2}}\}$$

考虑上述球面波在 $z=0$ 平面内的复振幅,在傍轴条件下,即球心离 xy 面足够远,并且在 xy 面上的观察范围又比较小,则有

$$|z_0|\gg[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{\frac{1}{2}}$$

即有以下近似关系,

$$[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{\frac{1}{2}}=|z_0|\left[1+\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{z_0^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\approx|z_0|+\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2z_0}$$

于是在 xy 面上的复振幅分布为

$$\begin{aligned}\widetilde{u}(x,y)&=\frac{B_0}{|z_0|}\exp[\mathrm{i}k|z_0|]\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k}{2|z_0|}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\right\}\\&=\widetilde{B}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k}{2|z_0|}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\right\}\end{aligned}\tag{1}$$

式中 $\widetilde{B}$ 为常量因子．

同理,对会聚的球面波,在 xy 面上的复振幅分布为

$$\widetilde{u}(x,y)=\widetilde{B}\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}k}{2|z_0|}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\right\}\tag{2}$$

现物点位于$(x_0,y_0,-d_0)$,由(1)式,所发出的发散球面波在感光片上的复振幅为

$$\widetilde{O}(x,y)=\widetilde{B}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k}{2d_0}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\right\}\tag{3}$$

感光片上总的复振幅为

$$\begin{aligned}\widetilde{u}(x,y)&=\widetilde{R}(x)+\widetilde{O}(x,y)\\&=A\exp(-\mathrm{i}kux)+\widetilde{B}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k}{2d_0}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\right\}\end{aligned}$$

光强分布为

$$\begin{aligned}I(x,y)&=\widetilde{u}(x,y)\widetilde{u}^*(x,y)\\&=A^2+|B|^2+A\widetilde{B}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k}{2d_0}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\right\}\\&\quad\exp(\mathrm{i}2\pi ux)+A\widetilde{B}^*\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}k}{2d_0}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\right\}\exp(-\mathrm{i}2\pi ux)\end{aligned}$$

显影处理后,全息片的复振幅透射率为

$$\widetilde{t}(x,y)=t_0+\beta I(x,y)$$

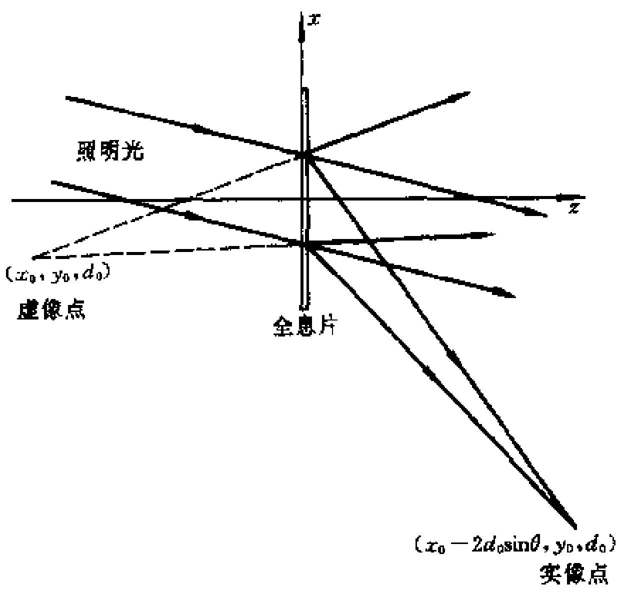
式中 t_0 和 β 均为常量,即

$$\begin{aligned}\widetilde{t}(x,y)=&[t_0+\beta(A^2+|B|^2)]+\beta A\widetilde{B}\exp\\&\left\{\frac{\mathrm{i}k}{2d_0}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\right\}\exp(\mathrm{i}2\pi ux)\\&+\beta A\widetilde{B}^*\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}k}{2d_0}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\right\}\exp(-\mathrm{i}2\pi ux)\end{aligned}$$

用原参考光照明上述全息片时,在全息片后的复振幅分布为

$$\begin{aligned}\widetilde{u}(x,y)&=A\exp(-\mathrm{i}2\pi ux)\widetilde{t}(x,y)\\&=[t_0+\beta(A^2+|B|^2)]A\exp(-\mathrm{i}2\pi ux)\\&\quad+\beta A^2\widetilde{B}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k}{2d_0}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\right\}\\&\quad+\beta A^2\widetilde{B}^*\exp\left\{\frac{-\mathrm{i}k}{2d_0}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\right\}\exp(-\mathrm{i}4\pi ux)\end{aligned}$$

上式右端三项分别表示全息片后的 0 级和 ±1 级衍射光,第一项是基本上沿照明光方向传播的所谓"晕轮光". 第二项代表一发散的球面波,与(3)式对照,除无关紧要的常数因子外,它实际上就是重现的物光波,球面波的球心位于原来的物点处,坐标为$(x_0,y_0,-d_0)$,是虚像点,如光图 3



光图 3-22-3

-22-3 所示．第三项为另一级衍射光，利用 $u=\dfrac{\sin\theta}{\lambda}$ 和 $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$，因子 $\exp(-\mathrm{i}4\pi ux)$ 可改写成

$$\exp(-\mathrm{i}4\pi ux)=\exp(-\mathrm{i}2kx\sin\theta)$$

故第三项可写成

$$\beta A^2\tilde{B}^*\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}k}{2d_0}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+4d_0x\sin\theta]\right\}$$

式中指数方括号内的量可写成

$$\begin{aligned}&(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+4d_0x\sin\theta\\&\quad=(x-x_0+2d_0\sin\theta)^2-4d_0x\sin\theta+4d_0x_0\sin\theta+4d_0^2\sin^2\theta+(y-y_0)^2\end{aligned}$$

故第三项可写成

$$\begin{aligned}&\beta A^2\tilde{B}^*\exp\left[-\frac{ik}{2d_0}(4d_0x_0\sin\theta-4d_0^2\sin^2\theta)\right]\cdot\\&\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}d}{2d_0}[(x-x_0+2d_0\sin\theta)^2+(y-y_0)^2]\right\}\\&=\tilde{C}\exp\left[-\frac{ik}{2d_0}[(x-x_0+2d_0\sin\theta)^2+(y-y_0)^2]\right\}\end{aligned}$$

与(2)式比较可知，该项代表一会聚的球面波，会聚点（即实像点）的坐标为 $(x_0-2d_0\sin\theta, y_0, d_0)$，如光图 3-22-3 所示．

第四章 光的偏振

【题1】 试证明自然光通过偏振片后的强度为入射光强的一半．忽略由于吸收、反射和散射等原因引起的光能损失．

【分析】 自然光由大量各种取向的、彼此独立无关的线偏振光组合而成，而且这些线偏振具有轴对称性，如图所示．为了描述横振动的角分布，可引进线偏振数密度的概念．如图，设在 θ 方位角、$\Delta\theta$ 范围内包含 ΔN 个线偏振，则线偏振数密度 $\rho(\theta)$ 可定义为

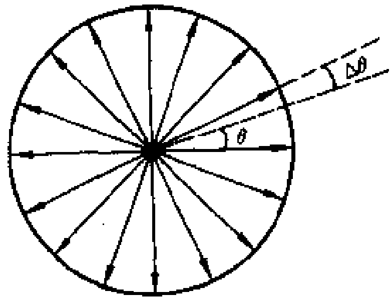
$$\rho(\theta) = \frac{\Delta N}{\Delta\theta}$$

因而在 θ 到 $(\theta + \Delta\theta)$ 范围内的线偏振数为

$$\Delta N = \rho(\theta)\Delta\theta$$

相应的强度 ΔI 为

$$\Delta I = i(\theta)\rho(\theta)\Delta\theta$$



光图 4－1－1

式中 $i(\theta)$ 是振动方位角为 θ 的线偏振光强．因自然光的横振动具有轴对称性，故 ρ 和 i 均与 θ 角无关，为恒量．

利用马吕定律将各方位的线偏振投影到偏振片的偏振化方向，并求和，即可得出透过偏振片后的光强．

【解】 根据以上分析，如图所示，振动方位角在 θ 到 $(\theta + \Delta\theta)$ 范围内的线偏振强度为

$$\Delta I = i\rho\Delta\theta$$

自然光中各振动是彼此独立的，无固定的相位关系，故入射自然光的总强度 I_0 是上述光强的代数和，即

$$I_0 = \Sigma\Delta I = \Sigma i\rho\Delta\theta$$

考虑到大量线偏振的实际情况，上述求和可用积分表示，即

$$I_0 = \int_0^{2\pi} i\rho \mathrm{d}\theta = 2\pi\rho i$$

为求通过偏振片的光强，应按马吕定律先投影再对光强求和．用 α 角表示振动方向与偏振化方向之间的夹角，由马吕定律，在 α 到 $(\alpha + \mathrm{d}\alpha)$ 范围内的线偏振光通过偏振片后的光强为

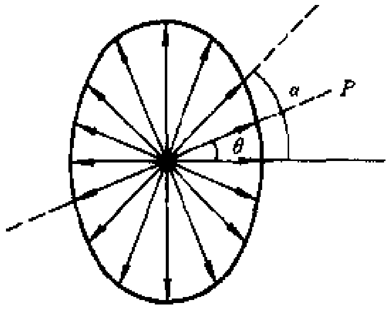
$$\mathrm{d}I = i\rho\cos^2\alpha\mathrm{d}\alpha$$

故自然光通过偏振片后的总光强为

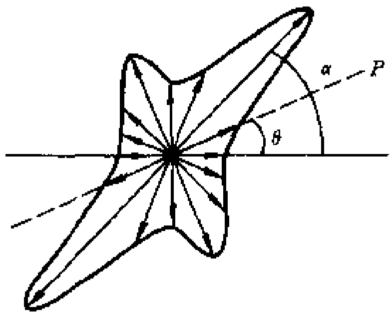
$$I = i\rho\int_0^{2\pi}\cos^2\alpha\mathrm{d}\alpha = \pi i\rho = \frac{1}{2}I_0$$

【题2】 以横振动的角分布为任意的部分偏振光入射到偏振片，以光线为轴旋转偏振片．1．试

证明，偏振片旋转一周内，透射光只有两个光强极大方位和两个光强极小方位，且极大方位与极小方位垂直．2. 试证明，就透过偏振片的透射光而言，人射的任意部分偏振光等效于适当强度的自然光和线偏振光的组合．



光图 4－2－1



光图 4－2－2

【分析】 在上题(本章题 1) 中引进的函数 $\rho(\theta)$ 是单位方位角内的线偏振数，$i(\theta)$ 是每个线偏振的强度，凡 $\rho(\theta)$ 和 $i(\theta)$ 都随 θ 角变化的均属部分偏振光，即 $\rho(\theta)$ 和 $i(\theta)$ 是 θ 的任意函数，如光图 4－2－1 和光图 4－2－2 所示是两个例子．

参看上题，把入射光中的每个线偏振都投影到偏振片的偏振化方向 P，然后求强度和，即可得出透过的光强随 P 的方位角 θ 变化的函数关系．由该函数可知，在两个相互垂直的方位上，有极大光强和极小光强．

【解】 1. 如光图 4－2－1，设偏振片偏振化方向 P 的方位角用 θ 表示，线偏振的方位角用 α 表示．参看上题，任意部分偏振光的光强为

$$I_0=\int_0^{2\pi}i(\alpha)\rho(\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

透过偏振片的光强为

$$\begin{aligned}I(\theta)&=\int_0^{2\pi}i(\alpha)\rho(\alpha)\cos^2(\alpha-\theta)\mathrm{d}\alpha\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}i(\alpha)\rho(\alpha)[1+\cos(2\alpha-2\theta)]\mathrm{d}\alpha\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}i(\alpha)\rho(\alpha)\mathrm{d}\alpha+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}i(\alpha)\rho(\alpha)\cos(2\alpha-2\theta)\mathrm{d}\alpha\end{aligned}$$

式中右端第一项为$\frac{1}{2}I_0$，第二项中被积函数为连续函数，由中值定理，可将第二项中的积分写为

$$\int_0^{2\pi}i(\alpha)\rho(\alpha)\cos(2\alpha-2\theta)\mathrm{d}\alpha=2\pi i(\alpha_0)\rho(\alpha_0)\cos(2\alpha_0-2\theta)$$

式中 α_0 是介于 0 和 2π 之间的某一个值，它由 $i(\alpha)$ 和 $\rho(\alpha)$ 的具体函数形式决定．故有

$$I(\theta)=\frac{I_0}{2}+\pi i(\alpha_0)\rho(\alpha_0)\cos(2\alpha_0-2\theta)$$

当 $\theta=\alpha_0$ 和$(\alpha_0+\pi)$时，得极大光强

$$I_{\max}=\frac{I_0}{2}+\pi i(\alpha_0)\rho(\alpha_0)\tag{1}$$

当 $\theta = \left(\alpha_0 + \frac{\pi}{2}\right)$ 和 $\left(\alpha_0 + \frac{3}{2}\pi\right)$ 时，得极小光强

$$I_{min} = \frac{I_0}{2} - \pi i(\alpha_0)\rho(\alpha_0) \tag{2}$$

可见，极大光强与极小光强对应的 P 的两个方位角相差 $\frac{\pi}{2}$，即 P 的上述两方位互相垂直．

2．由(1)、(2)两式，入射部分偏振光的光强为

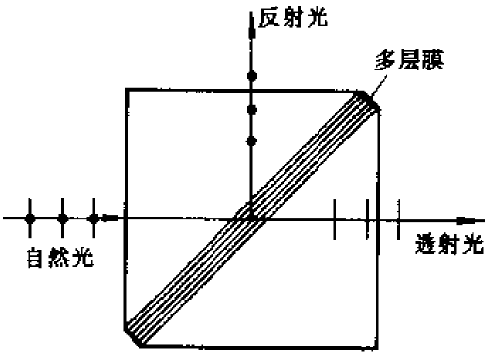
$$I_0 = I_{max} + I_{min}$$

透过偏振片的光强可改写为

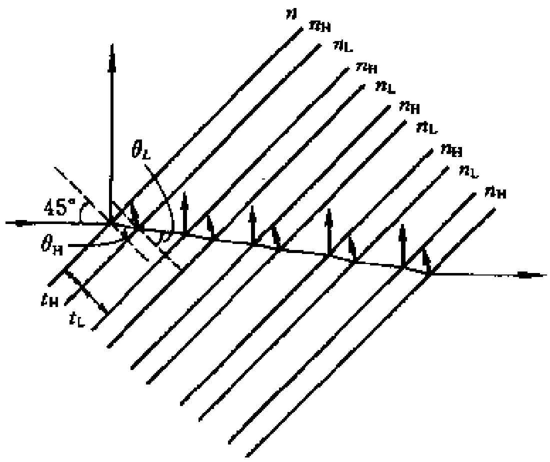
$$\begin{aligned} I(\theta) &= \frac{I_0}{2} + \pi i(\alpha_0)\rho(\alpha_0)\cos(2\alpha_0 - 2\theta) \\ &= \frac{I_0}{2} + \pi i(\alpha_0)\rho(\alpha_0)[2\cos^2(\alpha_0 - \theta) - 1] \\ &= \left[\frac{I_0}{2} - \pi i(\alpha_0)\rho(\alpha_0)\right] + 2\pi i(\alpha_0)\rho(\alpha_0)\cos^2(\alpha_0 - \theta) \\ &= I_{min} + (I_{max} - I_{min})\cos^2(\alpha_0 - \theta) \end{aligned}$$

可见，$I(\theta)$ 等效于一自然光与一线偏振光组合后透过偏振片的光强，该自然光的光强为 $2I_{min}$，该线偏振光的光强为 $(I_{max} - I_{min})$，偏振方位角为 α_0．

【题3】 偏振分束器可把入射的自然光分成两束传播方向互相垂直的线偏振光，其结构如光图 4－3－1 所示．两个直角玻璃棱镜斜面对斜面合在一起，两斜面之间夹一多层膜，多层膜由高折射率和低折射率材料交替地组合而成．设高折射率为 n_H，低折射率为 n_L，自然光以 45° 的入射角入射到多层膜上．



光图 4－3－1



光图 4－3－2

1．为使反射光为线偏振光，玻璃棱镜的折射率 n 必须取特殊值，试导出 n 的公式．2．试问，为使透射光有最大的偏振度，高折射率层的厚度 t_H 和低折射率层的厚度 t_L 应怎样决定？试导出最小厚度的公式．3．对于氩离子激光，$\lambda = 514.5$ nm，以硫化锌为高折射率层，其折射率 $n_H = 2.38$，以冰晶石为低折射率层，其折射率 $n_L = 1.25$．试求 n 和 t_H、t_L 的最小值．

【分析】 放大后的多层膜如光图 4－3－2 所示．为使从多层膜各界面上反射的光为线偏振光，在多层膜内传播的光必须满足布儒斯特定律，再结合折射定律的连等式，可得出玻璃折射率 n 与 n_H 和 n_L 的关系．

必须注意，当多层膜中的光线符合布儒斯特定律时，在第一个界面上的入射角 45° 不一定符合布儒斯特，因而第一条反射光不一定是线偏振光，但它在全部反射光中只占很小的能量，故可忽略．

为使透射光有最大的偏振度，在每层上反射的 S 分量（垂直分量）应满足干涉极大条件，由此可得出 t_H 和 t_L 的最小值．

【解】 1. 如光图 4－3－2，根据折射定律，有如下连等式，

$$n\sin 45^\circ = n_H \sin Q_H = n_L \sin\theta_L \tag{1}$$

多层膜各界面上的反射光为线偏振光时，必须满足布儒斯特定律，即各界面上的反射角与折射角之和应等于 90°，

$$\theta_H + \theta_L = 90^\circ$$

由以上两式，得

$$n = \sqrt{2} n_H \sin\theta_H$$

或

$$n = \sqrt{2} n_H \cos\theta_L = \sqrt{2} n_L \sin\theta_L$$

解出

$$n^2 = \frac{2n_L^2 n_H^2}{n_L^2 + n_H^2}$$

故

$$n = \frac{\sqrt{2} n_L H_H}{\sqrt{n_L^2 + n_H^2}} \tag{2}$$

2、与玻片堆类似，各层的折射光中多少包括一部分 S 分量，为使 S 分量透射最少，就要求 S 分量反射为极大．利用干涉原理，选择适当的 t_H 和 t_L，可使透射光中的 S 分量尽可能地少，从而提高透射光的偏振度．S 分量满足反射极大的条件为

$$\begin{cases} 2n_H t_H \cos\theta_H + \dfrac{\lambda}{2} = k_1\lambda \\ 2n_L t_L \cos\theta_L - \dfrac{\lambda}{2} = k_2\lambda \end{cases}$$

厚度最小时，

$$k_1 = 1, k_2 = 0$$

于是

$$\begin{cases} 2n_H t_H \cos\theta_H = \dfrac{\lambda}{2} \\ 2n_L t_L \cos\theta_L = \dfrac{\lambda}{2} \end{cases}$$

得出

$$\begin{cases} t_H = \dfrac{\lambda}{4n_H\cos\theta_H} \\ t_L = \dfrac{\lambda}{4n_L\cos\theta_L} \end{cases} \tag{3}$$

由(1)式，

$$\begin{cases} \cos\theta_H = \sqrt{1-\sin^2\theta_H} = \sqrt{1-\dfrac{n^2}{2n_H^2}} \\ \cos\theta_L = \sqrt{1-\sin^2\theta_L} = \sqrt{1-\dfrac{n^2}{2n_L^2}} \end{cases}$$

3. 把题目给定的数据代入(2)、(3)式，得

$$n = 1.57$$
$$t_H = 6.10\times10^{-8}\text{ m}$$
$$t_L = 2.21\times10^{-7}\text{ m}$$

【题4】 介质1和介质2的折射率分别为 n_1 和 n_2，一线偏振光从介质1向两介质的界面入射，振动方向与入射面的夹角 α 称为振动方位角．试求反射光和折射光的振动方位角．

【分析】 反射和折射不仅涉及光传播方向的问题，还涉及能量分配以及偏振态和相位变化的问题．反射定律和折射定律确定了反射光和折射光的传播方向，菲涅耳公式则揭示反射光、折射光的振幅及偏振态与入射光的关系(见第二章光的干涉题23)．求解本题的依据即在于此．

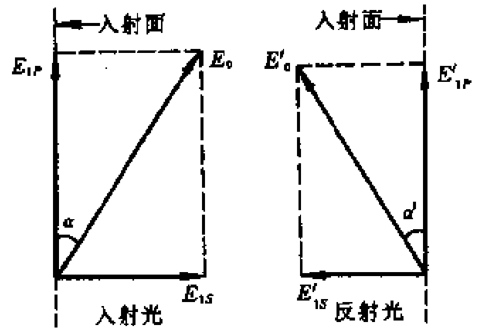
【解】 已知入射光为线偏振光，其振动方位角为 α，如图所示．把入射振动分解为与入射面相垂直的 S 分量和在入射面内振动的 P 分量，它们分别为

$$E_{1S} = E_0\sin\alpha$$
$$E_{1P} = E_0\cos\alpha$$

式中 E_0 是入射光的振幅．根据菲涅耳公式，反射光的相应分量为

$$E'_{1S} = -\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\sin(\theta_1+\theta_2)}E_{1S}$$

$$E'_{1P} = \frac{\tan(\theta_1-\theta_2)}{\tan(\theta_1+\theta_2)}E_{1P}$$



光图 4－4－1

式中 θ_1 为入射角，θ_2 为折射角．所以，反射光的振动方位角 α' 满足

$$\tan\alpha' = \frac{|E'_{1S}|}{|E'_{1P}|} = \frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\sin(\theta_1+\theta_2)}\cdot\frac{\tan(\theta_1+\theta_2)}{\tan(\theta_1-\theta_2)}\tan\alpha = \frac{\cos(\theta_1-\theta_2)}{\cos(\theta_1+\theta_2)}\tan\alpha$$

由折射定律

$$n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2$$

代入 $\tan\alpha'$，得

$$\tan\alpha' = \frac{\cos\theta_1\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2\theta_1}+n_1\sin^2\theta_1}{\cos\theta_1\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2\theta_1}-n_1\sin^2\theta_1} \tag{1}$$

必须注意，入射光的两个分量 E_{1S} 和 E_{1P} 是从同一振动分解出来的，有固定的相位关系．经反射后，每个分量的相位改变是0或π，故 E'_{1S} 和 E'_{1P} 之间的相位差为0或π，叠加后所得反射光仍为线偏振光．但在 $n_1 > n_2$，且入射角 θ_1 大于全反射临界角时，将发生全反射，此时两分量因反射而引起的相位改变不再是0或π，而是取由入射角 θ_1 决定的任意，叠加后所得反射光一般为椭圆偏振光（参看本章题8），(1) 式将失去意义．

对于折射光，由菲涅耳公式，其 S 分量和 P 分量为

$$E_{2S} = \frac{2\cos\theta_1 \sin\theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} E_{1S}$$

$$E_{2P} = \frac{2\cos\theta_1 \sin\theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)\cos(\theta_1 - \theta_2)} E_{1P}$$

折射光的振动方位角 α_2 满足

$$\tan\alpha_2 = \frac{E_{2S}}{E_{2P}} = \cos(\theta_1 - \theta_2)\tan\alpha$$

【题5】 一束自然光从空气入射到空气－玻璃界面，入射角 $\theta_1 = 30°$，玻璃折射率 $n = 1.50$. 试求反射光的偏振度．

【分析】 上题（本章题4）入射光是线偏振光．本题入射光则是自然光，但同样可分为 P 分量和 S 分量且振幅相同，并由菲涅耳公式求出它们的振幅反射率．由于反射光的 S 分量和 P 分量振幅不等，所以是部分偏振光，其偏振度容易求出．

【解】 由折射定律，折射角为

$$\theta_2 = \arcsin\left(\frac{\sin\theta_1}{n}\right) = 19.47°$$

由菲涅耳公式，S 分量和 P 分量的振幅反射率分别为

$$r_S = \frac{n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2} = \frac{\cos\theta_1 - n\cos\theta_2}{\cos\theta_1 + n\cos\theta_2} = -0.240$$

$$r_P = \frac{n_2\cos\theta_1 - n_1\cos\theta_2}{n_2\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_2} = \frac{n\cos\theta_1 - \cos\theta_2}{n\cos\theta_1 + \cos\theta_2} = 0.159$$

相应的光强反射率为

$$R_S = r_S^2 = 0.0576, \quad R_P = r_P^2 = 0.0253$$

反射光中 S 分量和 P 分量的光强分别为

$$I_S = R_S I_{iS} = \frac{1}{2}R_S I_i, \quad I_P = R_P I_{iP} = \frac{1}{2}R_P I_i$$

式中 I_{iS} 和 I_{iP} 是入射光 S 分量和 P 分量的光强，I_i 是入射光的总光强．因入射光为自然光，故有 $I_{iS} = I_{iP} = \frac{1}{2}I_i$. 反射光是部分偏振光，其总光强 $I_{总}$ 可以看成是由非偏振成分的光强 $I_{非}$ 和偏振成分的光强 $I_{偏}$ 组合而成，因 S 分量和 P 分量是不相干的，故

$$I_{偏} = I_S - I_P = \frac{1}{2}I_i(R_S - R_P)$$

$$I_{总} = I_{偏} + I_{非} = I_S + I_P = \frac{1}{2}I_i(R_S + R_P)$$

由偏振度的定义，反射光的偏振度为

$$P = \frac{I_{偏}}{I_{偏} + I_{非}} = \frac{\frac{1}{2}I_i(R_S - R_P)}{\frac{1}{2}I_i(R_S + R_P)}$$

$$= \frac{0.0576 - 0.0253}{0.0576 + 0.0253} = 39\%$$

【题6】 自然光从空气到玻璃($n = 1.50$)以布儒斯特角入射．1．试分别计算垂直分量(S 分量)和平行分量(P 分量)的振幅反射率 r，光强反射率 R 和能流反射率$\overline{R}$；以及振幅透射率 t，光强透射率 T 和能流透射率 $\overline{T}$．2．试求折射光的偏振度．

【分析】 通常，自然光在介质界面上反射后，反射光为部分偏振光．但当入射角满足

$$\theta_B = \arctan\frac{n_1}{n_0}$$

时，其中 n_0 和 n_1 分别为入射介质和折射介质的折射率，反射光为垂直于入射面振动的线偏振光，θ_B 称为布儒斯特角或起偏振角．

计算 S 分量和P 分量的$r,R,\overline{R}$ 以及$t,T,\overline{T}$ 的依据当然是菲涅耳公式．由于入射角为布儒斯特角，入射角与折射角之和为$\frac{\pi}{2}$，光强是指平均能流密度即坡印廷矢量的时间平均值，能流则等于光强与光束横截面积的乘积．反射光与入射光在同一介质中，且光束横截面积相等；折射光与入射光在不同介质中，且光束横截面积不等，这是值得注意的．

【解】 1．由菲涅耳公式，S 分量的振幅反射率r_S 和振幅透射率 t_S 分别为

$$r_S = \frac{n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2} = -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$t_S = \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2} = \frac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

P 分量的振幅反射率r_P 和振幅透射率t_P 分别为

$$r_P = \frac{n_2\cos\theta_1 - n_1\cos\theta_2}{n_2\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_2} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$t_P = \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_2\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_2} = \frac{2\cos\theta_1\sin\theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)\cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

式中 $n_1 = 1, n_2 = n = 1.50$，θ_1 为入射角，θ_2 为折射角．因入射角为布儒斯特角，故有

$$\theta_1 = \theta_B = \arctan n = \arctan 1.50 = 56.3°$$

又

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

代入 r_S 和r_P 公式，得

$$r_S = -\frac{\sin(56.3° - 33.7°)}{\sin(56.3° + 33.7°)} = -0.384$$

$$r_P = 0$$

反射光与入射光在同一介质中，且横截面积相同，故 S 分量和 P 分量的光强反射率 R_S 和 R_P 以及能流反射率 $\bar{R}_S$ 和 $\bar{R}_P$ 分别为

$$R_S = |r_S|^2 = 0.148$$

$$R_P = 0$$

$$\bar{R}_S = |r_S|^2 = 0.148$$

$$\bar{R}_P = 0$$

对于折射光，把 θ_1 和 θ_2 代入 t_S 和 t_P，得

$$t_S = \frac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)} = \frac{2\sin 33.7^\circ\cos 56.3^\circ}{\sin\frac{\pi}{2}} = 0.616$$

$$t_P = \frac{2\cos\theta_1\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)} = \frac{2\cos 56.3^\circ\sin 33.7^\circ}{\cos(56.3^\circ - 33.7^\circ)} = 0.667$$

因折射光与入射光在不同介质中，光束横截面积也不同，故光强透射率和能流透射率并不简单地等于振幅透射率的平方．所谓光强是指平均能流密度即坡印廷矢量的时间平均值，为

$$\bar{S} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon r}{\mu_0\mu_r}}E^2$$

式中 E 为电矢量的振幅．因 $\mu_r \approx 1$，真空中光速 $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$，折射率 $n = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r} \approx \sqrt{\varepsilon_r}$，上式可写为

$$\bar{S} = \frac{1}{2c\mu_0}nE^2$$

所以光强与 nE^2 成正比，光强透射率为

$$T = \frac{\bar{S}_2}{\bar{S}_1} = \frac{n_2}{n_1}t^2$$

S 分量和 P 分量的光强透射率分别为

$$T_S = \frac{n_2}{n_1}t_S^2 = nt_S^2 = 0.569$$

$$T_P = \frac{n_2}{n_1}t_P^2 = nt_P^2 = 0.667$$

能流等于光强与光束横截面积的乘积，而折射光束与入射光束横截面积的比值为 $\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}$，故能流透射率为

$$\bar{T} = \frac{\bar{S}_2\cos\theta_2}{\bar{S}_1\cos\theta_1} = \frac{n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1}t^2 = \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}T$$

代入数据，S 分量和 P 分量的能流透射率分别为

$$\bar{T}_S = \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}T_S = 0.853$$

$$\overline{T}_P = \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} T_P = 1$$

P 分量的能流透射率 $\overline{T}_P = 1$ 是预料之中的，因为入射光以布儒斯特角入射($\theta_1 = \theta_B$)时，反射光中不包含 P 分量成份，入射的 P 分量的能量全部透射．

2．折射光为部分偏振光，由偏振度定义，其偏振度为

$$P = \frac{T_P - T_S}{T_P + T_S} = \frac{\overline{T}_P - \overline{T}_S}{\overline{T}_P + \overline{T}_S} = \frac{1 - 0.853}{1 + 0.853} = 0.079$$

【题7】 玻片堆玻璃板的折射率 $n = 1.54$，放置在空气中，自然光以布儒斯特角入射．1．试求通过第一、二、四块玻璃板后的偏振度．2．为了使得从玻片堆射出的偏振光达到 99% 的偏振度，试问至少需要多少块玻璃板？不考虑由吸收和散射等原因引起的光能损失，也不考虑多次反射．

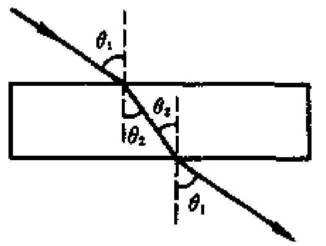
【分析】 设入射自然光的强度为 $2I_0$，则入射光中 S 分量和 P 分量的强度各为 I_0．因入射角为布儒斯特角，P 分量完全不能反射，故通过各板后的偏振光中 P 分量的强度始终为 I_0．利用反射和折射时的菲涅耳公式，可求得通过各板后 S 分量的强度．再按偏振度的定义求偏振度．

【解】 1．入射光以布儒斯特角入射，故入射角为

$$\theta_1 = \arctan n = \arctan 1.54 = 57^\circ$$

由折射定律，玻璃板中的折射角为

$$\theta_2 = \arcsin\left(\frac{\sin 57^\circ}{1.54}\right) = 33^\circ$$



光图 4－7－1

由菲涅耳公式，S 分量通过一个界面的振幅透射率为

$$t_S = \frac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

对每个界面，入射角均为布儒斯特角，故有

$$\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$$

代入

$$t_S = 2\sin\theta_2\cos\theta_1$$

式中 θ_1 和 θ_2 如图所示．把上述一般公式应用到第一块玻璃板的上、下两个界面，振幅透射率分别为

$$t_S^{(1)} = 2\sin\theta_2\cos\theta_1$$
$$t_S^{(2)} = 2\sin\theta_1\cos\theta_2$$

故通过第一块板的总振幅透射率为

$$(t_S)_1 = t_S^{(1)} t_S^{(2)} = 4\sin\theta_2\cos\theta_1\sin\theta_1\cos\theta_2 = 0.8346$$

同理，两块板的总振幅透射率为

$$(t_S)_2 = (t_S)_1^2 = (4\sin\theta_2\cos\theta_1\sin\theta_1\cos\theta_2)^2 = 0.6965$$

四块板的总振幅透射率为

$$(t_S)_4 = (t_S)_1^4 = (4\sin\theta_2\cos\theta_1\sin\theta_1\cos\theta_2)^4 = 0.4852$$

通过第一、二、四块板后，S 分量的光强依次为

$$(I_S)_1 = (t_S)_1^2 I_0 = 0.6965 I_0$$

$$(I_S)_2 = (t_S)_2^2 I_0 = 0.4852 I_0$$
$$(I_S)_4 = (t_S)_4^2 I_0 = 0.2354 I_0$$

前已指出,通过任何板后 P 分量的强度始终保持为 I_0,按偏振度的定义,通过第一、二、四块板后的偏振度依次为

$$P_1 = \frac{I_0 - 0.6965 I_0}{I_0 + 0.6965 I_0} = \frac{1 - 0.6965}{1 + 0.6965} = 17.9\%$$
$$P_2 = \frac{1 - 0.4852}{1 + 0.4852} = 34.7\%$$
$$P_4 = \frac{1 - 0.2354}{1 + 0.2354} = 61.9\%$$

2. 由前,S 分量通过 N 块板的总振幅透射率为

$$(t_S)_N = (t_S)_1^N = (4\sin\theta_2 \cos\theta_1 \sin\theta_1 \cos\theta_2)^N = (0.8346)^N$$

S 分量的相应强度为

$$(I_S)_N = (t_S)_1^{2N} I_0 = (0.8346)^{2N} I_0$$

P 分量的强度仍为 I_0,故通过 N 块板后的偏振度为

$$P_N = \frac{1 - (0.8346)^{2N}}{1 + (0.8346)^{2N}}$$

即

$$(0.8346)^{2N} = \frac{1 - P_N}{1 + P_N}$$

两边取对数,得

$$2N \ln(0.8346) = \ln\frac{1 - P_N}{1 + P_N}$$

即

$$N = \frac{\ln\dfrac{1 - P_N}{1 + P_N}}{2\ln(0.8346)}$$

要求

$$P_N = 0.99$$

代入,得

$$N = \frac{\ln\dfrac{0.01}{1.99}}{2\ln(0.8346)} = 14.6$$

故至少需要 15 块板,才能使从玻片堆射出的偏振光达到 99% 的偏振度.

【题 8】 线偏振光向电介质的界面入射.试证明,在全反射条件下,反射光一般为椭圆偏振光.

【分析】 在全反射条件下,折射角不再具有实数值而是虚数.代入菲涅耳公式算出的 S 分量和 P 分量的振幅反射率都是复数,其模等于 1,表明能量全部反射;其幅角不为零且不等,表明反射前后,S 分量和 P 分量的相位均有所改变,且反射光中 S 分量和 P 分量之间有一定相位差(入射

光为线偏振光，其 S 分量和 P 分量的相位应相同），合成椭圆偏振光．

【解】 设电介质 1,2 的折射率为 $n_1,n_2(n_1>n_2)$，入射角 θ_1 大于全反射的临界角，即

$$\sin\theta_1>\frac{n_2}{n_1}=n$$

由菲涅耳公式，反射光中 S 分量和 P 分量与入射光中相应分量的振幅比为

$$\frac{E'_{S1}}{E_{S1}}=\frac{n_1\cos\theta_1-n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1+n_2\cos\theta_2}=\frac{\cos\theta_1-n\cos\theta_2}{\cos\theta_1+n\cos\theta_2}$$

$$\frac{E'_{P1}}{E_{P1}}=\frac{n_2\cos\theta_1-n_1\cos\theta_2}{n_2\cos\theta_1+n_1\cos\theta_2}=\frac{n\cos\theta_1-\cos\theta_2}{n\cos\theta_1+\cos\theta_2}$$

式中 θ_2 为折射角，在全反射条件下，$\cos\theta_2$ 为虚数，有

$$\cos\theta_2=\sqrt{1-\sin^2\theta_2}=\sqrt{1-\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_1}$$

$$=\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\sin^2\theta_1}=\frac{\mathrm{i}}{n}\sqrt{\sin^2\theta_1-n^2}$$

代入菲涅耳公式，得

$$\frac{E'_{S1}}{E_{S1}}=\frac{\cos\theta_1-\mathrm{i}\sqrt{\sin^2\theta_1-n^2}}{\cos\theta_1+\mathrm{i}\sqrt{\sin^2\theta_1-n^2}}$$

$$\frac{E'_{P1}}{E_{S1}}=\frac{n^2\cos\theta_1-\mathrm{i}\sqrt{\sin^2\theta_1-n^2}}{n^2\cos\theta_1+\mathrm{i}\sqrt{\sin^2\theta_1-n^2}}$$

令

$$\tilde{Z}_S=\cos\theta_1+\mathrm{i}\sqrt{\sin^2\theta_1-n^2}$$

$$\tilde{Z}_P=n^2\cos\theta_1+\mathrm{i}\sqrt{\sin^2\theta_1-n^2}$$

或写成

$$\tilde{Z}_S=|\tilde{Z}_S|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_S},\quad \varphi_S=\arctan\frac{\sqrt{\sin^2\theta_1-n^2}}{\cos\theta_1}$$

$$\tilde{Z}_P=|\tilde{Z}_P|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_P},\quad \varphi_P=\arctan\frac{\sqrt{\sin^2\theta_1-n^2}}{n^2\cos\theta_1}$$

则菲涅耳公式可写成

$$\frac{E'_{S1}}{E_{S1}}=\frac{\tilde{Z}_S^*}{\tilde{Z}_S}=\frac{|\tilde{Z}_S^*|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_S}}{|\tilde{Z}_S|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_S}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\varphi_S}$$

$$\frac{E'_{P1}}{E_{P1}}=\frac{\tilde{Z}_P^*}{\tilde{Z}_P}=\frac{|\tilde{Z}_P^*|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_P}}{|\tilde{Z}_P|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_P}}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\varphi_P}$$

上式表明，在全反射条件下，S 分量和 P 分量的振幅反射率 $\frac{E'_{S1}}{E_{S1}}$ 和 $\frac{E'_{P1}}{E_{P1}}$ 都是复数．其模都等于 1，表明反射光 S 分量和 P 分量的振幅都与入射光相应分量相同，即能量全部反射．其幅角分别为

$-2\varphi_S$ 和 $-2\varphi_P$，表明反射前后 S 分量和 P 分量的相位有了不同的变化．因入射光 S 分量和 P 分量同相位，故反射光中 S 分量和 P 分量的相位差 δ 为

$$\delta = 2(\varphi_P - \varphi_S) = 2\left[\arctan\frac{\sqrt{\sin^2\theta_1 - n^2}}{n^2\cos\theta_1} - \arctan\frac{\sqrt{\sin^2\theta_1 - n^2}}{\cos\theta_1}\right]$$

$$= 2\arctan\left[\frac{\frac{\sqrt{\sin^2\theta_1 - n^2}}{\cos\theta_1}\left(\frac{1}{n^2} - 1\right)}{1 + \frac{\sin^2\theta_1 - n^2}{n^2\cos^2\theta_1}}\right] = 2\arctan\left[\frac{\cos\theta_1\sqrt{\sin^2\theta_1 - n^2}}{\sin^2\theta_1}\right]$$

式中 $n = \frac{n_2}{n_1} < 1$，光从折射率 n_1 的介质射向折射率 n_2 的介质．上式表明，只要入射的线偏振光的方位角 $\alpha \neq 0$ 或 $\frac{\pi}{2}$，即只要入射线偏振光的 S 分量和 P 分量均不为零，则因反射光的 S 分量和 P 分量之间有相位差 δ，故合成的反射光一般为椭圆偏振光．

【题 9】 界面两侧的折射率分别为 n_1 和 n_2．光从折射率为 n_1 的第一介质以入射角 θ_1 入射，经界面反射．定义 S 分量和 P 分量的振幅反射率之比为

$$G = \frac{r_P}{r_S}$$

试证明，第二介质的折射率为

$$n_2 = n_1\sin\theta_1\left[1 + \left(\frac{1-G}{1+G}\right)^2\tan\theta_1\right]^{\frac{1}{2}}$$

【分析】 本题的结果提供了由已知的 n_1，θ_1 以及测定的 G，来求 n_2 的方法．这种方法适用于包括金属在内的各种介质．

【解】 由菲涅耳公式，S 分量和 P 分量的振幅反射率分别为

$$r_S = \frac{n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2}, \quad r_P = \frac{n_2\cos\theta_1 - n_1\cos\theta_2}{n_2\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_2}$$

两者之比为

$$G = \frac{r_P}{r_S} = \frac{(n_2\cos\theta_1 - n_1\cos\theta_2)(n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2)}{(n_2\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_2)(n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2)}$$

即

$$n_2^2\cos\theta_1\cos\theta_2 + n_1n_2(\cos^2\theta_1 - \cos^2\theta_2)\left(\frac{1-G}{1+G}\right) - n_1^2\cos\theta_1\cos\theta_2 = 0 \qquad (1)$$

由折射定律，有

$$\cos\theta_2 = \frac{1}{n_2}\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta_1}$$

代入(1)式，得

$$(n_2^2 - n_1^2)\cos\theta_1\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta_1} + n_1(n_1^2 - n_2^2)\sin^2\theta_1\left(\frac{1-G}{1+G}\right) = 0$$

即

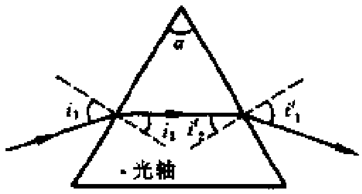
$$\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta_1} = n_1\sin\theta_1\left(\frac{1-G}{1+G}\right)\tan\theta_1$$

故

$$n_2 = n_1\sin\theta_1\left[1 + \left(\frac{1-G}{1+G}\right)^2\tan^2\theta_1\right]^{\frac{1}{2}}$$

已知 n_1 和 θ_1，测出两分量反射率之比 G，即可由上式算出第二介质的折射率 n_2. 这是求 n_2 的一种方法．这种方法也适用于金属介质，对于金属，G 是一个复数，可由此求出金属的复折射率．

【题 10】 如图所示，一石英晶体棱镜的顶角为 60°，光轴与棱镜主截面垂直．钠黄光在最小偏向角条件下入射，用一焦距为 1.00m 的透镜聚焦．试求 o 光和 e 光两谱线的间距．已知 $n_o = 1.544, n_e = 1.553$.



光图 4－10－1

【分析】 在最小偏向角条件下，棱镜内的折射光线与底边平行，并有

$$i_1 = i'_1$$

$$i_2 = i'_2 = \frac{\alpha}{2}$$

如图所示．在题给条件下，o 光与 e 光均遵守通常的折射定律，因而可用折射定律分别计算 o 光和 e 光的 i'_1 角，由其差值即可求出相应的两谱线间距．

【解】 因棱镜对 o 光和 e 光的折射率 n_o 和 n_e 不同，故在满足最小偏向角条件下的 i_1（和 i'_1）角也不同．由折射定律

$$i_{1o} = \arcsin\left(n_o \sin\frac{\alpha}{2}\right) = \arcsin(1.544\times\sin30°) = 50.53°$$

$$i_{1e} = \arcsin\left(n_e \sin\frac{\alpha}{2}\right) = \arcsin(1.553\times\sin30°) = 50.94°$$

对同一入射光，o 光和 e 光不可能同时满足最小偏向角条件，但因 i_{1o} 和 i_{1e} 差别很小，入射角可取 i_{1o} 和 i_{1e} 的平均值，而出射光的角间距近似为

$$\Delta i'_1 \approx i'_{1e} - i'_{1o} = i_{1e} - i_{1o} = 0.41° = 7.16\times10^{-3}\ \text{rad}$$

故经透镜聚焦后，o 光和 e 光两谱线的间距为

$$\Delta x = f\Delta i'_1 = 7.16\ \text{mm}$$

【题 11】 试问用两个透光轴未知的偏振片及一个快轴方向已知的 $\frac{1}{4}$ 波片，怎样确定另一个 $\frac{1}{4}$ 波片的快轴和慢轴．

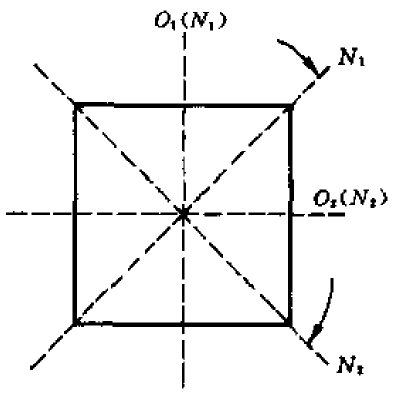
【分析与解】 步骤如下．

1．先使两偏振片处在消光位置，这时两偏振片的透光轴 N_1 和 N_2 的方向相互垂直．

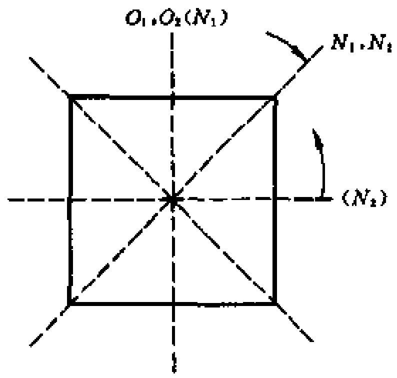
2．保持两偏振片的相对位置不变，在两偏振片之间插入快轴方向 O_1 已知的 $\frac{1}{4}$ 波片．（对于波长为 λ 的单色光，能使 o 光和 e 光产生 $\frac{\lambda}{4}$ 的光程差的晶片叫做该单色光的 $\frac{1}{4}$ 波片．光程差的产生是由于 o 光和 e 光在晶片中的传播速度不同即相应的折射率不同，传播较快的那种振动的方

向就是波片的快轴，与之垂直的是慢轴．）从偏振片（起偏器）射出的是沿 N_1 方向振动的线偏振光，当 N_1 与$\frac{1}{4}$ 波片快轴方向的夹角不等于 0 或$\frac{\pi}{2}$ 时，经$\frac{1}{4}$ 波片射出的一般是椭圆偏振光，再经第二个偏振片（检偏器）射出的是沿 N_2 方向振动的线偏振光，不消光．仅当 N_1 与快轴垂直或平行时，透过$\frac{1}{4}$ 波片的仍是沿 N_1 振动的线偏振光，它经检偏器后消光．因此，把$\frac{1}{4}$ 波片放在两偏振片之间，转动$\frac{1}{4}$ 波片，使重新达到消光，此时$\frac{1}{4}$ 波片的快轴与 N_1 平行或垂直．

3．再插入待检的$\frac{1}{4}$ 波片，旋转至重新消光（两偏振片及上述已知快轴方向的$\frac{1}{4}$ 波片保持原先的位置不动）．此时，两$\frac{1}{4}$ 波片必定是快轴与快轴相重合，或者是快轴与慢轴相重合．前者构成$\frac{1}{2}$ 波片，后者构成零波片．只需判断属于哪种情形，就可由已知$\frac{1}{4}$ 波片的快轴方向确定未知$\frac{1}{4}$ 波片的快、慢轴方向．



光图 4－11－1



光图 4－11－2

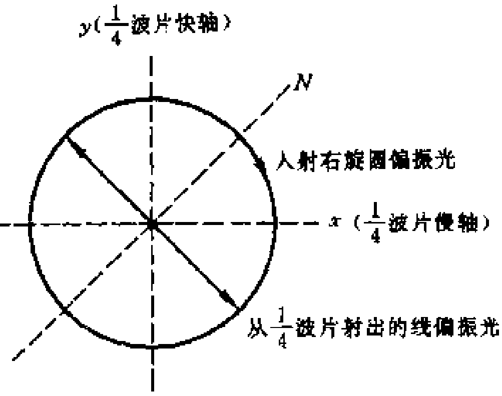
4．为此，将起偏器的透光轴 N_1 顺时针旋转 45° 角，若两$\frac{1}{4}$ 波片构成零波片，则从起偏器 N_1 射出的线偏振光经零波片后是振动方向不变的线偏振光（即沿 N_1 方向振动），将检偏器的透光轴 N_2 也顺时针转 45° 角后，可重新消光，如光图 4－11－1 所示．光图 4－11－1 中 O_1 和 O_2 表示两$\frac{1}{4}$ 波片的快轴方向相互垂直，(N_1) 和 (N_2) 是起偏器和检偏器原先的透光方向，N_1 和 N_2 则是分别顺时针旋转 45° 后的透光轴方向．

若两个$\frac{1}{4}$ 波片构成了$\frac{1}{2}$ 波片，如光图 4－11－2 所示，则从起偏器 N_1 射出的线偏振光经两个$\frac{1}{4}$ 波片构成的$\frac{1}{2}$ 波片，其振动方向要转过 90° 角，故检偏器的透光轴 N_2 需逆时针旋转 45° 角才能达到消光．光图 4－11－2 中的 O_1 和 O_2 是两个$\frac{1}{4}$ 波片的快轴方向，两者重合．(N_1) 和 (N_2) 是起偏器和检偏器原先的透光轴方向，N_1 是起偏器顺时针旋转 45° 后的透光轴方向，N_2 是检偏器逆时针旋转 45° 后的透光轴方向．

由此，待测的$\frac{1}{4}$ 波片的快轴或慢轴方向可以确定．

【题12】 已知入射光为单色右旋圆偏振光．试利用一透光轴已知的偏振片确定由方解石制成的$\frac{1}{4}$波片的光轴方向．

【分析与解】 方解石波片的光轴方向即快轴方向（何谓快轴慢轴请参看上题）．若取方解石制成的$\frac{1}{4}$波片的快轴为y轴，慢轴为x轴，则入射的右旋圆偏振光可分解为x和y两个分量．y分量比x分量超前$\frac{\pi}{2}$，经$\frac{1}{4}$波片后，y分量又比x分量超前$\frac{\pi}{2}$，总的相位差为π，故入射的右旋圆偏振光经$\frac{1}{4}$波片后射出的是在图中第二和第四象限振动的线偏振光．



光图 4－12－1

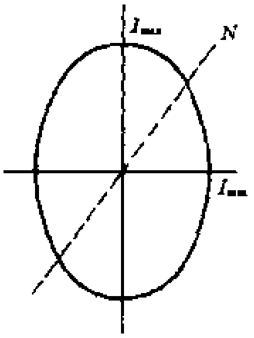
1．令入射右旋圆偏振光先经$\frac{1}{4}$波片，再经偏振片．

2．旋转偏振片，当偏振片的透光轴N与经$\frac{1}{4}$波片射出的线偏振光的振动方向垂直时，就达到消光．

3．达到消光时，偏振片透光轴N的位置如图所示，把N逆时针转45°角，即得方解石波片的光轴方向（亦即图中y轴的方向）．

【题13】 通过尼科耳棱镜观察部分偏振光．当尼科耳棱镜从光强为极大的位置转过60°角时，光强减为一半．试求入射的单色部分偏振光的偏振度．

【分析与解】 由于入射光是部分偏振光，旋转尼科耳棱镜时，可以观察到最大光强和最小光强，相应的尼科耳棱镜的主截面N应处在两个互相垂直的位置上，如图所示．最大光强和最小光强分别表为I_{max}和I_{min}．



光图 4－13－1

当N从最大光强的位置转过任意α角时，在该位置观察到的光强为

$$I(\alpha)=I_{max}\cos^2\alpha+I_{min}\sin^2\alpha$$

由题设，当$\alpha=60°$时，有

$$I(\alpha=60°)=\frac{1}{4}I_{max}+\frac{3}{4}I_{min}=\frac{1}{2}I_{max}$$

故

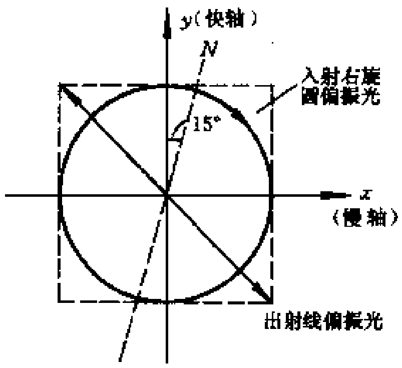
$$I_{max}=3I_{min}$$

由偏振度的定义，入射部分偏振光的偏振度为

$$P=\frac{I_{max}-I_{min}}{I_{max}+I_{min}}=\frac{1}{2}=50\%$$

【题14】 一强度为I_0的右旋圆偏振光垂直通过$\frac{1}{4}$波片，然后通过一尼科耳棱镜．尼科耳棱镜的

主截面 N 在$\frac{1}{4}$波片的快轴方向右旋15°处．试求最后射出的光的强度．



光图 4－14－1

【分析与解】 如图，取$\frac{1}{4}$波片的快轴为 y 轴，慢轴为 x 轴．把入射的右旋圆偏振光分解为沿 y 方向和 x 方向的两个线振动，则入射前 y 分量比 x 分量的相位超前，相位差为 $\Delta\varphi' = \frac{\pi}{2}$，经$\frac{1}{4}$波片后，$y$ 分量又比 x 分量超前 $\Delta\varphi'' = \frac{\pi}{2}$，故从$\frac{1}{4}$波片射出后两个垂直振动之间总的相位差为

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi' + \Delta\varphi'' = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

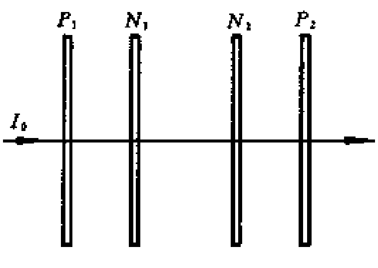
因此，从$\frac{1}{4}$波片射出的是线偏振光，其振动方向与 y 轴夹45°角，在第二象限和第四象限，振幅为 $\sqrt{I_0}$，如图所示．由马吕定律，该线偏振光透过尼科耳棱镜的振幅为

$$\sqrt{I_0}\cos(45° + 15°) = \sqrt{I_0}\cos 60° = \frac{1}{2}\sqrt{I_0}$$

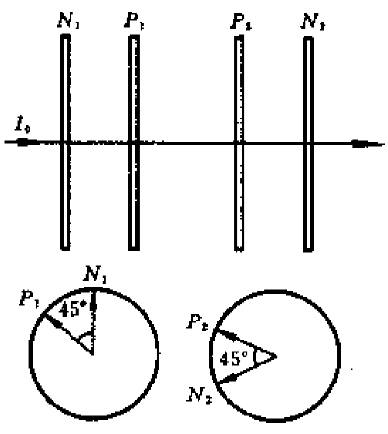
故最后射出的光强为

$$I = \frac{1}{4}I_0$$

【题15】 偏振片和$\frac{1}{4}$波片可组成一个圆偏振器．自然光通过偏振片后成为线偏振光，若其振动方向与$\frac{1}{4}$波片的光轴方向夹45°角，则从$\frac{1}{4}$波片射出的是圆偏振光．今有两组同样的圆偏振器，偏振片分别用 N_1 和 N_2 表示，$\frac{1}{4}$波片用 P_1 和 P_2 表示．两组圆偏振器的相对取向夹一任意角 θ，并按以下两种方式排列：1．P_1, N_1, N_2, P_2；2．N_1, P_1, P_2, N_2，以自然光入射，光强为 I_0，试求在上述两种情况下，透射光的光强．



光图 4－15－1



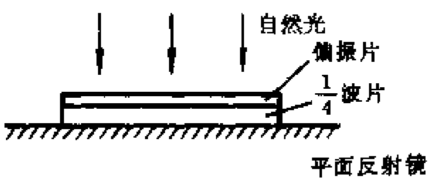
光图 4－15－2

【分析与解】 1. 如光图 4 - 15 - 1 所示，自然光经$\frac{1}{4}$波片 P_1 后光强不变，仍为 I_0，经偏振片 N_1 后为线偏振光，光强变为$\frac{1}{2}I_0$. 因 N_1 与 N_2 的透光轴夹角 θ，由马吕定律，从 N_2 透出的线偏振光的光强为$\frac{1}{2}I_0\cos^2\theta$，再经$\frac{1}{4}$波片 P_2 后为椭圆偏振光，光强仍为$\frac{I_0}{2}\cos^2\theta$.

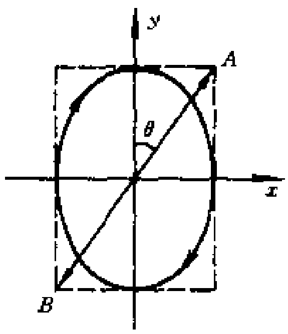
2. 如光图 4 - 15 - 2 所示，自然光入射，光强为 I_0，经由 N_1 和 P_1 构成的第一组圆偏振器后变为圆偏振光，光强为$\frac{1}{2}I_0$. 该圆偏振光经$\frac{1}{4}$波片 P_2 后，光强仍为$\frac{1}{2}I_0$，但变成线偏振光，其振动方向刚好与偏振片 N_2 的透光轴一致，所以射出的线偏振光的光强不变，仍为$\frac{1}{2}I_0$，与两组圆偏振器之间的夹角 θ 无关．

【题16】 如光图 4 - 16 - 1 所示，在平面反射镜上相继地放置一个$\frac{1}{4}$波片和一个偏振片，偏振片的透光轴与$\frac{1}{4}$波片的光轴夹角为 θ. 光强为 I_0 的自然光垂直入射．试求反射光经上述偏振系统后的光强．

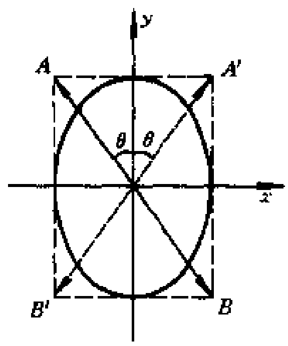
【分析与解】 迎着入射光看如光图 4 - 16 - 2 所示．自然光经偏振片后变成线偏振光，振动方向为 AB. 经$\frac{1}{4}$波片后变成椭圆偏振光．若 y 轴为$\frac{1}{4}$波片的快轴方向，则为右旋椭圆偏振光，y 分量比 x 分量相位超前$\frac{\pi}{2}$.



光图 4 - 16 - 1



光图 4 - 16 - 2



光图 4 - 16 - 3

迎着反射光看如光图 4 - 16 - 3 所示．入射到平面反射镜的右旋椭圆偏振光反射后变成左旋椭圆偏振光，x 分量比 y 分量相位超前$\frac{\pi}{2}$. 该左旋椭圆偏振光经$\frac{1}{4}$波片后，y 分量比 x 分量相位超前$\frac{\pi}{2}$，故 x 分量和 y 分量的总相位差为零，合成为线偏振光，振动方向为 $A'B'$，与偏振片的透光轴 AB 成 2θ 角．由马吕定律，反射光经偏振系统后的光强为$\frac{1}{2}I_0\cos^2 2\theta$.

当 $\theta = 45°$ 时，反射光经偏振系统后的光强为零，即从平面镜反射的光不能通过该偏振系统．实用的所谓隔离器就是利用这一原理制成的．在使用线偏振的激光器时，为了避免外界反射光重新进入谐振腔而引起干扰，常在激光器的输出端放置一个$\frac{1}{4}$波片，波片的光轴与线偏振

方向夹 45°角，这样，所产生的椭圆偏振激光经外界反射面反射后不能重新进入谐振腔．

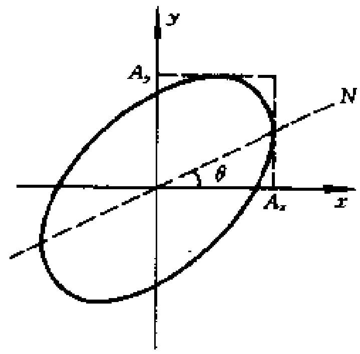
【题 17】 用一偏振片检验椭圆偏振光时，透过偏振片的光强将随偏振片的旋转角度变化．对于已设定的坐标系统，已知合成为椭圆偏振光的两个垂直振动之间的相位差为 δ.

1. 试导出透射光强随偏振片旋转角度变化的普遍公式．2. 试确定椭圆偏振光长、短轴的方位以及相应的透射光强的极大值和极小值．

【分析】 对设定的 xy 坐标系，椭圆偏振光可分解为 x 分量和 y 分量，其间的相位差 δ 已知．透过偏振片的振动是 x 分量和 y 分量在偏振片透光轴 N 方向的投影的叠加，参与叠加的两个投影的振幅与 N 和 x 轴（或 y 轴）之间的夹角 θ 有关，其间的相位差仍为 δ. 于是，经偏振片后振动的振幅即光强 I 可知，显然它是 θ 的函数，表为 $I(\theta)$，当 $I = I_{max}$ 时，相应的 θ_{max} 表示椭圆偏振光的长轴方向，同样，相应于 I_{min} 的 θ_{min} 则表示短轴方向．

【解】 如图所示，把椭圆偏振光按设定的 xy 坐标分解为 x 方向和 y 方向的两个振动，其间的相位差为 δ，它们的电矢量可分别表为

$$E_x = A_x\cos\omega t$$
$$E_y = A_y\cos(\omega t + \delta)$$



光图 4－17－1

设偏振片的透光轴 N 与 x 轴的夹角为 θ，则上述两个振动在 N 方向的投影为

$$E_{xN} = A_x\cos\theta\cos\omega t$$
$$E_{yN} = A_y\sin\theta\cos(\omega t + \delta)$$

透过偏振片的振动是上述两个分量的叠加，为

$$E_N = E_{xN} + E_{yN} = A_x\cos\theta\cos\omega t + A_y\sin\theta\cos(\omega t - \delta)$$
$$= (A_x\cos\theta + A_y\sin\theta\cos\delta)\cos\omega t - A_y\sin\theta\sin\delta\sin\omega t$$

令

$$\begin{cases} A_N\cos\varphi = A_x\cos\theta + A_y\sin\theta\cos\delta \\ A_N\sin\varphi = A_y\sin\theta\sin\delta \end{cases} \tag{1}$$

则

$$E_N = A_N\cos\omega t\cos\varphi - A_N\sin\omega t\sin\varphi = A_N\cos(\omega t + \varphi)$$

因此，通过偏振片的光强为

$$I(\theta) = A_N^2 = (A_x\cos\theta + A_y\sin\theta\cos\delta)^2 + (A_y\sin\theta\sin\delta)^2$$
$$= A_x^2\cos^2\theta + A_y^2\sin^2\theta + 2A_xA_y\cos\theta\sin\theta\cos\delta$$
$$= I_x\cos^2\theta + I_y\sin^2\theta + \sqrt{I_xI_y}\sin2\theta\cos\delta \tag{2}$$

式中

$$I_x = A_x^2$$
$$I_y = A_y^2$$

分别是偏振片透光轴 N 与 x 轴和 y 轴一致时透过偏振片的光强．利用三角公式

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos2\theta)$$

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$$

可把 $I(\theta)$ 表为

$$I(\theta) = \frac{1}{2}I_x(1+\cos 2\theta) + \frac{1}{2}I_y(1-\cos 2\theta) + \sqrt{I_x I_y}\sin 2\theta\cos\delta$$

$$= \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y)\cos 2\theta + \sqrt{I_x I_y}\cos\delta\sin 2\theta$$

这就是椭圆偏振光透过偏振片后的光强 $I(\theta)$ 随 θ 变化的公式．令

$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{2}(I_x + I_y) \\ I_2 = \frac{1}{2}(I_x - I_y) \\ I_3 = \sqrt{I_x I_y}\cos\delta \end{cases}$$

则

$$I(\theta) = I_1 + I_2\cos 2\theta + I_3\sin 2\theta = I_1 + \sqrt{I_2^2 + I_3^2}\cos(2\theta - \alpha)$$

式中

$$\alpha = \arctan\frac{I_3}{I_2} \tag{3}$$

或

$$\alpha = \arccos\frac{I_2}{\sqrt{I_2^2 + I_3^2}}$$

2．当 $\theta = \theta_{max} = \frac{\alpha}{2}$ 时，$I(\theta)$ 取极大值，即

$$I_{max} = I_1 + \sqrt{I_2^2 + I_3^2} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_x I_y\cos^2\delta}$$

$$= \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}\sqrt{I_x^2 + I_y^2 + 2I_x I_y\cos 2\delta} \tag{4}$$

当 $\theta = \theta_{min} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}$ 时，$I(\theta)$ 取极小值，即

$$I_{min} = I_1 - \sqrt{I_2^2 + I_3^2} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}\sqrt{I_x^2 + I_y^2 + 2I_x I_y\cos 2\delta} \tag{5}$$

θ_{max} 和 θ_{min} 分别表示入射椭圆偏振光的长轴和短轴的方向．

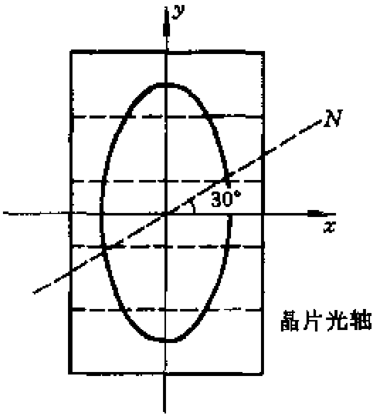
特殊情形．当 $\delta = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ 时，$I_3 = 0$，由(3)式，$\alpha = 0$ 或 π，从而 θ_{max} 及 θ_{min} 为 0 或 $\frac{\pi}{2}$．即在此特殊情形，椭圆偏振光的长轴或短轴与 x 轴或 y 轴重合．换言之，此时椭圆偏振光在 xy 坐标系中是正的椭圆而不是斜的椭圆．

【题 18】 如光图4－18－1和光图4－18－2所示，入射的椭圆偏振光的强度为 I_0，椭圆的长短轴之比为2:1，相继地通过晶片C和偏振片N．晶片由负晶体制成，其光轴平行于表面，并与椭圆的短轴一致，o光和e光通过晶片后产生 $\frac{\pi}{3}$ 的相位差．以晶片的光轴为 x 轴，偏振片透光轴N与

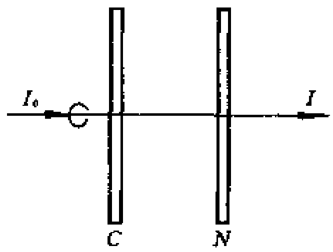
x 轴的夹角为 30°.

1. 若入射光为右旋椭圆偏振光，试求出射光强 I. 当转动偏振片时，试问透过的最大和最小光强各为多少?各在什么方位? 2. 若入射光为左旋椭圆偏振光，试问结果如何?

【分析】 对于如光图 4－18－1 的 xy 坐标，入射椭圆偏振光是正椭圆，其 x 分量和 y 分量的相位差可知，经晶片后附加的相位差已给定，于是透过晶片后的总相位差亦可知．由此可确定透过晶片后光的偏振结构，从而可得出通过偏振片后的光强．



光图 4－18－1



光图 4－18－2

【解】 1. 对如光图 4－18－1 的 xy 坐标系，入射的椭圆偏振光是正椭圆，即其长短轴与坐标轴一致．因

$$I_0 = I_x + I_y$$

$$\frac{I_y}{I_x} = 4$$

故

$$I_x = \frac{1}{5}I_0, \quad I_y = \frac{4}{5}I_0$$

因入射光是右旋椭圆偏振光，y 分量比 x 分量超前$\frac{\pi}{2}$，又因晶片是负晶体，由题设，通过晶片使 x 分量比 y 分量超前$\frac{\pi}{3}$，所以从晶片透出后的总相位差为

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

即从晶片透出的是斜的椭圆偏振光，其长轴在第一象限和第三象限．

通过偏振片后的光强 $I(\theta)$ 可利用上题(本章题 17) 的(2) 式求得，为

$$I(\theta) = I_x\cos^2\theta + I_y\sin^2\theta + \sqrt{I_xI_y}\sin2\theta\cos\delta$$

现在，$\theta = 30°$，$\delta = \frac{\pi}{3}$，$I_x = \frac{1}{5}I_0$，$I_y = \frac{4}{5}I_0$，代入，得

$$I(30°) = \left(\frac{3}{20} + \frac{4}{20} + \frac{6}{20}\right)I_0 = \frac{13}{20}I_0$$

转动偏振片，透过偏振片的最大光强和最小光强可利用上题的(4) 式和(5) 式求得，为

$$I_{max}=\frac{1}{2}(I_x+I_y)+\frac{1}{2}\sqrt{I_x^2+I_y^2+2I_xI_y\cos2\delta}$$

$$=\frac{I_0}{2}+\frac{I_0}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2+2\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}\times\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{5+\sqrt{21}}{10}I_0=0.96I_0$$

$$I_{min}=\frac{1}{2}(I_x+I_y)-\frac{1}{2}\sqrt{I_x^2+I_y^2+2I_xI_y\cos2\delta}$$

$$=\frac{5-\sqrt{21}}{10}I_0=0.04I_0$$

由上题，当透射光强为 I_{max} 和 I_{min} 时，偏振片透光轴的方位角 θ_{max} 和 θ_{min} 分别为

$$\theta_{max}=\frac{\alpha}{2}$$

$$\theta_{min}=\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}$$

式中的 α 由上题(3)式给出，为

$$\alpha=\arccos\frac{I_2}{\sqrt{I_2^2+I_3^2}}=\arccos\left[\frac{\frac{1}{2}(I_x-I_y)}{\sqrt{\frac{1}{4}(I_x-I_y)^2+I_xI_y\cos^2\delta}}\right]$$

$$=\arccos\left[\frac{\left(\frac{1}{5}-\frac{4}{5}\right)}{\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}\cos^2 30^\circ}}\right]=\arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{21}}\right)=130.89^\circ$$

其中因 $I_2<0, I_3>0$，所以 $\tan\alpha<0, \cos\alpha<0$，故 α 应在第二象限取值．因此，极大值的方位角（偏振光透光轴与 x 轴的夹角）为

$$\theta_{max}=\frac{\alpha}{2}=65.45^\circ$$

极小值的方位角为

$$\theta_{min}=\frac{\alpha}{2}+90^\circ=155.45^\circ$$

2．当入射光为左旋椭圆偏振光时，有

$$\delta=-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=-\frac{5}{6}\pi,\quad I(30^\circ)=\frac{1}{20}I_0$$

可见，左旋椭圆偏振光入射时的 $I(30^\circ)=\frac{I_0}{20}$ 与右旋椭圆偏振光入射时的 $I(30^\circ)=\frac{13}{20}I_0$ 不同．这是很合理的，因左旋椭圆偏振光入射时，$\delta=-\frac{5}{6}\pi$，从晶片透出的光是在第二象限和第四象限中的斜的椭圆偏振光．而左旋椭圆偏振光入射时，转动偏振片，透过偏振片的光强最大值 I_{max} 和最小值 I_{min} 应与右旋椭圆偏振光入射时相同．

为求左旋椭圆偏振光入射时的 θ_{max} 和 θ_{min}，仍用上题的公式．但应注意，现在 $I_2<0, I_3<0$（因 $\cos\delta<0$），故 $\tan\alpha>0, \cos\alpha<0$，所以 α 应在第三象限取值，为

$$\alpha = 180^\circ + \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{21}}\right) = 229.1^\circ$$

于是

$$\theta_{max} = \frac{\alpha}{2} = 114.6^\circ, \quad \theta_{min} = \frac{\alpha}{2} + 90^\circ = 204.6^\circ$$

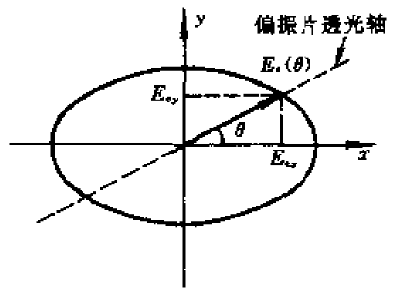
【题 19】 单色部分椭圆偏振光沿 z 方向传播，借助于一偏振片作检验．当偏振片的透光轴与 x 方向一致时，透射强度最大，其值为 $1.5I_0$；当透光轴与 y 方向一致时，透射强度最小，其值为 I_0.

1．试求透光轴与 x 轴夹任意角 θ 时的透射强度．2．令入射光束先通过一个 $\frac{1}{4}$ 波片，该 $\frac{1}{4}$ 波片的光轴与 x 轴或 y 轴一致．发现当偏振片的透光轴与 x 轴夹 30° 角时，透射的强度最大．试求此最大强度，并求入射光中非偏振成分的比例．

【分析】 部分椭圆偏振光由椭圆偏振光与非偏振光组成．非偏振光经偏振片后的强度 I_u 与偏振片透光轴的方位无关，为恒定值．椭圆偏振光经偏振片后的强度则与偏振片透光轴方位有关，为 $I_e(\theta)$．由题设，x 轴和 y 轴应分别是椭圆振动的长轴和短轴，于是 $I_e(\theta)$ 可求．透射光强度 $I(\theta)$ 应为 I_u 和 $I_e(\theta)$ 之和，第 1 问可解．

椭圆偏振光 x 分量和 y 分量之间的相位差为 $\frac{\pi}{2}$，当 $\frac{1}{4}$ 波片的光轴与 x 轴或 y 轴一致时，椭圆偏振光经 $\frac{1}{4}$ 波片后两分量应附加 $\frac{\pi}{2}$ 相位差，即成为线偏振光．当偏振片透光轴与该线偏振光振动方向相同时，透射强度最大（非偏振光经 $\frac{1}{4}$ 波片后仍为非偏振光）．于是第 2 问可解．

【解】 部分椭圆偏振光由椭圆偏振光与非偏振光组成．设非偏振光经偏振片后的强度为 I_u，椭圆偏振光经偏振片后的强度为 $I_e(\theta)$．取 x 轴沿椭圆长轴，y 轴沿椭圆短轴，θ 是偏振片透光轴与 x 轴的夹角，如图所示．故透过偏振片后的总光强为



光图 4－19－1

$$I(\theta) = I_u + I_e(\theta)$$

式中 I_u 与 θ 无关．设椭圆偏振光透过偏振片的电矢量为 $E_e(\theta)$，它的 x 分量和 y 分量为 E_{ex} 和 E_{ey}，因两分量在透光轴上的投影为 $E_{ex}\cos\theta$ 和 $E_{ey}\sin\theta$，故

$$E_e^2(\theta) = E_{ex}^2\cos^2\theta + E_{ey}^2\sin^2\theta$$

即椭圆偏振光透过偏振片后的光强为

$$I_e(\theta) = E_e^2\theta = E_{ex}^2\cos^2\theta + E_{ey}^2\sin^2\theta = I_{ex}\cos^2\theta + I_{ey}\sin^2\theta$$

所以，通过偏振片后的总光强为

$$I(\theta) = I_u + I_e(\theta) = I_u + I_{ex}\cos^2\theta + I_{ey}\sin^2\theta = (I_u + I_{ex})\cos^2\theta + (I_u + I_{ey})\sin^2\theta$$

由题设，$\theta = 0$ 时，$I(0^\circ) = 1.5I_0$；$\theta = 90^\circ$ 时，$I(90^\circ) = I_0$，故有

$$\begin{cases} 1.5I_0 = I_u + I_{ex} \\ I_0 = I_u + I_{ey} \end{cases} \tag{1}$$

把(1)式代入上式，得

$$I(\theta)=1.5I_0\cos^2\theta+I_0\sin^2\theta$$

这就是当偏振片透光轴与 x 轴夹角为 θ 时，部分椭圆偏振光经偏振片的透射强度．

2．由题设，椭圆偏振光的长轴和短轴分别是 x 轴和 y 轴，其 x 分量与 y 分量之间的相位差为 $\frac{\pi}{2}$，经 $\frac{1}{4}$ 波片后附加 $\frac{\pi}{2}$ 相位差，成为线偏振光．由题设，此线偏振光的振动方向与 x 轴夹 30° 角，故其 x 分量与 y 分量之比为

$$\frac{E_{ey}}{E_{ex}}=\sqrt{\frac{I_{ey}}{I_{ex}}}=\tan30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

即

$$\frac{I_{ey}}{I_{ex}}=\frac{1}{3}\tag{2}$$

椭圆偏振光两分量的强度与它经 $\frac{1}{4}$ 波片成为线偏振光后的两分量的强度是一致的．故(1)式和(2)式中的 I_{ex} 和 I_{ey} 应分别相同，解出

$$I_{ex}=0.75I_0$$
$$I_{ey}=0.25I_0$$
$$I_u=0.75I_0$$

当偏振片透光轴与 x 轴夹 30° 角时透射强度最大，这表明透光轴与线偏振光振动方向相同，全部透过．因此上述 I_{ex} 和 I_{ey} 也就是椭圆偏振光经 $\frac{1}{4}$ 波片再经偏振片后光强的两个分量．于是，经偏振片后总光强的最大值为

$$I_{max}=I_{ex}+I_{ey}+I_u=1.75I_0$$

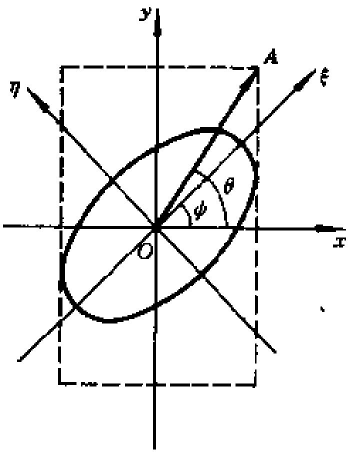
人射的部分椭圆偏振光中非偏振光的光强为 $2I_u=1.5I_0$，总光强为 $1.5I_0+I_0=2.5I_0$．故非偏振成分所占比例为

$$\frac{1.5I_0}{2.5I_0}=60\%$$

【题 20】 线偏振光垂直入射到光轴平行于表面的晶片上，其振动方向与晶片光轴方向之间的夹角为 θ．设 o 光和 e 光通过晶片后产生的相位差为 δ，则从晶片射出的光一般为椭圆偏振光．

1．试导出决定该椭圆偏振光椭圆长轴方位的公式．2．试导出椭圆长短轴之比的公式．

【分析】 把线偏振光分解为平行和垂直晶片光轴的两个分量，它们经晶片后有 δ 相位差，合成斜的椭圆偏振光，其长轴与晶片光轴夹 ψ 角．本题求的是 $\psi(\theta,\delta)$ 以及 $\frac{a}{b}(\theta,\delta)$（$a$ 和 b 分别是椭圆的长轴和短轴）．为此，可将椭圆按其长轴和短轴分解为两个分量，其间的相位差为 $\frac{\pi}{2}$．利用几何关系找出椭圆两种表述的关系，即可求解．



光图 4－20－1

【解】 1. 如图所示，入射的线偏振光沿 OA 方向振动，振幅为 A. 晶片光轴方向为 x 轴，y 轴与光轴垂直．图中的椭圆是从晶片射出的椭圆偏振光，它在 Oxy 坐标中是斜椭圆．另取直角坐标 $O\xi\eta$，ξ 轴和 η 轴分别与椭圆的长轴和短轴重合，故在 $O\xi\eta$ 坐标中是正椭圆．

设入射线偏振光的振幅为 A，它的 x 分量和 y 分量的振幅分别为

$$\begin{cases} A_x = A\cos\theta \\ A_y = A\sin\theta \end{cases} \tag{1}$$

经晶片后，y 分量比 x 分量超前的相位为 δ. 于是两个振动可分别表为

$$\begin{cases} E_x = A_x\cos\omega t \\ E_y = A_y\cos(\omega t+\delta) \end{cases}$$

合成斜椭圆，椭圆长轴与晶片光轴(即 x 轴)夹 ψ 角．

在 $O\xi\eta$ 坐标中，该椭圆为正椭圆，它的 ξ 分量和 η 分量可表为

$$\begin{cases} E_\xi = E_x\cos\psi + E_y\sin\psi \\ \quad = A_x\cos\psi\cos\omega t + A_y\sin\psi\cos(\omega t+\delta) \\ \quad = (A_x\cos\psi + A_y\sin\psi\cos\delta)\cos\omega t - A_y\sin\psi\sin\delta\sin\omega t \\ E_\eta = -E_x\sin\psi + E_y\cos\psi \\ \quad = -A_x\sin\psi\cos\omega t + A_y\cos\psi\cos(\omega t+\delta) \\ \quad = (-A_x\sin\psi + A_y\cos\psi\cos\delta)\cos\omega t - A_y\cos\psi\sin\delta\sin\omega t \end{cases}$$

令

$$\begin{cases} a\cos\varphi_\xi = A_x\cos\psi + A_y\sin\psi\cos\delta \\ a\sin\varphi_\xi = A_y\sin\psi\sin\delta \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} b\cos\varphi_\eta = -A_x\sin\psi + A_y\cos\psi\cos\delta \\ b\sin\varphi_\eta = A_y\cos\psi\sin\delta \end{cases} \tag{3}$$

则 E_ξ 和 E_η 可写为

$$\begin{cases} E_\xi = a\cos(\omega t+\varphi_\xi) \\ E_\eta = b\cos(\omega t+\varphi_\eta) \end{cases}$$

式中的 a 和 b 分别由(2)式和(3)式确定，它们分别是椭圆的半长轴和半短轴．式中的 φ_ξ 和 φ_η 分别为

$$\begin{cases} \varphi_\xi = \arctan\dfrac{A_y\sin\psi\sin\delta}{A_x\cos\psi + A_y\sin\psi\cos\delta} \\ \varphi_\eta = \arctan\dfrac{A_y\cos\psi\sin\delta}{-A_x\sin\psi + A_y\cos\psi\cos\delta} \end{cases}$$

因在 $O\xi\eta$ 直角坐标中，椭圆为正椭圆，故 ξ 分量和 η 分量的相位差应为

$$\varphi_\eta - \varphi_\xi = \pm\frac{\pi}{2}$$

式中正号表示右旋，负号表示左旋．令

$$\begin{cases} x = \dfrac{A_y \sin\psi \sin\delta}{A_x \cos\psi + A_y \sin\psi\cos\delta} \\ y = \dfrac{A_y \cos\psi \sin\delta}{-A_x \sin\psi + A_y \cos\psi\cos\delta} \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} \varphi_\xi = \arctan x \\ \varphi_\eta = \arctan y \end{cases}$$

利用三角公式及$(\varphi_\eta - \varphi_\xi) = \pm \dfrac{\pi}{2}$,得

$$\arctan y - \arctan x = \arctan \frac{y - x}{1 + xy} = \pm \frac{\pi}{2}$$

为满足上式,必有

$$1 + xy = 0$$

把 x 和 y 的表达式代入,得

$$\sin\psi\cos\psi(A_y^2 - A_x^2) + A_x A_y \cos2\psi\cos\delta = 0$$

把(1)式代入上式,得

$$\sin\psi\cos\psi\cos2\theta = \sin\theta\cos\theta\cos2\psi\cos\delta$$

即

$$\sin2\psi\cos2\theta = \sin2\theta\cos2\psi\cos\delta$$

故椭圆长轴(ξ 轴)与晶片光轴(x 轴)的夹角 ψ 满足

$$\tan2\psi = \frac{\sin2\theta}{\cos2\theta}\cos\delta = \tan2\theta\cos\delta$$

上述结果的几种特殊情形如下．

(a)若 $\theta = 45°$,则 $\tan2\theta \to \infty$,若 $\cos\delta \neq 0$,则 $\psi = \pm 45°$(正号和负号由 $\cos\delta$ 的正、负决定).此时椭圆长轴方向与入射线偏振光的振动方向一致或垂直．

(b)若晶片为$\dfrac{1}{4}$波片,则 $\cos\delta = 0$,即 $\psi = 0$,此时从晶片射出的椭圆偏振光在 Oxy 坐标中也是正椭圆．若同时有 $\theta = 45°$,则 $\tan2\theta \to \infty$,$\tan2\psi \to \infty$,无意义．此时从晶片射出的是圆偏振光,无所谓长轴或短轴．

(c)若晶片为$\dfrac{1}{2}$波片,则 $\cos\delta = -1$,椭圆偏振光退化为线偏振光,且 $\psi = -\theta$,此时经晶片射出的是线偏振光,其振动方向相对入射线偏振光的振动方向转过 2θ 角．

2. 由上述(2)式和(3)式,椭圆偏振光的半长轴 a 和半短轴 b 满足

$$\begin{cases} a^2 = A_x^2\cos^2\psi + A_y^2\sin^2\psi + 2A_xA_y\sin\psi\cos\psi\cos\delta \\ b^2 = A_x^2\sin^2\psi + A_y^2\cos^2\psi - 2A_xA_y\sin\psi\cos\psi\cos\delta \end{cases}$$

两式相加,得

$$a^2 + b^2 = A_x^2 + A_y^2 = A^2 \tag{4}$$

此结果表明能量守恒,即入射的线偏振光的光强等于出射的椭圆偏振光的光强．

因 φ_η 与 φ_ξ 之差为 $\pm\dfrac{\pi}{2}$,(3)式可改写为

$$\begin{cases} b\cos\varphi_\eta = b\cos\left(\varphi_\xi \pm \dfrac{\pi}{2}\right) = \mp\, b\sin\varphi_\xi \\ \qquad = -A_x\sin\psi + A_y\cos\psi\,\cos\delta \\ b\sin\varphi_\eta = b\sin\left(\varphi_\xi \pm \dfrac{\pi}{2}\right) = \pm\, b\cos\varphi_\xi \\ \qquad = A_y\cos\psi\,\sin\delta \end{cases}$$

把以上两式与(2)式结合,得

$$\begin{cases} \pm\, ab\cos^2\varphi_\xi = (A_x\cos\psi + A_y\sin\psi\cos\delta)A_y\cos\psi\sin\delta \\ \mp\, ab\sin^2\varphi_\xi = (-A_x\sin\psi + A_y\cos\psi\cos\delta)A_y\sin\psi\sin\delta \end{cases}$$

两式相减,得

$$\pm\, ab = A_xA_y\sin\delta \tag{5}$$

由(4)式和(5)式,有

$$\pm\frac{2ab}{a^2+b^2} = \frac{2A_xA_y}{A_x^2+A_y^2}\sin\delta = 2\sin\theta\cos\theta\sin\delta = \sin 2\theta\,\sin\delta$$

令

$$\tan\alpha = \pm\frac{b}{a}$$

则

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \pm\frac{2ab}{a^2+b^2} = \sin 2\theta\,\sin\delta$$

故

$$\alpha = \frac{1}{2}\arcsin(\sin 2\theta\,\sin\delta)$$

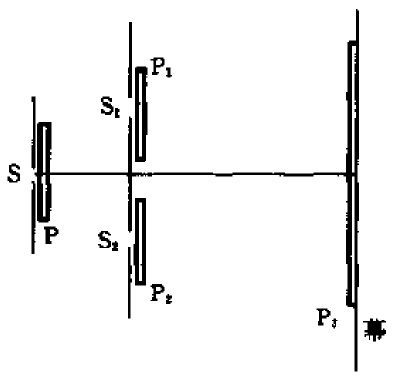
因此,椭圆半长轴 a 与半短轴 b 之比为

$$\pm\frac{b}{a} = \tan\left[\frac{1}{2}\arcsin(\sin 2\theta\,\sin\delta)\right]$$

式中的正、负号取决于椭圆偏振光是右旋的还是左旋的 .

【题 21】 如光图4－21－1所示,在杨氏干涉实验装置中,以单色自然光照射小孔 S,幕上将出现杨氏干涉条纹,在中央附近干涉极大的强度相对均匀,在较大范围内则将表现出单缝衍射的影响 .

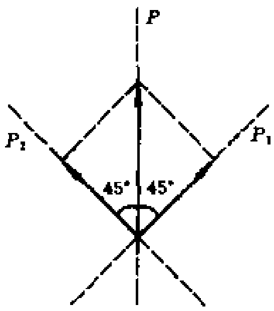
1. 若在 S 后放置一偏振片 P,试问幕上的干涉条纹是否变化? 2. 若在双孔 S_1 和 S_2 后再各加一偏振片 P_1 和 P_2,且使 P_1 和 P_2 的透光轴与 P 的透光轴各夹 45° 角 . 试问幕上的光强分布如何? 3. 除上述 P,P_1,P_2 外,若在屏幕前再放置偏振片 P_3,其透光轴与 P 的透光轴平行,试问幕上的光强分布如何? 4. 在第 3 问中,若 P_3 与 P 的透光轴相互垂直,试问幕上的条纹分布有何变化? 5. 在第 3 问中,若去掉偏振片 P,试问幕上的光强分布如何?



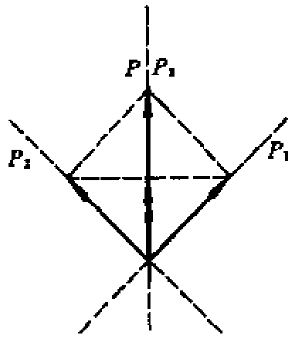
光图 4－21－1

【分析与解】 1.S 后加偏振片 P,透出的是线偏振光,因其余部分

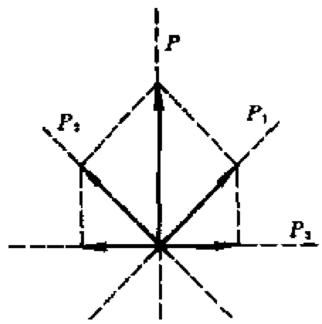
不变，幕上干涉条纹的形状和间距都不变，反衬度也基本不变．设不加P时，从S_1或S_2透出的最大光强为I_0，则幕上干涉极大的最大光强为$4I_0$，加P后，从S_1或S_2透出的最大光强为$\frac{I_0}{2}$．幕上干涉极大的最大光强变为$\left(2\sqrt{\frac{I_0}{2}}\right)^2=2I_0$，为不加P时的一半．



光图 4－21－2



光图 4－21－3



光图 4－21－4

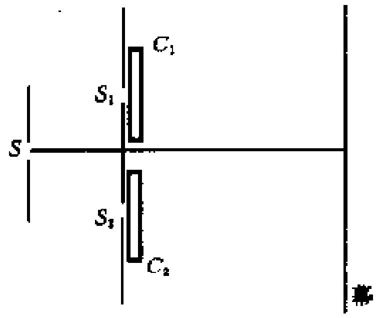
2．从P透出的线偏振光经P_1和P_2后，得到振动方向互相垂直的线偏振光，如光图4－21－2所示．它们的振动是从同一线偏振分解来的，有稳定的相位关系，它们在幕上的叠加是有固定相位差的垂直振动的合成．合成的结果一般是椭圆偏振光，椭圆的形状和取向由相位差决定．在原来干涉极大或极小处（相位差是π的整数倍），合成结果是线偏振光，其他地方为椭圆偏振光或圆偏振光．由于人眼不能区别光的偏振结构，幕上将不再出现干涉条纹，而是相对均匀的强度分布．

3．由于存在P_3把从P_1和P_2射出的两种垂直振动引到P_3的透光轴方向，从而得到有固定相位差的、沿同一直线的两种振动，如光图4－21－3所示．两者相干叠加，因而幕上将产生干涉条纹．干涉条纹的形状和间距，与不加任何偏振片的普通杨氏条纹相同，只是干涉强度变弱．从P透出的线偏振光经P_1或P_2，再经P_3两次投影后，在P_3透光轴方向的两线偏振光的振幅为$\sqrt{\frac{I_0}{2}}\cos^2 45°=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{I_0}{2}}$，干涉极大的强度为$\frac{I_0}{2}$，是第1问结果的$\frac{1}{8}$．

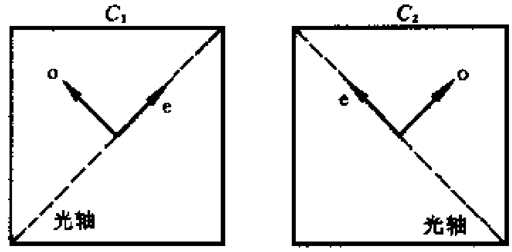
4．条纹的间距和强度与第3问相同．由于在P_3透光轴上投影时产生了π的附加相位差，如光图4－21－4所示．所以条纹相对第3问移动了半个条纹间距，即第3问中的亮条纹变为暗条纹，暗条纹变为亮条纹．

5．去掉偏振片P后，从P_1和P_2射出的两个垂直振动之间不再具有固定的相位关系．经P_3后，沿P_3透光轴方向的两个线振动之间也没有固定的相位关系，它们的叠加是非相干叠加，不能产生干涉．幕上不再有干涉条纹，只有S_1和S_2单缝衍射的非相干叠加结果．幕中央，每个单缝产生的光强为$\frac{I_0}{2}\cos^2 45°=\frac{I_0}{4}$，总光强为$\frac{I_0}{4}+\frac{I_0}{4}=\frac{I_0}{2}$．

【题22】 如光图4－22－1所示，在杨氏干涉装置中双孔S_1和S_2后各放置一个由同样材料制成的厚度均为d的晶片C_1和C_2，两晶片的光轴均与表面平行，两光轴相互垂直．试问幕上将观察到什么结果？



光图 4－22－1



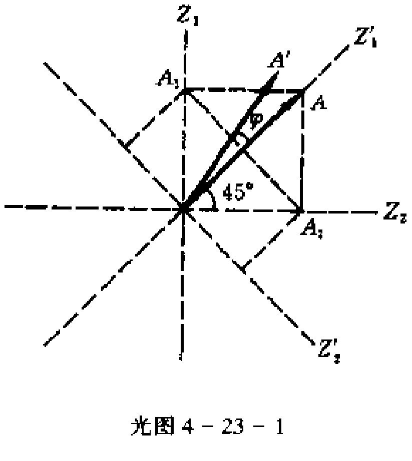
光图 4－22－2

【分析与解】 从S_1或S_2射出的自然光近乎垂直地入射到晶片表面上，在晶片内将出现沿同一方向传播的振动方向互相垂直的o光和e光(因晶片光轴与表面平行)．因两晶片的光轴互相垂直，在C_1中的o振动与C_2中的e振动具有相同的振动方向和固定的相位差，如光图4－22－2所示，它们在幕上相干叠加，产生一套干涉条纹．同理，C_1中的e振动与C_2中的o振动也有相同的振动方向和固定的相位差，它们在幕上相干叠加产生另一套干涉条纹．因此，幕上将出现两套干涉条纹，它们的形状和间距以及强度均相同，但彼此间有一相对位移．

C_1中的o振动与C_2中的e振动经晶片后产生的附加光程差为$(n_e-n_o)d$．它们相干叠加产生的第一套干涉条纹与不加晶片时的干涉条纹相比，移动的条纹数为$(n_e-n_o)\dfrac{d}{\lambda}$．同理，$C_1$中的e振动与$C_2$中的o振动经晶片后产生的附加光程差为$(n_o-n_e)d$，它们相干叠加产生的第二套干涉条纹与不加晶片时的干涉条纹相比，移动的条纹数为$(n_o-n_e)\dfrac{d}{\lambda}$，如果晶片由方解石制成，$n_o>n_e$，则第一套条纹上移而第二套条纹下移(均相对于无晶片时的条纹而言)，这两套干涉条纹之间非相干，因此两者的强度之和即为幕上的强度分布．

【题23】 两晶片由同种材料制成，第一晶片的快慢轴平行于晶片表面，厚度为d，第二晶片为$\dfrac{1}{4}$波片．两晶片的快轴夹45°角．波长为λ的单色线偏振光垂直入射到第一晶片上，相继地通过两个晶片，入射线偏振光的振动方向与$\dfrac{1}{4}$波片的快轴方向一致．试求从第二晶片透出的光的偏振状态．

【分析】 如图所示，第一晶片的快轴和慢轴分别用Z_1和Z_2表示，第二晶片的快轴和慢轴分别用Z'_1和Z'_2表示，Z_1与Z'_1夹45°角．入射的线偏振光的振幅用A表示，其振动方向与Z'_1一致．



光图 4－23－1

线偏振光射入第一晶片后，分解成沿Z_1和Z_2的两个垂直振动，振幅均为$A\cos45°$，其间的相位差$\delta_1=\dfrac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)d$．经第二晶片后，可将上述两振动分别向$Z'_1$和$Z'_2$方向投影，因上述两振动有相位差$\delta_1$，它们在$Z'_1$和$Z'_2$方向的投影之和可采用复振幅表述．同时，应注意到在$Z'_1$和$Z'_2$方向的两个振动经

$\frac{1}{4}$ 波片后有 $\frac{\pi}{2}$ 相位差，另外还因投影引起了 π 的相位差．射出第二晶片后，由在 Z'_1 和 Z'_2 方向的两个振动之间的振幅关系和相位差，即可确定透射光的偏振状态．

【解】 把入射的线偏振光分解成沿 Z_1 和 Z_2 的两个垂直振动，振幅均为 $A\cos45°$，经第一晶片后产生相位差

$$\delta_1 = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d$$

故从第一晶片透出的两垂直振动的复振幅可表为

$$\tilde{A}_1 = A\cos45°$$
$$\tilde{A}_2 = A\cos45° e^{i\delta_1}$$

经第二晶片后，把上述两振动分别向 Z'_1 和 Z'_2 方向投影，在 Z'_1 和 Z'_2 方向的合复振幅分别为

$$\tilde{A}'_1 = \tilde{A}_1\cos45° + \tilde{A}_2\cos45° = A\cos^2 45°(1 + e^{i\delta_1})$$
$$= \frac{A}{2}(1 + e^{i\delta_1}) = A\cos\frac{\delta_1}{2}e^{i\frac{\delta_1}{2}}$$
$$\tilde{A}'_2 = (\tilde{A}_1\cos45° e^{i\pi} + \tilde{A}_2\cos45°)e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$= (A\cos^2 45° e^{i\pi} + A\cos^2 45° e^{i\delta_1})e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{A}{2}(e^{i\delta_1} - 1)e^{i\frac{\pi}{2}} = iA\sin\frac{\delta_1}{2}e^{i\frac{\delta_1}{2}}e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$= A\sin\frac{\delta_1}{2}e^{i\left(\frac{\delta_1}{2}+\pi\right)}$$

在 $\tilde{A}'_2$ 表达式中，π 是由于投影引起的相位差，$\frac{\pi}{2}$ 是经 $\frac{1}{4}$ 波片后引起的相位差．

比较 $\tilde{A}'_1$ 和 $\tilde{A}'_2$ 可知，从第二晶片透出的沿 Z'_1 和 Z'_2 方向的两个垂直振动之间有 π 的相位差，合成结果是线偏振光，振幅为

$$A' = \sqrt{|\tilde{A}'_1|^2 + |\tilde{A}'_2|^2} = A$$

若以 Z'_1 和 Z'_2 为坐标轴，则透出的线偏振光的振动方向在第二象限和第四象限，与 Z'_1 的夹角 φ 满足

$$\tan\varphi = \frac{|\tilde{A}'_2|}{|\tilde{A}'_1|} = \tan\frac{\delta_1}{2} = \tan\left[\frac{\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d\right]$$

总之，从第二晶片透出的是线偏振光，其振幅与入射线偏振光相同，其振动方向与入射线偏振光的振动方向夹 φ 角．

【题 24】 一厚度 $d = 0.025$ mm 的方解石晶片，光轴与表面平行，放置在两正交偏振片之间．第一偏振片的透光轴方向与晶片的主截面成 45° 角．设可见光(波长为 400 ~ 700 nm 的连续谱)垂直入射．

1．试问透过第二偏振片的光中缺少哪些波长？2．若两偏振片的透光轴互相平行，试问透过第二偏振片的光中缺少哪些波长？计算时不考虑色散效应，即 $n_o - n_e = 0.172$ 与波长无关．

【分析】 从第一偏振片透出的线偏振光可分解为与晶片光轴平行和垂直的两个垂直振动．因第

一偏振片透光轴方向与晶片主截面(晶片光轴与光线构成的平面)夹 45° 角，上述两个垂直振动的振幅相同，经晶片后其间产生相位差$\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)d$．透出晶片后，把上述两个垂直振动投影在第二偏振片透光轴方向上，其振幅相等，其间的相位差除上述$\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)d$外，在两偏振片正交时还应附加由于投影引起的相位差$\pi$. 当总的相位差为$(2k+1)\pi$时，便不能透过第二偏振片．由此即可确定透射光中缺少哪些波长．

本题的入射光是连续的可见光谱，以上各题则大都是单色光入射，请注意区别．

【解】 1. 两偏振片正交时，把从第一偏振片透出的线偏振光分解为平行和垂直于晶片光轴的两个垂直振动，经晶片后再分别沿第二偏振片的透光轴作投影，则两者振幅相同，相位差为

$$\Delta\varphi_1=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)d+\pi$$

式中π是两个垂直振动投影在第二偏振片透光轴方向上时引起的附加相位差．当

$$\Delta\varphi_1=(2k+1)\pi, k=0,1,2,\cdots$$

时，光不能通过第二偏振片．故不能透过的波长满足

$$\frac{(n_o-n_e)}{\lambda}d=k$$

根据可见光的波长范围，可以定出干涉相消的级次 k 的范围．对于 $\lambda=400$ nm

$$k=\frac{0.172\times0.025}{4\times10^{-4}}=10.8$$

对于 $\lambda=700$ nm

$$k=\frac{0.172\times0.025}{7\times10^{-4}}=6.1$$

故在可见光范围内应取

$$k=7,8,9,10$$

透射光中缺少的波长为

$$k=7\text{ 时}, \lambda=6.1\times10^2\text{ nm}$$
$$k=8\text{ 时}, \lambda=5.4\times10^2\text{ nm}$$
$$k=9\text{ 时}, \lambda=4.8\times10^2\text{ nm}$$
$$k=10\text{ 时}, \lambda=4.3\times10^2\text{ nm}$$

2. 两偏振片透光轴平行时，相位差为

$$\Delta\varphi_2=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)d$$

当

$$\Delta\varphi_2=(2k+1)\pi$$

时，光不能通过第二偏振片，不能通过的波长应满足

$$\frac{2(n_o-n_e)}{\lambda}d=2k+1$$

与第 1 问相仿，在可见光范围内，透射光中缺少的波长为

$$k=6\text{ 时}, \lambda=6.6\times10^2\text{ nm}$$

$$k = 7\text{时}, \lambda = 5.7 \times 10^2 \text{ nm}$$
$$k = 8\text{时}, \lambda = 5.1 \times 10^2 \text{ nm}$$
$$k = 9\text{时}, \lambda = 4.5 \times 10^2 \text{ nm}$$
$$k = 10\text{时}, \lambda = 4.1 \times 10^2 \text{ nm}$$

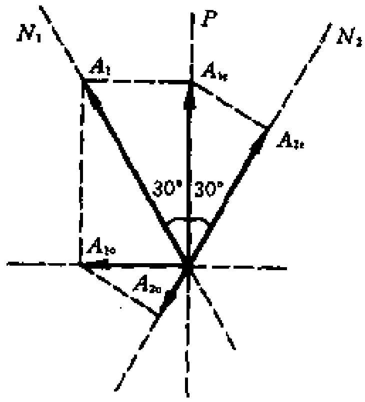
【题 25】 在偏振光干涉的装置中，两尼科耳棱镜的主截面夹 60° 角，两者之间插入一顶角 $\alpha = 30'$ 的石英尖劈，其光轴平行于表面，尖劈的主截面与两尼科耳棱镜的主截面都成 30° 角．以波长为 589.3 nm 的钠黄光垂直入射．

试问：1. 透射光的光强分布．2. 干涉条纹的反衬度．已知石英的折射率 $n_o = 1.54424$，$n_e = 1.55335$．

【分析】 与上题(本章题24)类似，也是在两个尼科耳棱镜 N_1 和 N_2 之间有一晶片 P．同样，把经 N_1 的线偏振光分解为平行与垂直晶片 P 的主截面的两个垂直振动，再考虑它们在 N_2 方向的投影．弄清楚两次投影后，沿 N_2 方向的两个振动的振幅和相位差，即可得出它们相干叠加的结果．

本题的特点是晶片为尖劈，各处 d 不同，相应的相位差不同，从而形成与劈棱平行的干涉条纹．

【解】 如图，N_1 和 N_2 是两个尼科耳棱镜的主截面，P 是石英尖劈的主截面．从 N_1 透出的线偏振光的振幅表为 A_1，先按与 P 平行和垂直分解为 A_{1e} 和 A_{1o}，再把 A_{1e} 和 A_{1o} 投影在 N_2 上．经两次投影后，沿 N_2 方向振动的两个振幅为



光图 4 - 25 - 1

$$A_{2o} = A_1\cos^2 60° = \frac{A_1}{4}$$

$$A_{2e} = A_1\cos^2 30° = \frac{3}{4}A_1$$

两者之间的相位差为

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d + \pi$$

式中 π 是投影在 N_2 上引起的相位差，d 是光在尖劈中传播的路径．它们在 N_2 方向的振动相干叠加后的强度为

$$I_2 = A_{2o}^2 + A_{2e}^2 + 2A_{2o}A_{2e}\cos\delta$$
$$= A_1^2\left\{\frac{1}{16} + \frac{9}{16} - \frac{6}{16}\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d\right]\right\}$$
$$= I_1\left\{\frac{5}{8} - \frac{3}{8}\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d\right]\right\}$$

式中 I_1 是透过第一尼科耳棱镜 N_1 后的光强．上式表明，透过第二尼科耳棱镜 N_2 后的光强 I_2 取决于 d，当光从尖劈不同地点通过时，d 值不同，所以光强 I_2 也不同，从而形成与劈棱平行的亮暗相间的直线形状的干涉条纹．条纹的极小值满足

$$\frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d = 2k\pi$$

即

$$\frac{(n_e - n_o)}{\lambda} = k$$

相邻两暗纹所对应的尖劈厚度之差为

$$\Delta d = \frac{\lambda}{n_e - n_o}$$

故条纹间距为

$$\Delta l = \frac{\Delta d}{d} = \frac{\lambda}{(n_e - n_o)\alpha}$$

$$= \frac{5.893 \times 10^{-4}}{0.00911 \times 0.00873} = 7.41 \text{ mm}$$

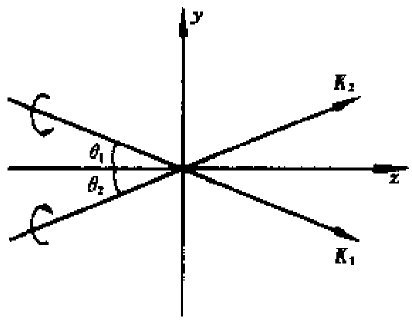
由强度公式，极大值和极小值分别为

$$I_{max} = I_1, \quad I_{min} = \frac{I_1}{4}$$

故干涉条纹的反衬度为

$$\gamma = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{3}{5} = 0.6$$

【题 26】 如光图4－26－1所示，两束同频率的平行光与 z 轴的夹角为 θ_1 和 θ_2，它们分别为左旋圆偏振光和右旋圆偏振光，光强分别为 I_1 和 I_2，同时沿 yz 平面入射到位于 xy 平面的屏幕上．试求屏幕上的干涉强度分布和反衬度．



光图 4－26－1

【分析】 如光图4－26－2所示，设入射左旋圆偏振光的旋转电矢量为 $\boldsymbol{A}_1$，其传播方向 K_1 与 z 轴的夹角为 θ_1．在垂直于 K_1 的平面内取直角坐标 (x, y')，$\boldsymbol{A}_1$ 在该平面内作圆运动，圆运动可分解为沿 x 和 y' 方向的两个垂直振动，它们的振幅分别为 A_{1x} 和 $A_{1y'}$，且有

$$A_{1x} = A_{1y'} = A_1$$

两垂直振动之间的相位差为

$$\varphi_{1y} - \varphi_{1x} = -\frac{\pi}{2} \tag{1}$$

圆偏振光的强度为

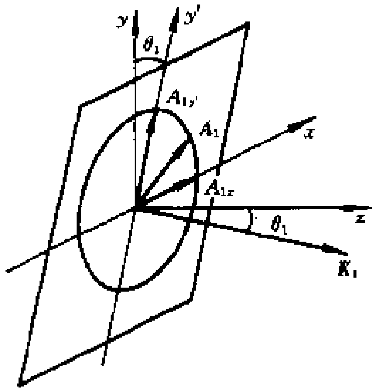
$$I_1 = A_{1x}^2 + A_{1y'}^2 = 2A_1^2$$

把振幅 A'_{1y} 分解成 A_{1y} 和 A_{1z} 两分量，

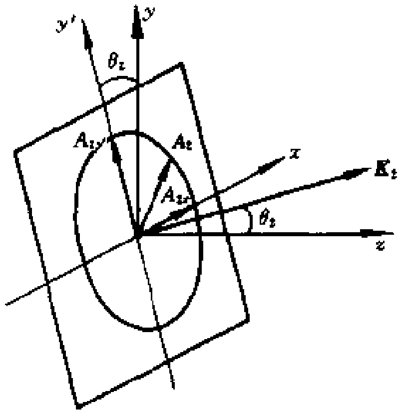
$$A_{1y} = A_{1y'} \cos\theta_1 = A_1 \cos\theta_1$$

$$A_{1z} = A_{1y'} \sin\theta_1 = A_1 \sin\theta_1$$

总之，入射的左旋圆偏振光在屏幕上可以分解成沿 x, y, z 轴的三个垂直振动，它们的振幅分别为 A_{1x}, A_{1y}, A_{1z}，y 振动与 x 振动之间的相位差由(1)式给定．



光图 4－26－2



光图 4－26－3

同理，如光图 4－26－3 所示，沿 K_2 方向传播的右旋圆偏振光也可在屏幕上分解为沿 x，y，z 轴的三个垂直振动，它们的振幅分别为 A_{2x}，A_{2y}，A_{2z}，

$$A_{2x} = A_2$$

$$A_{2y} = A_{2y'}\cos\theta_2 = A_2\cos\theta_2$$

$$A_{2z} = -A_{2y'}\sin\theta_2 = -A_2\sin\theta_2$$

y 振动与 x 振动之间的相位差为

$$\varphi_{2y} - \varphi_{2x} = \frac{\pi}{2} \tag{2}$$

入射的右旋圆偏振光的强度为

$$I_2 = A_{2x}^2 + A_{2y'}^2 = 2A_2^2$$

在屏幕上任取一点 P，两光束在该点的对应分量之间将产生相干叠加，可分别求出三分量的相干强度 I_x，I_y，I_z，于是总强度为

$$I = I_x + I_y + I_z$$

【解】 根据上述分析，每束入射光均可分解为三个垂直振动，它们的振幅为

$$\begin{cases} A_{1x} = A_1 \\ A_{1y} = A_1\cos\theta_1 \\ A_{1z} = A_1\sin\theta_1 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} A_{2x} = A_2 \\ A_{2y} = A_2\cos\theta_2 \\ A_{2z} = -A_2\sin\theta_2 \end{cases} \tag{4}$$

两束光在 P 点叠加时，对应分量进行相干叠加，每种分量的相位差由初相位之差和光程差 Δ 决定，与 Δ 相应的相位差 δ 为

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta$$

δ 和 Δ 只与 P 点的 y 坐标有关，且对三种分量均有相同值．设 x 分量的相位差为 δ_x，则

$$\delta_x = (\varphi_{2x} - \varphi_{1x}) + \delta$$

式中 φ_{1x} 和 φ_{2x} 为两个 x 振动的初相位 . y 分量的相位差为

$$\delta_y = (\varphi_{2y} - \varphi_{1y}) + \delta = (\varphi_{2y} - \varphi_{2x}) - (\varphi_{1y} - \varphi_{1x}) + (\varphi_{2x} - \varphi_{1x}) + \delta$$

把(1)、(2) 式代入,得

$$\delta_y = (\varphi_{2x} - \varphi_{1x}) + \delta + \pi = \delta_x - \pi$$

由(3)、(4) 式, z 分量的振幅反号,这是由投影引起的,说明两个 z 振动之间存在 π 的附加相位差,若以 δ_x 为基准,则有

$$\delta_z = \delta_x + \pi$$

总之,对应分量之间的相位差若以 x 振动为基准,则 y 分量的振动之间存在由圆偏振光本身引进的附加相位差,而 z 分量之间则包括因投影引起的附加相位差 .

由一般的干涉原理,三分量的干涉强度分别为

$$\begin{aligned} I_x &= A_{1x}^2 + A_{2x}^2 + 2A_{1x}A_{2x}\cos\delta_x \\ I_y &= A_{1y}^2 + A_{2y}^2 + 2A_{1y}A_{2y}\cos\delta_y \\ &= A_{1y}^2 + A_{2y}^2 - 2A_{1y}A_{2y}\cos\delta_x \\ I_z &= A_{1z}^2 + A_{2z}^2 + 2A_{1z}A_{2z}\cos\delta_z \\ &= A_{1z}^2 + A_{2z}^2 - 2A_{1z}A_{2z}\cos\delta_x \end{aligned}$$

由(3)、(4) 两式

$$\begin{aligned} I_x &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta_x \\ I_y &= A_1^2\cos^2\theta_1 + A_2^2\cos^2\theta_2 - 2A_1A_2\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\delta_x \\ I_z &= A_1^2\sin^2\theta_1 + A_2^2\sin^2\theta_2 + 2A_1A_2\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\delta_x \end{aligned}$$

总光强为

$$\begin{aligned} I &= I_x + I_y + I_z \\ &= 2(A_1^2 + A_2^2) + 2A_1A_2\cos\delta_x - 2A_1A_2\cos(\theta_1 + \theta_2)\cos\delta_x \\ &= 2(A_1^2 + A_2^2) + 2A_1A_2[1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)]\cos\delta_x \end{aligned}$$

因

$$I_1 = 2A_1^2, \quad I_2 = 2A_2^2$$

故

$$I = I_1 + I_2 + \sqrt{I_1I_2}[1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)]\cos\delta_x \tag{5}$$

干涉极大时有 $\cos\delta_x = 1$,干涉极小时有 $\cos\delta_x = -1$,故

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + \sqrt{I_1I_2}[1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - \sqrt{I_1I_2}[1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)]$$

干涉分布的反衬度为

$$\gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2\sqrt{I_1I_2}}{I_1 + I_2}[1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)]$$

由强度分布公式(5) 式可知,当

$$I_1 = I_2 = I_0, \quad \theta_1 = \theta_2 = \theta$$

时,强度分布公式简化为

$$I = I_0[2 + (1 - \cos2\theta)\cos\delta_x]$$

当

$$\theta = 0$$

即当两束圆偏振光沿同一方向正入射时，

$$I = 2I_0$$

干涉项消失，屏幕上将是光强均匀的分布．事实上，干涉项是入射电矢量 z 分量的贡献，当 $\theta = 0$ 时，$A_z = 0$，当

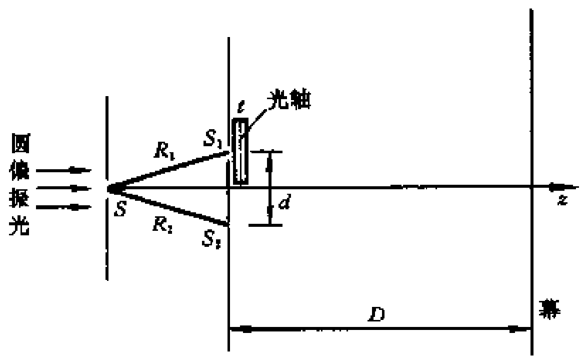
$$\theta \neq 0$$

时，反衬度为

$$\gamma = 2(1 - \cos2\theta)$$

可见，θ 越大，z 分量也越大，干涉项和反衬度 γ 就都越大；反之，θ 越小，γ 也越小，$\theta = 0$ 时，反衬度 $\gamma = 0$．

【题 27】 如图所示，在杨氏双缝干涉实验装置中，以单色圆偏振光照明狭缝 S，在一条狭缝 S_1 后放置一方解石晶片，晶片的光轴平行于图面和晶片表面，晶片的主折射率为 n_o 和 n_e．试求幕上干涉条纹的反衬度为最大和最小时晶片的厚度 t．



光图 4 - 27 - 1

【分析】 从狭缝 S_1 和 S_2 射出两束圆偏振光，它们均可分解成两个互相垂直的振动，一个振动垂直于图面（垂直于晶片光轴），另一个振动平行于图面（与晶片光轴方向一致），两垂直振动之间的相位差是 $\pm\frac{\pi}{2}$（或它的奇数倍）．若 $R_1 = R_2$，则从 S_1 和 S_2 射出的圆偏振光完全相同，即分解后的两对垂直振动无论是振幅或相位均上下对应相等．上述垂直和平行两种振动在幕上形成各自的干涉条纹，两套条纹的间距相同（因条纹间距仅由 D, d, λ 决定）．

当 S_1 后放置晶片后，由于晶片对垂直振动和平行振动有不同的折射率，分别为 n_o 和 n_e，因而在幕上一点叠加时，两种振动的光程差将出现差异，从而产生不同的干涉条纹．或者说，由于晶片的 n_o 和 n_e 不等，幕上两套干涉条纹间将产生相对移动，晶片的厚度决定了相对移动的大小，从而决定了条纹的反衬度．

【解】 入射到晶片的圆偏振光可以分解成垂直于光轴和平行于光轴的两种振动，它们穿过晶片的光程各不相同，垂直振动为 $n_o t$，平行振动为 $n_e t$，它们与从 S_2 射出的对应振动相干叠加时，产

生不同的附加光程差．对于垂直振动(对应晶片中的 o 光)，附加光程差为

$$\Delta_o = (n_o - 1)t$$

对于平行振动(对应晶片中的 e 光)，附加光程差为

$$\Delta_e = (n_e - 1)t$$

附加光程差之差为

$$\Delta_o - \Delta_e = (n_o - n_e)t$$

当

$$\Delta_o - \Delta_e = k\lambda, \quad k = 1,2,3,\cdots$$

时，两套干涉条纹的极大值与极大值重合，极小值与极小值重合，反衬度 $\gamma = 1$ 最大，条纹最清晰，此时晶片厚度 t 应满足

$$t = \frac{k\lambda}{n_o - n_e}, \quad k = 1,2,3,\cdots$$

当

$$\Delta_o - \Delta_e = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

时，一套条纹的极大值落在另一套条纹的极小值，反衬度 γ 最小，此时晶片厚度 t 应满足

$$t = \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda}{n_o - n_e}, \quad k = 0,1,2\cdots$$

在后一种情形，o 振动和 e 振动穿过晶片后产生的附加相位差为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)t = (2k + 1)\pi$$

两垂直振动仍合成圆偏振光，只是旋转方向与入射圆偏振光的旋转方向相反．于是幕上任一点将是两个旋转方向相反的圆偏振光的叠加．对实际的杨氏干涉装置，$D \gg d$，且观察范围有限，此条件下可忽略电矢量的 z 分量，由上题(本章题 26)可知，叠加后的反衬度 $\gamma = 0$，为最小．

【题 28】 波长 $\lambda = 500$ nm 的线偏振光沿 z 方向传播，其电矢量振动方向与 x 轴夹 45° 角，通过一克尔盒，盒长 $l = 1.0$ cm，盒内介质在 x 方向的电场作用下变为各向异性，主折射率之差为

$$n_x - n_y = KE^2$$

式中 E 为电场强度，比例系数 $K = 2.5 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^2/V^2}$，$n_x$ 和 n_y 分别是振动方向为 x 和 y 时的折射率．

1. 如光图 4 - 28 - 1 所示，在克尔盒后放置一偏振片，其偏振化方向与入射光的振动方向垂直．试求透过偏振片的光最强时电场强度 E 的最小值．

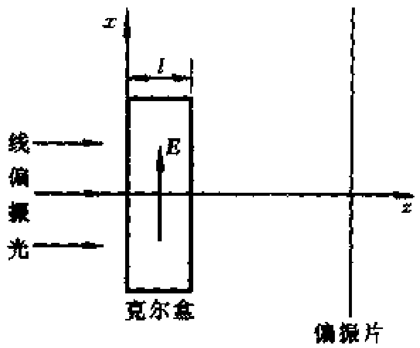
2. 如光图 4 - 28 - 2 所示，将上述克尔盒放置在杨氏干涉装置的双缝之后，克尔盒的上半部加 x 方向的电场，下半部的电场强度保持为零．连续改变上半部的电场强度，幕上干涉条纹的反衬度将出现周期性的变化．忽略光在克尔盒中的折射偏离．试求反衬度 $\gamma = 0$ 和 $\gamma = 1$ 时的电场强度值．

【分析】 1. 如光图 4 - 28 - 1，入射线偏振光进入克尔盒后分解成两种振幅相同，互相垂直的振

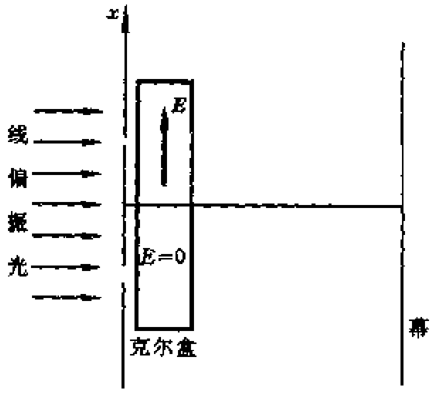
动,其一的振动方向沿 x 轴,相应的折射率为 n_x,另一的振动方向沿 y 轴(垂直于图面),相应的折射率为 n_y. 穿出克尔盒后,两振动之间产生的相位差为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_x - n_y)l$$

一般合成为椭圆偏振光,当 $\Delta\varphi = 2k\pi(k = 0,1,2,\cdots)$ 时合成为线偏振光,振动方向与入射线偏振光相同,因而不能透过偏振片. 当 $\Delta\varphi = (2k+1)\pi(k = 0,1,2,\cdots)$ 时也合成为线偏振光,但其振动方向相对入射线偏振光转过 90° 角,因而与偏振片的偏振化方向一致,透射光最强. 根据所要求的 $\Delta\varphi$ 值即可算出所需的电场强度.



光图 4 - 28 - 1



光图 4 - 28 - 2

2. 如光图 4 - 28 - 2,从克尔盒上半部射出的光一般为椭圆偏振光,特殊情形为线偏振光. 从克尔盒下半部射出的光始终是线偏振光,其振动方向与入射的线偏振光相同(因 $E = 0$,介质无双折射性). 若上半部光束为线偏振光,且振动方向与入射线偏振光的振动方向垂直,则上、下两束光不发生干涉,反衬度 $\gamma = 0$. 若上、下两束光的振动方向一致,则将产生干涉,由于两束光的振幅相等,反衬度 $\gamma = 1$.

【解】 1. 如光图 4 - 28 - 1,从克尔盒射出的两垂直振动之间的光程差为

$$\Delta = (n_x - n_y)l = KE^2 l$$

相应的相位差为

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta = \frac{2\pi}{\lambda}KE^2 l$$

当

$$\delta = (2k+1)\pi, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

时,从克尔盒出射的光为线偏振光,且振动方向相对原入射线偏振光的振动方向转过 90°,即其振动方向与偏振片的偏化方向一致,透过偏振片的光最强. 此时,

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}KE^2 l = (2k+1)\pi$$

取 $k = 0$,即得所需电场强度的最小值为

$$E^2 = \frac{\lambda}{2Kl} = \frac{5\times 10^{-7}}{2\times 2.5\times 10^{-6}\times 10^{-2}} = 10\ \mathrm{V^2/m^2}$$

$$E = 3.2\ \text{V/m}$$

2. 如光图 4－28－2，当

$$\delta = (2k+1)\pi$$

时，上、下两束光的振动方向互相垂直，不发生干涉，故反衬度

$$\gamma = 0$$

此时有

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}KE^2 l = (2k+1)\pi$$

$$E^2 = \left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{Kl} = 20\left(k+\frac{1}{2}\right)\ \text{V}^2/\text{m}^2,\quad k = 0,1,2,\cdots$$

$$E = \sqrt{20\left(k+\frac{1}{2}\right)}\ \text{V/m}$$

当

$$\delta = 2k\pi$$

时，上光束的振动方向与入射线偏振光振动方向相同，即上、下两光束的振动方向一致，将发生干涉，反衬度

$$\gamma = 1$$

此时有

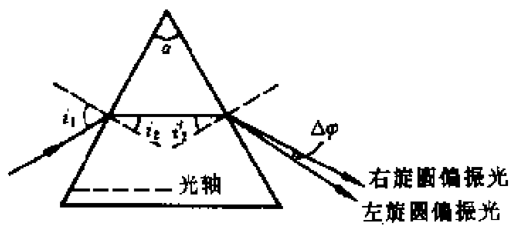
$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}KE^2 l = 2k\pi$$

$$E^2 = k\frac{\lambda}{Kl} = 20k\,\text{V}^2/\text{m}^2,\quad k = 0,1,2,\cdots$$

$$E = \sqrt{20k}\ \text{V/m}$$

当 E 取其他值时，反衬度 γ 介于 0 和 1 之间．当 E 从零连续增大时，反衬度 γ 将从 1 变到 0，再从 0 变到 1，如此作周期性变化．

【题 29】 如图所示，石英做成的三棱镜的顶角 $\alpha = 60°$，光轴与棱镜底边平行．钠黄光的入射角 i_1 满足最小偏向角条件．已知石英对钠黄光的折射率 $n = 1.544$，对左旋和右旋圆偏振光的折射率之差 $\Delta n = n_L - n_R = 7.121\times10^{-5}$. 试求从棱镜射出的左旋和右旋圆偏振光之间的夹角 $\Delta\varphi$.



光图 4－29－1

【分析】 入射光中每个线偏振成分均可看成是左旋圆偏振光与右旋圆偏振光的合成．光在石英中沿光轴传播时具有旋光性，表明石英对左旋和右旋圆偏振光具有不同的折射率，分别表为 n_L 和 n_R，在最小偏向角条件下，棱镜中的折射线与底边平行（严格说来，由于 n_L 和 n_R 不同，在棱镜中的折射光线应已分离成左旋和右旋圆偏振光两条光线，但因 n_L 和 n_R 差别很小，仍可近似看作一条折射线），并有 $i_2 = i'_2 = \frac{\alpha}{2} = 30°$. 在出射界面运用折射定律，即可求得 $\Delta\varphi$.

【解】 在入射界面，运用折射定律，有

$$\sin i_1 = n\sin i_2 = n\sin 30^\circ$$

在出射界面，分别对左旋和右旋圆偏振光运用折射定律，有

$$n_L \sin 30^\circ = \sin i_L$$

$$n_R \sin 30^\circ = \sin i_R$$

式中 i_L 和 i_R 分别是出射的左旋和右旋圆偏振光的折射角．以上两式相减，得

$$\sin i_L - \sin i_R = (n_L - n_R)\sin 30^\circ = \frac{1}{2}(n_L - n_R)$$

利用三角公式，并考虑到 i_L 和 i_R 相差很小，有

$$\sin i_L - \sin i_R = 2\sin\frac{i_L - i_R}{2}\cos\frac{i_L + i_R}{2} \approx (i_L - i_R)\cos i_1$$

故

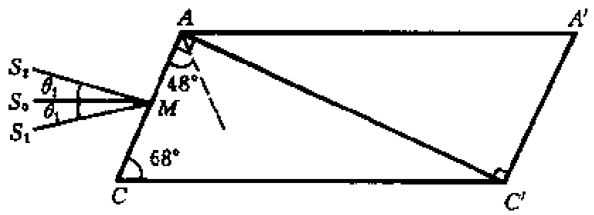
$$(i_L - i_R)\cos i_1 = \frac{1}{2}(n_L - n_R)$$

于是

$$\Delta\varphi = i_L - i_R = \frac{n_L - n_R}{2\cos i_1} = \frac{\Delta n}{2\sqrt{1-\sin^2 i_1}} = \frac{\Delta n}{2\sqrt{1-n^2\sin^2 30^\circ}}$$

$$= \frac{7.121\times 10^{-5}}{2\sqrt{1-(1.544\times 0.5)^2}} = 5.60\times 10^{-5}\text{rad} = 11.6''$$

【题30】 如光图4－30－1所示，尼科耳棱镜由方解石晶体做成，在其主截面内，$\angle CAC' = 90^\circ$，$\angle ACC' = 68^\circ$，光轴与 AC 之间的夹角为 48°．正常工作时，自然光沿棱镜的长边方向（即 S_0M 方向）入射，透射光为严格的线偏振光．入射光方向相对 S_0M 方向的任何偏离，例如沿 S_1M 或 S_2M 方向入射，都可能使尼科耳棱镜失去起偏振的作用．试分别计算允许的偏离角 θ_1 和 θ_2．已知方解石的主折射率为 $n_o = 1.658$，$n_e = 1.486$，用于胶合的加拿大胶的折射率 $n = 1.550$．



光图4－30－1

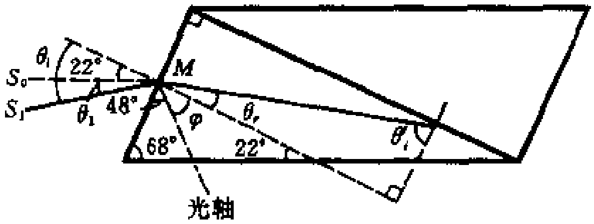
【分析】 在正常工作情形，尼科耳棱镜中的 o 光在胶合面上全反射，只有 e 光才能透过整个棱镜．当入射光沿 S_1M 方向入射时，o 光在胶合面上的入射角可能小于全反射临界面，不满足全反射条件，从而使 o 光和 e 光均能通过棱镜，棱镜失去起偏振作用．若入射光沿 S_2M 方向入射，棱镜中的 e 光将向光轴方向偏移，e 光折射率 n'_e 增大，当 n'_e 超过加拿大胶的折射率时，e 光可能在胶合面上产生全反射，从而使 o 光和 e 光都不能穿过棱镜．

计算对 θ_1 的限制时，只需用常规的折射定律计算 o 光在胶合面上的入射角，看看是否满足全反射条件．计算对 θ_2 的限制时，应注意到 e 光折射率随传播方向的变化．根据 e 光在胶合面上产生全反射的临界条件，算出 e 光折射率的临界值 n'_e，由 n'_e，可得出 e 光在棱镜中传播的波法线方向，再由折射定律求出对 θ_2 的限制值．

【解】 1. 对角 θ_1 的限制

如光图 4 - 30 - 2 所示，端面法线与 S_0M 夹角 22°，法线与光轴夹角 $\varphi = 42°$. 设入射光沿 S_1M 方向入射，入射角为 θ_i，棱镜中 o 光的折射角为 θ_r. 由折射定律

$$\sin\theta_i = n_o \sin\theta_r \tag{1}$$



光图 4 - 30 - 2

在胶合面上的入射角为

$$\theta_i' = 90° - \theta_r$$

设 θ_i' 为全反射的临界角，则

$$n_o\sin(90° - \theta_r) = n$$

即

$$\cos\theta_r = \frac{n}{n_o} \tag{2}$$

由(1)、(2) 两式，得

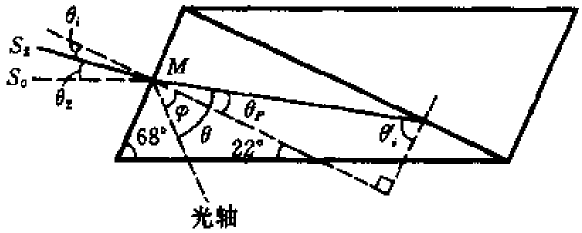
$$\sin\theta_i = n_o\sqrt{1 - \frac{n^2}{n_o^2}} = \sqrt{n_o^2 - n^2}$$

$$\theta_i = \arcsin\sqrt{n_o^2 - n^2} = 36°$$

故

$$\theta_1 = \theta_i - 22° = 14°$$

当 $\theta_1 > 14°$ 时，θ_i' 小于全反射临界角，将有部分 o 光透过棱镜，从棱镜透出的光不再是线偏振光.



光图 4 - 30 - 3

2. 对角 θ_2 的限制

一般 e 光光线并不遵守折射定律，但 e 光的波法线折射时仍有折射定律的形式，只是 e 光折射率不是常量，而要随波法线方向变化.

如光图 4 - 30 - 3，设入射光沿 S_2M 方向入射，入射角为 θ_i，则

$$\theta_2 = 22° - \theta_i$$

e 光波法线在棱镜中的折射角为 θ_P，由折射定律，

$$\sin\theta_i = n'_e \sin\theta_P = n'_e \cos\theta'_i \tag{3}$$

θ'_i 是波法线在胶合面上的入射角，n'_e 是 e 光在折射方向的折射率，它介于主折射 n_o 和 n_e 之间，由下式决定，

$$n'_e = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2 \sin^2\theta + n_e^2 \cos^2\theta}}$$

式中

$$\theta = \varphi + \theta_P$$

是波法线与光轴的夹角(其中 $\varphi = 42°$)，上式可写成

$$n'_e = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2 \sin^2(\varphi + \theta_P) + n_e^2 \cos^2(\varphi + \theta_P)}}$$

上式平方，展开和化简，得

$$n'^2_e = \frac{n_o^2 n_e^2}{(n_e^2 \cos^2\varphi + n_o^2 \sin^2\varphi)\cos^2\theta_P + (n_e^2 \sin^2\varphi + n_o^2 \cos^2\varphi)\sin^2\theta_P + 2(n_o^2 - n_e^2)\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta_P\cos\theta_P} \tag{4}$$

若 θ'_i 是 e 光在胶合面上全反射的临界角，则有

$$n'_e \sin\theta'_i = n$$

因

$$\theta'_i + \theta_P = 90°$$

故有

$$\cos\theta_P = \frac{n}{n'_e}$$

$$\sin\theta_P = \sqrt{1 - \frac{n^2}{n'^2_e}} = \frac{1}{n'_e}\sqrt{n'^2_e - n^2}$$

代入(4) 式，化简，得出 n'_e 满足的方程为

$$(n_e^2 \sin^2\varphi + n_o^2 \cos^2\varphi)n'^2_e + n^2(n_o^2 - n_e^2)(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)$$
$$+ 2(n_o^2 - n_e^2)n\sqrt{n'^2_e - n^2}\sin\varphi\cos\varphi = n_o^2 n_e^2$$

把 $n_o = 1.658$，$n_e = 1.486$，$n = 1.550$，$\varphi = 42°$ 代入，得 n'_e 满足的方程为

$$n'^4_e - 5.062 n'^2_e + 6.394 = 0$$

解出

$$n'^2_e = \begin{cases} 2.641 \\ 2.422 \end{cases}$$

第一个根对应 $n'_e = 1.625$，很接近 n_o，这意味着 e 光方向接近光轴方向，波法线与入射线在法线的同侧，这是不可能的，此根应舍弃．故取

$$n'^2_e = 2.422, \quad n'_e = 1.556$$

上述 n'_e 值即为 e 光在胶合面上产生全反射时，e 光折射率的临界值．

由(3)式,对应的入射角的限制值满足

$$\sin^2\theta_i = n'^2_e \sin^2\theta_P = n'^2_e - n^2 = 1.95 \times 10^{-2}$$

$$\sin\theta_i = 0.140$$

$$\theta_i = \arcsin 0.140 = 8^\circ$$

所以

$$\theta_2 = 22^\circ - 8^\circ = 14^\circ$$

当 θ_i 超过8°,或 θ_2 大于14°时,θ'_i 将大于e光全反射的临界角,e光与o光一起在胶合面上发生全反射.

可见,为了使尼科耳棱镜起正常的起偏振作用,入射光相对棱镜长边方向的偏离角上下均不得超过14°.

【题31】 在各向异性晶体中,波法线方向与光线方向一般并不一致.试求冰洲石(方解石)晶体中两者之间的最大夹角,并与石英晶体的对应量作比较.已知冰洲石的主折率为 $n_o = 1.658$, $n_e = 1.486$;石英的主折射率为 $n_o = 1.544$, $n_e = 1.553$.

【分析】 晶体中光线方向与波法线方向的角度差 α 随光线方向而变,写出具体的函数关系,求出 α 为极值时的光线方向,于是 α 的最大值可求得.

【解】 设波法线方向与光轴的夹角为 θ,光线方向与光轴的夹角为 ξ,两者之间的关系为

$$\cot\theta = \frac{n_o^2}{n_e^2}\cot\xi$$

n_o 和 n_e 为晶体的主折射率.光线与波法线之间的夹角 α 为

$$\alpha = \xi - \theta$$

$$= \xi - \operatorname{arc\,cot}\left(\frac{n_o^2}{n_e^2}\cot\xi\right) \tag{1}$$

上式就是 α 与 ξ 之间的函数关系,它表明光线方向改变时(即 ξ 改变时),光线与波法线之间的夹角 α 将按上式相应变化.α 对 ξ 求导,得

$$\frac{d\alpha}{d\xi} = 1 - \left[-\frac{\frac{n_o^2}{n_e^2}\left(1 - \frac{1}{\sin^2\xi}\right)}{1 + \left(\frac{n_o^2}{n_e^2}\cot\xi\right)^2}\right]$$

令

$$\frac{d\alpha}{d\xi} = 0$$

有

$$1 + \left(\frac{n_o^2}{n_e^2}\cot\xi\right)^2 - \frac{n_o^2}{n_e^2\sin^2\xi} = 0$$

即

$$\frac{n_e^2}{n_o^2}\sin^2\xi + \frac{n_o^2}{n_e^2}\cos^2\xi = 1 = \sin^2\xi + \cos^2\xi$$

$$\left(\frac{n_e^2}{n_o^2}-1\right)\sin^2\xi+\left(\frac{n_e^2}{n_o^2}-1\right)\cos^2\xi=0$$

故 α 为极大值时 ξ 必须满足

$$\cot^2\xi=-\frac{\dfrac{n_e^2}{n_o^2}-1}{\dfrac{n_o^2}{n_e^2}-1}=\frac{n_e^2}{n_o^2}$$

即

$$\cot\xi=\pm\frac{n_e}{n_o}$$

把上式代入(1)式,求出最大夹角 α_m 为

$$\alpha_m=\operatorname{arc}\cot\left(\pm\frac{n_e}{n_o}\right)-\operatorname{arc}\cot\left(\pm\frac{n_o}{n_e}\right)$$

故

$$\cot\alpha_m=\cot\left[\operatorname{arc}\cot\left(\pm\frac{n_e}{n_o}\right)-\operatorname{arc}\cot\left(\pm\frac{n_o}{n_e}\right)\right]$$

$$=\frac{\dfrac{n_e}{n_o}\cdot\dfrac{n_o}{n_e}+1}{\pm\left(\dfrac{n_e}{n_o}-\dfrac{n_o}{n_e}\right)}=\frac{2n_on_e}{\pm(n_e^2-n_o^2)}$$

取绝对值

$$\cot\alpha_m=\frac{2n_on_e}{|n_e^2-n_o^2|}$$

对于冰洲石,$n_o=1.658$,$n_e=1.486$,代入,得

$$\alpha_m=\operatorname{arc}\cot(9.112)=6.26^\circ$$

对于石英,$n_o=1.544$,$n_e=1.553$,代入得

$$\alpha_m=\operatorname{arc}\cot(172)=0.33^\circ$$

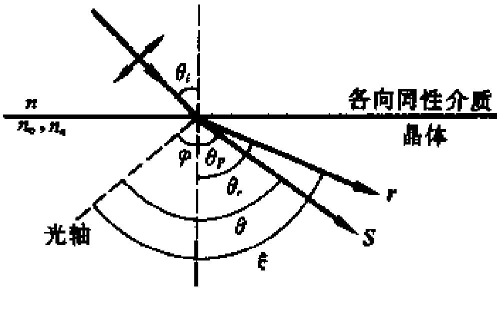
上述结果表明,与石英相比,冰洲石的光学各向异性要明显得多.

【题32】 折射率为 n_1 的各向同性介质与主折射率为 n_o 和 n_e 的单轴晶体构成一界面.线偏振光从各向同性介质沿晶体的主截面入射到界面上,其振动方向与入射面平行.为使入射光在界面上产生全反射.试问 n_1 必须满足什么条件?全反射的临界角为多大?设晶体光轴与界面法线夹角为 φ.

【分析】 如光图4-32-1所示,因光线沿主截面入射,故入射线与折射线以及光轴三者共面,为光图4-32-1中的纸平面.因入射线偏振光的振动方向在入射面内,故进入晶体后只存在单一的e光.由于晶体的各向异性,折射光(e光)的波法线和光线的传播方向不一致.如光图4-32-1所示,取波法线方向的单位矢量为 $\boldsymbol{S}$,相应的折射角为 θ_P;光线方向的单位矢量为 $\boldsymbol{r}$,相应的折射角为 θ_r.又在光图4-32-1中,θ_i 为入射角,φ 为晶体光轴与界面法线的夹角,θ 是波法线与光轴的夹角,ξ 是光线与光轴的夹角.

全反射临界角 θ_i 相应的 $\theta_r = \frac{\pi}{2}$，这就是全反射条件，问题在于找出 θ_i 与 θ_r 的关系．

θ_i 与 θ_P 的关系遵循折射定律，其中折射波在波法线方向上的折射率 $\left(n_2 = \frac{c}{v_2}\right)$ 及相速度 (v_2) 不是常数，而与 n_o 和 n_e 有关，特别是与 θ 有关 $(\theta = \theta_P + \varphi)$．找出 θ_i 与 θ_P 的关系后，再利用单轴晶体中波法线方向与光线方向之间的关系（即 θ 与 ξ 的关系，或 θ_P 与 θ_r 的关系）即可得 θ_i 与 θ_r 的关系，于是可解．



光图 4 - 32 - 1

也可利用费马原理求解．费马原理指出，光沿着光程 L 为极值的路径传播．在晶体中的光程等于与相速 v_2 相联系的折射率 n_2 与波法线传播距离的乘积，也等于光线的折射率 n_r（$n_r = \frac{c}{v_r}$，v_r 是光线速度）与光线传播距离的乘积．由此，加上全反射条件 $\theta_r = \frac{\pi}{2}$，也可以求出全反射的临界角 θ_i．

【解】 方法一．

如光图 4 - 32 - 1 所示，波法线的传播遵循折射定律

$$\frac{\sin\theta_i}{v_1} = \frac{\sin\theta_p}{v_2} \tag{1}$$

式中 θ_i 为入射角，θ_P 为波法线的折射角，v_1 是光在各向同性介质中的相速，v_2 是折射光在晶体内的相速．由于晶体各向异性，v_2 与 θ（波法线与光轴的夹角）有关，为

$$v_2^2 = v_o^2\cos^2\theta + v_e^2\sin^2\theta$$

式中 v_o 和 v_e 分别是振动与光轴垂直和平行时的相速．介质的折射率等于真空中光速c与介质中相速 v 之比，即 $n = \frac{c}{v}$，故

$$n_2 = \frac{c}{v_2},\quad n_o = \frac{c}{v_o},\quad n_e = \frac{c}{v_e}$$

式中 n_2 是折射波在波法线方向上的折射率，n_o 和 n_e 是晶体的主折射率．于是，v_2 表达式可改写为

$$n_2 = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2\sin^2\theta + n_e^2\cos^2\theta}} \tag{2}$$

(1) 式可改写为

$$n_1^2\sin^2\theta_i = n_2^2\sin^2\theta_P = \frac{n_o^2 n_e^2\sin^2\theta_P}{n_e^2\cos^2(\theta_P+\varphi) + n_o^2\sin^2(\theta_P+\varphi)}$$

$$= \frac{n_o^2 n_e^2\sin^2\theta_P}{(n_e^2\cos^2\varphi + n_o^2\sin^2\varphi)\cos^2\theta_P + (n_e^2\sin^2\varphi + n_o^2\cos\varphi)\sin^2\theta_P + 2(n_o^2 - n_e^2)\sin\theta_P\cos\theta_P\sin\varphi\cos\varphi} \tag{3}$$

(3) 式给出了 θ_P 与 θ_i 的关系，从原则上决定了折射波法线的传播方向．

全反射是指能量的全反射，即光线的全反射，故全反射条件应由光线的折射角 $\theta_r = \frac{\pi}{2}$ 来决

定．在单轴晶体中波法线方向与光线方向之间的关系为

$$\cot\theta = \frac{n_o^2}{n_e^2}\cot\xi, \quad 或 \quad \tan\theta = \frac{n_e^2}{n_o^2}\tan\xi \tag{4}$$

即

$$\cot(\theta_P + \varphi) = \frac{n_o^2}{n_e^2}\cot(\theta_r + \varphi)$$

或

$$\frac{\cot\theta_P\cot\varphi - 1}{\cot\theta_P + \cot\varphi} = \frac{n_o^2}{n_e^2}\cdot\frac{\cot\theta_r\cot\varphi - 1}{\cot\theta_r + \cot\varphi}$$

全反射时，有

$$\theta_r = \frac{\pi}{2}$$

上式变为

$$\frac{\cot\theta_P\cot\varphi - 1}{\cot\theta_P + \cot\varphi} = -\frac{n_o^2}{n_e^2\cot\varphi}$$

解出

$$\cot\theta_P = \frac{n_e^2 - n_o^2}{n_o^2\tan\varphi + n_e^2\cot\varphi}$$

$$\sin\theta_P = \frac{n_o^2\tan\varphi + n_e^2\cot\varphi}{\sqrt{(n_o^2 - n_e^2)^2 + (n_o^2\tan\varphi + n_e^2\cot\varphi)^2}}$$

$$\cos\theta_P = \frac{n_e^2 - n_o^2}{\sqrt{(n_o^2 - n_e^2)^2 + (n_o^2\tan\varphi + n_e^2\cot\varphi)^2}}$$

把上述 $\sin\theta_P$ 和 $\cos\theta_P$ 代入(3) 式，得

$$\sin\theta_i = \frac{1}{n_1}\sqrt{n_o^2\sin^2\varphi + n_e^2\cos^2\varphi}$$

上式是产生全反射的条件．因 $\sin\theta_i < 1$，故为实现全反射，必须满足

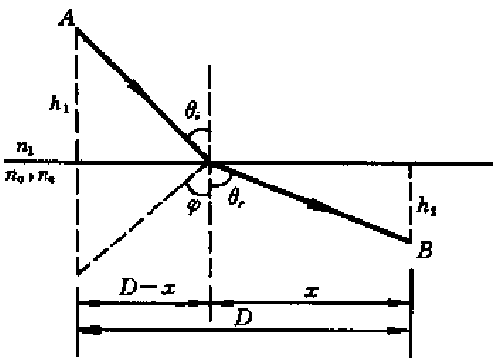
$$n_1 > \sqrt{n_o^2\sin^2\varphi + n_e^2\cos^2\varphi}$$

全反射临界角为

$$\theta_i = \arcsin\left(\frac{1}{n_1}\sqrt{n_o^2\sin^2\varphi + n_e^2\cos^2\varphi}\right)$$

方法二．

用费马原理．如光图4－32－2所示，实线为光线从 A 点入射经折射到达 B 点的任一可能路径．设入射角为 θ_i，折射角为 θ_r，各向同性介质折射率为 n_1，晶体的主折射率为 n_o 和 n_e，晶体对e光的光线折射率为 n_r（$n_r = \frac{c}{v_r}$，v_r 是光线速度）．由光图4－32－2，从 A 点到 B 点的总光程为



光图 4－32－2

$$L = n_1\sqrt{h_1^2 + (D - x)^2} + n_r\sqrt{x^2 + h_2^2} \tag{5}$$

式中 n_r 与 θ_r 有关，由下式决定

$$n_r^2 = n_e^2\sin^2\theta + n_o^2\cos^2\theta$$

式中

$$\theta = \theta_r + \varphi$$

是折射光线与晶体光轴的夹角，故

$$n_r = \sqrt{n_e^2\sin^2(\theta_r + \varphi) + n_o^2\cos^2(\theta_r + \varphi)}$$

把上式代入(5)式，并利用下述关系

$$\sin(\theta_r + \varphi) = \sin\theta_r\cos\varphi + \cos\theta_r\sin\varphi = \frac{x\cos\varphi + h_2\sin\varphi}{\sqrt{x^2 + h_2^2}}$$

$$\cos(\theta_r + \varphi) = \cos\theta_r\cos\varphi - \sin\theta_r\sin\varphi = \frac{h_2\cos\varphi - x\sin\varphi}{\sqrt{x^2 + h_2^2}}$$

则(5)式可写成

$$L = n_1\sqrt{h_1^2 + (D - x)^2} + [n_e^2(x\cos\varphi + h_2\sin\varphi)^2 + n_o^2(h_2\cos\varphi - x\sin\varphi)^2]^{\frac{1}{2}}$$

可见

$$L = L(x)$$

即光程 L 是 x 的函数．由费马原理，光线的实际路径是 L 为极值的路径，即应满足

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = 0$$

由此条件，得出

$$\frac{n_1(D - x)}{\sqrt{h_1^2 + (D - x)^2}} = \frac{n_e^2(x\cos\varphi + h_2\sin\varphi)\cos\varphi - n_o^2(h_2\cos\varphi - x\sin\varphi)\sin\varphi}{[n_e^2(x\cos\varphi + h_2\sin\varphi)^2 + n_o^2(h_2\cos\varphi - x\sin\varphi)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

或

$$n_1\sin\theta_i = \frac{n_e^2\cos\varphi\sin(\theta_r + \varphi) - n_o^2\sin\varphi\cos(\theta_r + \varphi)}{\sqrt{n_e^2\sin^2(\theta_r + \varphi) + n_o^2\cos^2(\theta_r + \varphi)}}$$

产生全反射的条件是

$$\theta_r = \frac{\pi}{2}$$

因此，全反射临界角满足

$$\sin\theta_i = \frac{1}{n_1}\sqrt{n_e^2\cos^2\varphi + n_o^2\sin^2\varphi}$$

与方法一的结果相同．

【题33】 单轴晶体中的 e 光光线在晶体内表面反射时一般不遵从通常的反射定律．已知晶体的光轴方向与晶体表面的法线之间的夹角为 φ，e 光沿主截面入射到内表面上．试导出 e 光光线反射时入射角与反射角之间的关系．

【分析】 上题(本章题 32) 讨论 e 光在单轴晶体内的折射．本题讨论 e 光在单轴晶体内的反射，

可谓姐妹题．问题的复杂性来源于晶体的各向异性，使得e光的波面为椭球，导致波法线（波面传播方向）与光线（能量传播方向）的不一致．

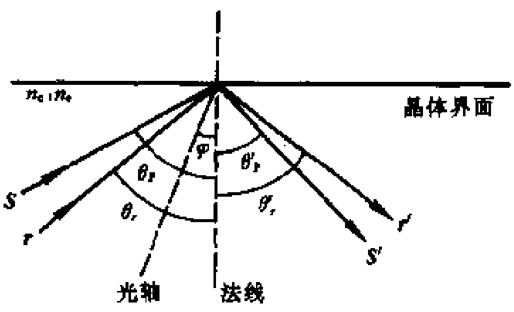
本题讨论的基础是，e光的波法线在晶体中折射或反射时遵从的折射定律或反射定律是由电磁场的边界条件得出的，其形式与各向同性介质中的折射定律或反射定律相仿，但应注意e光波法线在不同方向的折射率（即传播速度）是不同的．然后，再利用e光的波法线和光线传播方向之间的关系，得出光线的入射角与反射角之间的关系．

当然，也可利用费马原理求解．

【解】 方法一．

由于晶体的各向异性，e光的波法线方向 s 和光线方向 r 彼此分离，如光图4－33－1所示，波法线的入射角与反射角分别表为 θ_P 和 θ'_P；相应的光线的入射角与反射角分别表为 θ_r 和 θ'_r．由电磁场的边界条件可证明，波法线遵从的反射定律为

$$\frac{\sin\theta'_P}{\sin\theta_P}=\frac{n}{n'} \tag{1}$$



光图4－33－1

式中 n 和 n' 分别为入射波法线和反射波法线在各自方向上的折射率．根据上题（本章题32）的（2）式，它们分别等于

$$n=\frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2\sin^2\theta+n_e^2\cos^2\theta}}$$

$$n'=\frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2\sin^2\theta'+n_e^2\cos^2\theta'}}$$

式中 θ 和 θ' 分别为入射波法线和反射波法线与晶体光轴的夹角，如光图4－33－1，为

$$\theta=\pi-(\theta_P-\varphi),\quad \theta'=(\theta'_P+\varphi)$$

代入（1）式，得

$$\frac{\sin^2\theta'_P}{\sin^2\theta_P}=\frac{n_o^2\sin^2(\theta'_P+\varphi)+n_e^2\cos^2(\theta'_P+\varphi)}{n_o^2\sin^2(\theta_P-\varphi)+n_e^2\cos^2(\theta_P-\varphi)} \tag{2}$$

（2）式给出了波法线的入射角 θ_P 和反射角 θ'_P 之间的关系．

利用光线与波法线传播方向之间的关系，可由（2）式得出光线的入射角 θ_r 与反射角 θ'_r 之间的关系．为此，把（2）式两端乘以 $\dfrac{\cos^2(\theta_P-\varphi)}{\cos^2(\theta'_P+\varphi)}$，并利用下述三角公式

$$\sin\theta'_P=\sin(\theta'_P+\varphi)\cos\varphi-\cos(\theta'_P+\varphi)\sin\varphi$$

$$\sin\theta_P=\sin(\theta_P-\varphi)\cos\varphi+\cos(\theta_P-\varphi)\sin\varphi$$

则（2）式可改写为

$$\left[\frac{\tan(\theta'_P+\varphi)\cos\varphi-\sin\varphi}{\tan(\theta_P-\varphi)\cos\varphi+\sin\varphi}\right]^2=\frac{n_e^2+n_o^2\tan^2(\theta'_P+\varphi)}{n_e^2+n_o^2\tan^2(\theta_P-\varphi)} \tag{3}$$

单轴晶体中波法线方向与光线方向之间的关系如上题（本章题32）（4）式，为

$$\tan\theta=\frac{n_e^2}{n_o^2}\tan\xi$$

式中 θ 和 ξ 分别是波法线和光线与光轴的夹角，在本题中，为

$$\tan(\theta'_P+\varphi)=\frac{n_e^2}{n_o^2}\tan(\theta'_r+\varphi)$$

$$\tan(\theta_P-\varphi)=\frac{n_e^2}{n_o^2}\tan(\theta_P-\varphi)$$

代入(3)式，得

$$\left[\frac{n_e^2\tan(\theta'_r+\varphi)\cos\varphi-n_o^2\sin\varphi}{n_e^2\tan(\theta_r-\varphi)\cos\varphi+n_o^2\sin\varphi}\right]^2=\frac{n_o^2+n_e^2\tan^2(\theta'_r+\varphi)}{n_o^2+n_e^2\tan^2(\theta_r-\varphi)}\tag{4}$$

(4)式给出了光线的入射角 θ_r 与反射角 θ'_r 之间的关系．给定入射角 θ_r 后，(4)式是 $\tan(\theta'_r+\varphi)$ 的二次方程．解此方程可以得出反射角 θ'_r 的两个数学根．不难看出，$\theta'_r=-\theta_r$ 是(4)式的一个根，它表示反射光线沿原入射光线方向逆向传播，不合理，应弃去．另一个根就是所求的光线的反射角．

对于各向同性介质，$n_o=n_e$，(4)式简化为

$$\left[\frac{\sin\theta'_r\cos(\theta_r-\varphi)}{\sin\theta_r\cos(\theta'_r+\varphi)}\right]^2=\frac{\cos^2(\theta_r-\varphi)}{\cos^2(\theta'_r+\varphi)}$$

为满足上式，必须有 $\theta'_r=\theta_r$，即在各向同性介质中入射角等于反射角．

对于晶体，若光轴与界面垂直，即 $\varphi=0$，则(4)式也给出 $\theta'_r=\theta_r$，这显然是合理的．

方法二．

利用费马原理．如光图 4－33－2 所示，光线在晶体内从 A 点经反射到达 B 点，入射角为 θ_r，反射角为 θ'_r．所经任一可能路径的光程 L 为

$$L=n_r\sqrt{h_1^2+(D-x)^2}+n'_r\sqrt{x^2+h_2^2}\tag{5}$$

式中 n_r 和 n'_r 分别是入射光和反射光方向的光线折射率．光线折射率由下式决定

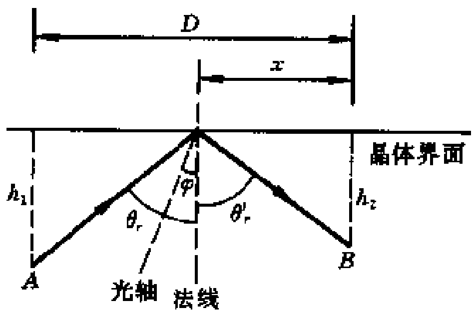
$$n_r^2=n_e^2\sin^2\theta+n_o^2\cos^2\theta$$

式中 θ 为光线与光轴之间的夹角，对于入射光，

$$\theta=\pi-(\theta_r-\varphi)$$

对于反射光

$$\theta'=\theta'_r+\varphi$$



光图 4－33－2

故

$$n_r=\sqrt{n_e^2\sin^2(\theta_r-\varphi)+n_o^2\cos^2(\theta r-\varphi)}$$

$$n'_r=\sqrt{n_e^2\sin^2(\theta'_r+\varphi)+n_o^2\cos^2(\theta' r+\varphi)}$$

代入(5)式，并利用下述关系

$$\sin(\theta_r-\varphi)=\sin\theta_r\cos\varphi-\cos\theta_r\sin\varphi=\frac{(D-x)\cos\varphi-h_1\sin\varphi}{\sqrt{(D-x)^2+h_1^2}}$$

$$\cos(\theta_r-\varphi)=\cos\theta_r\cos\varphi+\sin\theta_r\sin\varphi=\frac{h_1\cos\varphi+(D-x)\sin\varphi}{\sqrt{(D-x)^2+h_1^2}}$$

$$\sin(\theta_r' - \varphi) = \sin\theta_r'\cos\varphi + \cos\theta_r'\sin\varphi = \frac{x\cos\varphi + h_2\sin\varphi}{\sqrt{x^2 + h_2^2}}$$

$$\cos(\theta_r' + \varphi) = \cos\theta_r'\cos\varphi - \sin\theta_r'\sin\varphi = \frac{h_2\cos\varphi - x\sin\varphi}{\sqrt{x^2 + h_2^2}}$$

则(5)式可写成

$$L = \sqrt{n_e^2[(D - x)\cos\varphi - h_1\sin\varphi]^2 + n_o^2[(D - x)]\sin\varphi + h_1\cos\varphi]^2} + \sqrt{n_e^2(x\cos\varphi + h_2\sin\varphi)^2 + n_o^2(x\sin\varphi - h_2\cos\varphi)^2}$$

可见

$$L = L(x)$$

只是 x 的函数．由费马原理,反射光的实际路径是光程为极值的路径,应满足

$$\frac{dL}{dx} = 0$$

由此条件,得出

$$\frac{n_e^2\cos\varphi\sin(\theta_r - \varphi) + n_o^2\sin\varphi\cos(\theta_r - \varphi)}{\sqrt{n_e^2\sin^2(\theta_r - \varphi) + n_o^2\cos^2(\theta_r - \varphi)}} = \frac{n_e^2\cos\varphi\sin(\theta_r' + \varphi) - n_o^2\sin\varphi\cos(\theta_r' + \varphi)}{\sqrt{n_e^2\sin^2(\theta_r' + \varphi) + n_o^2\cos^2(\theta_r' + \varphi)}} \tag{6}$$

令

$$\begin{cases} A\cos\beta = n_e^2\cos\varphi \\ A\sin\beta = n_o^2\sin\varphi \end{cases}$$

即令

$$\tan\beta = \frac{n_o^2}{n_e^2}\tan\varphi$$

则(6)式可写成

$$\frac{\sin(\theta_r - \varphi + \beta)}{\sqrt{n_e^2\sin(\theta_r - \varphi) + n_o^2\cos^2(\theta_r - \varphi)}} = \frac{\sin(\theta_r' + \varphi - \beta)}{\sqrt{n_e^2\sin(\theta_r' + \varphi) + n_o^2\cos^2(\theta_r' + \varphi)}} \tag{7}$$

(7)式给出了入射角 θ_r 与反射角 θ_r' 之间的关系．可以证明,(7)式与方法一给出的(4)式等价．

由(7)式可知,只在以下特殊情形,入射角 θ_r 才等于反射角 θ_r',即

(a) 对于各向同性介质,因 $n_o = n_e$,故 $\beta = \varphi$,由(7)式,得 $\theta_r = \theta_r'$.

(b) 掠入射,即当 $\theta_r = \frac{\pi}{2}$ 时,由(7)式解出 $\theta_r' = \frac{\pi}{2}$,即 $\theta_r = \theta_r'$.

(c) 晶体光轴与界面垂直,即 $\varphi = 0$,故 $\beta = 0$,由(7)式,得 $\theta_r = \theta_r'$.

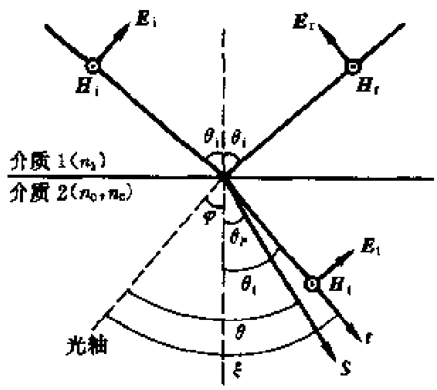
【题34】 折射率为 n_1 的各向同性介质(介质1)与主折射率为 n_o 和 n_e 的单轴晶体(介质2)构成一界面,晶体光轴与界面法线之间的夹角为 φ. 线偏振光从介质1沿晶体主截面斜入射,入射角为 θ_i,线偏振光的振动方向与主截面平行．试导出决定振幅反射系数和透射系数的公式．

【分析】 本题向读者指明,对各向同性介质界面适用的菲涅耳公式,一般不再适用于晶体界面．在一般情形下,同一入射光在单轴晶体内将分成传播方向不同的o光和e光,反射系数和透射系数的计算必须对这两种光分开进行．对晶体中的o光来说,其传播特征与在各向同性介质中相

同，因而通常的菲涅耳公式仍然适用．但对e光，由于其波法线方向与光线方向并不一致，折射率也要随传播方向变化，通常的菲涅耳公式不再适用．在一般情形下，计算与e光对应的反射系数和透射系数比较复杂．本题中的入射光沿主截面入射，因而反射光与折射光均同在入射面内，折射光对应晶体中的e光．在此特殊情形下，可以导出新的菲涅耳公式．

与各向同性介质一样，从电磁场的边界条件出发可导出振幅反射系数和透射系数遵从的公式．公式中包含了波法线和光线的折射角 θ_p 和 θ_t，两者并不一致．θ_p 遵守通常的折射定律，θ_t 则一般不遵守．为了能够得出实际可用的反射系数和透射系数的公式，必须进一步确定晶体中波法线方向和光线方向之间的关系．

【解】 如图所示，线偏振光沿晶体主截面入射，入射角为 θ_i. 在介质1中，入射光和反射光的波法线与光线重合．在晶体中，折射光的波法线与光线不重合．设波法线方向的单位矢量为 $\boldsymbol{S}$，光线方向的单位矢量为 $\boldsymbol{t}$，相应的折射角分别为 θ_P 和 θ_t. 入射光，反射光，折射光的电矢量振幅分别用 E_i, E_r, E_t 表示，对应的磁矢量振幅分别用 H_i, H_r, H_t 表示，它们的正方向如图所示．



光图 4－34－1

根据电磁场的边界条件，电矢量和磁矢量的切向分量必须连续，即应有

$$E_i\cos\theta_i - E_r\cos\theta_i = E_t\cos\theta_t \quad (1)$$

$$H_i + H_r = H_t \quad (2)$$

按电磁场理论，电矢量和磁矢量之间有如下关系

$$\boldsymbol{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{\mu_0\mu_r}}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{E}$$

式中 $\boldsymbol{S}$ 为波法线的单位矢量．入射光与反射光均在各向同性介质中，$\boldsymbol{S}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 垂直，故有

$$H_i = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}{\mu_0\mu_{r1}}}E_i,\quad H_r = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}{\mu_0\mu_{r1}}}E_r$$

折射光在晶体中，$\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 一般不重合，由图可知，

$$H_t - \sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}{\mu_0\mu_{r2}}}E_t\cos(\theta_t - \theta_p)$$

以上各式中的 $\varepsilon_{r1}, \varepsilon_{r2}$ 以及 μ_{r1}, μ_{r2} 分别是介质1(各向同性）和介质2(晶体）的相对电容率（又称介电常量）和相对磁导率．必须指出，晶体的相对电容率（介电常量）一般为张量，在此已对角化，ε_r 将只与折射方向有关．把以上各式代入(2) 式，得

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\mu_{r1}}}(E_i + E_r) = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\mu_{r2}}}E_t\cos(\theta_t - \theta_p) \quad (3)$$

波法线遵守折射定律，故有

$$n_1\sin\theta_i = n_p\sin\theta_p$$

式中

$$n_1 = \sqrt{\varepsilon_{r1}\mu_{r1}},\quad n_p = \frac{c}{v_p},\quad v_p = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{r2}\mu_{r2}}}$$

n_1 是介质 1 的折射率，n_p 是折射光波法线方向的折射率，v_p 是相应方向上的相速．利用上述关系，可把$\sqrt{\varepsilon_{r2}}$ 表为

$$\sqrt{\varepsilon_{r2}} = \frac{n_p}{\sqrt{\mu_{r2}}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}\mu_{r1}}{\mu_{r2}}}\,\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_p} \tag{4}$$

把(4) 式代入(3) 式，然后从(1) 式和(3) 式依次消去 E_t 和E_r，得出反射系数 R 和透射系数T 的公式为

$$\begin{cases} R = \dfrac{E_r}{E_i} = \dfrac{\mu_{r1}\sin\theta_i\cos\theta_i\cos(\theta_t-\theta_p) - \mu_{r2}\sin\theta_p\cos\theta_t}{\mu_{r1}\sin\theta_i\cos\theta_i\cos(\theta_t-\theta_p) + \mu_{r2}\sin\theta_p\cos\theta_t} \\ T = \dfrac{E_t}{E_i} = \dfrac{2\mu_{r1}\cos\theta_i\sin\theta_p}{\mu_{r1}\sin\theta_i\cos\theta_i\cos(\theta_t-\theta_p) + \mu_{r2}\sin\theta_p\cos\theta_t} \end{cases} \tag{5}$$

对于各向同性介质界面，$\theta_t = \theta_p$，上式立即变为通常的菲涅耳公式．

利用(4) 式，消去 $\sin\theta_p$，(5) 式可改写为

$$\begin{cases} R = \dfrac{\dfrac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} n_p\cos(\theta_t-\theta_p)\cos\theta_i - n_1\cos\theta_t}{\dfrac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} n_p\cos(\theta_t-\theta_p)\cos\theta_i + n_1\cos\theta_t} \\ T = \dfrac{2\dfrac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} n_1\cos\theta_i}{\dfrac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} n_p\cos(\theta_t-\theta_p)\cos\theta_i + n_1\cos\theta_t} \end{cases} \tag{6}$$

对大多数介质，

$$\mu_{r1} \approx \mu_{r2} \approx 1$$

令

$$n_2^* = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} n_p\cos(\theta_t-\theta_p) \approx n_p\cos(\theta_t-\theta_p) \tag{7}$$

则(6) 式可写成

$$\begin{cases} R = \dfrac{n_2^*\cos\theta_i - n_1\cos\theta_t}{n_2^*\cos\theta_i + n_1\cos\theta_t} \\ T = \dfrac{2n_1\cos\theta_i}{n_2^*\cos\theta_i + n_1\cos\theta_t} \end{cases} \tag{8}$$

这就得到了形式上与各向同性情形相仿的公式．但应注意，n_2^* 不是单纯的第二介质的折射率，它与折射光波法线方向上的折射率 n_p 以及波法线和光线的方向都有关．另外，光线的折射角 θ_t 不能用常规的折射定律求得，因为晶体中的光线一般不遵守折射定律．

为了能够利用(8) 式求得 R 和T，必须进一步确定 θ_t 和n_2^*．θ_t 可通过θ_p 确定，因光线方向和波法线方向之间有一简单关系．设波法线方向和光线方向与光轴的夹角分别为 θ 和 ξ(如图所示)，则有

$$\tan\theta = \frac{n_e^2}{n_o^2}\tan\xi \tag{9}$$

对图中的折射光，

$$\theta = \theta_p + \varphi, \quad \xi = \theta_t + \varphi$$

故有

$$\tan(\theta_p + \varphi) = \frac{n_e^2}{n_o^2}\tan(\theta_t + \varphi) \tag{10}$$

θ_p 可由(4)式决定，式中的 n_p 与波法线方向有关，相应的相速满足

$$v_p^2 = v_o^2\cos^2\theta + v_e^2\sin^2\theta$$

利用 $n_p = \frac{c}{v_p}$，有

$$\frac{1}{n_p^2} = \frac{\cos^2\theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2\theta}{n_e^2} \tag{11}$$

式中 n_o 和 n_e 是晶体的主折射率，对于如图所示的情形，$\theta = \theta_p + \varphi$，把以上结果代入(4)式，得

$$\frac{\sin^2\theta_p}{n_1^2\sin^2\theta_i} = \frac{\cos^2(\theta_p + \varphi)}{n_o^2} + \frac{\sin^2(\theta_p + \varphi)}{n_o^2} \tag{12}$$

给定入射角 θ_i，光轴夹角 φ，以及晶体主折射率 n_o 和 n_e 后，由(12)式可得 θ_p，利用(10)式可得 θ_t. 再由(11)式和(7)式求得 n_2^*，代入(8)式，最后求得 R 和 T.

例如，正入射时

$$\theta_i = \theta_p = 0$$

(7)式变为

$$n_2^* = n_p\cos\theta_t$$

由(10)式

$$\tan\varphi = \frac{n_e^2}{n_o^2}\tan(\theta_t + \varphi)$$

或

$$\frac{n_o^2}{n_e^2}\tan\varphi = \tan(\theta_t + \varphi) = \frac{\tan\theta_t + \tan\varphi}{1 - \tan\theta_t\tan\varphi}$$

$$\frac{n_o^2}{n_e^2}\tan\varphi - \frac{n_o^2}{n_e^2}\tan^2\varphi\tan\theta_t = \tan\theta_t + \tan\varphi$$

解出

$$\tan\theta_t = \frac{(n_o^2 - n_e^2)\sin\varphi\cos\varphi}{n_e^2\cos^2\varphi + n_o^2\sin^2\varphi}$$

或

$$\cos\theta_t = \frac{n_o^2\sin^2\varphi + n_e^2\cos^2\varphi}{\sqrt{n_o^4\sin^2\varphi + n_e^4\cos^2\varphi}}$$

由(11)式，得

$$n_p = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2\sin^2\varphi + n_e^2\cos^2\varphi}}$$

由(8)式，有

$$R=\frac{n_2^*-n_1\cos\theta_t}{n_2^*+n_1\cos\theta_t}=\frac{n_p-n_1}{n_p+n_1}=\frac{n_{\mathrm{o}}n_{\mathrm{e}}-n_1\sqrt{n_{\mathrm{o}}^2\sin^2\varphi+n_{\mathrm{e}}^2\cos^2\varphi}}{n_{\mathrm{o}}n_{\mathrm{e}}+n_1\sqrt{n_{\mathrm{o}}^2\sin^2\varphi+n_{\mathrm{e}}^2\cos^2\varphi}}$$

$$T=\frac{2n_1}{n_2^*+n_1\cos\theta_t}=\frac{2n_1}{(n_p+n_1)\cos\theta_t}$$

$$=\frac{2n_1\sqrt{\dfrac{n_{\mathrm{o}}^4\sin^2\varphi+n_{\mathrm{e}}^4\cos^2\varphi}{n_{\mathrm{o}}^2\sin^2\varphi+n_{\mathrm{e}}^2\cos^2\varphi}}}{n_{\mathrm{o}}n_{\mathrm{e}}+n_1\sqrt{n_{\mathrm{o}}^2\sin^2\varphi+n_{\mathrm{e}}^2\cos^2\varphi}}$$

对于各向同性介质，

$$n_{\mathrm{o}}=n_{\mathrm{e}}=n_2$$

上述两式变为各向同性情形的结果，即

$$R=\frac{n_2-n_1}{n_2+n_1}$$

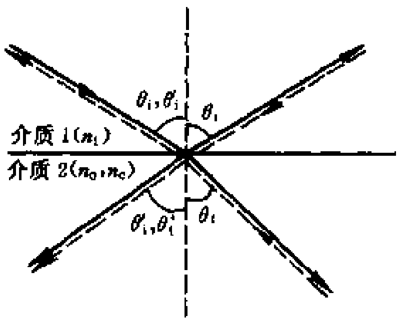
$$T=\frac{2n_1}{n_2+n_1}$$

【题35】 试由上题(本章题34)情形验证光的可逆性原理，并由光的可逆性原理推出反射系数和透射系数遵从的斯托克斯倒逆关系．

【分析】 如光图4－35－1所示，线偏振光从介质1(各向同性)向界面入射，入射角为 θ_i，在介质2(晶体)中e光光线的折射角为 θ_t，入射光沿原折射光线的逆方向入射到界面时，设介质1中折射光线的折射角为 θ'_i，晶体内反射光线的反射角为 θ'_t．入射光沿原反射光的逆方向入射到界面时，设晶体内折射光线的折射角为 θ_t^*．为验证光的可逆性原理，并据此推出斯托克斯倒逆关系，必须证明

$$\theta_i=\theta'_i$$

$$\theta'_t=\theta_t^*$$



光图 4－35－1

证明时应注意到：(i) 光从各向同性介质经界面反射时，遵守通常的反射定律．但光从晶体经界面反射时一般不遵守反射定律．(ii) 波法线遵从通常的反射定律，而光线则不遵从．(iii) 晶体中光线方向和波法线方向不一致．利用上题(本章题34)的(4)式，(9)式和(11)式，即可得证．

对各向同性介质界面，斯托克斯根据光的可逆性原理，得到了关于反射系数和透射系数的倒逆关系．设光从介质1入射到界面时，反射系数和透射系数分别为 R 和 T；设光从介质2沿原折射光逆向入射到界面时，反射系数和透射系数分别为 R' 和 T'，则斯托克斯倒逆关系为

$$R^2+TT'=1$$

$$R+R'=0$$

对晶体界面也存在相应的关系式．

【解】 偏振光以入射角 θ_i 从介质1向晶体界面入射时，波法线遵守折射定律(参看上题)，为

$$n_1\sin\theta_i=n_p\sin\theta_p \tag{1}$$

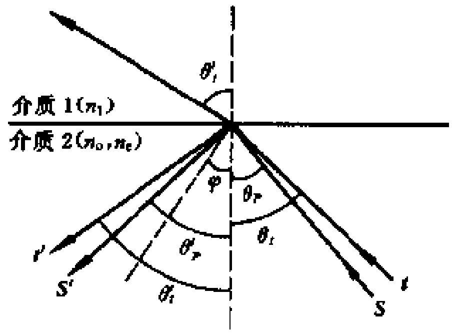
如光图 4－35－2 所示，光从晶体一侧沿原折射光逆向入射到界面时，设光线入射角为 θ_t，相应波法线的入射角为 θ_p，介质 1 中的折射角为 θ'_i，晶体内反射光线的反射角为 θ'_t，相应波法线的反射角为 θ'_p. 波法线遵从折射定律，即

$$n_p\sin\theta_p = n_1\sin\theta'_i \tag{2}$$

比较(1) 式和(2) 式，得

$$\theta'_i = \theta_i \tag{3}$$

即折射光沿原入射光的逆方向传播．



光图 4－35－2

又，波法线遵从反射定律，即

$$n_p\sin\theta_p = n'_p\sin\theta'_p$$

式中 n'_p 是晶体在反射光波法线方向上的折射率．应用上题中的(11) 式，并以

$$\theta = \theta'_p - \varphi$$

代入，得

$$\frac{1}{n'^2_p} = \frac{\cos^2(\theta'_p - \varphi)}{n_o^2} + \frac{\sin^2(\theta'_p - \varphi)}{n_e^2}$$

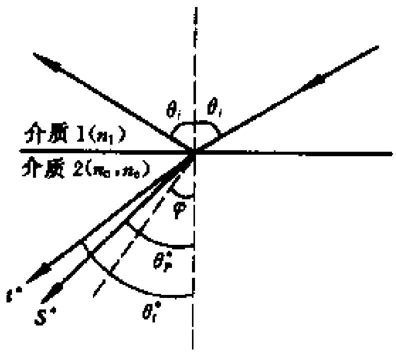
结合以上各式，得

$$\frac{\sin^2\theta'_p}{n_1\sin^2\theta_i} = \frac{\cos^2(\theta'_p - \varphi)}{n_o^2} + \frac{\sin^2(\theta'_p - \varphi)}{n_e^2} \tag{4}$$

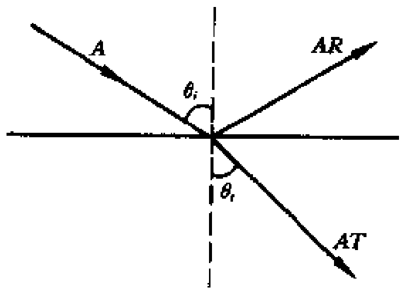
再应用上题中的(9) 式，并以 $\theta = \theta'_p - \varphi$ 和 $\xi = \theta'_t - \varphi$ 代入，得 θ'_t 与 θ'_p 的关系为

$$\tan(\theta'_p - \varphi) = \frac{n_e^2}{n_o^2}\tan(\theta'_t - \varphi) \tag{5}$$

(4) 式和(5) 式给出了晶体内反射光的波法线方向和相应的光线方向．



光图 4－35－3



光图 4－35－4

如光图 4－35－3 所示，再令光从介质 1 沿原反射光的逆方向入射到界面，晶体中折射光的波法线和光线方向分别用 S^* 和 t^* 表示，相应的折射角为 θ_p^* 和 θ_t^*．与上题导出(10) 式和(12) 式相仿，可得[只须把上题(10) 式和(12) 式中的 φ 用 $-\varphi$ 代替即可]

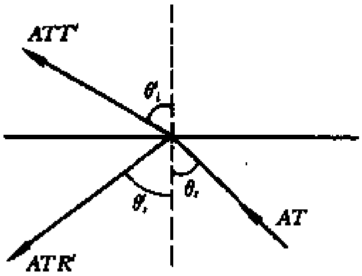
$$\frac{\sin^2\theta_p^*}{n_1^2\sin^2\theta_i} = \frac{\cos^2(\theta_p^* - \varphi)}{n_o^2} + \frac{\sin^2(\theta_p^* - \varphi)}{n_e^2}$$

$$\tan(\theta_p^* - \varphi) = \frac{n_e^2}{n_o^2}\tan(\theta_t^* - \varphi)$$

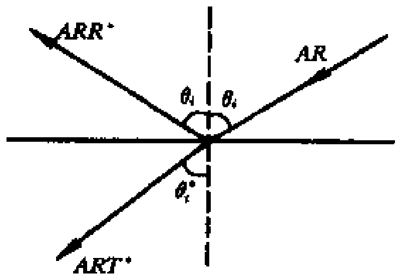
把以上两式分别与(4)式和(5)式比较，得

$$\begin{cases} \theta_p^* = \theta'_p \\ \theta_t^* = \theta'_t \end{cases} \tag{6}$$

(3)式与(6)式表明了光的可逆性原理的正确性．



光图 4－35－5



光图 4－35－6

为导出斯托克斯倒逆关系，考虑光图 4－35－4，光图 4－35－5 和光图 4－35－6 三种情形，三图中所画均为光线方向．光图 4－35－4 是入射光从各向同性介质入射，设振幅反射系数分别为 R 和 T，入射光振幅为 A，则反射光振幅为 AR，透射光振幅为 AT．光图 4－35－5 是入射光从晶体一侧入射，设振幅反射系数和透射系数分别为 R' 和 T'，入射振幅为 AT，则反射振幅为 ATR'，透射振幅为 ATT'．光图 4－35－6 是入射光沿光图 4－35－4 反射光的逆方向入射，设振幅反射系数和透射系数分别为 R^* 和 T^*，入射振幅为 AR，则反射振幅为 ARR^*，透射振幅为 ART^*．根据光的可逆性原理，光图 4－35－5 和光图 4－35－6 合起来，应得出光图 4－35－4 的逆向传播情形．于是有

$$ATT' + ARR^* = A$$
$$ATR' + ART^* = 0$$

即

$$\begin{cases} TT' + RR^* = 1 \\ R'T + RT^* = 0 \end{cases} \tag{7}$$

此即所求的斯托克斯倒逆关系，它也可根据上题导出的菲涅耳公式求出．显然，对各向同性介质的界面，有 $R^* = R, T^* = T$，于是(7)式立即回到各向同性介质界面的倒逆关系，为

$$\begin{cases} R^2 + TT' = 1 \\ R + R' = 0 \end{cases}$$

第五章 光的色散，散射和吸收

【题1】 已知冕牌玻璃 k9 的折射率遵从下述科希公式，

$$n=A+\frac{B}{\lambda^2}+\frac{C}{\lambda^4}$$

式中 $A=1.504, B=4.437\times10^3\ \mathrm{nm}^2, C=-1.387\times10^8\ \mathrm{nm}^4$. 试求该玻璃对钠黄色双线的相速和群速．已知双线的平均波长为 589.3 nm，冕牌玻璃对该波长的折射率为 1.51630.

【分析】 科希公式是描述正常色散的经验公式，它给出了介质折射率 n，对波长 λ 的依赖关系，其形式为 $n=A+\frac{B}{\lambda^2}+\frac{C}{\lambda^4}$，式中 A,B,C 为实验常量，由介质性质决定．相速 v_p 是单色波相位传播的速度，在折射率为 n 的介质中 $v_p=\frac{c}{n}$，其中 c 是真空中的光束．群速 v_g 是不同波长的波组成的波群的传播速度，即波群传播能量的速度，为

$$v_g=\frac{c}{n}\left(1+\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right)=v_p-\lambda\frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\lambda}$$

由科希公式求出色散率$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}$，代入上式，即可得出 v_g

【解】 相速为

$$v_p=\frac{c}{n}=1.979\times10^8\ \mathrm{m/s}$$

由科希公式，取 $\lambda=589.3$ nm，得出在此波长附近冕牌玻璃的色散率为

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}=-\frac{2B}{\lambda^3}-\frac{4C}{\lambda^5}=-3.555\times10^{-5}\ \mathrm{nm}^{-1}$$

群速为

$$v_g=\frac{c}{n}\left(1+\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right)=\frac{3\times10^8}{1.5163}\left(1-\frac{5893}{1.5163}\times3.555\times10^{-6}\right)\ \mathrm{m/s}=1.952\times10^8\ \mathrm{m/s}$$

可见，在冕牌玻璃中，钠的黄色双线的群速小于相速．

【题2】 已知氢的电子吸收谱位于远紫外波段，常温常压下氢在0.4 μm 到 9μm 波段的折射率遵从下述经验公式，

$$n^2=1+2.721\times10^{-4}+\frac{2.11\times10^{-18}}{\lambda^2}$$

式中波长 λ 以米(m)为单位．

试利用塞耳迈耶尔色散公式求：1. 氢原子的本征频率和相应的共振吸收波长．2. 振子的荷质比，已知氢的密度为 $9.0\times10^{-2}\ \mathrm{kg/m^3}$.

【分析】 塞耳迈耶尔色散公式可根据经典的电磁理论或量子理论导出，它描述介质折射率随波

长(或频率)的变化与介质中包含的各种偶极振子的性质(如荷质比,本征频率)的关系．对于氢原子,只包含一种振子,塞氏公式的形式比较简单．

把塞氏色散公式与经验的色散公式相结合,即可确定本征频率,与之相应的共振吸收波长,以及振子的荷质比．

【解】 1. 经典的塞耳迈耶尔色散公式为

$$n^2=1+\frac{N}{4\pi^2\varepsilon_0}\sum_i\frac{f_iq_i^2}{m_i(\nu_i^2-\nu^2)}$$

式中 N 为单位体积中的偶极振子数,$\frac{q_i}{m_i}$为振子的荷质比,ν_i 为振子的本征频率,f_i 是本征频率为 ν_i 的振子所占的百分数．对于氢原子,只包括一种振子,并只考虑一种频率,则上式简化为

$$n^2=1+\frac{Nq^2}{4\pi^2\varepsilon_0 m}\cdot\frac{1}{\nu_i^2-\nu^2}=1+\frac{Nq^2}{4\pi^2\varepsilon_0 m\nu_i^2}\left(1-\frac{\nu^2}{\nu_i^2}\right)^{-1}$$

因题给折射率的经验公式适用在红外区,其频率远离远紫外吸收区,故有

$$\nu\ll\nu_i$$

上式变为

$$n^2=1+\frac{Nq^2}{4\pi^2\varepsilon_0 m\nu_i^2}\left(1+\frac{\nu^2}{\nu_i^2}\right)$$

因

$$\lambda=\frac{c}{\nu},\quad \lambda_i=\frac{c}{\nu_i}$$

上式可写为

$$n^2=1+A\left(1+\frac{B}{\lambda^2}\right)\tag{1}$$

式中

$$A=\frac{Nq^2}{4\pi^2\varepsilon_0 m\nu_i^2},\quad B=\lambda_i^2$$

$$\frac{A}{B}=\frac{Nq^2}{4\pi^2\varepsilon_0 c^2 m}$$

氢的经验色散公式为

$$n^2=1+2.721\times10^{-4}+\frac{2.11\times10^{-18}}{\lambda^2}\tag{2}$$

由(1)式和(2)式,得

$$A=2.721\times10^{-4}$$

$$B=\frac{2.11\times10^{-18}}{A}=0.78\times10^{-14}\ \mathrm{m}^2=\lambda_i^2$$

故与本征频率 ν_i 相应的共振吸收波长为

$$\lambda_i=\sqrt{B}=\sqrt{0.78\times10^{-14}}=8.83\times10^{-8}\ \mathrm{m}=88.3\ \mathrm{nm}$$

位于远紫外区．本征频率为

$$\nu_i = \frac{c}{\lambda_i} = 3.40 \times 10^{15}\ \text{Hz}$$

2. 设偶极振子所带电量 $q = ke$，其中 e 为电子电荷，k 为整数，则由

$$\frac{A}{B} = k^2 \frac{e}{m} \cdot \frac{Ne}{4\pi^2 \varepsilon_0 c^2}$$

得

$$k^2 \frac{e}{m} = \frac{4\pi^2 \varepsilon_0 c^2}{Ne} \cdot \frac{A}{B}$$

式中 N 是单位体积的氢原子数，为

$$N = 2N_0 \frac{\rho}{\mu} = 2 \times 6.023 \times 10^{23} \times \frac{9.0 \times 10^{-2}}{2 \times 10^{-3}} = 5.42 \times 10^{25}\ \text{m}^{-3}$$

故

$$k^2 \frac{e}{m} = \frac{4\pi^2 \times 8.854 \times 10^{-12} \times (3 \times 10^8)^2 \times 2.721 \times 10^{-4}}{5.42 \times 10^{25} \times 1.60 \times 10^{-19} \times 0.78 \times 10^{-14}} = 1.27 \times 10^{11}\ \text{C/kg}$$

因电子荷质比为

$$\frac{e}{m} = 1.76 \times 10^{11}\ \text{C/kg}$$

故应取

$$k = 1$$

上述结果表明，决定氢紫外吸收的是电子振子．应指出，以上只考虑了氢原子中电子振子对色散的影响．由于氢分子包括两个氢原子，分子振子具有另一种本征频率，它对氢的色散关系也有影响．

【题 3】 已知 CaF_2 在 0.3 μm 到 10 μm 波长范围内的折射率的经验公式为

$$n^2 = 6.09 + \frac{6.12 \times 10^{-15}}{\lambda^2 - 8.88 \times 10^{-15}} + \frac{5.10 \times 10^{-9}}{\lambda^2 - 1.26 \times 10^{-9}}$$

式中波长 λ 的单位是米(m).

试求：1. CaF_2 吸收谱的波长．2. 根据所给数据估算质子和电子的质量比．已知 F 的原子量为 19，Ca 的原子量为 40.

【分析】 作为一种最简单的设想，可以认为 CaF_2 晶体中包括两种振荡，一种是 CaF_2 中价电子的振荡，设其本征频率为 ν_1，另一种是 F 离子相对 Ca 离子的振荡，设其本征频率为 ν_2．然后，根据经典的塞耳迈耶尔色散公式(见上题)及题设的经验色散公式，两相比较即可求解．

【解】 1. CaF_2 晶体中包括两种振荡；CaF_2 中价电子的振荡，本征频率为 ν_1；F 离子相对 Ca 离子的振荡，本征频率为 ν_2．由塞氏色散公式，CaF_2 的折射率可表为

$$n^2 = 1 + \frac{N_1 q_1^2}{4\pi^2 \varepsilon_0 m_1 (\nu^2 - \nu_1^2)} + \frac{N_2 q_2^2}{4\pi^2 \varepsilon_0 m_2 (\nu^2 - \nu_2^2)} \tag{1}$$

式中 N_1 和 N_2 分别是单位体积中的电子振子数和 Ca－F 振子数，m_1 和 m_2 是两种振子的质量．因 Ca 提供两个价电子，两个 F 离子均为一价，故

$$N_1 = N_2$$

$$q_1=q_2=e$$

$$m_1=m_e$$

式中 e 和 m_e 分别是电子的电量和质量．m_2 为 Ca－F 系统的折合质量，即

$$m_2=\frac{m_{Ca}m_F}{m_{Ca}+m_F}=\frac{40\times19}{40+19}m_H=12.9m_H$$

式中 m_H 为质子质量．

因 $\nu=\frac{c}{\lambda}$，把(1)式改写为

$$\begin{aligned}n^2&=1+\frac{N_1q_1^2\lambda^2\lambda_1^2}{4\pi^2\varepsilon_0m_1c^2(\lambda^2-\lambda_1^2)}+\frac{N_2q_2^2\lambda^2\lambda_2^2}{4\pi^2\varepsilon_0m_2c^2(\lambda^2-\lambda_2^2)}\\&=1+C_1\frac{\lambda^2\lambda_1^2}{\lambda^2-\lambda_1^2}+C_2\frac{\lambda^2\lambda_2^2}{\lambda^2-\lambda_2^2}\\&=1+C_1\frac{\lambda_1^2(\lambda^2-\lambda_1^2+\lambda_1^2)}{\lambda^2-\lambda_1^2}+C_2\frac{\lambda_2^2(\lambda^2-\lambda_2^2+\lambda_2^2)}{\lambda^2-\lambda_2^2}\\&=1+C_1\lambda_1^2+C_2\lambda_2^2+\frac{C_1\lambda_1^4}{\lambda^2-\lambda_1^2}+\frac{C_2\lambda_2^4}{\lambda^2-\lambda_2^2}\end{aligned}\tag{2}$$

式中

$$C_1=\frac{N_1q_1^2}{4\pi^2\varepsilon_0m_1c^2},\quad C_2=\frac{N_2q_2^2}{4\pi^2\varepsilon_0m_2c^2}$$

CaF_2 的经验色散公式为

$$n^2=6.09+\frac{6.12\times10^{-15}}{\lambda^2-8.88\times10^{-15}}+\frac{5.10\times10^{-9}}{\lambda^2-1.26\times10^{-9}}\tag{3}$$

把(2)式与(3)式比较，得出 CaF_2 的吸收谱波长为

$$\lambda_1=\sqrt{8.88\times10^{-15}}=9.42\times10^{-8}\text{ m}=94.2\text{ nm(紫外)}$$

$$\lambda_2=\sqrt{1.26\times10^{-9}}=3.55\times10^{-5}\text{ m}=3.50\times10^{4}\text{ nm(红外)}$$

可见，与电子振子对应的吸收线在紫外区，与 Ca－F 振子对应的吸收线在红外区．

2．把(2)式与(3)式比较，还可得出

$$C_1\lambda_1^4=6.12\times10^{-15},\quad C_2\lambda_2^4=5.10\times10^{-9}$$

故

$$\frac{C_2}{C_1}=\frac{C_2\lambda_2^4}{C_1\lambda_1^4}\cdot\frac{\lambda_1^4}{\lambda_2^4}=\frac{5.10\times10^{-9}}{6.12\times10^{-15}}\left(\frac{8.88\times10^{-15}}{1.26\times10^{-9}}\right)^2=4.15\times10^{-5}$$

由 C_1 和 C_2 的定义，得

$$\begin{aligned}\frac{C_2}{C_1}&=\frac{N_2q_2^2}{4\pi^2\varepsilon_0m_2c^2}\cdot\frac{4\pi^2\varepsilon_0m_1c^2}{N_1q_1^2}\\&=\frac{N_2q_2^2m_1}{N_2q_1^2m_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{m_e}{12.9m_H}\end{aligned}$$

故

$$\frac{m_{\mathrm{H}}}{m_{\mathrm{e}}}=\frac{1}{12.9\times4.15\times10^{-5}}=1868$$

这个数值与质子和电子的质量比的正确值 1840 相当接近．这种估算在探索红外振荡的原子机理方面起过重要作用．

【题 4】 1．试证明，在 X 射线波段，物质的色散规律为

$$n^2=1-K\lambda^2$$

式中 λ 为 X 射线在真空中的波长，K 为与电子数密度有关的系数．试求铜的 K 值，已知铜的原子序数 $Z=29$，原子量 $A=63$，密度 $\rho=8\times10^3\ \mathrm{kg/m^3}$．

2．试证明，X 射线在物质中的相速 v_p 和群速 v_g 遵从下述关系

$$v_pv_g=c^2$$

式中 c 为真空中的光速．

【分析】 根据经典的塞耳迈耶尔色散公式，注意到 X 射线的特点是频率很高，远大于物质中电子和离子的本征频率，即 $\nu\gg\nu_i$，并考虑到离子质量远大于电子质量，即可得出适用于 X 射线的物质色散公式．

由相速和群速的定义，以及适用于 X 射线的色散公式，即可证明 $v_pv_g=c^2$．

本题提醒读者，由于 X 射线的频率很高，会带来一些新的特点．

【解】 1．经典的塞氏色散公式为（见以上两题，即本章题 2 和题 3）

$$n^2=1+\frac{N}{4\pi^2\varepsilon_0}\sum_i\frac{f_iq_i^2}{m_i(\nu_i^2-\nu^2)}$$

对于 X 射线，其频率远大于物质中电子和离子的本征频率，即

$$\nu\gg\nu_i$$

故 ν_i 可略．又因离子质量远大于电子质量．故上式只需保留前两项，取 m_i 为 m_e，得

$$n^2=1-\frac{Ne^2}{4\pi^2\varepsilon_0m_e\nu^2}$$

式中 N 为单位体积电子数．又因 $\nu=\frac{c}{\lambda}$，上式可写为

$$n^2=1-\frac{Ne^2}{4\pi^2\varepsilon_0m_ec^2}\lambda^2=1-K\lambda^2 \tag{1}$$

式中

$$K=\frac{Ne^2}{4\pi^2\varepsilon_0m_ec^2}$$

对于铜，一个铜原子包括 $Z=29$ 个电子，故

$$N=Z\frac{\rho}{\mu}N_0=\frac{29\times8\times10^3\times6.023\times10^{23}}{63\times10^{-3}}=2.22\times10^{30}\ \mathrm{m^{-3}}$$

故

$$K=\frac{2.22\times10^{30}\times(1.60\times10^{-19})^2}{4\pi^2\times8.854\times10^{-12}\times9.11\times10^{-31}\times(3\times10^8)^2}=1.98\times10^{15}\ \mathrm{m^{-2}}$$

对波长只有 0.1 nm 数量级的 X 射线来说，$K\lambda^2\ll1$，因此，几乎所有物质，对 X 射线而言，折射率

都接近于1,即

$$n\approx 1$$

2. 相速 v_p 的定义为

$$v_p=\frac{c}{n}$$

对于X射线,由(1)式,得

$$v_p=\frac{c}{\sqrt{1-K\lambda^2}}$$

群速 v_g 的定义为

$$v_g=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}K}=\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\left(\frac{1}{\lambda'}\right)}$$

式中 λ' 是在物质中的波长,它与在真空中的波长 λ 的关系为

$$\lambda'=\frac{\lambda}{n}$$

故

$$v_g=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{c}{\lambda}\right)}{\mathrm{d}\left(\frac{n}{\lambda}\right)}\approx\frac{c\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\mathrm{d}\left(\frac{n}{\lambda}\right)}$$

对于X射线,由(1)式,有

$$\frac{1}{\lambda}=\sqrt{\left(\frac{n}{\lambda}\right)^2+K}$$

故

$$v_g=\frac{c\,\frac{n}{\lambda}}{\sqrt{\left(\frac{n}{\lambda}\right)^2+K}}=\frac{\frac{cn}{\lambda}}{\sqrt{\frac{n^2+K\lambda^2}{\lambda^2}}}=cn$$

因此,

$$v_pv_g=c^2$$

【题5】 假设对金属光学性质有影响的是价电子 .1. 试导出在弱阻尼情形下金属的色散关系 . 2. 试求正入射时能量反射率与波长的关系 .

【分析】 金属中的色散关系是指金属的相对电容率(又称介电常数)ε_r 随波长 λ 或频率 ν 的变化关系 . 由导体(金属)中的麦克斯韦方程(注意,传导电流密数度 $j_0=\sigma E$)可得出导体中的波动方程,把它与一般的非导体中的波动方程比较,可得出金属的复数相对电容率(又称介电常量)的表达式 .

由题设,金属的光学性质取决于价电子,因价电子受正离子的束缚较弱,其本征频率为零,在外电场作用下,价电子的运动是弱阻尼的受迫振动 . 由此可确定价电子在外电场作用下的运动、形成的电偶极矩以及极化强度矢量 . 然后,根据极化规律,便可得出金属的复数相对电容率(介

电常量）

由上述关系，加上弱阻尼条件（阻尼可略），即可得出金属的色散关系．

正入射时能量反射率的公式可由菲涅耳公式得出．结合金属折射率 $n=\sqrt{\varepsilon_r}$ 的特点，即可求解第2问．

【解】 1．导体（金属）中的麦克斯韦方程为

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu_0\mu_r\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\sigma\boldsymbol{E}+\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{2}$$

式中 μ_r 为相对磁导率，ε_r 为相对电容率（介电常量），σ 为电导率．对(1)式取旋度，并利用下述公式

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E}=-\nabla^2\boldsymbol{E}$$

得

$$\begin{aligned}\nabla^2\boldsymbol{E}&=\mu_0\mu_r\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{H})\\&=\mu_0\mu_r\frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma\boldsymbol{E}+\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)\\&=\mu_0\mu_r\left(\sigma\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}\right)\end{aligned} \tag{3}$$

设波动解为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}$$

式中 $\boldsymbol{k}$ 为波矢量，

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}$$

故有

$$\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\mathrm{i}\omega\boldsymbol{E},\quad\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=-\omega^2\boldsymbol{E}$$

代入(3)式，得

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\mu_0\mu_r\left(\varepsilon_0\varepsilon_r-\frac{\mathrm{i}\sigma}{\omega}\right)\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0$$

或

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\varepsilon_0\mu_0\mu_r\left(\varepsilon_r-\mathrm{i}\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}\right)\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0$$

上式即导体中的波动方程．

非导体中的波动方程为

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\varepsilon_0\mu_0\varepsilon_r\mu_r\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0$$

把两个波动方程相比较，得出金属的复数相对电容率（介电常量）为

$$\tilde{\varepsilon}_r=\varepsilon_r-\mathrm{i}\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}$$

由题设，对金属光学性质有影响的是价电子，现在考察价电子在外电场作用下的运动．因价电子受正离子的束缚较弱，其本征频率为 $\omega_0=0$，故在外电场作用下，价电子的受迫振动方程为

$$\ddot{\tilde{x}}+2\beta\dot{\tilde{x}}=-\frac{e}{m_e}\tilde{E}$$

式中

$$\tilde{E}=E_0e^{i\omega t}$$

为外电场，m_e 为电子质量，β 为衰减系数．设上述方程的稳定解为

$$\tilde{x}=Ae^{i\omega t}$$

代入上式，得

$$(-\omega^2+i2\beta\omega)Ae^{i\omega t}=-\frac{e}{m_e}E_0e^{i\omega t}$$

即

$$A=\frac{eE_0}{m_e(\omega^2-i2\beta\omega)}$$

故价电子运动的稳定解为

$$\tilde{x}=\frac{eE_0e^{i\omega t}}{m_e(\omega^2-i2\beta\omega)}=\frac{e\tilde{E}}{m_e(\omega^2-i2\beta\omega)}$$

在外电场作用下由价电子运动形成的偶极矩为

$$\tilde{p}=-\widetilde{ex}=-\frac{e^2\tilde{E}}{m_e(\omega^2-i2\beta\omega)}$$

复数极化强度矢量为

$$\tilde{P}=\widetilde{Nr}=-\frac{Ne^2}{m_e(\omega^2-i2\beta\omega)}\tilde{E}$$

式中 N 为单位体积中的价电子数．由极化规律，

$$\tilde{p}=\varepsilon_0(\tilde{\varepsilon}_r-1)\tilde{E}$$

故复数相对电容率(介电常量)为

$$\tilde{\varepsilon}_r=1+\frac{\tilde{p}}{\varepsilon_0\tilde{E}}=1-\frac{Ne^2}{\varepsilon_0m_e\omega(\omega-i2\beta)}$$

$$=1-\frac{Ne^2}{\varepsilon_0m_e(\omega^2+4\beta^2)}-i\frac{2\beta Ne^2}{\varepsilon_0m_e\omega(\omega^2+4\beta^2)}=\varepsilon_r+i\varepsilon_r'$$

$\tilde{\varepsilon}_r$ 的实部 ε_r 和虚部 ε_r' 分别为

$$\varepsilon_r=1-\frac{Ne^2}{\varepsilon_0m_e(\omega^2+4\beta^2)}$$

$$\varepsilon_r'=-\frac{2\beta Ne^2}{\varepsilon_0m_e\omega(\omega^2+4\beta)}$$

在弱阻尼条件下，

$$\beta\ll\omega$$

虚部可忽略，金属有实数相对电容率(介电常量)，为

$$\varepsilon_r=1-\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_e\omega^2}=1-\frac{Ne^2}{4\pi^2\varepsilon_0 m_e\nu^2}=1-\frac{Ne^2}{4\pi^2\varepsilon_0 m_e c^2}\lambda^2 \tag{4}$$

这就是在弱阻尼条件下金属的色散关系．若令

$$\nu_c^2=\frac{Ne^2}{4\pi^2\varepsilon_0 m_e}$$

或

$$\lambda_c^2=\frac{4\pi^2\varepsilon_0 m_e c^2}{Ne^2}$$

则(4)式可写成

$$\varepsilon_r=1-\frac{\nu_c^2}{\nu^2}=1-\frac{\lambda^2}{\lambda_c^2} \tag{5}$$

由(5)式，当 $\nu>\nu_c$ 或 $\lambda<\lambda_c$ 时，$\varepsilon_r>0$，故折射率 $n=\sqrt{\varepsilon_r}$ 为实数，且 $n<1$，金属表现为透明的．当 $\nu<\nu_c$ 或 $\lambda>\lambda_c$ 时，$\varepsilon_r<0$，$n=\sqrt{\varepsilon_r}$ 为复数，这表明金属对电磁波的吸收性质．

2．由菲涅耳公式，正入射时，电磁波在金属表面的能量反射率为

$$R=\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_r}-1}{\sqrt{\varepsilon_r}+1}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{\lambda_c^2-\lambda^2}-\lambda_c}{\sqrt{\lambda_c^2-\lambda^2}+\lambda_c}\right)^2$$

当 $\lambda\ll\lambda_c$ 时，$R\approx0$；当 $\lambda\gg\lambda_c$ 时，$R\approx1$．由此可见，金属对极高频电磁波几乎不反射，而对极低频电磁波几乎全部反射．

【题 6】 大气上层的电离层可看作是由正离子和负电子构成的等离子体．假定电离层与非电离的大气层具有一截然分开的界面．

1．设电磁波的频率 $\nu=2\nu_p$ 或 $\nu\ll\nu_p$．当电磁波从大气一侧向上述分界面正入射时，试计算这两种情形的能量反射率．其中 ν_p 为等离子体振荡频率．2．当电磁波从大气一侧入射到上述分界面时，为使反射的电磁波中只包含垂直于入射面的振动，试问入射角应为何值？

【分析】 等离子体是由大量正离子和相等电量的电子构成的集合体．气体大量电离后就形成等离子体，也称为物质第四态．在等离子体中，正离子和电子之间的相互作用主要是长程的电磁力，与气体分子之间的短程力不同．当电子和正离子分开时，其间的作用力形成静电回复力，造成电子和正离子的集体振荡，相应的等离子体振荡频率为

$$\nu_p=\sqrt{\frac{Ne^2}{4\pi^2\varepsilon_0 m_e}}$$

在等离子体中，由于正离子的质量比电子质量大得多，在外电场作用下，由于正离子的受迫振动而对电容率(介电常量)的贡献可忽略不计，即塞耳迈耶尔色散公式中的正离子项可略．又，等离子体中的电子可认为是自由的，所受阻尼力亦可略去．这样，上题(本章题5)中的(4)式可用于本题，于是可解．

【解】 在外电场作用下，只考虑电子的受迫振动对 ε_r 的贡献，并忽略电子所受阻尼，则由上题(4)式，等离子体的相对电容率(介电常量)为

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{Ne^2}{4\pi^2\varepsilon_0 m_e \nu^2}$$

等离子体振荡频率为

$$\nu_p^2 = \frac{Ne^2}{4\pi^2\varepsilon_0 m_e}$$

故

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{\nu_p^2}{\nu^2}$$

由菲涅耳公式，电磁波正入射时的能量反射率为

$$R = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 = \left[\frac{\sqrt{\varepsilon_r}-1}{\sqrt{\varepsilon_r}+1}\right]^2$$

当 $\nu = 2\nu_p$ 时有

$$n = \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{0.75} = 0.866$$

$$R = \left(\frac{0.866-1}{0.866+1}\right)^2 = 5.3\times 10^{-3}$$

可见，电离层对 $\nu = 2\nu_p$ 的电磁波是透明的，反射率很小．

当 $\nu \ll \nu_p$ 时，n 为复数，电离层对该频率的电磁波有较强的吸收，且能量反射率为

$$R \approx 1$$

表明电离层对该频率的电磁波有极强的反射．无线电波就是利用这种反射将广播信号传送到远方的．

2．反射电磁波中只包含垂直于入射面的振动，即为只包含 s 分量的线偏振光，要求入射角为布儒斯特角 i_B，由布儒斯特定律，

$$\tan i_B = n = \sqrt{\varepsilon_r} = 0.866$$

故

$$i_B = 40°54'$$

【题 7】 试先就一般的各向同性介质，讨论麦克斯韦方程组具有平面纵波解的条件．然后将此条件应用于等离子体，试讨论所得结论的含义．

【分析】 如所周知，麦克斯韦方程组的平面电磁波解一般都是横波，电磁波是横波的结论即源于此．纵波是波矢 $\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 都平行的电磁波，本题的讨论表明，存在纵波解的条件是

$$n = \sqrt{\varepsilon_r} = 0$$

这是通常的介质无法满足的．

但在等离子体中，因电子与正离子分离而引起的等离子体振荡却是纵振荡，然而它的群速为零，因而这是一种特殊的不能传播的（即驻在的）纵振荡．

【解】 麦克斯韦方程组为

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu_0\mu_r \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

把 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{D},\boldsymbol{H}$ 的平面波表达式代入上述方程,得

$$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{k} = -\mu_0\mu_r\omega \boldsymbol{H} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{k} = -\omega \boldsymbol{D} \tag{2}$$

式中 ω 为平面波的圆频率,$\boldsymbol{k}$ 为平面波的波矢量,$\boldsymbol{k}$ 的方向是波传播的方向．因

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{p} \tag{3}$$

式中 $\boldsymbol{P}$ 是极化强度矢量,$\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 的关系为

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\boldsymbol{E} \tag{4}$$

若存在纵波解,则 $\boldsymbol{E}/\!/\boldsymbol{k},\boldsymbol{H}/\!/\boldsymbol{k}$. 由(1)式和(2)式,必须 $\boldsymbol{H}=0$ 及 $\boldsymbol{D}=0$. 由(3)式,必须 $\varepsilon_0\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{P}$. 再由(4)式,必须 $\varepsilon_r=0$. 故存在纵波解的条件是

$$n = \sqrt{\varepsilon_r} = 0$$

通常介质的折射率 n 不可能为零,因此,在通常的介质中不可能存在纵的平面电磁波．

等离子体的情况有所不同．由上题(本章题 6),在忽略正离子对相对电容率(介电常量)的贡献(因其质量远大于电子),并忽略电子所受阻尼的条件下,等离子体的相对电容率(介电常量)为

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{Ne^2}{4\pi^2\varepsilon_0 m_e\nu^2} = 1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_e\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

式中 N 为单位体积内的电子数,m_e 为电子质量,ω 为电磁波的圆频率,ω_p 为等离子体振荡的圆频率

$$\omega_p = 2\pi\nu_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_e}}$$

当电磁波的圆频率 ω 满足

$$\omega = \omega_p$$

时,有

$$n = \sqrt{\varepsilon_r} = 0$$

即满足存在纵波的条件．$\omega = \omega_p$ 表明,ω 与波矢量 $\boldsymbol{k}$ 无关,因此其相速和群速分别为

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_e}}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = 0$$

上述相速公式显然不满足普通波动的相速关系 $v_p = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_r}}$,群速为零则表明不能传播,是一种驻在的纵振荡．因此,等离子体振荡并不是一般的波动,只不过是等离子体中电子与正离子之间的一种纵的振荡而已．

【题 8】 试根据经典电磁理论,证明无密度涨落的均匀介质对光无散射．介质的任何不均匀性,将导致各散射中心发出的次波振幅的不一致,设振幅涨落为 ΔA,试证明散射光强度与 ΔA 的方

均值成正比．

【分析】 把介质分成许多小体积元，其线度比波长要小得多，每个体积元等效为一个电偶极子．在入射光的作用下，电偶极子产生受迫振动，发出同频率的次波，这些次波在某方向的相干叠加构成了该方向的散射光．

对于均匀介质，各个电偶极子完全相同且分布均匀，各次波的振幅相等．介质的任何不均匀性(例如由密度涨落所引起的不均匀性)，将使各次波的振幅相对平均值有一涨落．在上述两种情形下，次波叠加将得到不同的结果．

【解】 设介质均匀，且无密度涨落．把介质分成许多相同的小体积元，每个小体积元等效为一个电偶极子．在入射光的作用下，各体积元发射的次波具有相同的振幅．设第 j 个次波到达远处叠加点的振幅为 A_0(A_0 为恒量)，相位为 δ_j(各次波的相位相互联系)，则其复振幅可以写作

$$\widetilde{A}_j = A_0 e^{i\delta_j}$$

因各次波的 δ_j 相互联系，故次波叠加属相干叠加．设介质共分成 N 个小体积元，则叠加点的总复振幅为

$$\begin{aligned}\widetilde{A} &= \sum_{j=1}^{N} A_0 e^{i\delta_j} = A_0 \sum_{j=1}^{N} e^{i\delta_j} \\ &= A_0 \sum_{j=1}^{N} (\cos\delta_j + i\sin\delta_j) \\ &= A_0 \sum_{j=1}^{N} \cos\delta_j + i\, A_0 \sum_{j=1}^{N} \sin\delta_j\end{aligned}$$

因 N 是极大的数，δ_j 的取值完全无规，故有

$$\sum_{j=1}^{N} \cos\delta_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^{N} \sin\delta_j = 0$$

因此，

$$\widetilde{A} = 0$$

散射光光强为

$$I = \widetilde{A}\widetilde{A}^* = 0$$

即均匀介质对入射光无散射．

若介质不均匀，则各次波的振幅 A_j 彼此间将产生偏离．设平均振幅为 A_0，第 j 个次波的振幅涨落为 ΔA_j，则 A_j 可表为

$$A_j = A_0 + \Delta A_j$$

各次波的相位 δ_j 仍取随机值．第 j 个次波的复振幅为

$$\widetilde{A}_j = (A_0 + \Delta A_j) e^{i\delta_j}$$

叠加后的总复振幅为

$$\begin{aligned}\widetilde{A} &= \sum_{j=1}^{N} ((A_0 + \Delta A_j) e^{i\delta_j}) \\ &= \sum_{j=1}^{N} A_0 e^{i\delta_j} + \sum_{j=1}^{N} \Delta A_j e^{i\delta_j}\end{aligned}$$

由前，上式右端第一项为零，故

$$\widetilde{A}=\sum_{j=1}^{N}\Delta A_j e^{i\delta_j}$$

相应的散射光光强为

$$\begin{aligned}I&=\widetilde{A}\,\widetilde{A}^*\\&=\Big(\sum_{j=1}^{N}\Delta A_j e^{i\delta_j}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{N}\Delta A_j e^{-i\delta_j}\Big)\\&=\sum_{j=1}^{N}(\Delta A_j)^2+2\sum_{j\neq k}^{N}\Delta A_j\,\Delta A_k\end{aligned}$$

式中 ΔA_j 或 ΔA_k 是振幅涨落，这种涨落是无规的，可大可小，可正可负，而且 N 数很大，故上式右端第二项中正项和负项相互抵消，总和为零，故

$$I=\sum_{j=1}^{N}(\Delta A_j)^2$$

令振幅涨落的方均值为

$$\overline{(\Delta A)^2}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{N}(\Delta A_j)^2}{N}$$

则散射光强为

$$I=N\,\overline{(\Delta A)^2}$$

可见散射光强与次波振幅涨落的方均值成正比．

本题表明，均匀介质对光无散射，但由密度涨落引起的次波振幅涨落将引起对光的散射．

【题 9】 根据经典电磁理论，试证明由散射物质的密度涨落所引起的散射光光强遵守瑞利散射公式，即散射角为 θ 处的散射光强为

$$I_\theta\propto\frac{1+\cos^2\theta}{\lambda^4}$$

式中 λ 为入射光的波长．已知介质的相对电容率（介电常量）ε_r 与密度 ρ 有关，且 $\frac{\partial\varepsilon_r}{\partial\rho}$ 保持恒定，ε_r 与温度 T 的依赖关系可略．

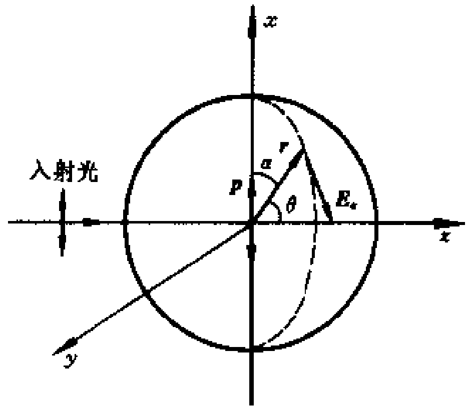
提示：如图所示，把散射介质分成许多小体积元，小体积的线度比波长小得多，每个体积元可看作是一电偶极子，设其电偶极矩为 $\boldsymbol{p}$．观察点的经矢为 $\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{p}$ 的夹角为 α．当观察点离电偶极子足够远时，偶极发射的电场强度由下式决定，

$$E_\alpha=\frac{\omega^2 p}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\sin\alpha$$

各偶极发射的相干叠加构成了某方向上的散射光．

【分析】 设观察点的径矢为 $\boldsymbol{r}$．它与 x,y,z 轴的夹角依次为 $\alpha_x,\alpha_y,\alpha_z$．自然光沿 z 轴入射，故散射角 $\theta=\alpha_z$．把入射光的振动分解为平行于 x 轴和平行于 y 轴的两种振动，它们的振幅均为 E_0，强度为 $I_0=E_0^2$ 先考虑平行于 x 轴的振动分量．受入射振动的作用，散射物质中每个电偶极子作受迫振动，并作偶极发射，观察点的电场强度由提示中的公式给出，式中 ω 是入射光（或电偶极

子振动）的圆频率，p 是小体积元的电偶极矩．把所有体积元的偶极发射进行相干叠加，然后求合成电场强度的方均值，即得上述振动分量的散射光强度．其次考虑平行于 y 轴的振动分量，同理可得 y 振动分量的散射光强度．两个分量散射光的非相干叠加即得总的散射光光强．



光图 1－9－1

【解】 设第 k 个体积元的体积为 v_k，因其线度远小于波长，故整体上可看成是单一的电偶极子，其电偶极矩为

$$P_k = p v_k \tag{1}$$

$\boldsymbol{p}$ 为单位体积内电偶极矩之和，即介质的极化强度矢量，它与总电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的关系为

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_{rk} - 1)\boldsymbol{E} \tag{2}$$

式中 ε_{rk} 是第 k 个体积元的相对电容率（相对介电常量）．由于介质密度的涨落导致 ε_r 的涨落，ε_{rk} 取随机值，可表为

$$\varepsilon_{rk} = \overline{\varepsilon}_r + \Delta\varepsilon_{rk} \tag{3}$$

式中 $\overline{\varepsilon}_r$ 是相对电容率（相对介电常量）的平均值，把(3)式代入(2)式，得

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0(\overline{\varepsilon}_r - 1)\boldsymbol{E} + \varepsilon_0\Delta\varepsilon_{rk}\boldsymbol{E}$$

把上式代入(1)式，得第 k 个体积元的电偶极矩为

$$\boldsymbol{p}_k = \varepsilon_0(\overline{\varepsilon}_r - 1)\boldsymbol{E}v_k + \varepsilon_0\Delta\varepsilon_{rk}v_k\boldsymbol{E}$$

式中右端第一项对各体积元都是均匀的，它对散射光无贡献（参看本章题 8）．由提示中给出的公式，第二项对散射光电场强度的贡献为

$$E_{\alpha k} = \frac{\omega^2\varepsilon_0\Delta\varepsilon_{rk}v_k}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}E\sin\alpha$$

式中脚标 k 表示第 k 个体积元的贡献，α 是观察点的径矢 $\boldsymbol{r}$ 与电偶极矩 $\boldsymbol{p}_k$ 之间的夹角，$\boldsymbol{p}_k$ 与入射电矢量 $\boldsymbol{E}$ 的方向一致．

考虑入射光的 x 振动分量，有

$$(E_{\alpha k})_x = \frac{\omega^2\varepsilon_0\Delta\varepsilon_{rk}v_k E_x}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\sin\alpha_x$$

对所有体积元的电场强度求和，得散射光的总电场强度为

$$(E_{\alpha x} = \frac{\omega^2\varepsilon_0 E_x\sin\alpha_k}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\sum_k\Delta\varepsilon_{rk}v_k$$

ε_r 的涨落 $\Delta\varepsilon_r$ 起因于密度的涨落，若忽略温度的影响，有

$$\Delta\varepsilon_{rk} = \frac{\partial\varepsilon_r}{\partial\rho}\Delta\rho_k$$

代入上式，得

$$E_{\alpha x} = \frac{\omega^2 E_x}{4\pi c^2 r}\frac{\partial\varepsilon_r}{\partial\rho}\sin\alpha_x\sum_k\Delta\rho_k v_k$$

式中 $E_{\alpha x}$ 和 E_x 分别是散射光和入射光的电场强度，它们都是时间的周期函数，由题设 $\frac{\partial\varepsilon_r}{\partial\rho}$ 为恒

量，$\Delta\rho_k$ 是小体积元密度的涨落．取随机值，散射光光强应是上式的方均值，即为

$$I_{\alpha x} = \frac{\omega^4}{(4\pi c^2 r)^2}\left(\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial \rho}\right)^2 I_0 \sin^2 \alpha_x \overline{\left(\sum_k \Delta\rho_k v_k\right)^2}$$

式中 I_0 为入射光 x 振动分量的光强，因子 $\overline{(\sum_k \Delta\rho_k v_k)^2}$ 只与介质本身的性质有关，对于一定的散射介质，该因子为恒量．对一定的观察点，r 为常量．又因 $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$，故得

$$I_{\alpha x} \propto \frac{\sin^2 \alpha x}{\lambda^4}$$

同理，对于入射光的 y 振动分量，有

$$I_{\alpha y} \propto \frac{\sin^2 \alpha y}{\lambda^4}$$

总的散射光强是两分量的非相干叠加，即

$$\begin{aligned} I_\alpha &= I_{\alpha x} + I_{\alpha y} \\ &\propto \frac{1}{\lambda^4}(\sin^2 \alpha_x + \sin^2 \alpha_y) \\ &= \frac{1}{\lambda^4}[2 - (\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y)] \end{aligned}$$

因

$$\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y + \cos^2\theta = 1$$

式中 $\theta = \alpha_z$ 为散射角．故最后得

$$I_0 \propto \frac{1 + \cos^2\theta}{\lambda^4}$$

【题 10】 空间一射电源发出一宽频带的“噪音”脉冲．由于在星际介质中的色散，这一脉冲到达地球时，就变成频率随时间变化的哨声．若哨声的频率改变率 $\frac{d\omega}{dt}$ 已被测出，并且地球与射电源的距离 L 是已知的，就可以推出星际介质中电子的平均密度 N. 试导出决定 N 的公式．假定星际介质是完全电离的，即为等离子体．

【分析】 等离子体振荡频率为

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}} \tag{1}$$

式中 N 为电子密度．根据本章题 5 或本章题 7，星际介质的相对电容率（相对介电常量）ε_r 或折射率 n 与频率 ω 有关，利用这一关系可导出脉冲信号的群速，进而求得 $\frac{d\omega}{dt}$ 与 ω_p 的关系．

【解】 由本章题 5 或本章题 7，等离子体的相对电容率（相对介电常量）为

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

式中 $\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}}$ 是等离子体振荡的圆频率．相应的折射率 n 为

$$n=\sqrt{\varepsilon_r}=\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \tag{2}$$

可见折射率 n 与频率 ω 有关，表明原先的“噪音”脉冲在星际介质中传播时不能保持原来的波形不变．

圆频率为 ω 的波在介质中的波长为

$$\lambda=\frac{v_p}{v}=\frac{c}{vn}$$

式中 v_p 为介质中的相速．相应的波矢为

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi vn}{c}=\frac{\omega n}{c}$$

把上式对 ω 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}=\frac{n}{c}+\frac{\omega}{c}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}$$

脉冲信号在介质中传播时的群速为

$$v_g=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}=\frac{1}{\dfrac{n}{c}+\dfrac{\omega}{c}\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}} \tag{3}$$

由(2)式，有

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}}\frac{\omega_p^2}{\omega^3}=\frac{1}{n}\cdot\frac{\omega_p^2}{\omega^3}$$

把上式代入(3)式，得

$$v_g=\frac{c}{n+\dfrac{1}{n}\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}=\frac{nc}{n^2+\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

由(2)式，

$$n^2+\frac{\omega_p^2}{\omega^2}=1$$

代入 v_g，得

$$v_g=nc=c\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

脉冲从脉冲源传到地球所需的时间为

$$t=\frac{L}{v_g}=\frac{L}{c\sqrt{1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

上式取微分

$$\mathrm{d}t=-\frac{L}{c}\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{\omega_p^2}{\omega^3}\mathrm{d}\omega$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{c}{L}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{\omega^3}{\omega_p^2}$$

式中$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$可测定，$L$ 是已知的，ω 可取脉冲的中心频率，于是由上式可求出 ω_p，再由(1)式求出星际介质的电子数密度 N.

【题 11】 强度为 I_0 的单色光垂直入射到有色玻璃片上，玻璃片的厚度为 l，吸收系数为 α，折射率 $n = 1.5$.1. 试求透射光强和入射光强之比(不计多重反射).2. 试求由于不计光强的反射损失而引起的相对误差是多少?假设能量反射率 R 很小 .3. 试问在测量玻璃片的吸收系数 α 的实验中，怎样消除由于反射引起的误差?

【解】 1. 由能量反射率 R 的定义，在玻璃片第一界面上反射的光强为

$$I'_1 = RI_0$$

故进入玻璃片的光强为

$$I_1 = I_0 - I'_1 = (1 - R)I_0$$

由吸收定律，光传播 l 距离后的光强为

$$I_l = I_1 \mathrm{e}^{-\alpha l} = (1 - R)I_0 \mathrm{e}^{-\alpha l}$$

在玻璃第二界面上反射的光强为

$$I'_l = RI_l$$

故透射光强为

$$I_2 = I_l - I'_l = (1 - R)I_l = (1 - R)^2 I_0 \mathrm{e}^{-\alpha l}$$

透射光强与入射光强之比为

$$\frac{I_2}{I_0} = (1 - R)^2 \mathrm{e}^{-\alpha l}$$

由菲涅耳公式，正入射时的能量反射率 R 为

$$R = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 = \left(\frac{1.5-1}{1.5+1}\right)^2 = \frac{1}{25} = 0.04$$

2. 不计反射损失时，入射光与透射光的光强之比为 $\mathrm{e}^{-\alpha l}$；考虑反射损失时，入射光与透射光的光强之比为$(1 - R)^2\mathrm{e}^{-\alpha l}$. 因此，不计反射损失引起的光强之比的绝对误差为

$$\mathrm{e}^{-\alpha l}(1 - R)^2 \mathrm{e}^{-\alpha l} \approx 2R\mathrm{e}^{-\alpha l}$$

相对误差为

$$\frac{2R\mathrm{e}^{-\alpha l}}{\mathrm{e}^{-\alpha l}} = 2R = 0.08$$

3. 用同种材料(即 α 和 R 一定) 制成的两块厚度不同的玻璃片来做实验，用同样的入射光强 I_0，测定透射光强 .

设厚度为 l 的玻璃片的透射光强为I_2，厚度为 l' 的玻璃片的透射光强为I'_2，则由第 1 问的结果，有

$$\frac{I_2}{I_0} = (1 - R)^2 \mathrm{e}^{-\alpha l}$$

$$\frac{I'_2}{I_0} = (1 - R)^2 e^{-\alpha l'}$$

相除，得

$$\frac{I_2}{I'_2} = e^{-\alpha(l-l')}$$

此比值与反射损失 R 无关，故得出玻璃片的吸收系数 α 为

$$\alpha = \frac{\ln \frac{I_2}{I'_2}}{l' - l}$$

第五部分

近代物理

第一章 量子物理

【题1】 入射光以入射角 i 射到一不透光的表面上,入射光的能流密度为 I. 设表面对光的能量反射率为 R. 试求该表面单位面积所受的光压和切向力.

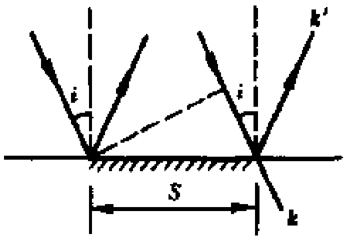
【分析】 把光看作光子流,光射到表面上,当光子被反射时,因光子的动量发生变化,将给予表面一定的动量. 当光子被吸收时,其动量全部给予表面. 计算单位面积表面在单位时间内获得的动量,即可得出单位面积表面所受作用力,其法向分量就是光压(辐射压力),其切向分量为切向力.

【解】 设入射光照射到面积为 S 的表面上,单位时间共有 N 个光子射在 S 表面上. 由能流密度的定义,有

$$Nh\nu = IS\cos i$$

式中 ν 是入射光的频率. 故

$$N=\frac{IS\cos i}{h\nu}$$



近图 1-1-1

如图所示,设入射光方向和反射光方向的单位矢量分别为 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{k}'$. 当一个光子被表面反射时,它给予表面的动量为

$$\frac{h\nu}{c}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')$$

因单位时间内共有 NR 个光子被反射,故由于反射而给予 S 面的动量为

$$NR\frac{h\nu}{c}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')$$

当一个光子被表面吸收时,它的全部动量都给予表面,为

$$\frac{h\nu}{c}\boldsymbol{k}$$

因单位时间内共有 $N(1-R)$个光子被吸收,故由于吸收而给予 S 表面的动量为

$$N(1-R)\frac{h\nu}{c}\boldsymbol{k}$$

因此,在单位时间内,面积为 S 的表面所获得的总动量为

$$NR\frac{h\nu}{c}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')+N(1-R)\frac{h\nu}{c}\boldsymbol{k}=N\frac{h\nu}{c}(\boldsymbol{k}-R\boldsymbol{k}')=\frac{IS}{c}\cos i\cdot(\boldsymbol{k}-R\boldsymbol{k}')$$

由动量定理,面积为 S 的表面所受力为

$$\boldsymbol{F}=\frac{IS}{c}\cos i\cdot(\boldsymbol{k}-R\boldsymbol{k}')$$

单位面积的表面受力为

$$\frac{\boldsymbol{F}}{S}=\frac{I}{c}\cos i\cdot(\boldsymbol{k}-R\boldsymbol{k}')$$

上述$\frac{F}{S}$在表面法线方向的投影就是单位面积表面所受的光压即辐射压力，为

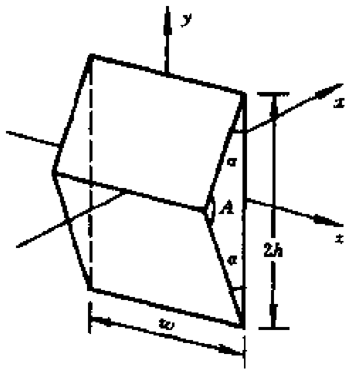
$$P=\frac{I}{c}(1+R)\cos i$$

$\frac{F}{S}$在表面切线方向的投影就是单位面积表面所受的切向力，为

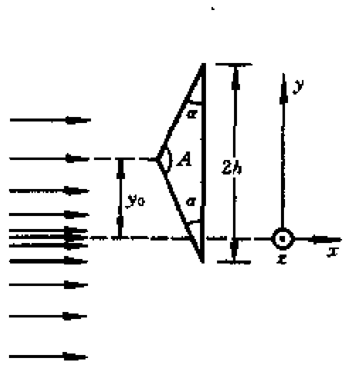
$$T=\frac{I}{c}\cos i(\sin i-R\sin i)=\frac{I}{2c}(1-R)\sin 2i$$

【题 2】 一束强激光通过小的透明物体时，由于折射而对物体产生一定的作用力．为了对此有所理解，取一个很小的玻璃三棱镜，其顶角为 $A=\pi-2\alpha$，底边长为 $2h$，厚度为 w，折射率为 n，密度为 ρ.

设该棱镜处在一束沿水平 x 轴方向传播的激光之中，本题自始至终假定棱镜不发生转动，即其顶角总是对准激光束射来的方向，它的两个三角形侧面总是平行于 xy 平面，底面总是平行于 yz 平面，如近图 1－2－1 所示．周围空气的折射率取为 $n_a=1$，棱镜各面均镀有防反射膜，确保不发生反射．



近图 1－2－1



近图 1－2－2

如近图 1－2－2 所示，激光束的强度沿 z 轴方向均匀分布，但是从 x 轴开始，沿 y 轴正、负方向的光强按线性关系减弱，在 $y=0$ 处强度最大，其值为 I_0，而在 $y=\pm 4h$ 处，光强降为零．光的强度即为每单位面积的功率，单位是 W/m^2.

1．如近图 1－2－3 所示，在激光射到棱镜上表面时，试求偏转角 θ.

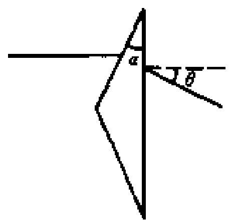
2．将棱镜顶端由原来的位置 x 轴处沿 y 轴方向平移 y_0，设 $|y_0|\leqslant 3h$．试用 I_0,θ,h,w 和 y_0 表述激光作用在棱镜上的净作用力的 x 分量和 y 分量．作图表示出作用力在水平方向（x 轴方向）和竖直方向（y 轴方向）的分量随位移 y_0 的变化关系．

3．设激光束在 z 方向的宽度为 1 mm，在 y 方向的宽度为 80 μm，棱镜的参量为 $\alpha=30°$，$h=10$ μm，$n=1.5$，$w=1$ mm，$\rho=2.5$ g/cm^3，当棱镜的顶端位于激光束对称面以下的 $y_0=-\frac{h}{2}=-5$μm 时，试问需要多少瓦的激光束功率才能使棱镜克服重力（指向 $-y$ 方向）的作用处于平衡状态？

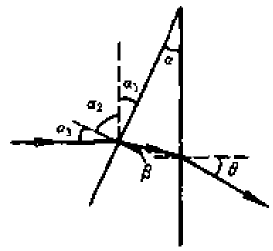
4．采用与第 3 问中相同的棱镜和激光束，在没有重力的条件下做实验，且设 $I_0=10^8 W/m^2$，

移动棱镜使其顶端静止地处于 $y_0=\frac{h}{20}$ 的位置，尔后释放棱镜，它将发生振动，试求振动周期．

【分析】 第1问所求偏转角 θ，应用折射定律即可求解．



近图 1-2-3



近图 1-2-4

第2、3、4问涉及的是激光束通过折射对棱镜施加的 y 方向作用力．与上题(本章题1)相同，把激光束看作光子流，即可理解此作用力产生的原因．如果棱镜的上、下两个斜面受到对称分布的激光束照射(相当于近图 1-2-2 中 $y_0=0$ 的情况)，激光因向下折射通过上方斜面施加的向上作用力，等于因向上折射通过下方斜面施加的向下作用力，棱镜在竖直方向(即 y 方向)所受合力平衡．如近图 1-2-2 所示，若 y_0 取正，则棱镜上方斜面所受向上作用力应小于下方斜面所受向下作用力，合力竖直向下．反之，若 y_0 取负，则棱镜所受合力竖直向上．在后一种情况下，竖直向上的合力若与重力平衡，棱镜便可悬浮在空中．在没有重力的环境下，棱镜两斜面所受激光束的合作用力显然具有回复力的特征，它可使棱镜产生振动．当 $|y_0|$ 很小时，若回复力近似为线性力，则棱镜将作简谐振动，于是振动周期可求．

【解】 1. 这是一个涉及折射定律的简单几何光学问题．如近图 1-2-4 所示，因

$$\alpha_1=\alpha$$

$$\alpha_1+\alpha_2=\alpha_2+\alpha_3=90^\circ$$

故入射角 α_3 为

$$\alpha_3=\alpha$$

由折射定律，有

$$\sin\alpha=n\sin\beta$$

故折射角 β 为

$$\beta=\arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right)$$

光束对棱镜底面的入射角应为

$$\frac{\pi}{2}-\left[\pi-\alpha-\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right]=\alpha-\beta$$

对底面应用折射定律，有

$$\sin\theta=n\sin(\alpha-\beta)$$

解出

$$\theta=\arcsin\left\{n\sin\left[\alpha-\arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right)\right]\right\}$$

2. 棱镜所受作用力与激光束通过棱镜时的动量改变量的大小相同、方向相反．为进行分

析，先考虑入射在棱镜上表面激光束的动量改变量．

设激光束中每秒有 τ_n 个光子沿着平行于 x 轴的方向射到棱镜的上表面，一个光子的能量表为 E，其动量为 $p_i=\frac{E}{c}\boldsymbol{i}$．以相对于 x 轴为 θ 角的方向离开棱镜的光子与入射光子相比较，相应的动量改变量 δp 为

$$\delta\boldsymbol{p}=\frac{E}{c}(\cos\theta-1)\boldsymbol{i}-\frac{E}{c}\sin\theta\,\boldsymbol{j}$$

τ_u 个光子总的动量改变量为

$$\tau_u\delta\boldsymbol{p}=\frac{\tau_u E}{c}[(\cos\theta-1)\boldsymbol{i}-\sin\theta\boldsymbol{j}]$$

式中的 $\tau_u E$ 即为照射在棱镜上表面的激光功率 P_u，故棱镜上表面因激光束折射而受到的作用力为

$$\boldsymbol{F}_u=-\tau_u\delta\boldsymbol{p}=\frac{P_u}{c}[(1-\cos\theta)\boldsymbol{i}+\sin\theta\boldsymbol{j}]$$

由同样的分析，棱镜下表面因激光束的折射而受到的作用力为

$$\boldsymbol{F}_l=\frac{P_l}{c}[(1-\cos\theta)\boldsymbol{i}-\sin\theta\boldsymbol{j}]$$

式中 P_l 是照射在棱镜下表面的激光束的功率．由以上两式得出，因激光束照射给予棱镜的净作用力为

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_u+\boldsymbol{F}_l=\frac{1}{c}[(P_u+P_l)(1-\cos\theta)]\boldsymbol{i}+\frac{1}{c}[(P_u-P_l)\sin\theta]\boldsymbol{j}$$

式中的 θ 可由角 α 及棱镜折射率 n 确定，见第 1 问．

为了求出 P_u 和 P_l，需计算棱镜上、下表面的平均光强 $\bar{I}_n$、$\bar{I}_l$，再各自乘上、下表面在垂直于激光束方向上的投影面积 hw．由题设，光强 I 随 y 的分布是线性函数，故平均光强容易确定．由题设，$I(y)$ 可表为，

$$I(y)=\begin{cases}I_0(1-\frac{y}{4h}), & 0\leqslant y<4h\\ I_0(1+\frac{y}{4h}), & -4h<y<0\end{cases}$$

现在假设棱镜顶端从 x 轴向上提升 $y_0(y_0>0)$，则可分以下两种情形讨论．

(i) $h\leqslant y_0\leqslant 3h$

整个棱镜都处于激光束的上半部分，在这种情形，如近图 1－2－5 所示，平均光强等于上、下表面各自中央位置的光强．棱镜上表面的中央位置在 $(y_0+\frac{h}{2})$ 处．棱镜下表面的中央位置在 $(y_0-\frac{h}{2})$ 处，由此，得出

$$\bar{I}_u=I_0\left[1-\frac{y_0+\frac{h}{2}}{4h}\right]=I_0\left(\frac{7}{8}-\frac{y_0}{4h}\right)$$

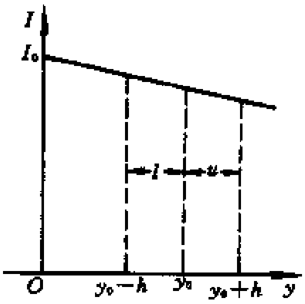
$$\bar{I}_l=I_0\left[1-\frac{y_0-\frac{h}{2}}{4h}\right]=I_0\left(\frac{9}{8}-\frac{y_0}{4h}\right)$$

于是，不难算出

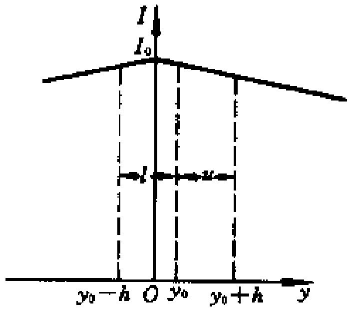
$$F_x=\frac{2hwI_0}{c}(1-\frac{y_0}{4h})(1-\cos\theta)$$

$$F_y=-\frac{hwI_0}{4c}\sin\theta$$

（ii）$0<y_0<h$



近图 1－2－5



近图 1－2－6

棱镜下表面有一部分处在激光束的下半部分，如近图 1－2－6 所示．棱镜下表面中，从 $y=0$ 到 $y=y_0$ 部分的面积为下表面面积的$\frac{y_0}{h}$倍，其平均光强等于 $y=\frac{y_0}{2}$处的光强，即

$$\overline{I}_{l_1}=I\left(\frac{y_0}{2}\right)=I_0\left(1-\frac{y_0}{8h}\right)$$

下表面中，从 $y=0$ 到 $y=y_0-h$ 部分的面积为下表面面积的$\left(1-\frac{y_0}{h}\right)$倍，其平均光强等于 $y=\frac{1}{2}(h-y_0)$处的光强，即

$$\overline{I}_{l_2}=I\left(\frac{h-y_0}{2}\right)=I_0\left(\frac{7}{8}+\frac{y_0}{8h}\right)$$

联合起来考虑，得出

$$P_l=hw\frac{y_0}{h}\overline{I}_{l_1}+hw\left(1-\frac{y_0}{h}\right)\overline{I}_{l_2}=hwI_0\left(\frac{7}{8}+\frac{y_0}{4h}-\frac{y_0^2}{4h^2}\right)$$

上表面的平均光强与 y_0 的函数关系与（i）中所述相同，为

$$P_u=hwI_0\left(\frac{7}{8}-\frac{y_0}{4h}\right)$$

于是，有

$$P_u+P_l=hwI_0\left(\frac{7}{4}-\frac{y_0^2}{4h^2}\right)$$

$$P_u-P_l=-hwI_0\frac{y_0}{2h}\left(1-\frac{y_0}{2h}\right)$$

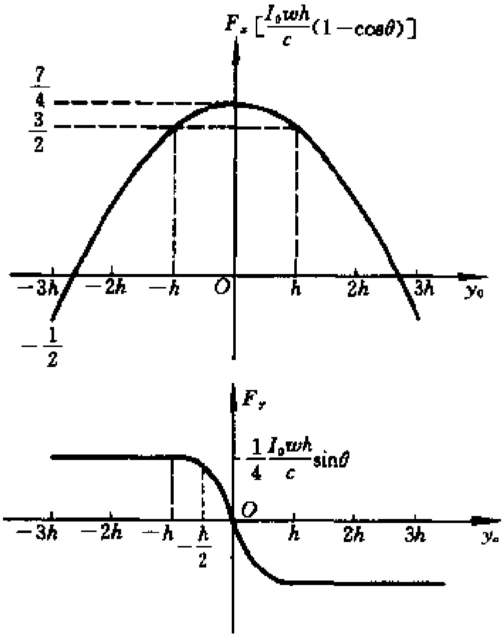
由此得出

$$F_x=\frac{hwI_0}{c}\left(\frac{7}{4}-\frac{y_0^2}{4h^2}\right)(1-\cos\theta)$$

$$F_y=-\frac{hwI_0}{c}\cdot\frac{y_0}{2h}\left(1-\frac{y_0}{2h}\right)\sin\theta$$

考虑到光强分布相对于 $y=0$ 平面对称，故 $y_0<0$ 的解与 $y_0>0$ 的解之间具有镜面对称性．F_x 和 F_y 对 y_0 的函数关系如近图 1－2－7 所示．

3. 由 F_y 的表达式及图线均可看出，为了使 $F_y>0$ 以克服棱镜所受重力，必定要求 $y_0<0$. 为了求出能克服棱镜重力的 F_y，需先求出棱镜的质量，再根据给定的数据求出 I_0，最后求出所需的激光束的总功率．激光束的总功率可用平均光强与激光束截面积相乘算出．



近图 1－2－7

棱镜的体积为

$$V=h^2w\tan\alpha$$
$$=(10\times10^{-6})^2\times10^{-3}\times\tan30^\circ$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\times10^{-13}\ \mathrm{m}^3$$

棱镜的质量为

$$m=\rho V=(2.5\times10^3)\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times10^{-13}$$
$$=1.44\times10^{-10}\ \mathrm{kg}$$

棱镜所受重力为

$$mg=1.44\times10^{-10}\times9.8$$
$$=1.41\times10^{-9}\mathrm{N}$$

上面第 2 问中的解是在 $y_0>0$ 条件下求出的，由于 $y_0<0$ 的解与 $y_0>0$ 的解具有对称性，故可利用第 2 问的解．因此，I_0 应满足

$$\frac{hwI_0}{c}\cdot\frac{y_0}{2h}\left(1-\frac{y_0}{2h}\right)\sin\theta=mg=1.41\times10^{-9}\mathrm{N}$$

式中

$$\theta=\arcsin\left\{n\sin\left[\alpha-\arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right)\right]\right\}=15.9^\circ$$
$$y_0=\frac{h}{2}$$
$$h=10\times10^{-6}\ \mathrm{m}$$
$$w=10^{-3}\ \mathrm{m}$$

代入，得出

$$I_0=8.29\times10^8\ \mathrm{W/m^2}$$

因激光束总功率

$$P=\overline{I}S$$

其中 S 是激光束的截面积，$\overline{I}$ 为平均光强，为

$$\overline{I}=\frac{1}{2}I_0$$

故

$$P=\frac{1}{2}I_0S=\frac{1}{2}\times8.29\times10^8\times10^{-3}\times80\times10^{-6}=33.2\ \mathrm{W}$$

4．题设 $y_0=\frac{h}{20}$，相应的

$$\frac{y_0}{h}=0.05\ll 1$$

故位移 $|y|\leqslant y_0$ 相应的竖直方向分力为

$$F_y=-\frac{hwI_0}{c}\cdot\frac{y}{2h}\left(1-\frac{y}{2h}\right)\sin\theta=-\frac{wI_0\sin\theta}{2c}y$$

这是一个线性回复力，在它的作用下，棱镜作简谐振动，其角频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{wI_0\sin\theta}{2cm}}=\sqrt{\frac{I_0\sin\theta}{2c\rho h^2\tan\alpha}}$$

振动周期为

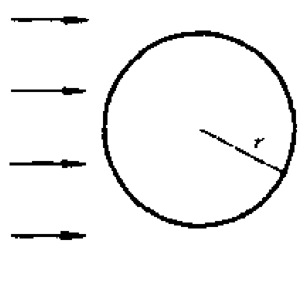
$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{2c\rho h^2\tan\alpha}{I_0\sin\theta}}$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{2\times(3\times10^8)\times(2.5\times10^3)\times(10^{-5})^2\times\tan30^\circ}{10^8\times\sin15.9^\circ}}=1.12\times10^{-2}\ \mathrm{s}$$

【本题是 1993 年第 24 届 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)试题．】

【题 3】 如图所示，一个用理想的黑色物质做成的均匀球，半径为 $r=1$ mm，受到均匀的平行激光束的全面照射．激光是圆偏振光，波长 $\lambda=10^4$ nm．球开始时在无重力的空间实验室中静止地悬浮，经激光束照射后开始平动和转动，球上除与激光束平行的一条直径外，球的每一部位都沿螺旋轨道运动．试求螺旋轨道的螺距 h．设在讨论的时间范围内，激光束的强度不变．

注意，单色圆偏振光可以看作是一群运动光子，每个光子都带有相同的能量、相同的动量和相同的角动量，角动量矢量的方向或与动量矢量的方向平行，或反平行．对于圆偏振光，所有光子的角动量方向一致，光子的角动量的大小为 $\hbar=\frac{h}{2\pi}$．



近图 1－3－1

【分析】 光子射到黑色小球后即被吸收，光子的动量转化为小球的动量，使小球获得平动加速度 a，同时光子的角动量转化为小球的角动量，使小球获得绕中央直径旋转的角加速度 β．由于光子的动量与角动量之比为恒定值，若忽略被小球吸收的光子的质量(能量)，则照射后小球的质量与转动惯量都将保持不变，因而不难猜想，小球因照射获得的加速度 a 与角加速度 β 之比亦应为恒定值．由此，小球上各部位均作等距螺旋线运动，各螺旋线的旋转半径可以不相同，但每旋转一周对应的螺距 h 应该相同．

【解】 设单位时间射在小球上的光子数为 n，因激光束强度不变，n 为常量．在 $\mathrm{d}t$ 时间，射到小球上的光子数为 $n\mathrm{d}t$，每个光子的动量为 $\frac{h}{\lambda}$，故小球在 $\mathrm{d}t$ 时间内的动量增量为

$$\mathrm{d}p=\frac{h}{\lambda}n\mathrm{d}t$$

设小球质量为 m，任意时刻的速度为 v，$\mathrm{d}t$ 时间内的速度增量为 $\mathrm{d}v$，则

$$\mathrm{d}p=m\mathrm{d}v$$

由以上两式，小球的平动加速度为

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{nh}{m\lambda}$$

每个光子的角动量为$\frac{h}{2\pi}$，在 $\mathrm{d}t$ 时间内，小球因吸收光子，其角动量的增量为

$$\mathrm{d}L=\frac{h}{2\pi}n\,\mathrm{d}t$$

小球绕中央直径轴的转动惯量为

$$I=\frac{2}{5}mr^2$$

在 $\mathrm{d}t$ 时间内，小球旋转角速度的增量为

$$\mathrm{d}\omega=\frac{\mathrm{d}L}{I}$$

因此，小球旋转的角加速度为

$$\beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{nh}{2\pi I}$$

设小球从 $t=0$ 时刻开始受到激光束照射，则 t 时刻小球的平动位移为

$$x=\frac{1}{2}at^2=\frac{nht^2}{2m\lambda}$$

在 t 时刻，小球转过的角度为

$$\phi=\frac{1}{2}\beta t^2=\frac{nht^2}{4\pi I}=\frac{5nht^2}{8\pi mr^2}$$

由以上两式，得出

$$x=\frac{4\pi r^2}{5\lambda}\phi$$

螺距 h 是 ϕ 增加 2π 时的 x 增量，即为

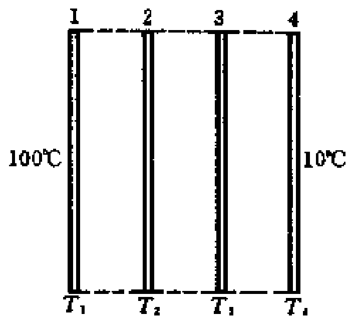
$$h=\frac{8\pi^2r^2}{5\lambda}$$

把有关数据代人，得

$$h=1.6\ \mathrm{m}$$

【题 4】 如图所示，两块足够大的金属平板平行放置，它们的温度维持恒定，分别为 100℃ 和 10℃．两板之间抽成真空，并插入同样大小的两块平行板．四块板的表面均涂黑，因而可以看作是绝对黑体．

试求：1．插入的两块板的温度．2．板间的能量流与其间不插两板时能量流的比值．



近图 1－4－1

【分析】 四板均为黑体，因抽成真空，中间两板通过向外辐射和吸收入射的辐射能交换能量，达到热平衡．黑体辐射的能量与其绝对温度的关系遵从斯特藩－玻尔兹曼定律．由此中间两板的温度可求．

热平衡时，相邻两板之间的能流密度均相等（因四板平行，大小

相等,只在相邻两板之间有辐射能量交换),与中间不插两板的情况相比较,即可求解第 2 问.

【解】 1. 因各板均足够大,可看作无穷大,各板辐射的能量流均与板平面垂直.各板除向外辐射能量外,还全部吸收入射的辐射能.由斯特藩－玻尔兹曼定律,单位时间从单位面积辐射出来的能量(即总辐射本领)为

$$R=\sigma T^4$$

式中 T 为热力学温度.设四板的热力学温度分别为 T_1,T_2,T_3,T_4.对板 2 而言,左侧向外辐射的能流密度为 $\sigma T_2{}^4$,同时吸收板 1 所辐射的能流密度 $\sigma T_1{}^4$,故板 2 左侧净增加的能流密度为

$$\dot{Q}_{2左}=\sigma(T_1{}^4-T_2{}^4)$$

同理,板 2 右侧净增加的能流密度为

$$\dot{Q}_{2右}=\sigma(T_3{}^4-T_2{}^4)$$

热平衡时,有

$$\dot{Q}_{2左}+\dot{Q}_{2右}=0$$

即

$$T_1{}^4-T_2{}^4+T_3{}^4-T_2{}^4=0$$

或

$$T_2{}^4=\frac{1}{2}(T_1{}^4+T_3{}^4) \tag{1}$$

对板 3,重复上述讨论,有

$$T_3{}^4=\frac{1}{2}(T_2{}^4+T_4{}^4) \tag{2}$$

由(1)、(2)式,解出

$$T_2=\sqrt[4]{\frac{2T_1{}^4+T_4{}^4}{3}}=350\ \mathrm{K}$$

$$T_3=\sqrt[4]{\frac{2T_4{}^4+T_1{}^4}{3}}=322\ \mathrm{K}$$

或

$$t_2=77\ ℃$$

$$t_3=49\ ℃$$

2. 热平衡时,各板之间的能流密度均相等,即有

$$\dot{Q}=\sigma(T_1{}^4-T_2{}^4)=\sigma(T_2{}^4-T_3{}^4)=\sigma(T_3{}^4-T_4{}^4)$$

解出

$$\dot{Q}=\frac{1}{3}\sigma(T_1{}^4-T_4{}^4)$$

不插板 2 和板 3 时,板 1 和板 4 之间的能流密度为

$$\dot{Q}_0=\sigma(T_1{}^4-T_4{}^4)$$

因此,

$$\frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_0}=\frac{1}{3}$$

一般情况下，当插入 n 块板时，能流密度降到不插板时的$\frac{1}{n+1}$. 这说明，真空多层绝热的效果明显地优于单层的真空绝热．

【题 5】 如近图 1－5－1 所示，一表面涂黑的圆筒形容器，直径 $d=5.0$ cm，高 $l=10.0$ cm，筒内盛有液氦，其温度恰好是氦的沸点 4.2 K. 圆筒外包有绝热材料，绝热材料与圆筒之间可能存在的空隙抽成真空．绝热材料维持在液氮温度 77 K，其总辐射本领是同温度下黑体总辐射本领的 $\frac{1}{2}$. 试问每小时有多少液氦蒸发掉？假设汽化的氦气立即逸出，不考虑液氦与外界的任何气体传热与固体导热．已知液氦在 4.2 K 时的汽化热为 $L=2.1\times10^4$ J/kg.

【分析】 容器壁涂黑，可看作是黑体．绝热材料并非黑体，但其总辐射本领为黑体之半，故其吸收本领亦为黑体之半．容器壁与绝热材料之间的空隙为真空，且已假设汽化的氦气立即逸出并忽略其它气体，固体传热．因此，传热的方式是辐射，利用黑体辐射的斯特藩－玻尔兹曼定律即可求解．

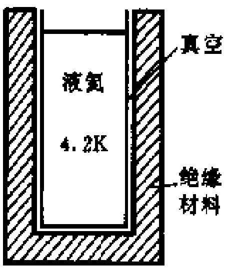
【解】 容器壁涂黑，看作黑体，由斯特藩－玻尔兹曼定律，其总辐射本领为

$$R_1=\sigma T_1^4$$

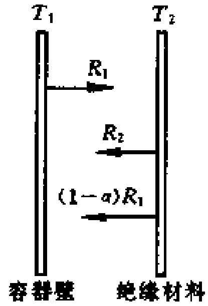
式中 $T_1=4.2$ K. 绝热材料非黑体，但其总辐射本领为黑体之半，即

$$R_2=\alpha\sigma T_2^4=\frac{1}{2}\sigma T_2^4$$

式中 $T_2=77$ K.



近图 1－5－1



近图 1－5－2

容器壁与绝热材料间通过辐射传热．如近图 1－5－2 所示，板 1 代表容器，板 2 代表绝热材料，则单位时间通过单位面积从板 1 流向板 2 的辐射能为 $R_1=\sigma T_1^4$，从板 2 流向板 1 的能量包括板 2 的辐射能 $R_2=\alpha\sigma T_2^4$，以及反射能 $(1-\alpha)R_1$. 因此单位时间通过单位面积从板 2 流向板 1，即从绝热材料流向容器的能量为

$$\dot{Q}=R_2+(1-\alpha)R_1-R_1=R_2-\alpha R_1=\alpha\sigma(T_2^4-T_1^4)$$

故 t 时间内容器净吸收的热量为

$$\dot{Q}At=\alpha\sigma A(T_2^4-T_1^4)t$$

式中 A 是容器与绝热材料的接触面积，为

$$A=\pi dl+\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2=\pi d\left(l+\frac{d}{4}\right)=1.77\times10^{-2}\ \mathrm{m}^2$$

上述能量 $\dot{Q}At$ 全部用来使液氮汽化，取时间 t 为 1h，则在 1h 内汽化的液氮质量为

$$\begin{aligned}m&=\frac{1}{L}\alpha\sigma A(T_2{}^4-T_1{}^4)t\\&=\frac{1}{2.1\times10^3}[0.5\times5.67\times10^{-8}\times1.77\times10^{-2}\times(77^4-4.2^4)\times3600]=3.0\times10^{-3}\ \mathrm{kg}\end{aligned}$$

即每小时液氮的汽化量为 3.0×10^{-3} kg.

【题 6】 试证明在黑体的平衡辐射场中，能量密度的最大值与平衡温度 T 的五次方成正比．

【分析】 普朗克公式描述了黑体辐射的能量密度随频率或波长的分布．在温度一定的平衡黑体辐射场中，由能量密度为极值的条件，即可确定它与温度的关系．

【解】 由普朗克公式可得，在频率 ν 到 $(\nu+\mathrm{d}\nu)$ 范围黑体辐射的能量密度为

$$\rho_\nu\mathrm{d}\nu=\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{h\nu/kT}-1}\mathrm{d}\nu$$

利用

$$c=\lambda\nu$$

$$\mathrm{d}\nu=-\frac{c\,\mathrm{d}\lambda}{\lambda^2}$$

可得出在波长 λ 到 $(\lambda+\mathrm{d}\lambda)$ 范围内的能量密度为

$$\rho_\lambda\mathrm{d}\lambda=\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{hc/\lambda kT}-1}\mathrm{d}\lambda \tag{1}$$

上式表明，在一定温度下，能量密度随波长 λ 变化，能量密度的分布函数为

$$\rho_\lambda=\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{hc/\lambda kT}-1} \tag{2}$$

ρ_λ 的极值满足

$$\frac{\mathrm{d}\rho_\lambda}{\mathrm{d}\lambda}=0$$

由(2)式，得

$$\frac{\mathrm{d}\rho_\lambda}{\mathrm{d}\lambda}=8\pi hc\left[\frac{-5(\mathrm{e}^{hc/\lambda kT}-1)+\frac{hc}{kT}\cdot\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{hc/\lambda kT}}{\lambda^6(\mathrm{e}^{hc/\lambda kT}-1)^2}\right]$$

故应满足

$$5(1-\mathrm{e}^{-hc/\lambda kT})-\frac{hc}{\lambda kT}=0$$

令

$$x=\frac{hc}{\lambda kT}$$

则应满足

$$5e^{-x}+x-5=0$$

解出

$$x=x_m=4.965$$

即当波长满足

$$\lambda T=\frac{hc}{kx_m}=b(\text{常量})$$

时，有最大的能量密度，上式即维恩位移定律．把 $\lambda=\frac{b}{T}$ 代入(2)式，得

$$\rho_\lambda=\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\cdot\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}=\frac{8\pi hc}{b^5}T^5\frac{1}{e^{hc/bk}-1}$$

即

$$\rho_\lambda\propto T^5$$

可见黑体辐射的最大能量密度与温度 T 的五次方成正比．

【题 7】 阳光中的人造卫星．

本题欲计算一颗太空中人造卫星的温度．卫星的主体假设是直径为 1 m 的球，而且卫星主体各处温度均匀一致．卫星的整个球表面用同一种涂料覆盖．卫星处于地球附近的太空中，但不在地球的阴影中．

太阳表面温度(黑体温度) $T_日$ 为 6000 K，太阳半径为 $R_日=6.96\times10^8$ m，太阳与地球的距离为 $R=1.5\times10^{11}$ m. 卫星在阳光中升到某一温度时，卫星的黑体辐射功率等于它对阳光的吸收功率．根据斯特藩－玻尔兹曼定律，黑体表面每单位面积的辐射功率

$$P=\sigma T^4$$

式中 σ 是一普适常量，$\sigma=5.67\times10^{-8}$ W/(m$^2\cdot$K^4)．我们先假设太阳与卫星都近似为黑体．

1. 试导出卫星热平衡温度 T_s 的表达式，并计算其数值．

2. 物体在温度为 T 时的黑体辐射谱 $u(T,f)$ 遵从普朗克辐射定律

$$u(T,f)\mathrm{d}f=\frac{8\pi k^4T^4}{c^3h^3}\cdot\frac{\eta^3\mathrm{d}\eta}{e^\eta-1}$$

式中 $u\mathrm{d}f$ 是频率在 f 到 $(f+\mathrm{d}f)$ 间隔内的电磁辐射的能量密度，式中

$$\eta=\frac{hf}{kT}$$

有关常量如下：

$$h=6.6\times10\ -34\ \mathrm{J\cdot s}$$
$$c=3.0\times10^8\ \mathrm{m/s}$$
$$k=1.4\times10^{-23}\ \mathrm{J/K}$$

其中 h 为普朗克常量，c 为真空光速，k 为玻尔兹曼常量．黑体辐射谱对所有频率和发射方向进行积分，便可得到单位面积的全辐射功率 $P=\sigma T^4$，此即上面给出的斯特藩－玻尔兹曼定律，其中

$$\sigma=\frac{2\pi^5}{15}\cdot\frac{k^4}{c^2h^3}$$

如图所示，给出了归一化的谱(参看题后译注)

$$\frac{kT}{h}\left[\frac{c^3h^3}{8\pi k^4}\cdot\frac{u(T,f)}{T^4}\right]=\frac{\eta^3}{e^\eta-1}$$

与 η 的函数关系曲线．

在人造卫星的许多应用方面，必须使卫星尽可能地冷．为了冷却卫星，工程师们使用一种反射涂料，它可全反射掉高于某截止频率的人射光，但是不反射低于该截止频率的热辐射．设这一截止频率为

$$f_c=(1200\ \mathrm{K})\frac{k}{h}$$

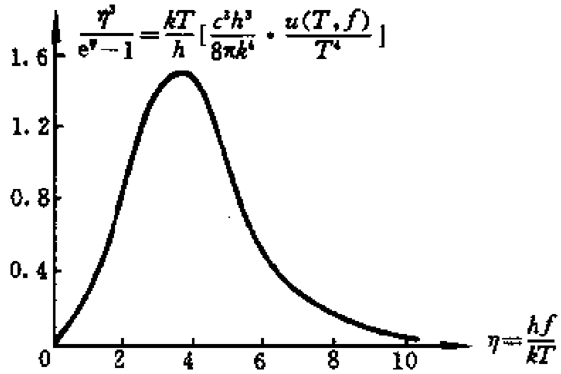
试估算卫星现在可达到的温度．

不要求严格解，不必进行繁琐的积分，凡是需要的均可作近似计算．给出一个积分值如下，

$$\int_0^\infty\frac{\eta^3\mathrm{d}\eta}{e^\eta-1}=\frac{\pi^4}{15}$$

函数 $\frac{\eta^3}{e^\eta-1}$ 的极大值出现在 $\eta\approx2.82$ 处．η 较小时，可取指数函数的近似展开式

$$e^\eta\approx1+\eta$$



近图 1－7－1

3．现在假设有一颗真实的人造卫星，它用几块向外展开的太阳能电池板来发电，卫星主体内电子器件的焦耳热形成了额外的热的来源．设这种内部产生的热功率为 1KW．试问上面第 2 问中卫星的温度又将为多少？

4．某家厂商广告宣传一种特殊的油漆如下："本油漆对所有入射辐射（可见光与红外线）均反射能量的 90% 以上．但其本身又能像黑体一样在所有频率（可见光与红外线）上进行辐射，从而使卫星释放出的热量始终多于吸收的热量．据此，本油漆将能使卫星越来越冷．"

试问这样的油漆可能存在吗？为什么？

5．为使一个像人造卫星一样的球体的温度上升到比第 1 问算出的温度还要高，试问该球表面的涂料应具有什么样的性质？

【译注】 关于本题第 2 问归一化谱的解释．

在我国大学物理教材中，通常引入黑体在温度为 T 的热平衡辐射场能量密度随辐射圆频率的分布函数，它可表述为

$$u_0(T,\omega)=\frac{1}{\pi^2C^3}\cdot\frac{\hbar\omega^3}{e^{\hbar\omega/kT}-1}$$

式中 $\hbar=\frac{h}{2\pi}$，在 ω 到 $(\omega+\mathrm{d}\omega)$ 范围内，辐射场的能量密度为

$$u_0(T,\omega)\mathrm{d}\omega$$

若以辐射频率 $f=\frac{\omega}{2\pi}$ 置换 ω 作为能量密度参量，则能量密度随辐射频率的分布函数 $u(T,f)$ 与上面的 $u_0(T,\omega)$ 应有如下关联，

$$u(T,f)\mathrm{d}f=u_0(T,\omega)\mathrm{d}\omega$$

此处的 $u(T,f)$ 即为第 2 问所称"物体在温度为 T 时的黑体辐射谱"．结合 $u_0(t,\omega)$ 的表达式，可得

$$u(T,f)\mathrm{d}f=\frac{8\pi hf^3}{c^3}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{hf/kT}-1}\mathrm{d}f$$

引入无量纲参数

$$\eta=\frac{hf}{kT}$$

便得到第 2 问给出的公式

$$u(T,f)\mathrm{d}f=\frac{8\pi k^4T^4}{c^3h^3}\cdot\frac{\eta^3}{\mathrm{e}^\eta-1}\mathrm{d}\eta$$

通过对辐射方向的积分，黑体表面单位面积向外辐射的功率随辐射频率 f 的分布函数为

$$p(T,f)=\frac{c}{4}u(T,f)$$

再对频率积分，可得单位面积向外辐射的全(频率)辐射功率为

$$P(T)=\int_0^\infty p(T,f)\mathrm{d}f=\frac{c}{4}\int_0^\infty u(T,f)\mathrm{d}f=\frac{2\pi k^4T^4}{c^2h^3}\int_0^\infty\frac{\eta^3}{\mathrm{e}^\eta-1}\mathrm{d}\eta$$

因

$$\int_0^\infty\frac{\eta^3}{\mathrm{e}^\eta-1}\mathrm{d}\eta=\frac{\pi^4}{15}$$

即得题中所给出的斯特藩－玻尔兹曼定律

$$P=\sigma T^4$$

式中

$$\sigma=\frac{2\pi^5k^4}{15c^2h^3}$$

$u(T,f)$ 也可表为

$$u(T,f)=\frac{8\pi k^4T^4}{c^3h^3}\cdot\frac{\eta^3}{\mathrm{e}^\eta-1}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}f}=\frac{8\pi k^4T^4}{c^3h^3}\cdot\frac{\eta^3}{\mathrm{e}^\eta-1}\cdot\frac{h}{kT}$$

因此，

$$\frac{kT}{h}\left[\frac{c^3h^3}{8\pi k^4}\cdot\frac{u(T,f)}{T^4}\right]=\frac{\eta^3}{\mathrm{e}^\eta-1}$$

由于

$$\int_0^\infty\frac{\eta^3}{\mathrm{e}^\eta-1}\mathrm{d}\eta=\frac{\pi^4}{15}\ (\text{常量})$$

函数

$$\frac{kT}{h}\left[\frac{c^3h^3}{8\pi k^4}\cdot\frac{u(T,f)}{T^4}\right]$$

可称为归一化的谱．本题原文引入

$$\frac{c^3h^3}{8\pi k^4}\cdot\frac{u(T,f)}{T^4}=\frac{1}{f}\frac{\eta^2}{\mathrm{e}^\eta-1}$$

为归一化谱，实属不妥，且与所给图线不符．翻译时已对此表达式作了修改，并对题图的纵坐标也作了相应的修改．

【解】 1．太阳全表面的黑体辐射功率为

$$4\pi R_日^2\ P = 4\pi R_日^2\ \sigma T_日^4$$

人造卫星与太阳的距离近似取为地球与太阳的距离 R. 对太阳而言,R 球面上单位面积辐射流的功率为

$$\frac{4\pi R_日^2\ \sigma T_日^4}{4\pi R^2} = \frac{\sigma T_日^4\ R_日^2}{R^2}$$

卫星吸收的功率为

$$\frac{\pi r_s^2 \sigma T_日^4\ R_日^2}{R^2}$$

其中 $r_s = 0.5$ m 为卫星半径 .

卫星自身表面的黑体辐射功率为

$$4\pi r_s^2 \sigma T_s^4$$

其中卫星温度 T_s 为待求量 . 热平衡时有

$$\frac{\pi r_s^2\ \sigma T_日^4\ R_日^2}{R^2} = 4\pi r_s^2 \sigma T_s^4$$

因此,

$$T_s = \sqrt{\frac{R_日}{2R}}T_日$$

把有关数据代入,得

$$T_s = \sqrt{\frac{6.96\times 10^8}{2\times 1.5\times 10^{11}}}\times 6000 = 289 \text{ K}$$

2. 据题意,低于截止频率

$$f_c = (1\,200 \text{ K})\,\frac{k}{h}$$

的太阳辐射可被卫星吸收并转化为热,高于 f_c 者均被反射 . 由“译注”可知,太阳表面单位面积向外辐射的功率随辐射频率 f 的分布函数为

$$p(T,f) = \frac{c}{4}u(T,f)$$

其中 $T = T_日 = 6000$ K. 频率在 0 到 f_c 区间的单位面积辐射功率为

$$P'(T) = \int_0^{f_c} p(T,f)\mathrm{d}f = \frac{c}{4}\int_0^{f_c} u(T,f)\mathrm{d}f$$

把

$$u(T,f)\mathrm{d}f = \frac{8\pi k^4 T^4}{c^3 h^3} = \frac{\eta^3 \mathrm{d}\eta}{\mathrm{e}^\eta - 1}$$

及 f_c 对应的

$$\eta_c = \frac{hf_c}{kT} = \frac{1200}{T} = \frac{1200}{6000} = 0.2$$

代入,有

$$P'(T) = \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3}\int_0^{0.2}\frac{\eta^3 \mathrm{d}\eta}{\mathrm{e}^\eta - 1}$$

而太阳表面单位面积向外辐射的全(频率)辐射功率为

$$P = P(T) = \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3}\int_0^{\infty}\frac{\eta^3 \mathrm{d}\eta}{\mathrm{e}^{\eta}-1}$$

因此

$$P'(T) = \left[\frac{\int_0^{0.2}\frac{\eta^3 \mathrm{d}\eta}{\mathrm{e}^{\eta}-1}}{\int_0^{\infty}\frac{\eta^3 \mathrm{d}\eta}{\mathrm{e}^{\eta}-1}}\right] P$$

利用 η 较小时的展开式

$$\mathrm{e}^{\eta} \approx 1 + \eta$$

得

$$\int_0^{0.2}\frac{\eta^3 \mathrm{d}\eta}{\mathrm{e}^{\eta}-1} = \frac{1}{3}\eta^3\Big|_0^{0.2} = \frac{1}{3}(0.2)^3$$

再利用

$$\int_0^{\infty}\frac{\eta^3 \mathrm{d}\eta}{\mathrm{e}^{\eta}-1} = \frac{\pi^4}{15}$$

得出

$$P'(T) = 4.1 \times 10^{-4} P$$

对于人造卫星,上述截止频率 f_c 对应

$$\eta'_c = \frac{hf_c}{kT_s} = \frac{1200\ \mathrm{K}}{T_s}$$

卫星的热平衡温度 $T_s = 289\ \mathrm{K} \ll 1200\ \mathrm{K}$,故 $\eta'_c \gg 1$,卫星表面涂料对卫星高频辐射的阻止作用可忽略不计,卫星向太空的热辐射可近似处理为绝对黑体全频率辐射 .

现在 $P'(T)$ 代替第1问解答中一开始的 P,从而使得解答过程中卫星吸收项多出一个 4.1×10^{-4} 系数,由此可知卫星的新温度 T'_s 应满足关系式

$$T'^4_s = 4.1 \times 10^{-4}\left(\frac{R_日^2}{4R^2}T_日^4\right) = 4.1 \times 10^{-4} T_s^4$$

即有

$$T'_s = (4.1 \times 10^{-4})^{\frac{1}{4}} T_s = 41\ \mathrm{K}$$

3. 第 2 问解出的卫星温度很低,仅为 41K,截止频率 f_c 对应的

$$\eta'_c = \frac{1200\ \mathrm{K}}{T'_s} = 30$$

确为一个较大的数值,这反过来说明第 2 问求解过程中将卫星向空间的热辐射近似处理为绝对黑体全频率辐射是完全可以接受的 .

现在的情况有所不同 . 卫星内部焦耳热功率 $P_J = 1\mathrm{kW}$ 较大,它必定会使卫星的温度 T''_s 升高,η'' 随之降低,若再将卫星的热辐射处理为全频率辐射便不妥了 .

作为零级近似,先设卫星作全频率辐射,则卫星自身表面的黑体辐射功率为

$$P_s = 4\pi r_s^2 \sigma T''^4_s$$

由第 2 问，可算出卫星吸收太阳辐射的功率为

$$P'(T) = (4.1\times10^{-4})\pi r_s^2\sigma T_{日}^4\frac{R_{日}^2}{R^2} = 0.51\ \mathrm{W}$$

卫星热平衡时

$$P_s = P_J + P'(T)$$

因 $P_J = 1\ \mathrm{kW}, P'(T) = 0.51\ \mathrm{W}$，故

$$P_J \gg P'(T)$$

近似有

$$P_s = P_J$$

得出卫星温度为

$$T''_s = \left(\frac{P_J}{4\pi r_s^2\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{10^3}{4\pi\times0.5^2\times5.67\times10^{-8}}\right)^{\frac{1}{4}} = 274\ \mathrm{K}$$

相应的

$$\eta''_c = \frac{1200\ \mathrm{K}}{T''_s}\approx 4$$

现在可对卫星温度 T''_s 作第一次修正．因 $\eta > \eta''_c$ 对应频率的辐射被卫星表面涂料反射回卫星体内，真正被辐射出去的功率为

$$P''_s = \left[\frac{\int_0^{\eta''_c}\frac{\eta^3\mathrm{d}\eta}{\mathrm{e}^\eta-1}}{\int_0^{\infty}\frac{\eta^3\mathrm{d}\eta}{\mathrm{e}^\eta-1}}\right]P_s = \left[\frac{\int_0^{\eta''_c}\frac{\eta^3\mathrm{d}\eta}{\mathrm{e}^\eta-1}}{\frac{\pi^4}{15}}\right]P_s$$

或写为

$$P''_s = \alpha P_s$$

其中

$$\alpha = \frac{1}{6.5}\int_0^{\eta''_c}\frac{\eta^3\mathrm{d}\eta}{\mathrm{e}^\eta-1}$$

利用题图，对于 $\eta''_c = 4$ 估算出曲线下的面积约含 18 个方格，每一方格的“面积”为 0.2，由此近似得出

$$\int_0^{\eta''_c}\frac{\eta^3\mathrm{d}\eta}{\mathrm{e}^\eta-1} = 18\times0.2 = 3.6$$

因此

$$\alpha = \frac{3.6}{6.5}\approx 0.55$$

热平衡方程为

$$P''_s = P_J$$

即

$$\alpha(4\pi r_s^2\sigma T''^4_s) = P_J$$

得出

$$T''_s = \alpha^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{P_J}{4\pi r_s^2 \sigma}\right)^{\frac{1}{4}} = (0.55)^{-\frac{1}{4}} \times 274\ \text{K} = 318\ \text{K}$$

它对应新的

$$\eta''_c = \frac{1200\ \text{K}}{T''_s} = 3.8$$

再对 T''_s 作第二次修正．利用题图，得出

$$\int_0^{\eta''_c} \frac{\eta^3 d\eta}{e^\eta - 1} = 16.8 \times 0.2 = 3.4$$

因此，

$$\alpha = \frac{3.4}{6.5} = 0.52$$

$$T''_s = \alpha^{-\frac{1}{4}} \times 274\ \text{K} = 322\ \text{K}$$

对应新的

$$\eta''_c = \frac{1200\ \text{K}}{T''_s} = 3.7$$

再对 T''_s 作第三次修正．利用题图，得出

$$\int_0^{\eta''_c} \frac{\eta^3 d\eta}{e^\eta - 1} = 16.2 \times 0.2 = 3.24$$

$$\alpha = \frac{3.24}{6.5} = 0.50$$

$$T''_s = \alpha^{-\frac{1}{4}} \times 274\ \text{K} = 326\ \text{K}$$

对应新的

$$\eta''_c = \frac{1200\ \text{K}}{T''_s} = 3.7$$

此 η''_c 值与上一次修正值相同，故卫星温度取为

$$T''_s = 326\ \text{K}$$

是合理的．

（第 3 问原解答给出的卫星热平衡温度为 274 K，此即前面给出的零级近似解，它与合理解 326 K 相差 52 K.）

4．这样的卫星油漆不可能存在．因为若有这种卫星油漆存在，那么，可以设想有一个温度为 T_0 的大热源包围着此卫星，卫星放热多于吸热必然导致大热源吸热多于放热．若开始时卫星温度 T_s 高于 T_0，则 T_s 必可降至低于 T_0，据题设，此时卫星放热仍多于吸热，便成从低温热源（卫星）向高温热源（大热源）的自发热传导，这显然违反热力学第二定律．

5．为使卫星热平衡温度高于第 1 问计算值，要求表面涂料具有类似地球大气的性能．这就是说，涂层可将它从阳光中及卫星体辐射中吸收的红外部分转化为热能，尔后此热能的一部分转化为其他形式的能量被卫星体吸收并再转化为热能．这样就使卫星体吸收的总热量有所增加，卫星体热平衡时辐射出去的能量也相应增加，从而使其热平衡温度增高．

【本题是 1992 年第 23 届 IPhO（国际中学生物理奥林匹克竞赛）试题．】

【题8】 波长为350 nm的光波入射到某光电材料表面，能量最高的光电子在1.50×10^{-5} T的磁场中沿半径为18.0 cm的圆轨道运动．试求该光电材料的逸出功．

【分析】 当光照射在金属表面时，金属中有电子逸出，这种电子称为光电子．这种现象就是光电效应．爱因斯坦提出光子概念，成功地解释了光电效应的有关现象．

【解】 爱因斯坦方程为

$$h\nu = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 + W_0$$

式中$h\nu$是光子的能量，W_0是光电材料的逸出功，$\frac{1}{2}mv_{\max}^2$是光电子逸出后的最大动能．利用

$$c = \lambda\nu$$

得

$$W_0 = \frac{hc}{\lambda} - \frac{1}{2}mv_{\max}^2$$

又因

$$\frac{mv_{\max}^2}{r} = ev_{\max}B$$

故

$$mv_{\max} = eBr$$

代入，得

$$\begin{aligned} W_0 &= \frac{hc}{\lambda} - \frac{(eBr)^2}{2m} \\ &= \frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^8}{3.5\times10^{-7}} - \frac{(1.60\times10^{-19}\times1.50\times10^{-5}\times0.18)^2}{2\times9.1\times10^{-31}} \\ &= 4.66\times10^{-19}\ \text{J} = 2.90\ \text{eV} \end{aligned}$$

【题9】 试证明，静止的自由电子不可能产生光电效应．

【分析】 光电效应是物质在电磁辐射的作用下逸出电子的效应．爱因斯坦假设，一个光子的能量为$h\nu$，电子吸收了光子的全部能量后，一部分用于逸出功，剩余的即为光电子的动能．本题的实质是要证明，静止电子不可能全部吸收入射光子的能量．可用反证法，即假设静止电子可以吸收入射光子的全部能量，利用由此得出的推论不合理来证明．

【解】 方法一．假设静止自由电子能整个地吸收入射光子．在入射光子和静止自由电子的质心系中考察．在质心系中系统的总动量始终为零．光子被吸收前，光子的能量为$h\nu$，电子的能量为mc^2，其中

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v_c^2}{c^2}}}$$

式中v_c是质心系中电子的速度．光子被吸收后，只剩电子，它在质心系中的速度应为零(因为系统的总动量在质心系中始终为零)，故电子的能量为m_0c^2．由能量守恒，应有

$$h\nu + mc^2 = m_0c^2$$

上式要求

$$m_0 > m$$

即要求电子的质量 m 应小于其静止质量 m_0，这是违背相对论的．因此，上述假设不成立，即静止的自由电子不可能吸收光子产生光电效应．

方法二．假设静止自由电子能吸收一个光子，则在吸收过程前、后应遵从动量守恒和能量守恒，即应有

$$\frac{h\nu}{c} = p_e \tag{1}$$

$$h\nu = E_e = \sqrt{(p_ec)^2 + (m_0c^2)^2} \tag{2}$$

式中 $h\nu$ 和 $\frac{h\nu}{c}$ 是被吸收前光子的能量和动量，p_e 和 E_e 是吸收光子后电子的动量和能量．把(2)式除以 c，得

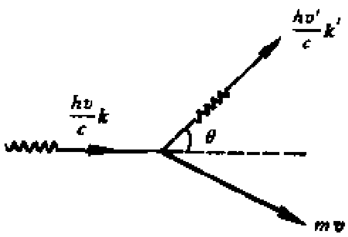
$$\frac{h\nu}{c} = \sqrt{p_e^2 + m_0^2c^2} > p_e$$

此结果与(1)式矛盾．因此，所假设的过程不可能发生．

康普顿效应是入射光子与物质中的自由电子相互作用的效应，光子的能量不可能全部被自由电子吸收，而只能损失部分能量，结果是光子被散射．能够产生光电效电的电子必须是物质中的束缚电子，在光电效应的过程中，入射光子的动量被原子实取去，但原子实几乎不吸收能量，光子的能量全部交给束缚电子，使之逸出．

【题 10】 在某康普顿散射实验中，散射光线与入射光线的夹角为 60°，散射光波长为 0.0254nm．试求反冲电子的动能和动量．

【分析】 康普顿效应是 X 射线（X 光子）与静止自由电子碰撞后，在与入射光束成 θ 角的方向上，可以探测到波长增为 λ' 的散射光的现象，亦称康普顿散射．康普顿效应和光电效应表明光（电磁辐射）具有粒子性，即光是光子流．在康普顿散射过程中，X 光子和静止自由电子系统在碰撞前、后的总动量守恒，总能量守恒．



近图 1－10－1

【解】 如图所示，康普顿散射是 X 光子和静止自由电子的相互碰撞过程，碰撞前、后总动量和总能量守恒，故有

$$\frac{h\nu}{c}\boldsymbol{k} = \frac{h\nu'}{c}\boldsymbol{k}' + m\boldsymbol{v} \tag{1}$$

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + mc^2 \tag{2}$$

式中 ν 和 ν' 是入射光子和散射光子的频率，$\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{k}'$ 是入射光子和散射光子运动方向的单位矢量，m_0 是电子的静止质量，m 是反冲电子的质量．(2)式也可写成

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + m_0c^2 + E_k$$

式中 E_k 是反冲电子的动能，为

$$E_k = h(\nu - \nu') = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) = hc\frac{\Delta\lambda}{\lambda\lambda'} \tag{3}$$

式中

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$$

是散射光与入射光的波长差．由康普顿散射的基本公式，$\Delta\lambda$ 与康普顿波长 λ_c 的关系为

$$\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta)$$

式中

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c} = 0.002426 \text{ nm}, \quad \cos\theta = 0.5$$

代入，得

$$\Delta\lambda = 0.0012 \text{ nm}$$

$$\lambda = \lambda' - \Delta\lambda = 0.0254 - 0.0012 = 0.0242 \text{ nm}$$

把上述结果代入(3)式，得反冲电子的动能为

$$E_k = \frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^8\times0.0012}{0.0242\times0.0254\times10^{-9}} = 3.88\times10^{-16}\text{ J} = 2.43\times10^3\text{ eV}$$

把(1)式平方，得

$$(mv)^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{h\nu}{c}\right)\left(\frac{h\nu'}{c}\right)\cos\theta$$

$$= h^2\left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda'^2} - \frac{2\cos\theta}{\lambda\lambda'}\right) = \frac{h^2}{(\lambda\lambda')^2}(\lambda^2 + \lambda'^2 - \lambda\lambda')$$

故反冲电子的动量为

$$mv = \frac{h}{\lambda\lambda'}\sqrt{\lambda^2 + \lambda'^2 - \lambda\lambda'} = 2.68\times10^{-23}\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

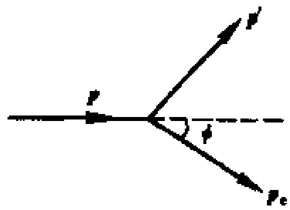
【题 11】 在康普顿散射中，已知反冲电子的运动方向与入射光的方向夹 φ 角，入射光的频率为 ν．试求反冲电子的动能．

【解】 设入射光子的动量为 $\boldsymbol{p}$，散射光子的动量为 $\boldsymbol{p}'$，反冲电子的动量为 $\boldsymbol{p}_e$，由能量守恒，有

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + m_0c^2 + E_k$$

即

$$pc = p'c + E_k \tag{1}$$



近图 1-11-1

式中 E_k 为反冲电子的动能．如图所示，由动量守恒，有

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}' + \boldsymbol{p}_e$$

即

$$p'^2 = p^2 + p_e^2 - 2p_e p\cos\varphi \tag{2}$$

反冲电子的能量 E_e 和动量 p_e 遵从下述相对论公式

$$E_e^2 = (cp_e)^2 + (m_0c^2)^2$$

即

$$p_e^2 = \frac{1}{c^2}[E_e^2 - (m_0c^2)^2]$$

$$=\frac{1}{c^2}[(m_0c^2+E_k)^2-(m_0c^2)^2]=\frac{1}{c^2}(E_k^2+2E_km_0c^2) \tag{3}$$

由(1)式,有

$$p'^2=\left(p-\frac{E_k}{c}\right)^2=p^2+\frac{E_k^2}{c^2}-2\frac{pE_k}{c}$$

把上式与(2)式比较,得

$$\frac{E_k^2}{c^2}-2\frac{pE_k}{c}=p_e^2-2pp_e\cos\varphi$$

把(3)式代入,得

$$\frac{E_k^2}{c^2}-2\frac{pE_k}{c}=\frac{1}{c^2}(E_k^2+2E_km_0c^2)-2pp_e\cos\varphi$$

即

$$E_k\left(m_0+\frac{p}{c}\right)=pp_e\cos\varphi$$

把上式平方,得

$$E_k^2\left(m_0+\frac{p}{c}\right)^2=p^2p_e^2\cos^2\varphi$$

再将(3)式的 p_e 及 $p=\frac{h\nu}{c}$ 代入,得

$$E_k=\frac{2p^2m_0\cos^2\varphi}{\left(m_0+\frac{p}{c}\right)^2-\frac{p^2}{c^2}\cos^2\varphi}$$

$$=\frac{2\frac{p^2}{m_0}\cos^2\varphi}{\left(1+\frac{p}{m_0c}\right)^2-\left(\frac{p}{m_0c}\right)^2\cos^2\varphi}=\frac{2\frac{(h\nu)^2}{m_0c^2}\cos^2\varphi}{\left(1+\frac{h\nu}{m_0c^2}\right)^2-\left(\frac{h\nu}{m_0c^2}\right)^2\cos^2\varphi}$$

当 $\varphi=0$ 时,反冲电子的动能最大,为

$$(E_k)_{\max}=\frac{2(h\nu)^2}{m_0c^2+2h\nu} \tag{4}$$

【题 12】 在一次康普顿散射中,传递给电子的最大能量为 4.5×10^4 eV. 试求入射光子的波长.

【解】 根据上题(本章题 11)结果,当反冲电子沿光子的入射方向运动时(即 $\varphi=0$ 时),获得最大动能,此时散射光子的散射角 $\theta=\pi$.

设入射光子和散射光子的频率分别为 ν 和 ν',由能量守恒,有

$$h\nu+m_0c^2=h\nu'+m_0c^2+E_k$$

即

$$h(\nu-\nu')=E_k \tag{1}$$

由动量守恒,有

$$\frac{h\nu}{c}=-\frac{h\nu'}{c}+p_e$$

又，反冲电子的动量 p_e 满足

$$(cp_e)^2 = E_e^2 - (m_0c^2)^2$$
$$= (m_0c^2 + E_k)^2 - (m_0c^2)^2 = E_k^2 + 2m_0c^2E_k$$

故

$$h(\nu + \nu') = cp_e = \sqrt{E_k^2 + 2m_0c^2E_k} \tag{2}$$

由(1)、(2)式，解出

$$2h\nu = E_k + \sqrt{E_k^2 + 2m_0c^2E_k}$$

上式也可以直接引用上题（本章题 11）的(4)式得出．把数据代入，得

$$h\nu = 1.32\times10^5\ \text{eV}$$

故入射光子的波长为

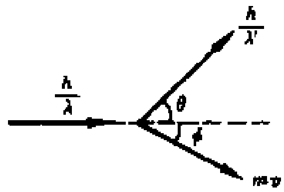
$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{h\nu} = \frac{hc}{1.32\times10^5\times1.6\times10^{-19}}\ \text{m}$$
$$= 9.42\times10^{-12}\ \text{m} = 0.00942\ \text{nm}$$

【题 13】 试证明，在康普顿散射中，光子的散射角 θ 与电子的散射角 φ 之间的关系是

$$\cot\frac{\theta}{2} = \left(1 + \frac{\lambda_c}{\lambda}\right)\tan\varphi$$

式中 λ 是入射光的波长，λ_c 是康普顿波长．

【解】 如图所示，动量守恒定律的分量形式为



近图 1－13－1

$$\frac{h}{\lambda'}\sin\theta - mv\sin\varphi = 0$$

$$\frac{h}{\lambda'}\cos\theta + mv\cos\varphi = \frac{h}{\lambda}$$

由以上两式，得

$$\tan\varphi = \frac{\sin\theta}{\frac{\lambda'}{\lambda} - \cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\frac{\lambda + \Delta\lambda}{\lambda} - \cos\theta} = \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta + \frac{\Delta\lambda}{\lambda}}$$

因

$$1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta) = 2\lambda_c\sin^2\frac{\theta}{2}$$

故

$$\tan\varphi = \frac{\sin\theta}{2\sin^2\frac{\theta}{2} + 2\frac{\lambda_c}{\lambda}\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\left(1 + \frac{\lambda_c}{\lambda}\right)\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\cot\frac{\theta}{2}}{1 + \frac{\lambda_c}{\lambda}}$$

即

$$\cot\frac{\theta}{2}=\left(1+\frac{\lambda_c}{\lambda}\right)\tan\varphi$$

【题 14】 巴耳末系中的 H_α 线是指氢原子从 $n=3$ 能级跃迁到 $n=2$ 能级时发出的谱线，它的波长为 656.280nm. 氢的同位素氘也有类似的巴耳末系，实验测得其中的 D_α 谱线的波长为 656.101nm. 试由此确定氢核与氘核的质量比．

【分析】 如果不考虑原子核的运动，氢原子与氘原子的能级结构相同，H_α 与 D_α 谱线的波长也应相同．实验结果表明两个波长有微小的差别，这说明必须考虑原子核的运动．原子核与电子之间的相互作用构成二体问题，将一体问题解中电子质量 m 换成折合质量

$$\mu=\frac{mM}{m+M}$$

后，就是二体问题的解．μ 表达式中的 M 是原子核的质量，对于氢原子核为 M_H，对于氘原子核为 M_D. 找出 H_α（或 D_α）谱线波长 λ_H（或 λ_D）与 μ 的关系，即可由 λ_H 与 λ_D 的差别求出 M_H 与 M_D 的比值．

【解】 若不考虑原子核的运动，则氢原子 H_α 谱线与氘原子的 D_α 谱线的波长相同，均为

$$\lambda=\left[R\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)\right]^{-1}$$

式中里德伯常数 R 为

$$R=\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2h^3c}$$

考虑原子核的运动，应以折合质量 μ 代替 R 表达式中的电子质量 m. 对于氢原子和氘原子，折合质量分别为

$$\mu_H=\frac{mM_H}{m+M_H}$$

$$\mu_D=\frac{mM_D}{m+M_D}$$

于是，H_α 和 D_α 谱线的波长分别为

$$\lambda_H=\left[\frac{\mu_He^4}{8\varepsilon_0^2h^3c}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)\right]^{-1}$$

$$\lambda_D=\left[\frac{\mu_De^4}{8\varepsilon_0^2h^3c}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)\right]^{-1}$$

两式相除，得

$$\frac{\lambda_H}{\lambda_D}=\frac{\mu_D}{\mu_H}=\frac{1+\dfrac{m}{M_H}}{1+\dfrac{m}{M_D}}$$

即

$$\frac{m}{M_D}-\frac{m}{M_H}=\frac{\lambda_D-\lambda_H}{\lambda_H}$$

$$\frac{m}{M_D}=\frac{m}{M_H}-\frac{\lambda_H-\lambda_D}{\lambda_H}$$

把

$$M_H=1836\ \mathrm{m}$$
$$\lambda_H=656.280\ \mathrm{nm}$$
$$\lambda_D=656.101\ \mathrm{nm}$$

代入,得

$$\frac{m}{M_D}=\frac{1}{1836}-\frac{0.179}{656.280}=2.719\times10^{-4}$$
$$M_D=3678\ \mathrm{m}$$

故

$$\frac{M_D}{M_H}=\frac{3678\ \mathrm{m}}{1836\ \mathrm{m}}=2.003\approx2$$

氘原子核的质量是氢原子核质量的 2 倍．值得指出的是,历史上正是通过 H_α 和 D_α 谱线波长的测量发现了氢的同位素——氘．

【题 15】 1. 试通过推导,用氢原子的玻尔半径 R_1 和电子电量的绝对值 e 以及真空介电常数 ε_0 来表述氢原子的结合能 ΔE.

2. 设由一个 μ^- 子和氦核组成类氢离子,μ^- 的质量是电子质量的 207 倍,其他性质与电子相同,对于这种类氢离子,玻尔的轨道量子化理论同样适用．已知氢原子的 $R_1=0.053$ nm,$\Delta E=13.6$ eV. 试求这种类氢离子的玻尔半径 R'_1 和结合能 $\Delta E'$．

【分析】 在求解氢原子结合能时,因电子质量远小于原子核(质子)的质量,一般情况下不必考虑原子核的运动．

对于由 μ^- 子和氦核组成的类氢离子,因 μ^- 的质量远大于电子质量,与氦核(由 2 个质子和 2 个中子组成)质量相比不可忽略,故需要考虑氦核运动的影响．仿照上题(本章题 14),只要用折合质量代替 μ^- 子的质量,即可求解这一类氢离子的玻尔半径和结合能．

【解】 1. 对于基态氢原子,有

$$E_1=\frac{1}{2}m_e v^2-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$$
$$\frac{m_e v^2}{R_1}=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}$$

式中 E_1 为基态能量,m_e 为电子质量．由以上两式,解出

$$E_1=-\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1}$$

故氢原子的结合能为

$$\Delta E=E_\infty-E_1=-E_1=\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1}$$

2. 对于 μ^- 子和氦核组成的类氢离子,需要考虑氦核运动的影响．引入折合质量

$$\mu=\frac{mM}{m+M}$$

其中 μ^- 质量 m 和氦核质量M 分别为

$$m=207m_e,\quad M=4\times1836m_e$$

该类氢离子的基态,有

$$\frac{\mu v'^2}{R'_1}=\frac{(2e)e}{4\pi\varepsilon_0R'^2_1},\quad \mu'v'R'_1=\frac{h}{2\pi}$$

由以上两式,得基态半径 R'_1 为

$$R'_1=\frac{h^2}{4\pi^2(4\pi\varepsilon_0)^{-1}(2e^2)\mu}$$

对于氢原子,其基态半径 R_1 为

$$R_1=\frac{h^2}{4\pi^2(4\pi\varepsilon_0)^{-1}e^2m_e}$$

由以上两式,得

$$R'_1=\frac{m_e}{2\mu}R_1$$

把

$$\mu=199.5m_e$$

代入,得

$$R'_1=\frac{R_1}{399}=1.33\times10^{-4}\text{ nm}$$

仿照第 1 问中 E_1 的计算,同样可以得出该类氢离子的基态能量为

$$E'_1=-\frac{2e^2}{8\pi\varepsilon_0R'_1}$$

与已经得出的 E_1 表达式联立,得

$$E'_1=2\frac{R_1}{R'_1}E_1=798\ E_1$$

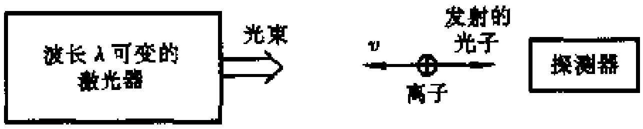
故类氢离子的结合能为

$$\Delta E'=E'_\infty-E'_1=-E'_1$$
$$=798\Delta E=1.08\times10^4\text{ eV}$$

【题 16】 用多普勒效应测定粒子速度分布．

引言:原子发射和吸收光子是可逆过程,原子的激发及随后返回基态的过程就是一例．因此,我们可以通过观察它们吸收后的自发发射(荧光)去探测光的吸收．这种现象在探测和确定粒子以及测定粒子束速度分布的现代方法中得到运用．

在如近图 1－16－1 所示的理想化实验装置中,激光的波长是可变的,带一个正电荷的离子以速度 v 迎着激光束的方向运动,速度 $v=0$ 的离子可被波长 $\lambda_1=600.000$ nm 的激光激发．由于多普勒效应,为了激发运动离子,需要波长 $\lambda(v)$不同于 λ_1 的激光．



近图 1－16－1

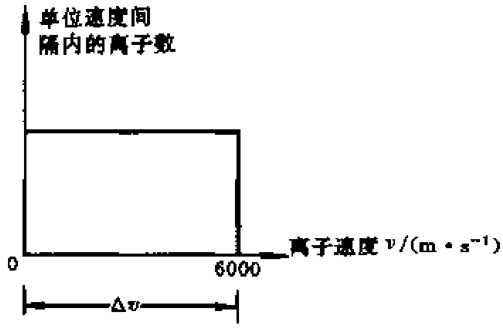
设离子的数目在速度 $v_1=0$ 和 $v_2=6000\ \mathrm{m/s}$ 的区间内均匀分布，如近图 1－16－2 所示．试解答以下问题．

1.(a)试问为了激发所有离子，激光的波长应在什么范围内可变？试画出受激后离子所发射的光子数按激光波长的分布曲线．

注意：在本小题中必须采用经典多普勒频移公式．

(b)上小题的严格处理需采用多普勒频移的相对论公式，即

$$\nu'=\nu\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}$$



近图 1－16－2

试问用经典公式计算时带来的误差的数量级有多大？

2. 设离子在激发前先通过一个电势差为 U 的加速电场．试求离子速度分布区间的宽度与加速电势差的定量关系．试问这个电势差使速度分布区间加宽了，还是变窄了？

3. 荷质比 $\frac{e}{m}=4.0\times10^6\ \mathrm{C/kg}$ 的离子有两个激发态，各自对应的波长为 $\lambda_1=600.000\ \mathrm{nm}$ 和 $\lambda_2=\lambda_1+10^{-3}\ \mathrm{nm}$. 试证明：在没有加速电场的情况下要激发全部离子，所需两组激光波长的变化范围有所重叠．可否适当地选择一个加速电势差，使上述两范围不重叠？若可以，试计算此电势差的最小值．

【分析与解】 1.(a)设激光频率为 ν，按经典多普勒频移公式，迎着激光束以速度 v 运动的粒子接收到的频率 ν' 为

$$\nu'=\nu\left(1+\frac{v}{c}\right)$$

因

$$\lambda\nu=c$$

上式可改写为用激光波长 λ 表示的关系式，为

$$\lambda=\frac{c}{\nu'}\left(1+\frac{v}{c}\right)$$

由题设

$$v=0\text{ 时，}\quad \lambda=\lambda_1$$

故

$$\lambda_1=\frac{c}{\nu'}$$

即使运动粒子受激发的频率 $\nu'=\dfrac{c}{\lambda_1}$ 为定值，代入前式，得出使运动粒子激发的激光波长 $\lambda(v)$ 的表达式为

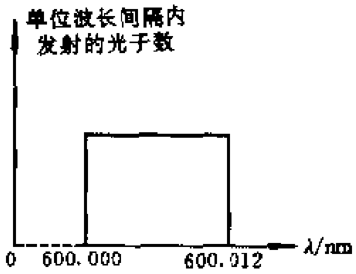
$$\lambda(v)=\lambda_1\left(1+\frac{v}{c}\right)$$

把离子速度的上、下限：$v_1=0$ 和 $v_2=6000\ \mathrm{m/s}$ 代入上式，即可求出相应的激发离子的激光波长的上、下限分别为

$$\lambda_1=600.000\ \mathrm{nm}$$

$$\lambda_2=600\times\left(1+\frac{6000}{3\times10^8}\right)\ \mathrm{nm}=600.012\ \mathrm{nm}$$

所以，为了激发所有离子，激光的波长必须能在 600.000 nm 到 600.012 nm 之间连续可变．由于激光波长 λ 与离子速度 v 为线性关系，且每个离子重新发射一个光子，故发射光子数按激光波长分布的曲线与离子数按速度分布的曲线(图 2)的形状相同，仍为均匀分布，如近图 1－16－3 所示．



近图 1－16－3

(b)采用相对论性多普勒频移公式

$$\nu'=\nu\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}$$

激发离子的激光波长为

$$\lambda(v)=\lambda_1\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}=\frac{\lambda_1\left(1+\frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\lambda_1\left(1+\frac{v}{c}\right)\left(1+\frac{v^2}{2c^2}+\cdots\right)$$

所以采用经典公式计算时，误差约为 $\dfrac{\lambda_1 v^2}{2c^2}$．把 v 用上限 $v_2=6000\ \mathrm{m/s}$ 代入，得出误差的数量级为

$$2\times10^{-10}\lambda_1$$

可见误差很小，故以下讨论均可采用经典多普勒频移公式．

2．离子带一个正电荷，电量为 e，速度为 v，经电场加速后末速度为 v'，末动能为

$$\frac{1}{2}mv'^2=\frac{1}{2}mv^2+eU$$

式中 m 为离子质量，U 为加速电势差．由上式，得出离子经电场加速后的末速度为

$$v'=\sqrt{v^2+\frac{2eU}{m}}$$

把离子初速度 v 的上、下限代入，得出末速度 v' 的上、下限为

$$v'_1=\sqrt{\frac{2eU}{m}},\quad v'_2=\sqrt{v_2^2+\frac{2eU}{m}}$$

所以，经电场加速后，离子速度分布区间的宽度 $\Delta v'$ 为

$$\Delta v' = v'_2 - v'_1 = \sqrt{v_2^2 + \frac{2eU}{m}} - \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

即

$$\Delta v' = \frac{v_2^2}{\sqrt{v_2^2 + \frac{2eU}{m}} + \sqrt{\frac{2eU}{m}}} < v_2 = \Delta v$$

因 $\Delta v' < \Delta v$，表明加速电势差使离子的速度分布区间变窄了．

3．在没有加速电场的情况下，要激发全部离子，与离子的两个激发态相对应的两组激光波长为

$$\lambda_{\mathrm{I}} = \lambda_1\left(1 + \frac{v}{c}\right), \quad \lambda_{\mathrm{II}} = \lambda_2\left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

式中 $\lambda_1 = 600.000$ nm，$\lambda_2 = 600.001$ nm．把离子速度 v 的上、下限代入以上两式，可求出两组激光波长的变化范围为

λ_{I}：从 600.000 nm 到 600.012 nm

λ_{II}：从 600.001 nm 到 600.013 nm

由上述数据看出，两组激光波长的变化范围有所重叠．

因为经电场加速后，可使离子运动的速度分布区间变窄，这就有可能使激发全部离子的两组激光波长的变化范围不重叠．设经电势差为 U 的电场加速后，有

$$\lambda_1\left(1 + \frac{v'_2}{c}\right) \leqslant \lambda_2\left(1 + \frac{v'_1}{c}\right)$$

则两组激光波长的变化范围不重叠．上式中 v'_2 和 v'_1 分别是经电场加速后离子速度的上、下限．上式取等号时，电势差 U 为最小值．由

$$\lambda_1\left(1 + \frac{v'_2}{c}\right) = \lambda_2\left(1 + \frac{v'_1}{c}\right)$$

得

$$1 + \frac{v'_2}{c} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(1 + \frac{v'_1}{c}\right) = \frac{600.001}{600.000}\left(1 + \frac{v'_1}{c}\right) \approx 1 + \frac{1}{6\times 10^5} + \frac{v'_1}{c}$$

故

$$v'_2 - v'_1 = \frac{c}{6\times 10^5} = 500\ \mathrm{m/s}$$

即

$$\sqrt{v_2^2 + \frac{2eU}{m}} - \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 500\ \mathrm{m/s}$$

上式两边乘以

$$\sqrt{v_2^2 + \frac{2eU}{m}} + \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

得

$$v_2^2 = 500\left(\sqrt{v_2^2 + \frac{2eU}{m}} + \sqrt{\frac{2eU}{m}}\right)$$

即

$$\sqrt{v_2^2+\frac{2eU}{m}}+\sqrt{\frac{2eU}{m}}=\frac{v_2^2}{500}=\frac{6000^2}{500}=72\ 000\ \text{m/s}$$

进而得出

$$2\sqrt{\frac{2eU}{m}}=72000-500=71500\ \text{m/s}$$

因而使两组激光波长的变化范围不重叠的最小加速电势差为

$$U=\frac{m}{2e}\times\left(\frac{71500}{2}\ \text{m/s}\right)^2$$

离子的荷质比为

$$\frac{e}{m}=4.0\times10^6\ \text{C/kg}$$

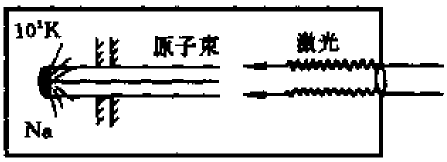
代入，得

$$U=1.6\times10^2\ \text{V}$$

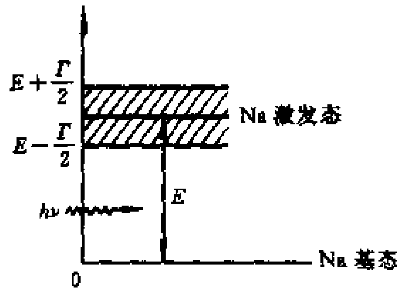
【本题是 1988 年第 19 届 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)试题．】

【题 17】 激光致冷原子．

为了能高精度地研究孤立原子的性质，必须使它们几乎静止下来并能在一个小的空间区域内停留一段时间．为此，近年来已发展成一种称为“激光致冷”的方法，其原理叙述如下．



近图 1－17－1



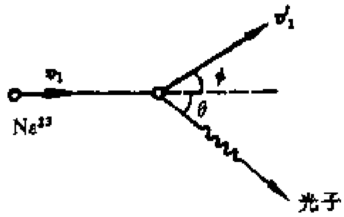
近图 1－17－2

在一真空室内，一束非常准直的 Na^{23}原子射束(通过样品在 10^3K 高温下蒸发而获得)受一束高强度激光的正面照射，如图 1－17－1 所示．选定激光频率，使速度为 v_0 的钠原子可对激光光子发生共振吸收．原子吸收了光子后跃迁到能量为 E，能级宽度为 Γ 的第一激发态，如近图 1－17－2 所示．同时它的速度有如下的改变：

$$\Delta v_1=v_1-v_0$$

尔后该原子又发射光子，并再回到基态，此过程中原子的速度改变量为：

$$\Delta v'=v'_1-v_1$$



近图 1－17－3

运动方向的偏转角为 φ，如近图 1－17－3 所示．这一先吸收后发射的事件可进行多次，如果不考虑偏转，把吸收和发射当作始终沿直线进行，则原子速度的总改变量达到某量 Δv 后，便不能再对频率为 ν

的激光发生共振吸收．接着需要改变激光频率，使原子在新的速度下进行共振吸收，继续减慢其速度，直到速度几乎降为零．

作为过程的第一步近似，可以忽略原子的所有其他相互作用过程，而只考虑光的吸收与再发射．进一步可以假设激光很强，所以原子在基态的停留时间实际上可以不计．

数据：

$E=3.36\times10^{-19}$ J　　$\Gamma=7.0\times10^{-27}$ J

$c=3.0\times10^{8}$ m/s　　$m_p=1.67\times10^{-27}$ kg

$h=6.62\times10^{-34}$ J·s　　$k=1.38\times10^{-23}$ J/K

其中 c 为真空光速，h 为普朗克常量，k 为玻尔兹曼常量，m_p 为质子质量．

1．对于动能等于准直发射管后面区域内原子平均动能的那些原子，为了保证激光能被它们共振吸收，试问激光的频率 ν 须为多大？经第一次吸收过程后，试问这些原子的速度改变量 Δv_1 为多大？

2．试问在多大速度间隔 Δv_0 内的原子均可吸收第 1 问中所算出频率的光子？

3．经过一次光子发射后，试问原子相对发射前运动方向的最大偏转角 φ_{max} 为多大？

4．若保持频率 ν 不变，试问原子速度减少量 Δv 至多能达到多大？

5．为了使初速为 v_0 沿直线运动的原子按第一问所述方式降速，最后降到速度几乎为零，试问需要经历吸收事件的次数 N 为多少？

6．如果一次吸收后有一次发射，但不考虑发射引起的速度变化，试问完成第 5 问所要求的减速过程共需多少时间？在该时间内原子走过的路程 Δs 为多长？

【解】 1．对于动能等于准直管后面原子的平均动能的原子来说，其速度 v_0 应满足

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{3}{2}kT$$

故

$$v_0=\sqrt{\frac{3kT}{m}}=\sqrt{\frac{3\times1.38\times10^{-23}\times10^3}{23\times1.67\times10^{-27}}}=1.04\times10^3\ \text{m/s}$$

计算中取 $m\approx23m_p$. 因 v_0 远小于真空中的光速，即 $v_0\ll c$，故不必考虑相对论效应．

激光由能量为 $h\nu$、动量为 $\frac{h\nu}{c}$ 的光子组成．在实验室参考系中应用能量守恒和动量守恒定律，得

$$\begin{cases}\frac{1}{2}mv_0^2+h\nu=\frac{1}{2}mv_1^2+E\\ mv_0-\frac{h\nu}{c}=mv_1\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\frac{1}{2}m(v_1^2-v_0^2)=\frac{1}{2}m(v_1+v_0)(v_1-v_0)=h\nu-E\\ \Delta v_1=v_1-v_0=-\frac{h\nu}{mc}\end{cases}$$

因

$$h\nu \ll mc$$

故

$$v_1 \approx v_0, \quad v_1 + v_0 \approx 2v_0$$

代入，得

$$\begin{cases} mv_0 \Delta v_1 = h\nu - E \\ \Delta v_1 = v_1 - v_0 = -\dfrac{h\nu}{mc} \end{cases}$$

由以上两式，解出

$$\nu = \frac{\dfrac{E}{h}}{1 + \dfrac{v_0}{c}}, \quad \Delta v_1 = -\frac{E}{mc\left(1 + \dfrac{v_0}{c}\right)}$$

把有关数据代入，得

$$\nu \approx 5.0 \times 10^{14}\ \text{Hz}$$
$$\Delta v_1 \approx -3.0 \times 10^{-2}\ \text{m/s}$$

上述近似是合理的，因为

$$\frac{|\Delta v_1|}{v_0} \sim 10^{-4}$$

故

$$v_1 + v_0 = 2v_0 + \Delta v_1 \approx 2v_0$$

2. 对一确定的 ν，由上述 ν 表达式，得

$$v_0 = c\left(\frac{E}{h\nu} - 1\right)$$

若 E 有一宽度 Γ，相应地 v_0 也将有一范围 Δv_0，为

$$\Delta v_0 = \frac{c\Gamma}{h\nu} = \frac{c\Gamma\left(1 + \dfrac{v_0}{c}\right)}{E} \approx \frac{c\Gamma}{E} = 6.25\ \text{m/s}$$

因此光子可被那些速度处在 $\left(v_0 - \dfrac{\Delta v_0}{2}\right)$ 到 $\left(v_0 + \dfrac{\Delta v_0}{2}\right)$ 区间的原子所吸收．

3. 由能量守恒及动量守恒定律，得

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}mv_1^2 + E = \dfrac{1}{2}mv_1'^2 + h\nu' \\ mv_1 = mv'_1\cos\varphi + \dfrac{h\nu'}{c}\cos\theta \\ 0 = mv'_1\sin\varphi - \dfrac{h\nu'}{c}\sin\theta \end{cases}$$

式中 ν' 为发射光子的频率，参看近图 1－17－3．

因 $v'_1 = v_1 + \Delta v'$，$\nu' = \nu + \Delta\nu'$，变化很小，可略．在 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 时，原子的偏向角 φ 达到最大，即

$$\begin{cases} mv_1 = mv_1'\cos\varphi \\ \dfrac{h\nu'}{c} = mv_1'\sin\varphi \end{cases}$$

由以上两式，得

$$\tan\varphi_m=\frac{h\nu'}{mv_1c}$$

因 $\nu'=\nu$，代入，得

$$\tan\varphi_m=\frac{E}{mv_1c}$$

$$\varphi_m=\arctan\frac{E}{mv_1c}\approx\arctan\frac{E}{mv_0c}\approx5\times10^{-5}\ \text{rad}$$

4. 随着原子速度的降低，为共振吸收所需要的光的频率按下式增加

$$\nu=\frac{\frac{E}{h}}{1+\frac{v_0}{c}}$$

在保持 ν 不变后，速度即使下降到 $(v_0-\Delta v)$，吸收仍可在能级的最低部位发生，只要 Δv 满足下式，

$$h\nu=\frac{E-\frac{\Gamma}{2}}{1+\frac{v_0-\Delta v}{c}}=\frac{E}{1+\frac{v_0}{c}}$$

即

$$\Delta v=\frac{c\Gamma}{2E}\left(1+\frac{v_0}{c}\right)=3.12\ \text{m/s}$$

（其实由题意即可判定，此处的 Δv 应为第 2 问中所求的 Δv_0 的一半．）

5. 如果每经一次吸收事件，原子速度改变量近似为 $\Delta v_1\approx-\frac{E}{mc}$，那么速度从 v_0 降低到几乎为零，共需吸收次数 N 为

$$N=\frac{v_0}{|\Delta v_1|}=\frac{mcv_0}{E}\approx3.56\times10^4\ \text{次}$$

6. 因吸收几乎是瞬时的，过程所经时间由原子的自发发射决定．原子在激发态停留的时间为

$$\tau=\frac{h}{\Gamma}$$

故

$$\Delta t=N\tau=\frac{Nh}{\Gamma}=\frac{mchv_0}{\Gamma E}\approx3.37\times10^3\ \text{s}$$

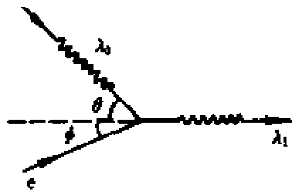
可以假设运动是匀减速的，所以这段时间内经过的路程为

$$\Delta s=\frac{1}{2}v_0\Delta t=\frac{1}{2}\frac{mchv_0^2}{\Gamma E}=1.75\ \text{m}$$

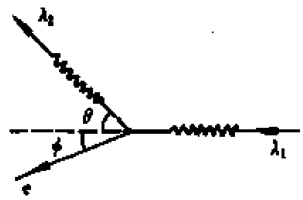
【本题是 1991 年第 22 届 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)试题．】

【题 18】 如近图 1－18－1 所示，波长为 λ_0 的光子与一运动自由电子相碰，碰后电子静止，原光

子消失，产生一个波长为 λ_1 的光子，后者的运动方向与原光子的运动方向成 $\theta=60^\circ$ 角．之后，此光子又与一个静止的自由电子相碰，碰后此光子消失，同时产生一个波长为 $\lambda_2=0.125$ nm 的光子．后者的运动方向又与碰前光子的运动方向成 $\theta=60^\circ$ 角，如近图 1－18－2 所示．试求第一个运动电子的德布罗意波长．



近图 1－18－1



近图 1－18－2

【分析】 电子的德布罗意波长为 $\lambda_e=\dfrac{h}{p_e}$，其中 p_e 为电子的动量．只要求出运动电子碰前的动量 p_e，即可求得 λ_e．两次碰撞过程均遵守能量守恒和动量守恒定律．光子能量为 $h\nu=\dfrac{hc}{\lambda}$，光子动量为$\dfrac{h}{\lambda}$．列出两个碰撞过程的能量守恒和动量守恒的表达式，并利用关于动量和能量的相对论公式，即可求解．

【解】 第一次碰撞过程的能量守恒与动量守恒可表为

$$\begin{cases} h\nu_0+E_e=h\nu_1+m_0c^2 \\ \dfrac{h}{\lambda_0}\cos\theta+p_e\cos\phi=\dfrac{h}{\lambda_1} \\ \dfrac{h}{\lambda_0}\sin\theta-p_e\sin\phi=0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} h\nu_0+E_e=h\nu_1+m_0c^2 & (1)\\ h\nu_0\cos\theta+cp_e\cos\phi=h\nu_1 & (2)\\ h\nu_0\sin\theta-cp_e\sin\phi=0 & (3) \end{cases}$$

式中 E_e 为碰前电子的总能量，m_0 为电子的静止质量，p_e 为碰前电子的动量．动量与能量的相对论关系为

$$p_e^2c^2=E_e^2-m_0^2c^4 \tag{4}$$

由以上四式可解出 ν_0 与 ν_1 之间的关系．

由(2)、(3)式，消去 ϕ，得

$$(p_ec)^2=(h\nu_1)^2-2(h\nu_1)(h\nu_0)\cos\theta+(h\nu_0)^2 \tag{5}$$

把(4)式代入，得

$$E_e^2-m_0^2c^4=(h\nu_1)^2-2h^2\nu_1\nu_0\cos\theta+(h\nu_0)^2$$

再与(1)式联立，消去 E_e，得

$$[(h\nu_1)^2+(h\nu_0)^2+(m_0c^2)^2-2h^2\nu_1\nu_0+2hm_0c^2(\nu_1-\nu_0)]-m_0^2c^4$$
$$=h^2v_1^2-2h^2\nu_1\nu_0\cos\theta+h^2\nu_0^2$$

即

$$m_0c^2(\nu_1-\nu_0)=h\nu_1\nu_0(1-\cos\theta)$$

或

$$\frac{1}{\nu_0}-\frac{1}{\nu_1}=\frac{h}{m_0c^2}(1-\cos\theta)$$

利用 $\lambda=\frac{c}{\nu}$，上式可改写为

$$\lambda_0-\lambda_1=\frac{h}{m_0c}(1-\cos\theta) \tag{6}$$

注意到第二次碰撞相当于第一次碰撞的逆过程(比较近图 1－18－1 与近图 1－18－2). 故(1)、(2)、(3)、(4)式同样适用于第二次碰撞过程，只需将 λ_2 代替 λ_0 即可．因而(6)式也适用于第二次碰撞过程(以 λ_2 代替 λ_0)，有

$$\lambda_2-\lambda_1=\frac{h}{m_0c}(1-\cos\theta) \tag{7}$$

对于两次碰撞，λ_1 与 θ 均相同，比较(6)、(7)两式，有

$$\lambda_0=\lambda_2=0.125\ \text{nm}$$

代入(6)式，得

$$\lambda_1=0.1238\ \text{nm}$$

由(5)式，得

$$p_e^2=h^2\left(\frac{1}{\lambda_1^2}-\frac{2}{\lambda_1\lambda_0}\cos\theta+\frac{1}{\lambda_0^2}\right)$$

因

$$p_e=\frac{h}{\lambda_e}$$

代入，得

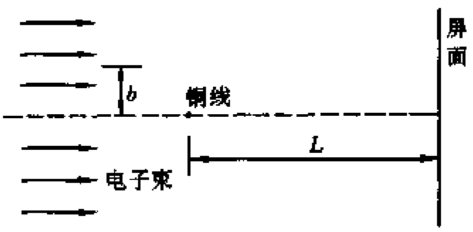
$$\frac{1}{\lambda_e^2}=\frac{1}{\lambda_1^2}-\frac{2\cos\theta}{\lambda_1\lambda_0}+\frac{1}{\lambda_0^2}$$

把 λ_e 和 λ_1 的值代入，得

$$\lambda_e=0.124\ \text{nm}$$

【本题是 1983 年第 14 届 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)试题．】

【题 19】 电子束



近图 1－19－1

通过加速电压 V_0 产生一平行均匀的高能电子束．这些电子射向一条带正电荷的无限长直均匀细铜线，铜线的长度方向与电子束初始的入射方向垂直，如近图 1－19－1 所示．近图 1－19－1 中 b 表示某个电子入射方向的延长线与铜线轴线之间的距离．现在铜线带正电荷的条件下，入射电子束经铜线射向前方荧光屏的表面，屏与铜线的距离为 $L(L\gg b)$，如近图 1－19－1 所示．设电子束初始宽

度为 $2b_{max}$，相对铜线的轴线上下对称．在垂直于图平面方向上电子束的线度可视为无穷大．

有关数据如下：

铜线的半径 $r_0=10^{-6}$ m，b 的最大值 $b_{max}=10^{-4}$ m，铜线每单位长度所带的电量 $q_{线密度}=4.4\times10^{-11}$ C，给电子束加压的电压 $V_0=2\times10^4$ V，铜线到屏面的距离 $L=0.3$ m．

注意：对下述第 2，3，4 小题，用合理的近似方法进行分析，并得出数值解答．

1．试计算带电铜线所产生的全空间电场强度分布，并画出电场强度大小 E 与到铜线轴之间距离的函数关系曲线．

2．从经典物理出发，在入射的电子中对于其 b 值使之不至于碰撞铜线的电子，用 θ_e 表示它们的小偏转角，即电子入射时的初速度与到达屏面时的末速度之间的夹角．试计算 θ_e 的值．

3．用经典物理方法，试粗略地确定电子束越过铜线到达屏上时在屏面上形成的图样（即强度分布图样），并画出图样．

4．相对于经典物理的表述而言，量子物理对强度分布的表述有明显的区别．试给出量子方法的定量处理步骤，并据此画出屏面上的图样．

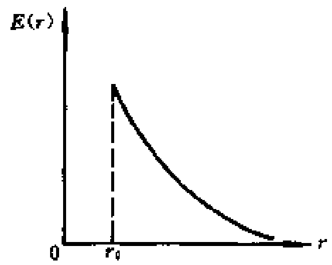
【解】 1．考虑到对称性，电场相对于铜线为沿径向向外分布，电场强度大小仅由径向距离 r（取柱坐标系）确定．围绕铜线取圆柱面高斯面，由高斯定理可得

$$2\pi rE(r)=\frac{1}{\varepsilon_0}q_{线密度}$$

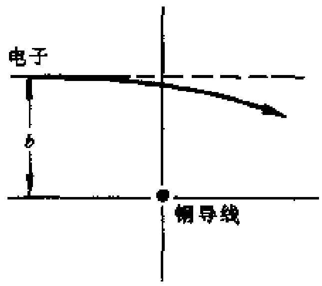
这里已设圆柱面的半径 $r>r_0$，圆柱面的长度取 1 个单位．由上式得

$$E(r)=\frac{q_{线密度}}{2\pi\varepsilon_0 r}=\frac{0.791}{r}\ \text{N/C},\quad r>r_0$$

当 $r<r_0$ 时，电场为零（因为铜线是良导体），即铜线内部电场强度处处为零．$E(r)$ 曲线如近图 1－19－2 所示．



近图 1－19－2



近图 1－19－3

2．由题文所述，偏转角很小，如近图 1－19－3 所示，可将偏转角 θ_e 估算为在垂直于初速度方向（即横向）上动量变化的大小与初始动量大小的比值，即

$$\theta_e\approx\frac{|\Delta p_\perp|}{mv}$$

横向动量变化大小的一种估算方法如下．

电子所受横向力的数量级显然为

$$F_\perp\approx\frac{eq_{线密度}}{2\pi\varepsilon_0 b}$$

此力的作用时间可估算为电子通过 $2b$ 距离的时间，即

$$\Delta t \approx \frac{2b}{v_0}$$

力与作用时间的乘积就是横向动量变化的大小，即

$$|\Delta \boldsymbol{p}_\perp| = F_\perp \Delta t \approx \frac{eq_{线密度}}{2\pi\varepsilon_0 b} \cdot \frac{2b}{v_0} = \frac{eq_{线密度}}{\pi\varepsilon_0 v_0}$$

由此得出

$$\theta_e = \frac{eq_{线密度}}{\pi\varepsilon_0 m v_0^2}$$

因

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = eV_0$$

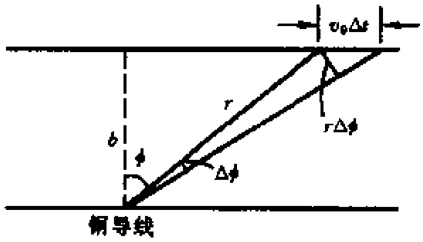
代入，得

$$\theta_e = \frac{q_{线密度}}{2\pi\varepsilon_0 V_0} = 3.96 \times 10^{-5}\ \text{rad}$$

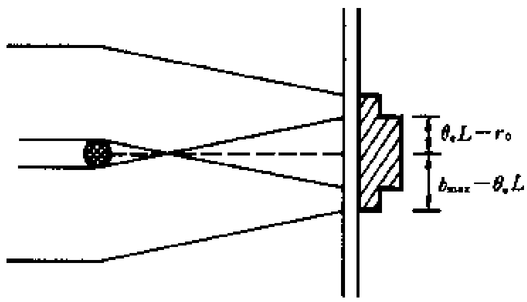
应当注意到偏转角 θ_e 非常小，且偏转角 θ_e 与 b 值无关．由于带正电荷的铜导线与电子之间的作用力是引力，电子将稍向铜导线方向偏转，如近图 1－19－3 所示．

一种较精确的估算方法是按以下方式进行积分以确定 $|\Delta \boldsymbol{p}_\perp|$ 的大小．

由于电子的偏转角 θ_e 非常小，可将电子的真实轨道近似看作一条与铜导线相距 b 的平行直线，如近图 1－19－4 所示．轨道中的电子所受电场力的横向分量为



近图 1－19－4



近图 1－19－5

$$F_\perp = \frac{eq_{线密度}}{2\pi\varepsilon_0 r}\cos\phi$$

又，如近图 1－19－4，有

$$v_0 \mathrm{d}t\ \cos\phi = r\ \mathrm{d}\phi$$

即

$$\mathrm{d}t = \frac{r\ \mathrm{d}\phi}{v_0\ \cos\phi}$$

于是

$$F_\perp\ \mathrm{d}t = \frac{eq_{线密度}}{2\pi\varepsilon_0 v_0}\mathrm{d}\phi$$

积分，得

$$|\Delta p_\perp = \int F_\perp \, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{eq_{线密度}}{2\pi\varepsilon_0 v_0} d\phi = \frac{eq_{线密度}}{2\varepsilon_0 v_0}$$

这种较精确的估算与第一种较粗略的估算相差一个$\frac{\pi}{2}$的因子，结果为

$$\theta_e = \frac{eq_{线密度}}{2\varepsilon_0 m v_0^2} = \frac{q_{线密度}}{4\varepsilon_0 V_0} = 6.21 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

3. 轨道弯曲程度最显著处约在距铜导线b处，由于$b \ll L$，故可将轨道近似表述成两条直线段，它们在靠近铜导线处偏转地相交，如近图1－19－5所示．在屏面上，每一轨道的横向位移为

$$d_t = \theta_e L = 6.21 \times 10^{-5} \times 0.3 = 1.86 \times 10^{-5} \text{ m} \approx 19 r_0 \gg r_0$$

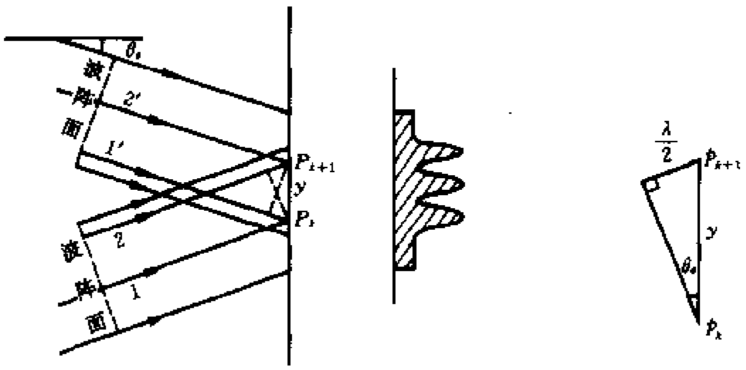
电子束在屏面上相对铜线的两侧有互相交叠的区域，这已在近图1－19－5的右方画出．交叠区域的全宽度为

$$d_f = 2(\theta_e L - r_0) \approx 36 r_0 = 3.6 \times 10^{-5} \text{ m}$$

非交叠区中的电子束强度为常数，交叠区中电子束的强度加倍，在近图1－19－5右方用斜线画出．

4. 按量子物理，电子束对应一量子波，其德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{m v_0} = \frac{h}{\sqrt{2 m e V_0}} = 8.68 \times 10^{-12} \text{ m} = 8.68 \times 10^{-3} \text{ nm}$$



近图 1－19－6

可见德布罗意波长远小于原始波束的全宽度$2b_{max}$，因而完全可以忽略原始波束的“单缝衍射”效应．在铜导线右侧．原始波束分为彼此交角为$2\theta_e$的两列平面波，交叠并产生干涉．在屏面上按经典物理交叠的区域内，将出现干涉极大和极小．

如近图1－19－6所示，设下侧波线1与上侧波线1′在P_k处相遇时相干叠加成k级极大，下侧波线2与上侧波线2′在P_{k+1}处相遇时相干叠加成$(k+1)$级极大．由于对称性，必定是1′比1多走（或少走）$\frac{\lambda}{2}$路程，2′比2少走（或多走）$\frac{\lambda}{2}$路程．如近图1－19－6中小三角形所示的几何关系，可知相邻两个干涉极大之间的距离为

$$y = \frac{\frac{\lambda}{2}}{\sin\theta_e} \approx \frac{\lambda}{2\theta_e} = \frac{8.68 \times 10^{-12}}{2 \times 6.21 \times 10^{-5}} = 7.0 \times 10^{-8} \text{ m}$$

因交叠区域的全宽度为

$$d_f = 3.6\times10^{-5}\ \text{m}$$

故在交叠区域内约有

$$\frac{d_f}{y}\approx 500$$

个干涉极大位置,在近图 1－19－6 中只是象征性地画出 3 个干涉极大位置．

应该指出的是,相邻干涉极大之间的距离与 b 或 $b_{\max}$ 都无关,这是与通常光的双缝干涉不同之处．

【本题是 1993 年第 24 届 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)试题．】

【**题 20**】 气体放电中的复合过程．

引言:在足够热的气体放电中会含有各种离子．一种离子是核电荷数为 Z 的原子被剥离到只剩下一个电子,我们用 $A^{(Z-1)+}$ 表示这种离子．有关数据如下：

$\varepsilon_0 = 8.854\times10^{-12}\ \text{C/(V·m)}$; e(电子电荷) $= 1.602\times10^{-19}\ \text{C}$; $q^2 = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} = 2.307\times10^{-28}\ \text{J·m}$; $\hbar = \dfrac{h}{2\pi} = 1.054\times10^{-34}\ \text{J·s}$; m_e(电子质量) $= 9.108\times10^{-31}\ \text{kg}$; r_B(玻尔半径) $= \dfrac{\hbar^2}{m_e q^2} = 5.292\times10^{-11}\ \text{m}$; E_R(里德伯能量) $= \dfrac{q^2}{2r_B} = 2.180\times10^{-18}\ \text{J}$; $m_p C^2$(质子静能) $= 1.503\times10^{-10}\ \text{J}$.

试解答以下五个问题．

1．设在 $A^{(Z-1)+}$ 中唯一的电子处于基态,在此态中用 $r_0{}^2$ 表示电子到原子核中心距离平方的平均值(定义为位置坐标不确定量平方 $(\Delta x)^2$、$(\Delta y)^2$、$(\Delta z)^2$ 之和),用 $p_0{}^2$ 表示电子动量平方的平均值(定义为动量分量不确定量平方 $(\Delta p_x)^2$、$(\Delta p_y)^2$、$(\Delta p_z)^2$ 之和)．试问,$p_0{}^2$ 和 $r_0{}^2$ 的乘积满足什么不等式．

2．一个 $A^{(Z-1)+}$ 离子能俘获一个电子,并发射一个光子．试写出包含该光子角频率 ω_0 的方程组,但不必求解．

3．利用基态能量为极小的事实,试确定 $A^{(Z-1)+}$ 离子的基态能量．近似条件是:在势能表达式中用 $\dfrac{1}{r_0}$ 之值代替 $\dfrac{1}{r}$ 的平均值,r_0 的值取自第 1 问．在动能表达式中,先用第 1 问中的 $p_0{}^2$ 代替动量平方的平均值,再将第 1 问的结果表为 $p_0{}^2 r_0{}^2 = \alpha\hbar^2$ 形式,α 由第 1 问解答的下限确定．

4．假设复合了的离子 $A^{(Z-2)+}$ 也处于基态．试用类似的方法确定该离子的能量．用 r_1 和 r_2(相当于第三问中的 r_0)表示两电子到原子核的平均距离,并简化地假设两电子之间的平均相对距离为 (r_1+r_2),再假设每个电子动量平方的平均值满足下述关系:

$$(p_{10}^2)(r_1{}^2) = \alpha\hbar^2$$

$$(p_{20}^2)(r_2{}^2) = \alpha\hbar^2$$

提示:利用基态中 $r_1 = r_2$ 的事实．

5．已知复合时发出的光子的角频率 $\omega_0 = 1.114\times10^{17}\ \text{s}^{-1}$．试求 Z 值,试问这是什么元素的离子．

注:本小题只讨论这种特殊过程,即一个处于基态的静止离子 $A^{(Z-1)+}$ 只俘获一个静止电子.

【分析】 本题第1问涉及的是海森堡不确定关系,再考虑到 $A^{(Z-1)+}$ 离子中电子基态波函数具有的球对称性即可获解.

第2问讨论的是 $A^{(Z-1)+}$ 离子俘获一个电子后发射一个光子,这一过程中系统能量守恒、动量守恒,这两个守恒关系中都包含发射光子的角频率 ω_0,它们构成包含 ω_0 的方程组.由于所给条件不足,例如复合前 $A^{(Z-1)+}$ 离子和电子的运动状态均属未知,因此方程组无法求解.题文所谓“不必求解”是理所当然的.

第3问中的 $A^{(Z-1)+}$ 离子基态能量,即为电子基态能量.求解时可先写出电子轨道能量,其中包含电子轨道动能和电子库仑势能.电子绕核运动速度比光速小得多,轨道动能可取经典表达式.按量子观点,实际测得的能量是平均能量.利用经典的动能与动量关系,动能平均值可转化为动量平方的平均值;势能与电子到原子核中心的距离有关,势能平均值可转化为距离平均值.再利用第1问的结果,将状态能量表为距离的函数,此函数的极小值即为基态能量值.值得注意的是,所求的基态能量应尽量用题文提供的有关参考量表述.另外,这一能量必定与 Z 值有关.

第4问中的 $A^{(Z-2)+}$ 离子有两个轨道电子,状态能量包括两个电子动能,两个电子各自相对原子核的库仑势能以及两个电子之间的库仑势能.然后,根据题设的简化条件,仿照第3问即可求得基态能量,这一能量也必定与 Z 有关.

第5问的求解需和第2、4问的解答联系起来.处于基态的 $A^{(Z-1)+}$ 离子在静止状态下俘获一个静止电子,这就使得第2问给出的能量方程和动量方程都得到了简化,而且其中复合成的 $A^{(Z-2)+}$ 离子基态能量可直接利用第4问所得结果.因已侧得复合时发出的光子的角频率 ω_0,便可确定 Z 值.

【解】 1. 按定义,有

$$r_0{}^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2$$

因为基态波函数是球对称的,故

$$(\Delta x)^2=(\Delta y)^2=(\Delta z)^2=\frac{1}{3}r_0{}^2$$

由不确定关系

$$(\Delta x)(\Delta p_x)\geqslant\frac{1}{2}\hbar,(\Delta y)(\Delta p_y)\geqslant\frac{1}{2}\hbar,(\Delta z)(\Delta p_z)\geqslant\frac{1}{2}\hbar$$

得

$$(\Delta p_x)\geqslant\frac{\hbar}{2(\Delta x)},(\Delta p_y)\geqslant\frac{\hbar}{2(\Delta y)},(\Delta p_z)\geqslant\frac{\hbar}{2(\Delta z)}$$

或

$$(\Delta p_x)^2\geqslant\frac{\hbar^2}{4(\Delta x)^2}=\frac{3\hbar^2}{4r_0{}^2}$$

$$(\Delta p_y)^2\geqslant\frac{3\hbar^2}{4r_0{}^2}$$

$$(\Delta p_z)^2 \geqslant \frac{3\hbar^2}{4r_0^2}$$

由定义，有

$$p_0^2 = (\Delta p_x)^2 + (\Delta p_y)^2 + (\Delta p_z)^2$$

故

$$p_0^2 \geqslant \frac{9\hbar^2}{4r_0^2}$$

p_0^2 与 r_0^2 之乘积满足的不等式为

$$p_0^2 r_0^2 \geqslant \frac{9}{4}\hbar^2$$

2.(a)粗略解答

俘获电子前后，系统能量守恒，有

$$E_{k电} + E_{k离} + E_{离} = E'_{k离} + E'_{离} + E_{光}$$

式中 $E_{k电}$ 为电子被俘获前的动能，$E_{k离}$ 为离子 $A^{(Z-2)+}$ 的动能，$E_{离}$ 为离子 $A^{(Z-1)+}$ 的内部能量；$E'_{k离}$ 为离子 $A^{(Z-2)+}$ 的动能，$E'_{离}$ 为离子 $A^{(Z-2)+}$ 的内部能量，$E_{光}$ 为发射的光子能量．

俘获电子前后，系统动量守恒，有

$$\boldsymbol{p}_{电} + \boldsymbol{p}_{离} = \boldsymbol{p}'_{离} + \boldsymbol{p}_{光}$$

式中 $\boldsymbol{p}_{电}$ 为电子被俘获前的动量，$\boldsymbol{p}_{离}$ 为离子 $A^{(Z-1)+}$ 的动量；$\boldsymbol{p}'_{离}$ 为离子 $A^{(Z-1)+}$ 的动量，$\boldsymbol{p}_{光}$ 为发射的光子动量．

(b)较精确解答

能量守恒方程可具体表为

$$\frac{1}{2}m_e v_e^2 + \frac{1}{2}(M+2m_e)v^2 + E_{离} = \frac{1}{2}(M+2m_e)u^2 + E'_{离} + \hbar\omega_0$$

式中 v_e 为电子被俘获前的速度，M 为离子 $A^{(Z-1)+}$ 的质量，v 为离子 $A^{(Z-1)+}$ 的速度，u 为离子 $A^{(Z-2)+}$ 的速度．

动量守恒方程可具体表为

$$m_e \boldsymbol{v}_e + (M+m_e)\boldsymbol{v} = (M+2m_e)\boldsymbol{u} + \hbar\boldsymbol{k}_0$$

式中 $\boldsymbol{k}_0$ 为发射的光子的波矢．

以上两式，构成了包含光子角频率 ω_0 的方程组．

3. 离子 $A^{(Z-1)+}$ 的能量为

$$E = \left\langle \frac{p^2}{2m_e} \right\rangle - Zq^2 \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle$$

符号〈〉表示求平均，故上式右边第一项是电子轨道动能的平均值，右边第二项是电子库仑势能的平均值．按题设条件，有

$$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{1}{r_0}$$

$$\langle p^2 \rangle = p_0^2 = \frac{a\hbar^2}{r_0^2}$$

后一个等式利用了第 1 问的结果，其中 α 为

$$\alpha=\frac{9}{4}$$

于是能量 E 可表为

$$E=\frac{\alpha\hbar^2}{2m_e r_0^2}-Zq^2\frac{1}{r_0}$$

由于基态能量为极小，对基态，应有

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r_0}=0$$

即

$$\frac{\alpha\hbar^2}{2m_e}\left(-\frac{2}{r_0^3}\right)-Zq^2\left(-\frac{1}{r_0^2}\right)=0$$

由此求得基态时 r_0 为

$$r_0=\frac{\alpha\hbar^2}{m_e q^2 Z}=\frac{\alpha r_B}{Z}$$

式中 r_B 是题文提供的玻尔半径．代入 E 表达式后，即可求出离子 $A^{(Z-1)+}$ 的基态能量为

$$E=\frac{\hbar^2 Z^2}{2\alpha m_e r_B^2}=\frac{Z^2q^2}{\alpha r_B}=\frac{Z^2}{\alpha r_B}\left(\frac{\hbar^2}{2m_e r_B}-q^2\right)$$

因

$$\frac{\hbar^2}{m_e r_B}=q^2$$

故

$$E=-\frac{q^2Z^2}{2\alpha r_B}$$

利用里德伯能量

$$E_R=\frac{q^2}{2r_B}$$

可将离子 $A^{(Z-1)+}$ 的基态能量表为

$$E=-\frac{Z^2}{\alpha}E_R$$

4．离子 $A^{(Z-2)+}$ 的能量为

$$E=\left\langle\frac{p_1^2}{2m_e}\right\rangle+\left\langle\frac{p_2^2}{2m_e}\right\rangle-Zq^2\left\langle\frac{1}{r_1}\right\rangle-Zq^2\left\langle\frac{1}{r_2}\right\rangle+q^2\left\langle\frac{1}{r_{12}}\right\rangle$$

按题设条件，有

$$\langle p_1^2\rangle=p_{10}^2=\frac{\alpha\hbar^2}{r_1^2}$$

$$\langle p_2^2\rangle=p_{10}^2=\frac{\alpha\hbar^2}{r_2^2}$$

$$\left\langle\frac{1}{r_1}\right\rangle=\frac{1}{r_1}$$

$$\langle\frac{1}{r_2}\rangle=\frac{1}{r_2}$$

$$\langle\frac{1}{r_{12}}\rangle=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$$

代入,得

$$E=\frac{\alpha\hbar^2}{2m_e{r_1}^2}+\frac{\alpha\hbar^2}{2m_e{r_2}^2}-\frac{Zq^2}{r_1}-\frac{Zq^2}{r_2}+\frac{q^2}{r_1+r_2}$$

基态中 r_1 与 r_2 相等,表为

$$r_1=r_2=r_g$$

代入,得

$$E=\frac{\alpha\hbar^2}{m_e r_g^2}-(Z-\frac{1}{4})\frac{2q^2}{r_g}$$

基态能量极小,满足

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r_g}=0$$

由以上两式,得

$$\frac{\alpha\hbar^2}{m_e}\left(-\frac{2}{{r_g}^3}\right)-2q^2\left(Z-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{{r_g}^2}\right)=0$$

解出基态时 r_g 为

$$r_g=\frac{\alpha r_B}{Z-\frac{1}{4}}$$

代入 E 表达式,得出离子 $A^{(Z-2)+}$ 的基态能量为

$$E=\frac{\hbar^2\left(Z-\frac{1}{4}\right)^2}{\alpha m_e r_B^2}-\frac{2\left(Z-\frac{1}{4}\right)^2q^2}{\alpha r_B}=-\frac{q^2\left(Z-\frac{1}{4}\right)^2}{\alpha r_B}$$

或表为

$$E=-\frac{2}{\alpha}\left(Z-\frac{1}{4}\right)^2E_R$$

5. 由第 2 问和第 4 问的解答,把能量守恒和动量守恒用于题设的特殊过程,得

$$-\frac{Z^2}{\alpha}E_R=\frac{1}{2}(M+2m_e)u^2-\frac{2}{\alpha}\left(Z-\frac{1}{4}\right)^2E_R+\hbar\omega_0$$

$$0=(M+2m_e)u+\frac{\hbar\omega_0}{c}$$

由动量守恒方程解出

$$u-\frac{-\hbar\omega_0}{c(M+2m_e)}$$

代入能量守恒方程,得

$$\frac{1}{\alpha}\left[2\left(Z-\frac{1}{4}\right)^2-Z^2\right]E_R-\hbar\omega_0\left[1+\frac{\hbar\omega_0}{2(M+2m_e)c^2}\right]=0$$

计算可知

$$\frac{\hbar\omega_0}{2(M+2m_e)c^2}<10^{-7}$$

上式简化为

$$Z^2-Z+\frac{1}{8}-\frac{\alpha\hbar\omega_0}{E_R}=0$$

代人有关数据,得

$$Z^2-Z-12.0=0$$

解出

$$Z=4$$

和

$$Z=-3,(不合,弃去)$$

$Z=4$ 是铍(Be)元素,这一特殊过程所获得的是 Be^{2+} 离子 .

【本题是 1988 年第 19 届 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)试题 .】

第二章　狭义相对论

【题1】 一艘宇宙飞船以 $0.8c$ 的速度于中午飞经地球，此时飞船上和地球上的观察者都把自己的时钟拨到12点．

1．按飞船上的时钟于午后12点30分飞经一星际宇航站，该站相对地球固定，其时钟指示的是地球时间．试问按宇航站的时钟飞船何时到达该站？

2．试问按地球上的坐标测量，宇航站离地球多远？

3．于飞船时间午后12点30分从飞船向地球发送无线电信号，试问地球上的观察者何时（按地球时间）接到信号？

4．若地球上的观察者在接收到信号后立即发出回答信号，试问飞船何时（按飞船时间）接收到回答信号？

【分析】 把握住时间和长度的相对性，应用时间膨胀和洛伦兹收缩公式，本题即可求解．

【解】 1．以飞船上的静止时钟测定，飞船从地球到宇航站所需时间为 $\tau_0=30$ min，这是本征时间．从地球观察者看来，飞船上的时钟是运动时钟，按时间膨胀公式，飞船飞行所需的地球时间为

$$\tau=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{30}{\sqrt{1-0.8^2}}=50\ \text{min}$$

2．宇航站相对地球静止，飞船在飞行时间内所走的距离亦即地球至宇航站的距离，为

$$l=v\tau=0.80\times 50\times 60=7.2\times 10^{11}\ \text{m}$$

3．对地球观察者来说，无线电信号发自相对静止的宇航站所在地，故传至地球需时

$$\frac{l}{c}=\frac{7.2\times 10^{11}}{3\times 10^{8}}\ \text{s}=2400\ \text{s}=40\ \text{min}$$

飞船飞行时间加信号传播时间共 $(50+40)=90$ min．所以地球观察者于地球时间1点30分接收到信号．

4．有两种解法．一种解法是从地球参考系来考察．设飞船向地球发出信号至接收到地球发出的回答信号共需时间（地球时间）t，在这段时间内飞船信号传播了 l 的距离，回答信号传播了 $(l+0.8ct)$ 的距离，故 t 满足

$$t=\frac{0.8ct+2l}{c}$$

解出

$$t=\frac{2l}{0.2c}=2.4\times 10^{4}\ \text{s}=400\ \text{min}$$

加上飞船从地球至宇航站的飞行时间50 min，共450 min，故飞船接收到回答信号的地球时间为午后7点30分．将上述时间变换到飞船参考系，对应的飞船时间（本征时间）为

$$t' = t\sqrt{1-\beta^2} = 450 \times 0.6\ \text{min} = 270\ \text{min}$$

故飞船接收到回答信号的时间(飞船时间)为午后4点30分．

另一解法是从飞船参考系来考察．设从发出信号至接收到回答信号共需时 t'，从飞船参考系看来，地球和宇航站系统以 $0.8c$ 的速度运动，地球与宇航站之间的距离要经受洛伦兹收缩，信号从飞船至地球的传播距离为 $l\sqrt{1-\beta^2}$，光信号追地球的相对速度为 $0.2c$，经时间

$$t_1' = \frac{l\sqrt{1-\beta^2}}{0.2c}$$

信号被地球接收。接着地球发出的信号相对飞船的速度仍为 c，故必经时间 $t_2' = t_1'$ 信号被飞船接收。这样，便得 $t' = t_1' + t_2' = 2t_1'$，即有

$$t' = \frac{2l\sqrt{1-\beta^2}}{0.2c} = 1.44 \times 10^4\ \text{s} = 240\ \text{min}$$

收到回答信号的时刻为上述时间加上飞船从地球至宇航站的飞行时间30min，即为午后4点30分(飞船时间)．

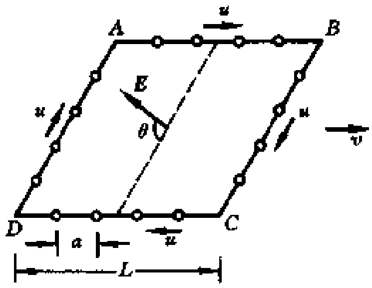
【题2】 如近图2-2-1所示，有一均匀带电的正方形绝缘线框 $ABCD$，每边边长为 L，线框上串有许多带电小球(看成质点)，每个小球的带电量为 q，每边的总带电量为零(即线框的带电量和各小球的带电量互相抵消)．今各小球相对线框以速率 u 沿绝缘线作匀速运动，在线框参考系中测得相邻两小球的间距为 $a(\ll L)$．线框又沿 AB 边以速率 v 在自身平面内相对 S 系作匀速运动．在线框范围内存在一均匀电场 E，其方向与线框平面的倾角为 θ．考虑相对论效应，试在 S 系中计算以下各量．

1．线框各边上相邻两小球的间距 $a_{AB}, a_{BC}, a_{CD}, a_{DA}$．

2．线框各边的净电量 $Q_{AB}, Q_{BC}, Q_{CD}, Q_{DA}$．

3．线框和小球系统所受的电力矩大小．

4．线框和小球系统的电势能．



近图2-2-1

【分析】 首先建立坐标系．设进行观测的坐标系为 S，绝缘线框静止的坐标系为 S'，小球静止的坐标系为 S''，各坐标系的 x 轴与 AB 边一致．求 a_{AB} 时，首先将 S' 系中的小球间距根据洛伦兹收缩公式转换成 S'' 系中的间距，再由相对论速度合成法则求出小球(即 S'' 系)相对 S 系的运动速度，再次利用洛伦兹收缩公式，将 S'' 系中的间距转换到 S 系中．其他各边的间距可用同法求得．

计算各边净带电量时，必须注意以下事实，即带电量是交换不变量，所以绝缘线的带电量不因坐标变换而改变．但计算小球总的带电量时，必须考虑边长的洛伦兹收缩和小球间距的改变，前者仅与速度 v 有关，后者不仅与 v，而且还与 u 有关．故两者对小球带电总量的影响不能抵消，从而出现不为零的净电荷．

各边的净电量算出后，电力矩和电势能就容易求得．

【解】 1．先算 a_{AB}．设在 S'' 系中相邻两小球的间距为 a_0，它是静止长度．题给间距 a 是 S' 系中的间距，S' 和 S'' 的相对速度为 u，根据洛伦兹收缩公式，有

$$a_0=\frac{a}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \tag{1}$$

按速度合成法则，小球（即 S'' 系）相对 S 系的速度为

$$u_{AB}=\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} \tag{2}$$

把 S'' 系中的间距转换到 S 系，得出 S 系中的间距为

$$a_{AB}=\sqrt{1-\frac{u_{AB}^2}{c^2}}\,a_0$$

把(1)、(2)式代入，化简后得

$$a_{AB}=\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{uv}{c^2}}a \tag{3}$$

计算 a_{CD} 时，因小球相对线框的速度反向，故只需把(3)式中的 u 用 $-u$ 代替即可，得

$$a_{CD}=\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{uv}{c^2}}a$$

由于 BC 和 DA 边与线框的运动方向垂直，故线度测量在 S' 与 S 系间无洛伦兹收缩，所以

$$a_{BC}=a_{DA}=a$$

2. 在 S' 系中每边绝缘线上的电量为

$$Q_L=-\frac{L}{a}q$$

式中 $\frac{L}{a}$ 为各边上的小球数．因电量是变换不变量，故在 S 系中也是该值．

先算 Q_{AB}. 在 S 系中边长为 $L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$，小球间距为 a_{AB}，故 AB 边上小球带电总量为

$$Q_{AB,球}=\frac{L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{a_{AB}}q$$

把(3)式代入，得

$$Q_{AB,球}=\frac{L}{a}\left(1+\frac{uv}{c^2}\right)q$$

于是 AB 边净电量为

$$Q_{AB}=Q_L+Q_{AB,球}=\frac{Luv}{ac^2}q$$

同理可得 CD 边上小球的带电总量为

$$Q_{CD,球}=-\frac{L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{a_{CD}}q=\frac{L}{a}\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)q$$

CD 边净电量为

$$Q_{CD}=Q_L+Q_{CD,球}=-\frac{luv}{c^2}q$$

在 S 系中测得 BC 和 DA 的边长仍为 L，小球间距仍为 a，故

$$Q_{BC,球}=Q_{DA,球}=\frac{L}{a}q$$

这两条边的净电量为

$$Q_{BC}=Q_{DA}=Q_L+\frac{L}{a}q=0$$

总之，AB 和 CD 两边所带净电量等量异号，而 BC 和 DA 两边不带电（正、负电之和为零）.

3. AB 和 CD 边所受电场力分别为

$$\boldsymbol{F}_{AB}=Q_{AB}\boldsymbol{E}=\frac{Luv}{ac^2}q\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{F}_{CD}=Q_{CD}\boldsymbol{E}=-\frac{Luv}{ac^2}q\boldsymbol{E}$$

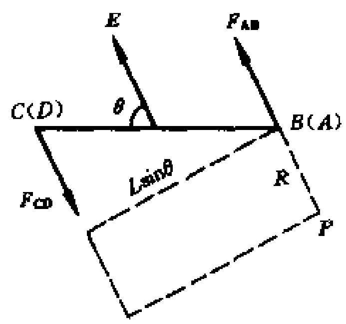
上述两力对线框形成力偶矩，其大小为

$$M=|\boldsymbol{F}_{AB}|L\sin\theta=\frac{L^2uv}{ac^2}qE\sin\theta$$

4. 因 AB 和 CD 边均与 $\boldsymbol{E}$ 垂直．故 AB 和 CD 边均处于 $\boldsymbol{E}$ 场的等势位置，设它们的电势分别为 U_{AB} 和 U_{CD}，则线框的电势能为

$$W=Q_{AB}U_{AB}+Q_{CD}U_{CD}$$

为确定 U_{AB} 和 U_{CD}，如近图 2－2－2 所示，建立与 $\boldsymbol{E}$ 垂直的参考平面 P，AB 边与 P 平面的垂直距离为 R，并规定 P 平面的电势为零，则 AB 和 CD 边的电势为



近图 2－2－2

$$U_{AB}=-ER$$

$$U_{CD}=-E(R+L\cos\theta)$$

故线框电势能为

$$W=-ERQ_{AB}-E(R+L\cos\theta)Q_{CD}$$

因 $Q_{AB}=-Q_{CD}$，代入，得

$$W=ELQ_{AB}\cos\theta=\frac{L^2uv}{c^2a}\cos\theta$$

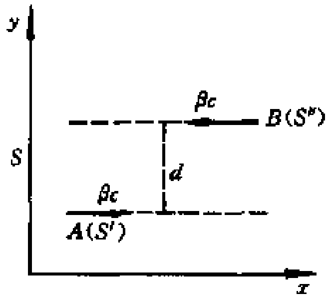
【本题是 1991 年第 22 届 IPhO（国际中学生物理奥林匹克竞赛）试题．】

【题 3】 如近图 2－3－1 所示，在某恒星参考系 S 中，飞船 A 和飞船 B 以相同速率 βc（c 为真空中的光速）作匀速直线运动．飞船 A 的运动方向与 +x 方向一致，而飞船 B 的运动方向与 −x 方向一致，两飞船轨迹之间的垂直距离为 d．当 A 和 B 靠得最近时，从 A 向 B 发出一细束无线

电联络信号．

试问：1．为使B能接收到信号，A中的宇航员认为发射信号的方向应与自己的运动方向之间成什么角？2．飞船B接收到信号时，B中的宇航员认为自己与飞船A相距多少？

【分析】 设参考系 S' 和 S'' 分别与飞船A和B相连结．信号速度用符号 u 表示，坐标系的速度用符号 v 表示．先在 S 系中求出A发出的信号能为B收到时信号应有的速度，再弄清楚各坐标系之间的相对运动关系，根据相对论速度合成法则，即可回答所提问题．



近图2-3-1

【解】 1．在 S 系中考察，A与B相距最近时A发出信号，为使信号能被B收到，信号速度的 x 分量应与B的速度相同，即

$$u_x = v_B = -\beta c$$

信号以光速 c 传播，故信号速度的 y 分量为

$$u_y = \sqrt{c^2 - u_x^2} = \sqrt{1-\beta^2}\,c$$

把上述速度转换到 S' 系中，对 S' 系来说，S 系的运动速度为 $v_S = -\beta c$．根据速度合成法则，信号速度的两分量为

$$u'_x = \frac{u_x + v_S}{1 + \frac{u_x v_S}{c^2}} = \frac{-\beta c - \beta c}{1+\beta^2} = -\frac{2\beta}{1+\beta^2}c$$

$$u'_y = \frac{\sqrt{1 - \frac{v_S^2}{c^2}}\ u_y}{1 + \frac{u_x v_S}{c^2}} = \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}\ c$$

故在 S' 系中信号发射方向与A运动方向之间的夹角 θ，如近图2－3－2所示，为

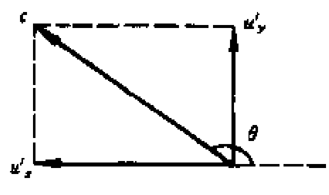
$$\theta = \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{u'_x}{u'_y}\right) = \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{2\beta}{1-\beta^2}\right)$$

2．在 S'' 系中考察，B中的宇航员认为A在离得最近时发出信号，该信号在B的空间中以光速传播，传到B所需时间为

$$t'' = \frac{d}{c}$$

从 S'' 系看来，S 系的运动速度为

$$v''_S = \beta c$$



近图2－3－2

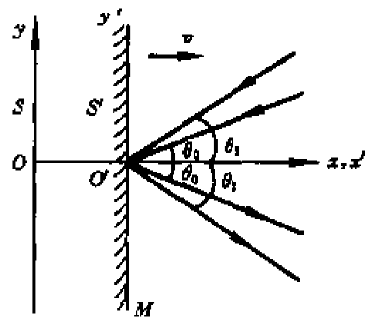
故A的速度为

$$v''_A = \frac{v_A + v''_S}{1 + \frac{v_A v''_S}{c^2}} = \frac{\beta c + \beta c}{1+\beta^2} = \frac{2\beta}{1+\beta^2}\ c$$

经 t'' 时间后，飞船A在 x'' 方向运动的距离为 $v''_A t''$，故A与B相距

$$L''_{AB} = \sqrt{d^2 + (v''_A t'')^2} = \sqrt{d^2 + \left(\frac{2\beta c}{1+\beta^2}\cdot\frac{d}{c}\right)^2} = \frac{\sqrt{(1+\beta^2)^2 + 4\beta^2}}{1+\beta^2}d$$

【题 4】 如图所示，平面反射镜 M 固定在 S' 系的 $x'y'$ 平面内，其法线方向与 x' 轴一致．反射镜相对 S 系以速度 v 沿法线方向作平移运动．试求光在反射镜上反射时，入射角与反射角所遵从的关系．



近图 2－4－1

【分析】 光在静止反射镜上反射时，入射角和反射角相等，通常的反射定律成立．但光在运动反射镜上反射时，通常的反射定律不再适用，反射角一般不等于入射角，本题要求给出两者之间的关系．光在真空中传播时，在任何惯性系中光速数值不变（光速不变原理），但其传播方向与观察者所在的惯性系有关，此即光行差现象．利用光的传播方向的变换关系即可求解本题．

【解】 在 S' 系中反射镜 M 是静止的，常规反射定律成立．图中以虚线表示入射光和反射光，入射角与反射角均为 θ_0．同一条光线在不同惯性系中的方位角不同，光线的方位角是光的传播方向与 x 或 x' 轴的夹角．设同一条光线在 S 系和 S' 系中的方位角分别用 θ 和 θ' 表示，两者的变换关系为

$$\tan\theta' = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\sin\theta}{\cos\theta - \beta} \tag{1}$$

把上式分别应用于入射光和反射光，图中用实线表示 S 系中观察到的入射光和反射光，入射角和反射角分别为 θ_1 和 θ_2．对入射光，S' 系中的方位角 θ' 和 S 系中的方位角 θ 分别为

$$\theta' = \pi + \theta_0, \quad \theta = \pi + \theta_1$$

代入(1)式，得

$$\tan(\pi+\theta_0) = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\sin(\pi+\theta_1)}{\cos(\pi+\theta_1) - \beta}, \quad \tan\theta_0 = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\sin\theta_1}{\cos\theta_1 + \beta} \tag{2}$$

对反射光，S' 系中的方位角为 θ_0，S 系中的方位角为 θ_2，应用公式(1)，有

$$\tan\theta_0 = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\sin\theta_2}{\cos\theta_2 - \beta} \tag{3}$$

由(2)、(3)式，得

$$\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1 + \beta} = \frac{\sin\theta_2}{\cos\theta_2 - \beta} \tag{4}$$

此即光在运动反射镜上反射时遵从的规律．

上述规律也可写成另一形式．变换关系(1)式可改写成

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta\cos\theta}$$

对入射光，$\theta' = \pi + \theta_0$，$\theta = \pi + \theta_1$，代入，得

$$\cos\theta_0 = \frac{\cos\theta_1 + \beta}{1 + \beta\cos\theta_1}$$

对反射光，$\theta' = \theta_0$，$\theta = \theta_2$，有

$$\cos\theta_0 = \frac{\cos\theta_2 - \beta}{1 - \beta\cos\theta_2}$$

由以上两式，得

$$\frac{\cos\theta_1+\beta}{1+\beta\cos\theta_1}=\frac{\cos\theta_2-\beta}{1-\beta\cos\theta_2} \tag{5}$$

变换关系(1)式也可写成

$$\sin\theta'=\frac{\sqrt{1-\beta^2}\sin\theta}{1-\beta\cos\theta}$$

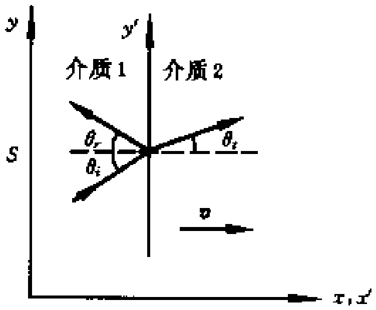
同理可得

$$\frac{\sin\theta_1}{1+\beta\cos\theta_1}=\frac{\sin\theta_2}{1+\beta\cos\theta_2} \tag{6}$$

(4)、(5)、(6)式完全等价．

由上述反射规律可知，入射角与反射角一般不相等．当 $v=0$ 时，$\theta_1=\theta_2$；当 $v>0$ 时，入射光逆着反射镜运动方向入射，$\theta_2<\theta_1$；当 $v<0$ 时，入射光顺着反射镜运动方向入射，$\theta_2<\theta_1$.

【题5】 如近图2－5－1所示，由介质1和介质2构成一界面，两介质的折射率为 n_1 和 n_2，界面的法线与 S 系的 x 轴一致．现界面相对 S 系中的观察者以速度 v 沿法线作匀速平行运动，在 S 系中入射光以入射角 θ_i 从介质1向界面入射，反射角和折射角分别用 θ_r 和 θ_t 表示．试导出 S 系中的观察者观测到的反射角和折射角与入射角的关系．



近图2－5－1

【分析】 设置坐标系 S' 与两介质的界面连结在一起，分别从 S 系和 S' 系考察入射光，反射光和折射光．光线的传播遵从相对论速度合成公式，据此可确定三种光线在 S 系和 S' 系中传播方向之间的关系．再注意到在 S' 系中界面静止，遵从通常的反射定律和折射定律，于是可得出在 S 系中的反射规律和折射规律．

【解】 设在 S 系中观测时，入射角，反射角和折射角分别为 $\theta_i,\theta_r,\theta_t$，三种光线在各自传播方向上的光线速度为 u_i,u_r,u_t. 在 S' 系中观测时，相应量分别为 $\theta'_i,\theta'_r,\theta'_t$ 以及 u'_i,u'_r,u'_t. 光线传播遵从相对论速度合成公式，即

$$u_x=\frac{u'_x+v}{1+\frac{v}{c^2}u'_x}$$

$$u_y=\frac{\sqrt{1-\beta^2}\ u'_y}{1+\frac{v}{c^2}u'_x}$$

或

$$\begin{cases} u\cos\theta=\dfrac{u'\cos\theta'+v}{1+\frac{v}{c^2}u'\cos\theta'} \\ u\sin\theta=\dfrac{\sqrt{1-\beta^2}\ u'\sin\theta'}{1+\frac{v}{c^2}u'\cos\theta'} \end{cases} \tag{1}$$

式中 u 和 u' 分别是在 S 系和 S' 系中测得的光线速度；θ 和 θ' 是在 S 系和 S' 系中测得的光线方向

与 x 轴和 x' 轴的夹角．

对入射光应用(1)式，因 $\theta=\theta_i,\theta'=\theta'_i$，有

$$\begin{cases} u_i\cos\theta_i=\dfrac{u'_i\cos\theta'_i+v}{1+\dfrac{v}{c^2}u'_i\cos\theta'_i} \\ u_i\sin\theta_i=\dfrac{\sqrt{1-\beta^2}\;u'_i\sin\theta'_i}{1+\dfrac{v}{c^2}u'_i\cos\theta'_i} \end{cases} \tag{2}$$

对反射光，因 $\theta=\pi-\theta_r,\theta'=\pi-\theta'_r$，有

$$\begin{cases} u_r\cos\theta_r=\dfrac{u'_r\cos\theta'_r-v}{1-\dfrac{v}{c^2}u'_r\cos\theta'_r} \\ u_r\sin\theta_r=\dfrac{\sqrt{1-\beta^2}\;u'_r\sin\theta'_r}{1-\dfrac{v}{c^2}u'_r\cos\theta'_r} \end{cases} \tag{3}$$

对折射光，因 $\theta=\theta_t,\theta'=\theta'_t$，有

$$\begin{cases} u_t\cos\theta_t=\dfrac{u'_i\cos\theta'_t+v}{1+\dfrac{v}{c^2}u'_i\cos\theta'_t} \\ u_t\sin\theta_t=\dfrac{\sqrt{1-\beta^2}\;u'_t\sin\theta'_t}{1+\dfrac{v}{c^2}u'_t\cos\theta'_t} \end{cases} \tag{4}$$

由(3)、(4)式，得

$$\begin{cases} \tan\theta_r=\dfrac{\sqrt{1-\beta^2}\;u'_r\sin\theta'_r}{u'_r\cos\theta'_r-v} \\ \tan\theta_t=\dfrac{\sqrt{1-\beta^2}\;u'_t\sin\theta'_t}{u'_t\cos\theta'_t+v} \end{cases}$$

在 S' 系中介质静止，故有

$$u'_r=\frac{c}{n_1},\quad u'_t=\frac{c}{n_2}$$

且由反射定律和折射定律，有

$$\theta'_r=\theta'_i,\quad \sin\theta'_t=\frac{n_1}{n_2}\sin\theta'_i$$

代入，得

$$\begin{cases} \tan\theta_r=\dfrac{\sqrt{1-\beta^2}\;\sin\theta'_i}{\sqrt{1-\sin^2\theta'_i}-n_1\beta} \\ \tan\theta_t=\dfrac{\sqrt{1-\beta^2}\;\sin\theta'_i}{\sqrt{\left(\dfrac{n_2}{n_1}\right)^2-\sin^2\theta'_i}+\dfrac{n_2^2}{n_1}\beta} \end{cases} \tag{5}$$

式中的 θ'_i 可借助于变换关系(2)式用 θ_i 表示，即有

$$u'_i\sin\theta'_i=\frac{\sqrt{1-\beta^2}\ u_i\sin\theta_i}{1-\frac{v}{c^2}u_i\cos\theta_i} \tag{6}$$

于是(5)式就给出了反射角 θ_r 和折射角 θ_t 随入射角 θ_i 变化的关系．

若介质1为真空，则 $u'_i=u_i=c, n_1=1, n_2=n$，(6)式简化为

$$\sin\theta'_i=\frac{\sqrt{1-\beta^2}\ \sin\theta_i}{1-\beta\cos\theta_i}$$

代入(5)式，化简后得

$$\begin{cases}\tan\theta_r=\dfrac{(1-\beta^2)\sin\theta_i}{(1+\beta^2)\cos\theta_i-2\beta}\\[2ex] \tan\theta_t=\dfrac{(1-\beta^2)\sin\theta_i}{\sqrt{n^2(1-\beta\cos\theta_i)^2-(1-\beta^2)\sin^2\theta_i}+\beta n^2(1-\beta\cos\theta_i)}\end{cases} \tag{7}$$

这就是光从真空向运动介质界面入射时遵从的反射规律和折射规律，它与静止界面的反射定律和折射定律明显不同．但当界面静止时，$\beta=0$，(7)式变为

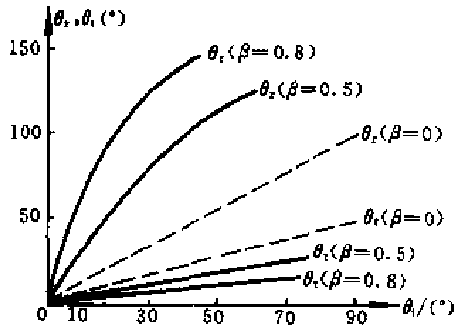
$$\begin{cases}\dfrac{\sin\theta_r}{\cos\theta_r}=\dfrac{\sin\theta_i}{\cos\theta_i}\\[2ex] \dfrac{\sin\theta_t}{\cos\theta_t}=\dfrac{\sin\theta_i}{n\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}\sin^2\theta_i}}\end{cases}$$

即

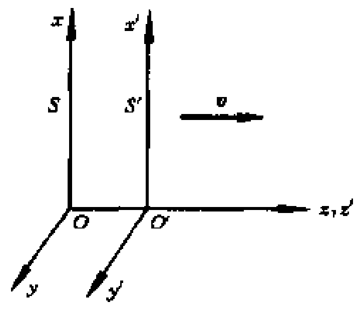
$$\begin{cases}\theta_r=\theta_i\\ \sin\theta_i=n\sin\theta_t\end{cases}$$

此即通常的反射定律和折射定律．

由(7)式可知，一般情况下 θ_r 和 θ_t 与 θ_i 的关系与界面的运动速度 v 有关．近图2－5－2中画出了 $n=1.5, \beta=0, 0.5$ 和 0.8 情形下 θ_r 和 θ_t 随 θ_i 变化的关系曲线，虚线表示 $\beta=0$ 时(通常的反射定律和折射定律)的结果．从近图2－5－2可知，β 越大，即 v 越接近光速，关系曲线偏离静止情形越远，相对论效应越显著．



近图2－5－2



近图2－6－1

【题 6】 如图所示，惯性系 S 和 S' 的对应坐标轴互相平行，S' 系相对 S 系以速度 v 沿 $+z$ 方向运动．S 系与某星体连结在一起，两坐标系的原点 O 和 O' 的间距远小于到其他星体的距离．假定在 O 处的观察者看到的其他星体的个数各向同性分布，即在任何方向上单位立体角内测得的星体个数 N 为常量．试求在 O' 处的观察者看到的星体个数的分布．

【分析】 要求的是在 S' 系中任何方向单位立体角内观察到的星体个数 N'，它与观察方位有关．为了描述方位，以 $z(z')$ 轴为极轴建立球面极坐标系，纬度以 θ（或 θ'）表示，经度以 ϕ（或 ϕ'）表示，某方位就可用 (θ,ϕ) 或 (θ',ϕ') 描述．本题是已知 S 系中的 N，要求出 S' 系中的 $N'(\theta',\phi')$，利用光线传播方向的变换式即可求解．

【解】 在 S 系中，(θ,ϕ) 方向的立体角元可表为

$$\mathrm{d}\Omega=\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

在 S' 系中，对应的立体角元则为

$$\mathrm{d}\Omega'=\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\phi'$$

星体个数不因变换而改变，即 S' 系中立体角元 $\mathrm{d}\Omega'$ 内的星体个数与 S 系中对应立体角元 $\mathrm{d}\Omega$ 内的星体个数应相等，即有

$$N'(\theta',\phi')\mathrm{d}\Omega'=N(\theta,\phi)\mathrm{d}\Omega$$

或

$$N'(\theta',\phi')\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\phi'=N(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

因经度 ϕ 是 xy 平面内的角度，S 系和 S' 系的相对运动方向与 xy 平面垂直，故

$$\phi'=\phi,\quad \mathrm{d}\phi'=\mathrm{d}\phi$$

代入，得

$$N'(\theta',\phi')=N\frac{\sin\theta\mathrm{d}\theta}{\sin\theta'\mathrm{d}\theta'}=N\frac{\mathrm{d}(\cos\theta)}{\mathrm{d}(\cos\theta')}\tag{1}$$

光线传播的变换关系式为

$$\cos\theta^{*\prime}=\frac{\cos\theta^{*}-\beta}{1-\beta\cos\theta^{*}}$$

式中带 * 号的方位角是光的传播方向与 $z(z')$ 轴的夹角．本题中光从各星体向原点 $O(O')$ 传播，故

$$\theta^{*}=\pi-\theta,\quad \theta^{*\prime}=\pi-\theta'$$

上述变换关系式可写为

$$\cos\theta'=\frac{\cos\theta+\beta}{1+\beta\cos\theta}$$

其逆变换关系为

$$\cos\theta=\frac{\cos\theta'-\beta}{1-\beta\cos\theta'}$$

上式两边取微分，得

$$\mathrm{d}(\cos\theta)=\frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\theta')^2}\mathrm{d}(\cos\theta')$$

即

$$\frac{\mathrm{d}(\cos\theta)}{\mathrm{d}(\cos\theta')}=\frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\theta')^2}$$

代入(1)式，得

$$N'(\theta')=N\frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\theta')^2}$$

可见，星体个数的分布与经度 ϕ' 无关，即对 z' 轴具有轴对称性．

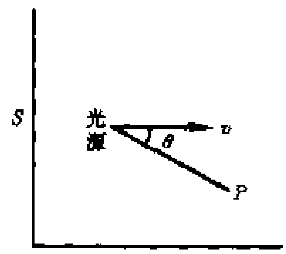
当 $v\to c$ 时，$\beta\to 1$，则有

$$N'(0)=\lim_{\beta\to 1}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta)^2}=\lim_{\beta\to 1}\frac{1+\beta}{1-\beta}=\infty$$

$$N'(\pi)=\lim_{\beta\to 1}\frac{1-\beta^2}{(1+\beta)^2}=0$$

由此可见，在 S 系中星体分布将向 S' 系的运动方向聚集，在 $v\to c$ 的极限情形下，所有星体将集中到运动方向上．

【题 7】 如图所示，一单色点光源在其静止的参考系 S' 中向四周均匀地辐射光能量，其发光强度为 I_0．当该点光源相对 S 系中的观察者以速度 v 运动时，测得的发光强度将随观察方位而变．设 S 系中的观察者位于 P 点，观察方向与点光源运动方向之间的夹角用 θ 表示．试求 S 系中测得的发光强度 I 与角 θ 的关系．



近图 2－7－1

【分析】 发光强度是单位立体角内的光辐射功率，在与点光源连结在一起的 S' 系中，发光强度 I_0 各向同性，即在任何方位的发光强度均相等．若在 S 系中观察，发光强度 I 将随观察方向而改变．造成发光强度改变的原因有三．第一，由于光源相对观察者运动，多普勒效应使接收到的光波频率发生变化，光子能量也因而改变．第二，由于时间膨胀效应，S 系和 S' 系中接收光辐射的时间不同．第三，由于光行差效应，S 系和 S' 系中的对应立体角不同．结合以上三因素就可求得 S 系中的发光强度．

【解】 在 S' 系中光源静止，发光强度为

$$I_0=\frac{n}{4\pi}h\nu_0$$

式中 n 为单位时间内从光源发射出来的总光子数，ν_0 为辐射频率．所以在 $\mathrm{d}t'$ 时间内从立体角元 $\mathrm{d}\Omega'$ 辐射出来的辐射能量为

$$\mathrm{d}w'=I_0\mathrm{d}t'\mathrm{d}\Omega'=\frac{n}{4\pi}h\nu_0\mathrm{d}t'\mathrm{d}\Omega'$$

若将上式转换到 S 系中，则光子总数 n 是变换不变量，它在 S 系和 S' 系中是相同的．根据多普勒效应，S 系中接收到的光波频率 ν 为

$$\nu=\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta}\nu_0 \tag{1}$$

式中 $\beta=\frac{v}{c}$．在 S 系中，$\mathrm{d}t$ 时间内 $\mathrm{d}\Omega$ 立体角元范围内的辐射能量为

$$\mathrm{d}w=I\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}\Omega=\frac{n}{4\pi}h\nu\ \mathrm{d}t'\mathrm{d}\Omega' \tag{2}$$

式中 $\mathrm{d}t'$ 是在 S' 系中光源辐射光子所持续的时间，而在 S 系中对应的时间为 $\mathrm{d}t$．因光源辐射出

的光波波数是变换不变量，故有

$$\nu_0 \mathrm{d}t' = \nu \mathrm{d}t$$

即

$$\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \frac{\nu}{\nu_0} \tag{3}$$

在 S 系和 S' 系中的对应立体角元为

$$\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi, \quad \mathrm{d}\Omega' = \sin\theta' \mathrm{d}\theta' \mathrm{d}\phi'$$

因 $\mathrm{d}\phi = \mathrm{d}\phi'$（参看上题，即本章题 6），故

$$\frac{\mathrm{d}\Omega'}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\sin\theta' \mathrm{d}\theta'}{\sin\theta\ \mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}(\cos\theta')}{\mathrm{d}(\cos\theta)}$$

光线方向的变换式为

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta\cos\theta}$$

上式两边微分，得

$$\frac{\mathrm{d}(\cos\theta')}{\mathrm{d}(\cos\theta)} = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta\cos\theta)^2}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\Omega'}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta\cos\theta)^2} \tag{4}$$

由(2)式得出，S 系中的发光强度为

$$I = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t\ \mathrm{d}\Omega} = \frac{n}{4\pi} h\nu \frac{\mathrm{d}t' \mathrm{d}\Omega'}{\mathrm{d}t\ \mathrm{d}\Omega} = \frac{n}{4\pi}\ h\nu_0 \frac{\nu}{\nu_0}\ \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\ \frac{\mathrm{d}\Omega'}{\mathrm{d}\Omega}$$

把(1)、(3)、(4)式代入，得

$$I = I_0 \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^4$$

$$= I_0 \frac{(1 - \beta^2)^2}{(1 - \beta\cos\theta)^4}$$

上式表明，在 S 系中的发光强度 I 随 θ 变化，在光源运动方向上（$\theta = 0$），发光强度为

$$I(0) = I_0 \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta}\right)^2$$

在背离光源运动的方向上（$\theta = \pi$），发光强度为

$$I(\pi) = I_0 \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta}\right)^2$$

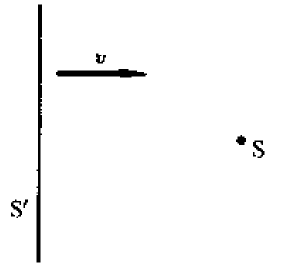
当 $\beta \to 1$ 时，辐射能量将集中到光源的运动方向上．同步辐射源所发光束具有很小的发散角就是由于这一相对论效应．

【题 8】 如近图 2－8－1 所示，光源 S 向全反射体 S′发射一束平行光，发光功率为 P_0．设 S′以匀速率 v 沿其法线方向朝 S 运动．试求 S 接收到的反射光功率．

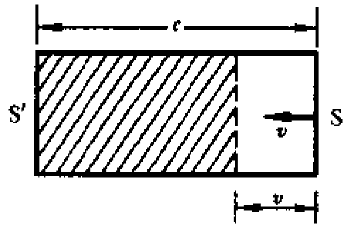
【分析】 光源 S 接收到的反射光功率与发射出去的光功率不同，其原因与上题（本章题 7）相仿．首先，由于多普勒效应，S 接收到的反射光频率不同于发射频率，这导数光子能量的改变．其次，

由于时间膨胀效应及反射体的运动，S 在单位时间内发射的光子总数与接收到的反射光子总数不同．上述两种原因导数接收到的光功率有别于发射出去的光功率．

【解】 设光源 S 和反射体分别静止于 S 系和 S' 系，光源在 S 系中单位时间内发出的第 i 种光子的频率和光子数分别为 ν_{0i} 和 n_{0i}．发光功率可表为



近图 2－8－1



近图 2－8－2

$$P_0=\sum_i n_{0i}h\nu_{0i}$$

对 S' 系来说，由于多普勒效应，接收到的和反射出去的光子频率为

$$\nu'_i=\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\nu_{0i}$$

式中 $\beta=\frac{v}{c}$．同样由于多普勒效应，光源 S 接收到的光子频率为

$$\nu_i=\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\nu'_i=\frac{1+\beta}{1-\beta}\,\nu_{0i}$$

光子数和光速在 S 系和 S' 系中是不变量，但“单位时间”在 S 系和 S' 系中有不同标准．若 S 系中一个单位时间内发出 n_{0i} 个光子，由于时间膨胀效应，S' 系中认为这个过程所经时间是 S 系中一个单位时间的 $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 倍．故从 S' 系看来，在单位时间内光源发出的光子数为

$$n'_{0i}=\sqrt{1-\beta^2}\,n_{0i}$$

S' 系中的观察者认为光源一面以速度 v 朝自己运动，一面不断发射光子．如近图 2－8－2 所示，单位时间内（S' 系的时间）能达到反射体 S′的光子一定处于近图 2－8－2 中画斜线的区域中，该区域中的光子总数为 n'_{0i}，它们在 $\Delta t'$ 时间内全部到达 S′，由近图 2－8－2 可知

$$\Delta t'=\frac{c-v}{c}$$

故在 S' 系中单位时间内到达反射体的光子数为

$$n''_{0i}=\frac{n'_{0i}}{\Delta t'}=\frac{c}{c-v}\sqrt{1-\beta^2}\;n_{0i}=\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta}\,n_{0i}=\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,n_{0i}$$

S' 系中单位时间内有同样多的光子被反射出去，对 S 系中的观察者，反射体 S′以速度 v 朝自己运动．同理，单位时间内（S 系的时间）S 接收到的反射光子数为

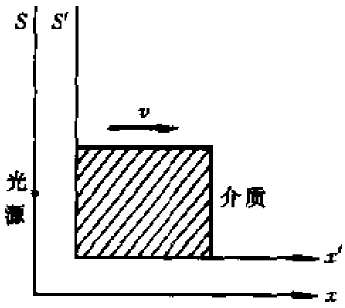
$$n_i=\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,n''_{0i}=\frac{1+\beta}{1-\beta}\,n_{0i}$$

于是，S 接收到的光功率为

$$P=\sum_i n_i h\nu_i=\sum_i\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}n_{0i}\right)\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)h\nu_{0i}$$
$$=\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^2\sum_i n_{0i}h\nu_{0i}=\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^2 P_0$$

显然，S 系接收到的反射光功率大于发射出去的光功率．这是由于反射体受到光压作用，为维持反射体的匀速运动，外力必须作功，此功转变为反射光的能量．

【题 9】 如图所示，光源静止于 S 系中，某色散介质相对 S 系沿 x 方向以速度 v 运动．试问，对 S 系中的观察者而言，光在介质中的传播速度是多少？已知光在静止介质中的波长为 λ，相应的折射率为 n，介质的色散率为 $\frac{dn}{d\lambda}$．计算时只取一级近似．



近图 2－9－1

【分析】 在 S' 系中介质静止，只需算出光在静止介质中的传播速度 u'，根据相对论速度合成公式，便可算出相对 S 系的传播速度．计算 u' 时必须考虑是色散介质，u' 与光波频率（或波长）有关，而介质相对光源有运动，因而必须考虑多普勒效应．

【解】 首先在 S' 系中考察，此时光在静止介质中传播．由多普勒效应，光波的波长为

$$\lambda'_0=\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\lambda_0$$

式中 $\beta=\frac{v}{c}$，下标“0”表示真空中的波长，λ_0 是 S 系中静止光源发出的波长．上式可改写为

$$\lambda'_0=\lambda_0\left(1+\frac{2\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{1}{2}}=\lambda_0\left[1+\frac{\beta}{1-\beta}-\frac{\beta^2}{2(1-\beta)^2}+\cdots\right]$$
$$=\lambda_0\left[1+\beta(1-\beta)^{-1}-\frac{\beta^2}{2}(1-\beta)^{-2}+\cdots\right]=\lambda_0\left(1+\beta+\frac{\beta^2}{2}+\cdots\right)$$

略去 β^2 和更高级的小量，得

$$\lambda'_0=(1+\beta)\lambda_0$$

故由于多普勒效应引起的波长改变为

$$\Delta\lambda_0=\lambda'_0-\lambda_0=\beta\lambda_0=\frac{v}{c}\lambda_0$$

已知介质中的波长 λ 与真空中的波长 λ_0 之间的关系为

$$\lambda=\frac{\lambda_0}{n}$$

代入，得

$$\Delta\lambda_0=\frac{vn}{c}\lambda$$

静止介质中波长为 λ'_0 的折射率为

$$n(\lambda'_0)=n(\lambda_0+\Delta\lambda_0)\approx n+\frac{dn}{d\lambda}\Delta\lambda_0=n+n\lambda\frac{dn}{d\lambda}\cdot\frac{v}{c}$$

故静止介质中的传播速度为

$$u'=\frac{c}{n(\lambda'_0)}=\frac{\frac{c}{n}}{1+\lambda\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\frac{v}{c}}$$

$$=\frac{c}{n}\left(1+\lambda\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\frac{v}{c}\right)^{-1}\approx\frac{c}{n}-\lambda\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\frac{v}{n}$$

根据速度合成公式，S 系中的传播速度为

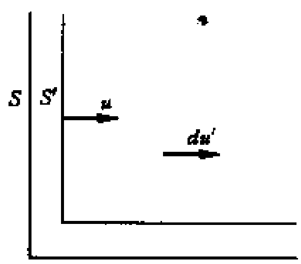
$$u=\frac{u'+v}{1+\frac{vu'}{c^2}}\approx\left(\frac{c}{n}-\lambda\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\frac{v}{n}+v\right)\left(1+\frac{v}{cn}\right)^{-1}$$

$$\approx\left(\frac{c}{n}-\lambda\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\frac{v}{n}+v\right)\left(1-\frac{v}{cn}\right)\approx\frac{c}{n}+v\left(1-\frac{1}{n^2}-\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right)$$

可见，上述结果比菲涅耳导出的公式多了一个色散项．

【题 10】 宇宙飞船从地球出发沿直线飞向某恒星，恒星距地球 $r=3\times10^4$l. y.（光年）．对每一瞬时都与飞船连结在一起的坐标系来讲，前一半路程作匀加速直线运动，加速度 $a'=10\ \mathrm{m/s^2}$，后一半路程以数值相同的加速度作匀减速运动．试问在飞船上测量，整个旅程经历了多少时间？计算时只取一级近似．

【分析】 如图所示，设与地球连结在一起的坐标系为 S，每一瞬时与飞船连结在一起的坐标系为 S'，因飞船相对地球的速度时刻在变化，故 S'系应当看作是一系列的坐标系，每一瞬间在极短的时间内 S' 可看作是相对地球作匀速直线运动．在此短时间内，S 和 S' 均可看作惯性系，故狭义相对论可用．整个旅程是这些无限短的运动过程的组合．



近图 2－10－1

设在飞船时间 t'，飞船相对地球的速度为 u，即 S'相对 S 的运动速度为 u，此时飞船相对 S'的速度 $u'=0$．经极短时间 $\mathrm{d}t'$后，飞船相对原来的 S'系的速度增量为 $\mathrm{d}u'$，相应的加速度 $a'=\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}t'}=10\ \mathrm{m/s^2}$．对地球坐标系 S 而言，与 $\mathrm{d}u'$相对应的速度增量设为 $\mathrm{d}u$．利用速度合成法则可找到 $\mathrm{d}u$ 与 $\mathrm{d}u'$之间的关系，进而确定飞船在 S 系中的加速度 a 与在 S'系中的加速度 a'之间的关系．通过积分运算可求得全程所需的地球时间，利用时间膨胀公式进而可得所需的飞船时间．

注意，狭义相对论只适用于惯性参考系，严格说来与飞船连结在一起的参考系是非惯性系．但若把全旅程分割成无限小的单元，作上述处理后就可用狭义相对论的理论来求解了．

【解】 设在地球时间 t，飞船的速度为 u，S'系与此时的飞船相连结，故 S'系相对 S 系（地球系）的运动速度为 u．经 $\mathrm{d}t$ 时间后，u 的增量为 $\mathrm{d}u$，在 S'系中的相应增量为 $\mathrm{d}u'$，按速度合成法则，有

$$u+\mathrm{d}u=\frac{u+\mathrm{d}u'}{1+\frac{u}{c^2}\mathrm{d}u'}$$

或

$$(u+\mathrm{d}u)\left(1+\frac{u}{c^2}\,\mathrm{d}u'\right)=u+\mathrm{d}u'$$

略去高级无穷小，得

$$\mathrm{d}u'=\frac{1}{1-\beta^2}\mathrm{d}u \tag{1}$$

式中 $\beta=\frac{u}{c}$. 由时间膨胀公式，S 系和 S' 系中的对应时间间隔 $\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}t'$，有如下关系

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2}$$

由(1)、(2)式，得

$$\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}t'}=\frac{1}{(1-\beta^2)^{3/2}}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

式中$\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}t'}=a'$，$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=a$ 分别是飞船在 S' 系和 S 系中的加速度．上式可写为

$$a=(1-\beta^2)^{3/2}a'$$

此式即为这两个加速度之间的关系．需要注意的是，a' 为常量，但 a 不是常量．把上式改写为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}=a'\mathrm{d}t$$

对上式积分，并利用初始条件：$t=0$ 时，$u=0$，得

$$\frac{u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=a't \tag{3}$$

进而可解出

$$u=\frac{a't}{\sqrt{1+\frac{a'^2}{c^2}\,t^2}} \tag{4}$$

再次积分，并利用初始条件：$t=0$ 时，$x=0$，得

$$x=\frac{c^2}{a'}\left(\sqrt{1+\frac{a'^2}{c^2}\,t^2}-1\right)$$

解出

$$t=\frac{x}{c}\sqrt{1+\frac{2c^2}{a'x}}$$

当飞船完成前半程飞行时，$x=\frac{r}{2}$，所需地球时为

$$T=\frac{r}{2c}\sqrt{1+\frac{4c^2}{a'r}} \tag{5}$$

在每段微小运动单元中，S 系中的时间间隔 $\mathrm{d}t$ 与 S' 系中对应时间间隔 $\mathrm{d}t'$ 之间的关系满足(2)式，再结合(3)式，得

$$\mathrm{d}t'=\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\,\mathrm{d}t=\frac{u}{a't}\,\mathrm{d}t$$

利用(4)式，有

$$\mathrm{d}t' = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+\frac{a'^2}{c^2}t^2}}$$

积分，有

$$\int_0^{T'}\mathrm{d}t' = \int_0^{T}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+\frac{a'^2}{c^2}t^2}}$$

式中 T 和 T' 分别是飞船走完半程所需的地球时间和飞船时间，得

$$T' = \frac{c}{a'}\ln\left[\frac{a'}{c}T+\sqrt{1+\frac{a'^2}{c^2}T^2}\right]$$

因加速过程与减速过程所需时间相同，故走完全程所需飞船时间为

$$2T' = \frac{2c}{a'}\ln\left[\frac{a'}{c}T+\sqrt{1+\frac{a'^2}{c^2}T^2}\right] \tag{6}$$

由 $r = 3\times10^4$ l.y.（光年），$a' = 10\ \mathrm{m/s^2}$，得

$$\frac{4c^2}{a'r} = \frac{4\times3\times10^8}{10\times3\times10^4\times365\times24\times3600} = 1.27\times10^{-4}$$

代入(5)式，得

$$T\approx\frac{r}{2c} = 1.5\times10^4\ \mathrm{a}(年)$$

$$\frac{a'}{c}T = 1.58\times10^4$$

代入(6)式，得

$$2T'\approx\frac{2c}{a'}\ln\left(\frac{2a'}{c}T\right) = 19.7\ \mathrm{a}(年)$$

【题11】 太空火箭（包括燃料）的初始质量为 M_0，从静止起飞，向后喷出的气体相对火箭的速度 u 为常量．任意时刻火箭速度（相对地球）为 v 时火箭的静止质量为 m_0．忽略引力影响．试求比值$\frac{m_0}{M_0}$与速度 v 之间的关系．

【分析】 以地球为参考系，设任意时刻火箭速度为 v，质量为 m，在 $\mathrm{d}t$ 时间喷出气体的质量为 $|\mathrm{d}m| = -\mathrm{d}m$，火箭速度增量为 $\mathrm{d}v$．取火箭及喷出气体为物体系，忽略引力时，物体系总动量守恒．利用相对论速度合成法则，可得火箭静止质量的变化与速度增量之间的关系．通过积分即可求得任意时刻火箭静止质量与速度之间的关系．

【解】 设在地球参考系中，时刻 t 火箭的质量为 m，火箭的速度为 v，m 与相应静止质量 m_0 之间的关系为

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

式中 $\beta = \frac{v}{c}$，火箭动量为 mv，在时间间隔 $\mathrm{d}t$ 内喷出气体的质量为

$$|\mathrm{d}m| = -\mathrm{d}m = -\mathrm{d}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

喷出气体的速度(相对地球)为 $v_气$,火箭速度增量为 $\mathrm{d}v$,在 $(t+\mathrm{d}t)$ 时刻,系统的总动量为 $[(m-|\mathrm{d}m|)(v+\mathrm{d}v)+v_气|\mathrm{d}m|]$. 由动量守恒,有

$$mv = (m-|\mathrm{d}m|)(v+\mathrm{d}v)+v_气|\mathrm{d}m|$$

即

$$m\mathrm{d}v+(v_气-v)|\mathrm{d}m| = 0$$

或

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\mathrm{d}v+(v-v_气)\,\mathrm{d}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = 0 \tag{1}$$

由速度合成公式

$$v_气 = \frac{v-u}{1-\frac{uv}{c^2}}$$

代入(1)式,得

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\mathrm{d}v+\frac{u(1-\beta^2)}{1-\frac{u}{v}\beta^2}\left[\frac{\mathrm{d}m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{m_0\frac{v}{c^2}\mathrm{d}v}{(1-\beta^2)^{3/2}}\right] = 0$$

化简后,得

$$m_0\mathrm{d}v = u(\beta^2-1)\mathrm{d}m_0$$

或

$$m_0c\,\mathrm{d}\beta = u(\beta^2-1)\mathrm{d}m_0$$

分离变量,得

$$\frac{\mathrm{d}m_0}{m_0} = \frac{c}{u}\,\frac{\mathrm{d}\beta}{\beta^2-1}$$

积分,得

$$\ln m_0 = \frac{c}{2u}\ln\frac{1-\beta}{1+\beta}+c \tag{2}$$

初条件为 $t=0$ 时,$\beta=0, m_0=M_0$,故

$$C = \ln M_0$$

代入(2)式,得

$$\ln\frac{m_0}{M_0} = \ln\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{c/2u}$$

即

$$\frac{m_0}{M_0} = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{c/2u} \tag{3}$$

上述结果是瞬间关系,即火箭的瞬时静止质量 m_0 与同一瞬间的速度 $v=\beta c$ 之间的关系. 当火箭加速时,向后喷气,式中的 $u>0$. 火箭减速时,若速度变为零(即 $\beta=0$)时的终质量为 M'_0,则

(2)式中的积分常量 $C=\ln M'_0$，于是有

$$\frac{m_0}{M'_0}=\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{c/2u} \tag{4}$$

式中 $u<0$(因向前喷气).

【题12】 光子火箭从地球起程时初始静止质量(包括燃料)为 M_0，向相距为 $R=1.8\times10^6$l.y.(光年)的远方仙女座星云飞行．要求火箭在25年(火箭时间)后到达目的地．引力影响不计．

1．忽略火箭加速和减速所需时间，试问火箭的速度应为多大？2．设到达目的地时火箭静止质量为 M'_0，试问 $\frac{M_0}{M'_0}$ 的最小值是多少？

【分析】 光子火箭是一种设想的飞行器，它利用“燃料”物质向后辐射定向光束，使火箭获得向前的动量．求解第1问，可先将火箭时间 $\tau_0=25$a(年)变换成地球时间 τ，然后由距离 R 求出所需的火箭速度．火箭到达目的地时，比值 $\frac{M_0}{M'_0}$ 是不定的，所谓最小比值是指火箭刚好能到达目的地，亦即火箭的终速度为零，所需“燃料”量最少．利用上题(本章题11)的结果即可求解第2问．

【解】 1．因火箭加速和减速所需时间可略，故火箭以恒定速度 v 飞越全程，走完全程所需火箭时间(本征时间)为 $\tau_0=25$a(年)．利用时间膨胀公式，相应的地球时间为

$$\tau=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

因

$$\tau=\frac{R}{v}$$

故

$$\frac{R}{v}=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

解出

$$v=\frac{c}{\sqrt{1+\frac{c^2\tau_0^2}{R^2}}}\approx c\left(1-\frac{c^2\tau_0^2}{2R^2}\right)=c(1-0.96\times10^{-10})$$

可见，火箭几乎应以光速飞行．

2．火箭从静止开始加速至上述速度 v，火箭的静止质量从 M_0 变为 M，然后作匀速运动，火箭质量不变．最后火箭作减速运动，比值 $\frac{M_0}{M'_0}$ 最小时，到达目的地时的终速刚好为零，火箭质量从 M 变为最终质量 M'_0．加速阶段的质量变化可应用上题(本章题11)的(3)式求出．因光子火箭喷射的是光子，以光速 c 离开火箭，即 $u=c$，于是有

$$\frac{M}{M_0}=\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

$v=\beta c$ 为加速阶段的终速度，也是减速阶段的初速度．对减速阶段，可应用上题（本章题 11）的（4）式，式中的 m_0 以减速阶段的初质量 M 代入．又因减速时必须向前辐射光子，故 $u=-c$，即有

$$\frac{M}{M'_0}=\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{2}$$

由（1）、（2）式，得

$$\frac{M_0}{M'_0}=\frac{1+\beta}{1-\beta}=\frac{4R^2}{c^2\tau_0^2}-1\approx\frac{4R^2}{c^2\tau_0^2}=4\times10^{10}$$

【题 13】 光子火箭的飞行目的地为银河系中心，已知银河系中心离地球的距离为 $R=3.4\times10^4$l. y.（光年）．火箭在前一半旅程以加速度 $a'=10\text{m/s}^2$（相对火箭的静止系）作匀加速运动，而后一半旅程则以同样的加速度作减速运动．火箭到达目的地时的静止质量 $M'_0=1.0\times10^6$kg．试问火箭发动机在开始发射时至少需要多大功率？

【分析】 解本题需注意以下几点：首先，光子火箭发动机本质上是将“燃料”物质的质量转化为光辐射能量．令光子束向后喷离火箭，从而使火箭获得向前的动量．在此需用相对论的质能公式和动量守恒定律．其次，火箭质量随其速度变化的规律遵从本章题 11 中的（3）式和（4）式，只要把 $u=\pm c$ 代入即可．第三，弄清火箭静止系中加速度的含义（参看本章题 10 的分析）．火箭速度随时间变化，不是惯性系，当用狭义相对论来解决此类问题时，可在任意时刻 t 建立坐标系依附于火箭上，S'系以 t 时刻的火箭速度 v 作匀速运动，S'系便是惯性系．然后在 S'系中考察火箭各阶段的运动，若 $\mathrm{d}t$ 时间内火箭速度改变 $\mathrm{d}u'$，则加速度 $a'=\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}t}$．解本题需要利用本章题 11 和题 10 的有关结果．

【解】 在火箭的静止系 S'中，火箭作加速度为 a'的加速运动，根据动力学规律，有

$$\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}t}=Ma' \tag{1}$$

式中各量均在 S'系中测量，$\mathrm{d}p'$是 $\mathrm{d}t$ 时间内火箭动量的改变，M 近似为火箭的静止质量（包括燃料）．由动量守恒，火箭动量增量 $\mathrm{d}p'$等于辐射光子束的动量，而后者又与燃料能量改变率 $\mathrm{d}E_f$ 有关，即

$$\mathrm{d}p'=-\frac{1}{c}\mathrm{d}E_f=-c\,\mathrm{d}m$$

其中利用了质能公式 $\mathrm{d}E_f=c^2\mathrm{d}M$．由（1）式，上式为

$$Ma'=-c\,\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$$

火箭发动机功率为

$$N=-\frac{\mathrm{d}E_f}{\mathrm{d}t}=-c^2\,\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=cMa'$$

可见，对于给定的加速度 a'，火箭功率由其质量 M 决定．因此，只需求出火箭的初始质量 M_0，即可得到初始功率．根据本章题 11 中的（3）式，加速过程中 $u=c$，火箭质量 m_0 用旅程一半时的质量 M_H 代入，得

$$\frac{M_H}{M_0}=\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{\frac{1}{2}}$$

式中 M_0 为火箭初始质量，$\beta=\frac{v}{c}$，v 是加速阶段的终速度，也是减速阶段的初速度，即全程中的最大速度．减速阶段中，$u=-c$．应用本章题 11 的(4)式，有

$$\frac{M_H}{M'_0}=\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{1}{2}}$$

由以上两式，得

$$M_0=\frac{1+\beta}{1-\beta}M'_0$$

为求旅程中的最大速度，即旅程一半处的 β，可应用本章题 10 的(4)式和(5)式．火箭加速与减速阶段转折点的 β 满足

$$\beta=\frac{\frac{a'}{c}t}{\sqrt{1+\frac{a'^2}{c^2}t^2}}$$

式中 t 是航程为$\frac{R}{2}$所需的地球时间，它由本章题 10 的(5)式给定，为

$$t=\frac{R}{2c}\sqrt{1+\frac{4c^2}{a'R}}$$

代入，得

$$\beta=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{c^2}{a'^2t^2}}}=\left[1+\frac{4c^4}{a'^2R^2}\left(1+\frac{4c^2}{a'R}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{1}{2}}\approx1-\frac{2c^4}{a'^2R^2}$$

取上述近似是因为 $a'R\gg c^2$．因此，火箭的起始功率为

$$N=cM_0a'=ca'M'_0\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)\approx ca'M'_0\,\frac{R^2a'^2}{c^4}$$

$$=\frac{a'^3M'_0R^2}{c^3}=3.8\times10^{24}\ \mathrm{J/s}$$

第一颗原子弹爆炸时，在 10^{-6} s 内释放了约 5×10^{23} J 的能量，功率约为 5×10^{29} J/s.

【题 14】 μ 子的电量 $q=-e(e=1.6\times10^{-19}\ \mathrm{C})$，静止质量 $m_0=100\ \mathrm{MeV}/c^2$，静止时的寿命 $\tau_0=10^{-6}$ s.设在地球赤道上空离地面高度为 $h=10^4$ m 处有一 μ 子以接近于真空中光速的速度垂直向下运动．

1．试问此 μ 子至少应有多大总能量才能到达地面？2．若把赤道上空 10^4 m 高度范围内的地球磁场看作匀强磁场，磁感应强度 $B=10^{-4}$T，磁场方向与地面平行．试求具有第 1 问所得能量的 μ 子在到达地面时的偏离方向和总的偏转角．

【分析】 利用时间膨胀公式可将地球上观测到的 μ 子的寿命 τ 与静止系中的寿命 τ_0 建立联系。对地球上的观察者而言，μ 子为能达到地面，所具速度必须保证它在 τ 时间内走完全程．利用质

能公式可得 μ 子的相应能量．由于 μ 子的动能比重力势能大得多,重力影响可忽略．又因地磁场引起的偏转较小,计算第 1 问时可不考虑洛伦兹力,因此,可把 μ 子近似看成作匀速直线运动．

求解第 2 问时,必须考虑由地磁场引起的洛伦兹力,此力使 μ 子产生偏转．因洛伦兹力对 μ 子不作功,故其能量保持常值．根据动力学方程和质能公式可写出 μ 子坐标所遵从的微分方程,解此微分方程即可求得偏转量．μ 子除受洛伦兹力外,还受地球自转引起的科里奥利力的作用,它对 μ 子偏转的影响应作一估算．

【解】 1. 近似地把 μ 子看成是作匀速直线运动,速度为 v,到达地面所需地球时间为

$$t=\frac{h}{v}\approx\frac{h}{c}$$

为能到达地面,需满足

$$t\leqslant\tau$$

式中 τ 为地球观察者测得的 μ 子寿命,它与 τ_0 的关系为

$$\tau=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

由质能公式,μ 子的能量为

$$E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

给合以上诸式,有

$$E=m_0c^2\frac{\tau}{\tau_0}\geqslant m_0c^2\frac{t}{\tau_0}=\frac{m_0ch}{\tau_0}$$

代入数据,μ 子至少应有能量

$$E=\frac{m_0ch}{\tau_0}=\frac{100\times10^4}{3\times10^8\times10^{-6}}\ \text{MeV}=3.3\times10^3\ \text{MeV}$$

2. 如图所示,取直角坐标系 $Oxyz$,原点 O 在地面,x 轴指向西,y 轴垂直于地面向上,z 轴指向北．μ 子的初始位置和初速度为

$$x(0)=0\qquad \dot{x}(0)=0$$
$$y(0)=h\qquad \dot{y}(0)=-v$$
$$z(0)=0\qquad \dot{z}(0)=0$$

磁场 $\boldsymbol{B}$ 与 z 轴方向一致,μ 子所受洛伦兹力为

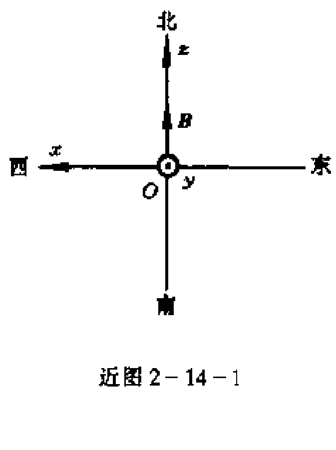
$$\boldsymbol{F}=-e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

μ 子的动力学方程为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}=-e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

其中

$$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}=\frac{E}{c^2}\boldsymbol{v}\qquad E=\text{常量}$$



近图 2－14－1

即

$$\ddot{r}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-\frac{c^2e}{E}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}=-\frac{c^2e}{E}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\\ 0 & 0 & B\end{vmatrix}$$

写成分量形式为

$$\ddot{x}=-\frac{c^2eB}{E}\dot{y},\quad \ddot{y}=\frac{c^2eB}{E}\dot{x} \tag{1)(2}$$

(1)式对 t 求导后再将(2)式代入，得

$$\dddot{x}+\omega^2\dot{x}=0$$

式中

$$\omega=\frac{c^2eB}{E}$$

上述方程的解为

$$\dot{x}=v^*\cos(\omega t+\phi)$$

$$x=\frac{v^*}{\omega}\sin(\omega t+\phi)+x^*$$

因此，有

$$\ddot{x}=-\frac{c^2eB}{E}\dot{y}=-\omega v^*\sin(\omega t+\phi)=-\frac{c^2eB}{E}v^*\sin(\omega t+\phi)$$

故得

$$\dot{y}=v^*\sin(\omega t+\phi)$$

$$y=-\frac{v^*}{\omega}\cos(\omega t+\phi)+y^*$$

初条件为

$$\dot{x}(0)=v^*\cos\phi=0$$

$$x(0)=\frac{v^*}{\omega}\sin\phi+x^*=0$$

$$\dot{y}(0)=v^*\sin\phi=-v$$

$$y(0)=-\frac{v^*}{\omega}\cos\phi=h$$

得

$$\phi=-\frac{\pi}{2},\quad v^*=v$$

$$x^*=\frac{v^*}{\omega}=\frac{v}{\omega},\quad y^*=h$$

最后得 μ 子的坐标为

$$x=\frac{v}{\omega}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{v}{\omega}=\frac{v}{\omega}(1-\cos\omega t)$$

$$y=-\frac{v}{\omega}\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)+h=h-\frac{v}{\omega}\sin\omega t$$

到达地面时，$y=0$，即有

$$\sin\omega t=\frac{\omega h}{v}=\frac{c^2eBh}{Ev}$$

因 $v\approx c$，有

$$\sin\omega t\approx\frac{ceBh}{E}=\frac{3\times10^8\times10^{-4}\times10^4}{3.3\times10^9}=0.091$$

$$1-\cos\omega t=1-\left[1-\left(\frac{\omega h}{v}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\approx\frac{1}{2}\left(\frac{\omega h}{v}\right)^2$$

μ 子到达地面时的 x 坐标为

$$x_{地}=\frac{v}{\omega}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\omega h}{v}\right)^2$$

朝 x 方向(向西)的偏转角为

$$\alpha\approx\frac{x_{地}}{h}=\frac{\omega h}{2v}\approx\frac{1}{2}\times0.091\ \text{rad}=0.046\ \text{rad}$$

落地点向西偏离的距离为

$$x_{地}\approx h\alpha=10^4\times0.046\ \text{m}=460\ \text{m}$$

μ 子落地过程需时

$$t=\tau=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=3.3\times10^{-5}\ \text{s}$$

此阶段地球表面一点转过的距离为

$$s=R\omega_{地}t=6.4\times10^6\times\frac{2\pi}{24\times3600}\times3.3\times10^{-5}\ \text{m}=0.015\ \text{m}$$

可见，$s\ll x_{地}$，即由地球自转引起的偏离可以忽略．

【题 15】 某电子显微镜电子的加速电压 $U=512\text{kV}$，先将静止电子加速，加速后的电子束进入非均匀磁场区，非均匀磁场由一系列线圈 $L_1,L_2,\cdots,L_N$ 产生，各线圈中的电流强度分别为 $i_1,i_2,\cdots,i_N$．电子在非均匀磁场区沿一确定轨道 T 运动．今欲将该电子显微镜改装成质子显微镜，以 $-U$ 加速静止质子，要求质子进入非均匀磁场区后沿着与电子完全相同的轨道运动，则各线圈中的电流 $i'_1,i'_2,\cdots,i'_N$ 与原电流 $i_1,i_2,\cdots,i_N$ 应有何种关系？

【分析】 首先弄清轨道完全相同的条件．设空间曲线切线方向的单位矢量用 $\boldsymbol{\tau}$ 表示，曲线弧长改变 $\mathrm{d}s$ 时，$\boldsymbol{\tau}$ 的改变量为 $\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}$．若两条光滑曲线 τ_1 和 τ_2 的对应点恒有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}_1}{\mathrm{d}s_1}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}_2}{\mathrm{d}s_2}\tag{1}$$

则通过曲线的平移操作，总能使 τ_1 和 τ_2 处处重合．本题中电子和质子均从同一点进入磁场区，只要满足(1)式，两者的轨道就完全重合．

电子和质子在磁场中受洛伦兹力 $\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 的作用，它们在磁场中的运动轨道由动力方程 $\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}$ 决定，据此可得 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}$ 与磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的关系，再由条件(1)式，并应用动量和能量的相对论关系，可得出使用电子束和质子束时所需磁场之间的关系．

【解】 设带电粒子的电量为 q，速度为 $\boldsymbol{v}$，动量为 $\boldsymbol{p}$，则其动力方程为

$$q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

上式两边点乘 $\boldsymbol{p}$，得

$$(q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{p}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{p}$$

因 $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$，上式左边为零，右边为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{p}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p})=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p^2$$

故

$$\frac{dp^2}{dt}=0$$

$$p=常量 \tag{3}$$

由(2)式，有

$$q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}s}=vp\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\boldsymbol{p}}{p}\right)$$

上式最后一步用到了(3)式 $p=常量$．因

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{\boldsymbol{v}}{v}=\frac{\boldsymbol{p}}{p}$$

故上式可写为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}=\frac{q}{pv}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}=\frac{q}{p}\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{B}$$

分别用下标 e 和 p 区别电子和质子的有关量，用电子束时的磁场为 $\boldsymbol{B}$，用质子束时的磁场为 $\boldsymbol{B}'$，则有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}_e}{\mathrm{d}s_e}=\frac{q_e}{p_e}\boldsymbol{\tau}_e\times\boldsymbol{B} \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}_p}{\mathrm{d}s_p}=\frac{q_p}{p_p}\boldsymbol{\tau}_p\times\boldsymbol{B}'=-\frac{q_e}{p_p}\boldsymbol{\tau}_p\times\boldsymbol{B}' \tag{5}$$

轨道重合的条件为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}_e}{\mathrm{d}s_e}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}_p}{\mathrm{d}s_p}$$

此时轨道的每一点有

$$\boldsymbol{\tau}_e=\boldsymbol{\tau}_p$$

由(4)、(5)两式，得

$$\boldsymbol{B}'=-\frac{p_p}{p_e}\boldsymbol{B} \tag{6}$$

根据(3)式，p_p 和 p_e 均为常量，等于由加速电压 $U=512\mathrm{kV}$ 加速后的动量．只要求出 p_e 和 p_p，根据(6)式，即可得出 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{B}'$之间的具体关系．对电子，加速后的动能正好等于电子的静止能量，即

$$E_{ke}=512\ \mathrm{keV}=m_e c^2$$

式中 m_e 为电子的静止质量，计算电子动量必须用相对论公式

$$p_e^2c^2 = (E_{ke}+m_ec^2)^2 - m_e^2c^4 = 3E_{ke}^2$$

故

$$p_e = \frac{\sqrt{3}}{c}E_{ke}$$

对质子，其静止能量为

$$m_pc^2 = \frac{1.67\times10^{-27}\times(3\times10^8)^2}{1.60\times10^{-19}}\ \text{eV} = 941\ \text{MeV}$$

可见，质子动能

$$E_{kp} = 512\ \text{keV} \ll m_pc^2$$

质子动量 p_p 可用经典近似，为

$$p_p = \sqrt{2m_pE_{kp}} = \frac{1}{c}\sqrt{2(m_pc^2)E_{kp}}$$

于是，得出

$$\frac{p_p}{p_e} = \sqrt{\frac{2m_pc^2}{3E_{ke}}} = \sqrt{\frac{2\times941\times10^3}{3\times512}} = 35.0$$

由(6)式，有

$$\boldsymbol{B}' = -35.0\boldsymbol{B}$$

因此，当用质子束代替电子束时，为使两者的轨道完全重合，磁场区每个点的 B' 应为 B 的 35.0 倍，而方向则相反．因 i 与 B 成正比，故各线圈的电流应满足

$$i'_n = -35.0i_n,\qquad n=1,2,\cdots,N$$

【本题是 1989 年第 20 届 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)试题．】

【题 16】 一粒子的静止质量为 m_0，以初速 v_0 开始沿 x 轴方向运动，在运动期间始终受到一个指向 y 轴方向的恒力 $\boldsymbol{F}$ 的作用．试证明，任意时刻粒子的两个速度分量为

$$v_x = \frac{v_0}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}\sqrt{\frac{c^2}{c^2+k}}$$

$$v_y = \frac{Ft}{m_0}\sqrt{\frac{c^2}{c^2+k}}$$

式中

$$k = \frac{v_0^2}{1-\frac{v_0^2}{c^2}} + \left(\frac{Ft}{m_0}\right)^2$$

并证明，当 $t\to\infty$ 时，速率 $v\to c$，$v_x\to0$.

【分析】 把粒子遵从的动力方程分解成两个分量式，积分，即得 v_x，v_y 以及 v.

【解】 粒子的动力方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0 \boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=\boldsymbol{F}$$

写成分量式，有

$$\mathrm{d}\left(\frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=F_x \mathrm{d}t=0$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{m_0 v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=F\ \mathrm{d}t$$

积分，并利用初条件 $t=0$ 时，$v_x=v_0$，$v_y=0$，得

$$\frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{m_0 v_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{1}$$

$$\frac{m_0 v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=Ft \tag{2}$$

以上两式平方相加，得

$$\frac{v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{{v_0}^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}+\left(\frac{Ft}{m_0}\right)^2$$

解出

$$v^2=\frac{k}{1+\frac{k}{c^2}} \tag{3}$$

$$k=\frac{{v_0}^2}{1-\frac{{v_0}^2}{c^2}}+\left(\frac{Ft}{m_0}\right)^2 \tag{4}$$

由(3)式，有

$$1-\frac{v^2}{c^2}=1-\frac{k}{c^2+k}=\frac{c^2}{c^2+k}$$

把上式代入(1)式和(2)式，得

$$v_x=\frac{v_0}{\sqrt{1-\frac{{v_0}^2}{c^2}}}\sqrt{\frac{c^2}{c^2+k}} \tag{5}$$

$$v_y=\frac{Ft}{m_0}\sqrt{\frac{c^2}{c^2+k}} \tag{6}$$

由(4)式，当 $t\to\infty$ 时，$k\to\infty$，故

$$\lim_{t\to\infty} v^2=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{c+\frac{k}{c^2}}=c^2$$

即

$$\lim_{t\to\infty} v = c$$

由(5)式，得

$$\lim_{t\to\infty} v_x = 0$$

随着 t 的增加，粒子速度越来越大，其质量 m 也相应变大．又因粒子在 x 方向动量守恒，m 的增加导致 v_x 的减小，在 $t\to\infty$ 的极限情况下，$m\to\infty$，$v_x\to 0$.

【题 17】 相对论性粒子．

在狭义相对论里，一个质量为 m_0 的自由粒子的能量 E 和动量 p 之间的关系为

$$E=(p^2c^2+m_0{}^2c^4)^{\frac{1}{2}}=mc^2$$

当这样的粒子受到一个保守力作用时，其总能量，即 $(p^2c^2+m_0{}^2c^4)^{\frac{1}{2}}$ 与势能之和是守恒的．如果粒子的能量非常高，则它的静止能量可以忽略，这样的粒子叫做极端相对论性粒子．

1．考虑一个能量极高的作一维运动的粒子（忽略静止能量），受到一个大小为 $f=$ 常量的向心吸引力的作用．设开始时 $(t=0)$ 粒子处于力心 $(x=0)$，具有初始动量 p_0．试在 (p,x) 图上（动量－空间坐标图）和在 (x,t) 图上（坐标－时间图）分别画出粒子运动的图象，要求至少画一个运动周期，标明各转折点的坐标（用所给参数 p_0 和 f 表示），并在 (p,x) 图上用箭头指示出运动过程的方向．

2．介子是一种由两个夸克构成的粒子．介子的静止质量 M 等于两夸克系统的总能量除以 c^2．

考虑一个关于静止介子的一维模型，其中两个夸克沿着 x 轴运动，它们之间存在着一个常数吸引力，大小为 f，并假定它们可以自由地互相穿透．在分析夸克的高能运动时，它们的静止质量可以忽略．设开始计时时 $(t=0)$ 两夸克都在 $x=0$ 处．试在 (x,t) 图上和 (p,x) 图上指示出运动的方向，并求出两夸克之间的最大距离．

3．上面第 2 问中所用的参考系记为 S，今有一实验室参考系 S'，S' 相对于 S 以恒定速度 $v=0.6c$ 沿负 x 方向运动．两参考系的坐标这样选择，即使得 S 系中的 $x=0$ 点与 S' 系中的 $x'=0$ 点在 $t=t'=0$ 时重合．试在 (x',t') 图上画出两夸克的运动图象，标出转折点的坐标（用 M，f 和 c 表示），并给出 S' 系观察到的两夸克之间的最大距离．

在 S 系和 S' 系中观察到的粒子的坐标之间的关系由洛伦兹变换决定，即

$$x'=r(x+\beta ct)$$

$$t'=r\left(t+\frac{\beta x}{c}\right)$$

式中 $\beta=\frac{v}{c}$，$r=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$，$v$ 是 S 系相对于 S' 系的速度．

4．已知一介子，其静止能量为 $Mc^2=140\mathrm{MeV}$，相对于实验室系 S' 的速度为 $0.60c$．试求出它在 S' 系中的能量．

【解】 1．取力心为空间坐标 x 的原点和势能零点，则粒子的势能 $U(x)$ 和总能量 W 分别为

$$U(x)=f|x|$$

$$W=\sqrt{p^2c^2+m_0{}^2c^4}+f|x| \tag{1}$$

若忽略静止能量，得

$$W=|p|c+f|x| \tag{2}$$

因总能量 W 在整个运动过程中守恒，故有

$$W=|p|c+f|x|=p_0c \tag{3}$$

取粒子初始动量的方向为 x 的正方向，则上式可写为，

$$\begin{cases} x>0,p>0\text{ 时}, & pc+fx=p_0c \\ x>0,p<0\text{ 时}, & -pc+fx=p_0c \\ x<0,p>0\text{ 时}, & pc-fx=p_0c \\ x<0,p<0\text{ 时}, & -pc-fx=p_0c \end{cases} \tag{4}$$

当 $p=0$ 时，粒子到达离原点最远处，设此距离为 L，由(3)式可得

$$L=\frac{p_0c}{f} \tag{5}$$

由 $x=0$ 时 $p=p_0$ 和牛顿定律，得

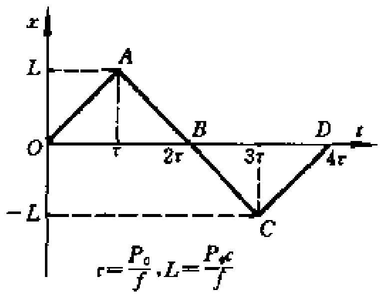
$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=F=\begin{cases} -f, & \text{当 } x>0 \\ f, & \text{当 } x<0 \end{cases} \tag{6}$$

可求得粒子从原点运动至离原点最远处($p=0$)所需时间 τ 为

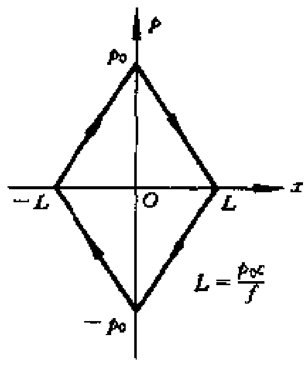
$$\tau=\frac{p_0}{f} \tag{7}$$

由(3)式及(6)式，可求得粒子运动的速率为

$$\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{c}{f}\left|\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right|=c$$



近图 2-17-1



近图 2-17-2

即粒子总是以光速 c 运动．当它位于与 $x=\pm L$ 点极为接近的区域时，由于获得(3)式的条件 $pc\gg m_0c^2$ 不再满足，此时粒子的速率不再等于 c，但在本题中以后的计算均忽略此差别引起的微小影响．此粒子将在 $x=L$ 和 $x=-L$ 两点之间往复运动，周期为 $4\tau=\dfrac{4p_0}{f}$，速率为 c，x 和 t 之间的关系为

$$\begin{cases} x = ct, & \text{当 } 0 \leqslant t \leqslant \tau \\ x = 2L - ct, & \text{当 } \tau \leqslant t \leqslant 2\tau \\ x = 2L - ct, & \text{当 } 2\tau \leqslant t \leqslant 3\tau \\ x = ct - 4L, & \text{当 } 3\tau \leqslant t \leqslant 4\tau \end{cases} \tag{8}$$

式中 $\tau = \dfrac{p_0}{f}$. 第 1 问的答案如近图 2－17－1 和近图 2－17－2 所示．

2. 两夸克系统的总能量可表为

$$Mc^2 = |p_1|c + |p_2|c + f|x_1 - x_2| \tag{9}$$

式中 x_1, x_2 和 p_1, p_2 分别为夸克 1 和夸克 2 的位置坐标和动量．在介子参考系中，两夸克的总动量为零，且 $t=0$ 时两夸克都在 $x=0$ 处，因而有

$$p_1 = -p_2, x_1 = -x_2 \tag{10}$$

即两者始终对称地在原点附近作彼此反向的往复运动．设夸克 1 在 $x=0$ 处的动量为 p_0，则有

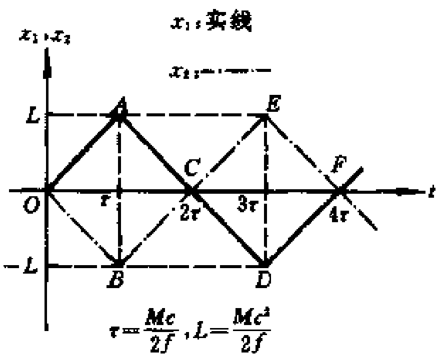
$$Mc^2 = 2p_0c \text{ 或 } p_0 = \frac{1}{2}Mc \tag{11}$$

因 $|p_1| = |p_2|$，$|x_1 - x_2| = 2|x_1|$，$Mc^2 = 2p_0c$，代入(9)式，得

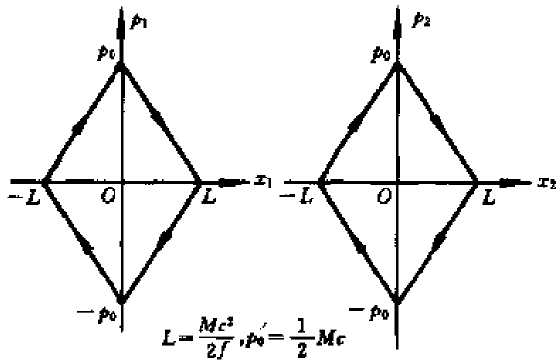
$$p_0c = |p_1|c + f|x_1| \tag{12}$$

此式表明，夸克 1 的运动与第 1 问中单粒子的运动一样，只是初始动量 $p_0 = \dfrac{1}{2}Mc$. 因而由第一问的答案即可得到夸克 1 的(x_1, t)图和(p_1, x_1)图，如近图 2－17－3 和近图 2－17－4 所示．夸克 2 的情形与夸克 1 类似，只要改变 x 和 p 的正、负号即可得到夸克 2 的(x_2, t)图和(p_2, x_2)图，如近图 2－17－3 和近图 2－17－4 所示．两者的运动方向分别由 $p=p_0$ 和 $p=-p_0$ 出发，夸克 1 向 $+x$ 方向运动，夸克 2 向 $-x$ 方向运动，由近图 2－17－3 容易看出，两夸克之间的最大距离为

$$d = 2L = \frac{2p_0c}{f} = \frac{Mc^2}{f} \tag{13}$$



近图 2－17－3



近图 2－17－4

3. 参考系 S 以恒定速率 $v=0.6c$ 相对于实验室参考系 S' 沿 x' 轴方向运动，S 系和 S' 系的原点在 $t=t'=0$ 时重合．这两个参考系之间的洛伦兹变换为

$$x' = r(x + \beta ct)$$

$$t' = r\left(t + \frac{\beta x}{c}\right)$$

其中

$$\beta = \frac{v}{c} = 0.6$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1.25$$

因为洛伦兹变换是线性的，(x,t)图中的直线经变换后在(x',t')图中仍为直线，所以只要计算出各转折点在 S'系的x'和t'的数值，即可得到(x',t')图．夸克1和夸克2应分别计算．对于夸克1，计算结果为：

参考系 S		参考系 S'	
x_1	t_1	$x'_1 = r(x_1+\beta ct_1) = \frac{5}{4}x_1 + \frac{3}{4}ct_1$	$t'_1 = r\left(t_1 + \frac{\beta x_1}{c}\right) = \frac{5}{4}t_1 + \frac{3}{4}\frac{x_1}{c}$
0	0	0	0
L	τ	$r(1+\beta)L = 2L$	$r(1+\beta)\tau = 2\tau$
0	2τ	$2r\beta L = \frac{3}{2}L$	$2r\tau = \frac{5}{2}\tau$
$-L$	3τ	$r(3\beta-1)L = L$	$r(3-\beta)\tau = 3\tau$
0	4τ	$4r\beta L = 3L$	$4r\tau = 5\tau$

其中 $L = \frac{p_0 c}{f} = \frac{Mc^2}{2f}$，$\tau = \frac{p_0 c}{f} = \frac{Mc}{2f}$，$\beta = 0.6$，$r = 1.25$

对于夸克2，计算结果为：

参考系 S		参考系 S'	
x_2	t_2	$x'_2 = r(x_2+\beta ct_2) = \frac{5}{4}x_2 + \frac{3}{4}ct_2$	$t'_2 = r\left(t_2 + \frac{\beta x_2}{c}\right) = \frac{5}{4}t_2 + \frac{3}{4}\frac{x_2}{c}$
0	0	0	0
$-L$	τ	$-r(1-\beta)L = -\frac{1}{2}L$	$r(1-\beta)\tau = \frac{1}{2}\tau$
0	2τ	$2r\beta L = \frac{3}{2}L$	$2r\tau = \frac{5}{2}\tau$
L	3τ	$r(3\beta+1)L = \frac{7}{2}L$	$r(3+\beta)\tau = \frac{9}{2}\tau$
0	4τ	$4r\beta L = 3L$	$4r\tau = 5\tau$

利用上面的结果可画出如近图 2－17－5 所示的(x'_1,t'_1)图和(x'_2,t'_2)图．图中的直线

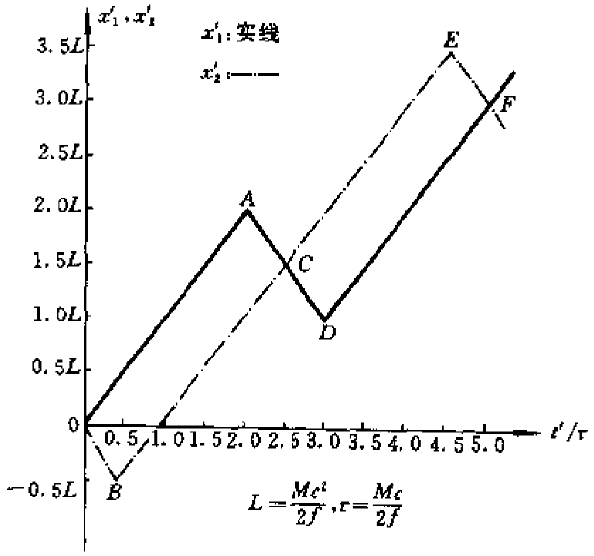
OA 和 OB 的方程为

$$OA:\quad x'_1(t')=ct',0\leqslant t'\leqslant r(1+\beta)\tau=2\tau \tag{14a}$$

$$OB:\quad x'_2(t')=-ct',0\leqslant t'\leqslant r(1-\beta)\tau=\frac{1}{2}\tau \tag{14b}$$

由近图 2－17－5 可以看出，两夸克之间的距离，在 $t'=\frac{1}{2}\tau$ 时达到最大值，从而可以求出此最大值的数值为

$$\begin{aligned}d'&=2cr(1-\beta)\tau\\&=2c\times1.25\times0.4\times\frac{Mc}{2f}=\frac{Mc^2}{2f}\end{aligned} \tag{15}$$



近图 2－17－5

4．已知介子的静止质量为 $Mc^2=140$ MeV，介子相对于实验室系的运动速度 $v=0.60c$，在实验室中，测出此介子的能量为

$$E'=\sqrt{p^2c^2+M^2c^4}=\sqrt{\frac{M^2v^2c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}+M^2c^4}$$

$$=\left(\sqrt{\frac{0.36}{0.64}+1}\right)Mc^2=\frac{5}{4}\times140=175\text{ MeV}$$

【本题是 1994 年第 25 届 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)试题．】

【题 18】 星体一旦形成黑洞，那么其表面的光子都不可能离开黑洞外逸．设星体质量具有球对称分布，总质量为 M．试用狭义相对论估算它刚好能成为黑洞的半径．

【分析】 黑洞是一种特殊的星体，一切有质量的物质都将在其引力作用下被吸引到星体内部．自由光子能量为 $E=h\nu$，由质能公式 $E=mc^2$，光子质量为 $m=\frac{h\nu}{c^2}$．光子在引力作用下有引力势能，在引力场中光子的总能量包括动能和势能．由于在引力场中时空量度发生变化，光子在引力场的不同地点有不同频率．根据能量守恒可找到光子频率随地点变化的规律．存在光子的条件

为 $\nu>0$，由此可得出星体能成为黑洞的临界半径．

【解】 自由光子无静止能，其全部能量为动能．频率为 ν 的光子的动能为

$$E_k = h\nu = mc^2$$

m 为光子的质量．星体外距星体中心为 r 处的万有引力势能为

$$E_p = -G\frac{Mm}{r} = -G\frac{Mh\nu}{c^2 r}$$

式中 G 为引力常量．光子总能量为

$$\begin{aligned} E &= E_k + E_p \\ &= h\nu\left(1-\frac{GM}{c^2 r}\right) \end{aligned}$$

设星体半径为 R，光子位于 R 处的频率为 ν_0，位于 $r>R$ 处的频率为 ν，由能量守恒，有

$$h\nu\left(1-\frac{GM}{c^2 r}\right) = h\nu_0\left(1-\frac{GM}{c^2 R}\right)$$

即

$$\nu = \frac{r\left(R-\frac{GM}{c^2}\right)}{R\left(r-\frac{GM}{c^2}\right)}\nu_0$$

当 $R>\frac{GM}{c^2}$时，因 $r>R>\frac{GM}{c^2}$，所以 $\nu>0$，即光子从星体表面外逸时，其频率 ν 保持为正值，这是可能实现的，表明光子可逸出星体，星体不是黑洞．

当 $R\leqslant\frac{GM}{c^2}$时，只要星体表面的光子稍一离开表面，就有 $r>\frac{GM}{c^2}$，$\nu\leqslant 0$，这是不能实现的，故光子不能逸出星体，星体成为黑洞．故星体成为黑洞的最大半径为

$$R = \frac{GM}{c^2}$$

附注：黑洞半径的另一种估算方法较为简单，这就是当该星体的“第一宇宙速度”达到光速 c 时，光子可以绕星体表面旋转，但不能离星体而去．由此得出

$$c = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

故黑洞半径可估算为

$$R = \frac{GM}{c^2}$$

与上面的结论一致．

【题 19】 引力红移和恒星质量的测定．

1．频率为 f 的一个光子具有惯性质量 m，此质量由光子的能量确定．在此假定下光子也有引力质量，量值等于惯性质量．与此相应，从一颗星球表面向外发射出的光子，逃离星球引力场时，便会损失能量．

试证明，初始频率为 f 的光子从星球表面到达无穷远处，若将它的频移（频率增加量）记为

Δf,则当 $\Delta f \ll f$ 时,有

$$\frac{\Delta f}{f} \approx -\frac{GM}{Rc^2}$$

式中 G 为引力常量,R 为星球半径,c 为真空光速,M 为星球质量．这样,在距星球足够远处对某条已知谱线频率红移的测量,可用来测出比值$\frac{M}{R}$,如果知道了 R,星球的质量 M 便可确定．

2. 在一项太空实验中发射出一艘无人驾驶的宇宙飞船,欲测量银河系中某颗恒星的质量 M 和半径 R. 宇宙飞船径向地接近目标时,可以监测到从星球表面 He^+ 离子发射出的光子对飞船实验舱内的 He^+ 离子束进行共振激发．共振吸收的条件是飞船 He^+ 离子朝着星球的速度必须与光子引力红移严格地相适应．共振吸收时的飞船 He^+ 离子相对星球的速度 v(记为 $v=\beta c$),可随着飞船到星球表面最近距离 d 的变化而进行测量,实验数据在下面表格中给出．请充分利用这些数据,试用作图法求出星球的半径 R 和质量 M. 解答中不必进行误差估算．

共振条件数据表

速度性参量 $\beta=\frac{v}{c}$ (10^{-5})	3.352	3.279	3.195	3.077	2.955
到星体表面距离 $d/(10^8\text{m})$	38.90	19.98	13.32	8.99	6.67

3. 为在本实验中确定 R 和 M,通常需要考虑因发射光子时离子的反冲造成的频率修正(热运动对发射谱线仅起加宽作用,不会使峰的分布移位,因此可以假定热运动的全部影响均已被审查过了).

(a)令 ΔE 为原子(或者说离子)在静止时的两个能级差,假定静止原子在能级跃迁后产生一个光子并形成一个反冲原子．考虑相对论效应,试用能级差 ΔE 和初始原子静止质量 m_0 来表述发射光子的能量 hf.

(b)现在,试对 He^+ 离子这种相对论频移比值$\left(\frac{\Delta f}{f}\right)_{\text{反冲}}$作出数值计算．

计算结果应当得出这样的结论,即反冲频移远小于第 2 问中得出的引力红移．

计算用常量:

真空光速 $c=3.0\times10^8$ m/s, He 的静质量 $m_0c^2=4\times938$ MeV, 玻尔能级 $E_n=-\frac{13.6Z^2}{n^2}$ eV,引力常量 $G=6.7\times10^{-11}\,\text{N·m}^2/\text{kg}^2$

【解】 1. 一个光子所有的惯性质量 m 可由关系式

$$mc^2=hf$$

求得,为

$$m=\frac{hf}{c^2}$$

据题文假设,m 是惯性质量,也是引力质量．光子在距星球中心 r 处形成时的能量若为 hf,向外射出过程中便会损失能量．

从能量守恒考虑,光子能量的损失应等于引力势能的增加．用下标 i 表示初态,下标 f 表示远离星球的终态,则有

$$hf_i - hf_f = -G\frac{Mm_f}{\infty} - \left(-G\frac{Mm_i}{r}\right)$$

即

$$hf_f = hf_i - G\frac{Mm_i}{r}$$

$\Delta f \ll f$ 意味着光子能量的相对变化很小，故有

$$m_f \approx m_i = \frac{hf_i}{c^2}$$

继而可作如下推演，

$$hf_f \approx hf_i - G\frac{M\left(\frac{hf_i}{c^2}\right)}{r} = hf_i\left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)$$

$$\frac{f_f}{f_i} = 1 - \frac{GM}{rc^2}$$

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{f_f - f_i}{f_i} = -\frac{GM}{rc^2}$$

等号右边的负号表明 Δf 取负，频率减小，即有频率红移，波长 λ 则将增大．

对于从半径为 R 的星球表面发射的光子，便有

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{GM}{Rc^2}$$

2．光子初位置 r_i 到终位置 r_f 的能量减少为

$$hf_i - hf_f = -\frac{GMm_f}{r_f} + \frac{GMm_i}{r_i}$$

已假定光子能量变化很小，即 $\Delta f \ll f$，也就是

$$m_f \approx m_i = \frac{hf_i}{c^2}$$

因此

$$hf_i - hf_f \approx G\frac{M(hf_i)}{c^2}\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f}\right)$$

解出

$$\frac{f_f}{f_i} = 1 - \frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f}\right)$$

本项实验中，r_i 即为星球半径 R，r_f 则为 R 与 d 之和，故有

$$\frac{f_f}{f_i} = 1 - \frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d}\right) \tag{1}$$

为了能对飞船中的 He^+ 离子进行共振激发，射来的光子必须通过多普勒效应使其频率又从 f_f 升到 f_i．相对论的多普勒效应公式为

$$\frac{f'}{f_f} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

式中 f'为飞船离子接收到的光子频率．参照实验数据表可知 $\beta \ll 1$,故有

$$\frac{f_f}{f'}=(1-\beta)^{\frac{1}{2}}(1+\beta)^{-\frac{1}{2}}\approx\left(1-\frac{\beta}{2}\right)\left(1-\frac{\beta}{2}\right)\approx 1-\beta$$

也可采用经典多普勒效应公式直接得出

$$\frac{f_f}{f'}=1-\beta$$

共振吸收的条件是

$$f'=f_i$$

故有

$$\frac{f_f}{f_i}=1-\beta \tag{2}$$

把(2)式代入(1)式，解出

$$\beta=\frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+d}\right) \tag{3}$$

根据已给的实验数据，设法找出一种有效的作图解法．为此，先将(3)式改写为

$$\beta=\frac{GM}{c^2}\cdot\frac{d}{R(R+d)}$$

两边取倒数，得

$$\frac{1}{\beta}=\left(\frac{Rc^2}{GM}\right)\left(\frac{R}{d}+1\right) \tag{4}$$

利用题目给定的 $\beta\sim d$ 数据，可得出$\frac{1}{\beta}\sim\frac{1}{d}$数据表如下：

$\frac{1}{\beta}$ (10^5)	0.298	0.305	0.313	0.325	0.338
$\frac{1}{d}/(10^{-8}\ \mathrm{m}^{-1})$	0.026	0.050	0.075	0.111	0.150

据此可画出$\frac{1}{\beta}\sim\frac{1}{d}$的线性关系曲线，如近图 2－19－1 所示．对于该直线，有

$$斜率=\alpha R,\ \alpha=\frac{Rc^2}{GM} \tag{5}$$

$$\frac{1}{\beta}轴的截距=\alpha \tag{6}$$

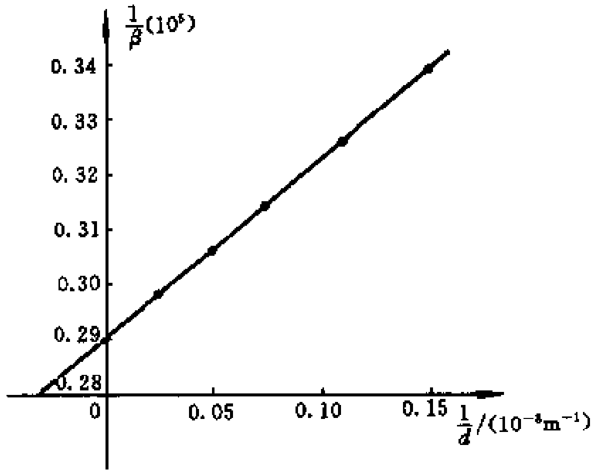
$$\frac{1}{d}轴的截距=-\frac{1}{R} \tag{7}$$

由(5)式和(6)式可以很容易定出 R 和 M，(7)式则可用来检查 R 的计算结果，但本题并不作此要求．

按此作图法，由近图 2－19－1 可以得出

$$\alpha R=3.2\times10^{12}\ \mathrm{m}$$

$$\alpha=0.29\times10^5$$



近图 2-19-1

$$R=\frac{\alpha R}{\alpha}=1.104\times10^{8}\ \mathrm{m}$$

$$M=\frac{Rc^2}{G\alpha}=5.11\times10^{30}\ \mathrm{kg}$$

事实上设计题文所给数据表时，已先取定

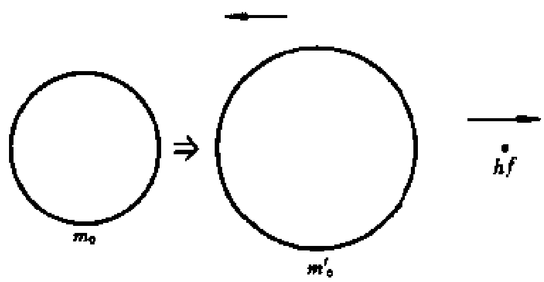
$$R=1.11\times10^{8}\ \mathrm{m},\quad M=5.2\times10^{30}\ \mathrm{kg}$$

作图法所得结果与此是很接近的．

3.(a)原子发射光子前、后的关系如近图 2-19-2 所示．光子的动量 p'与能量E'分别为

$$p'=\frac{hf}{c}$$

$$E'=hf$$



近图 2-19-2

原子总能量 E 和动量 p 的相对论关系为

$$E^2=p^2c^2+m_0^2c^4$$

在实验室参考系中，发射光子前的系统总能量为

$$E_0=m_0c^2 \tag{8}$$

发射光子后的系统总能量为

$$E=\sqrt{p^2c^2+m'^2_0c^4}+hf \tag{9}$$

系统能量守恒

$$E_0=E$$

由以上三式，得

$$(m_0c^2-hf)^2=p^2c^2+m'^2_0c^4$$

由动量守恒，得

$$p=p'=\frac{hf}{c}$$

把此式代入上式，并作如下推演：

$$(m_0c^2-hf)^2=(hf)^2+m'^2_0c^4$$
$$(m_0c^2)^2-2hfm_0c^2=m'^2_0c^4$$
$$hf(2m_0c^2)=(m_0^2-m'^2_0)c^4=(m_0-m'_0)c^2(m_0+m'_0)c^2$$

考虑到题文所给能级差 ΔE 与 m_0 和 m'_0 的关系为

$$\Delta E=m_0c^2-m'_0c^2$$

可得

$$hf(2m_0c^2)=\Delta E[2m_0-(m_0-m'_0)]c^2=\Delta E(2m_0c^2-\Delta E)$$

由此解出

$$hf=\Delta E\left(1-\frac{\Delta E}{2m_0c^2}\right)$$

(b)考虑原子反冲，所发射的光子的频率 f 满足关系式

$$hf=\Delta E\left(1-\frac{\Delta E}{2m_0c^2}\right)$$

不考虑原子反冲，所发射的光子的频率 f_0 满足关系式

$$hf_0=\Delta E$$

反冲频移 $\Delta f=(f_0-f)$对应的频移比为

$$\frac{\Delta f}{f_0}=\frac{\Delta E}{2m_0c^2}$$

以 He^+ 离子从能级 $n=2$ 到 $n=1$ 的光子发射为例，作一计算．

$$\Delta E=13.6\times2^2\times(1-\frac{1}{2^2})=40.8\ \text{eV}$$
$$m_0c^2=3752\times10^6\ \text{eV}$$

可算出由离子反冲产生的频移比为

$$\frac{\Delta f}{f_0}=5.44\times10^{-9}$$

由前面讨论的引力红移公式$\frac{\Delta f}{f}=-\frac{GM}{Rc^2}$，可估算得

$$\frac{|\Delta f|}{f}\sim10^{-5}$$

前者远小于后者，在太空引力红移实验中完全可以忽略．

【本题是 1995 年第 26 届 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)的试题．】

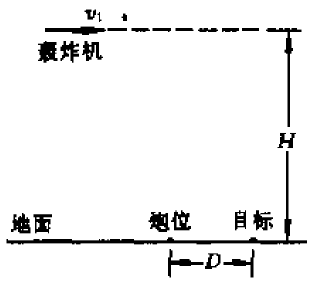
第六部分

试　题

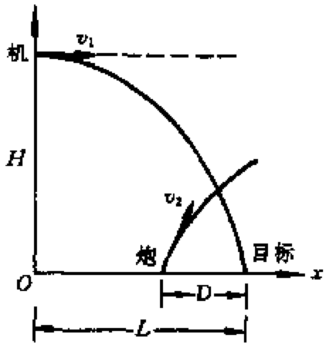
力学试题(一)

【题1】 如力试(一)图1－1所示,轰炸机以速度 v_1 作水平匀速飞行,飞行高度为 H.1. 为使炸弹命中地面目标,试问应在离目标多大水平距离处投弹？2. 在地面上与目标距离为 D 处有一高射炮,在飞机投放炸弹的同时发射炮弹,为使炮弹能击中飞行中的炸弹,试问炮弹初速 v_2 至少要多大？3. 若 v_2 取最小值,试问炮弹的发射角是多少？

已知轰炸机,高射炮和目标均在同一竖直平面内.设空气阻力可略.



力试(一)图1－1



力试(一)图1－2

【分析】 如力试(一)图1－2,炸弹作平抛运动,为使炸弹命中目标,要求飞机从投放炸弹处飞行到目标上方所需时间与炸弹落地所需时间应相同,于是第1问可解.

取平面 xy 坐标如力试(一)图1－2,$x=0$ 为投放炸弹处.取炸弹刚投放开始运动的时刻为计时起点,分别列出炸弹和炮弹的运动方程,炮弹能击中炸弹,要求两者同时到达同一位置.由此,第2问可解.再取 v_2 的最小值,解出相应的发射角 α,此为第3问.

【解】 1. 如力试(一)图1－2,设投弹点与目标的水平距离为 L,炸弹从投放处飞行到目标上方所需时间为 t,则有

$$L = v_1 t$$

及

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

故

$$L = v_1\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

2. 设炮弹初速为 v_2,发射角为 α,炸弹和炮弹的运动方程分别为

$$\begin{cases} x_1 = v_1 t \\ y_1 = H - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

及

$$\begin{cases}x_2 = L - D + (v_2\cos\alpha)t \\ y_2 = (v_2\sin\alpha)t - \dfrac{1}{2}gt^2\end{cases}$$

因炸弹与炮弹同时投发，又取投发时刻为计时零点，故上式中的 t 相同，不必区分．当炮弹击中炸弹时，应有

$$\begin{cases}x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2\end{cases}$$

即

$$v_1 t = L - D + (v_2\cos\alpha)t$$

$$H - \frac{1}{2}gt^2 = (v_2\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

由上述第 1 式得出炮弹击中炸弹的时间 t 为

$$t = \frac{L - D}{v_1 - v_2\cos\alpha}$$

由上述第 2 式得出 t 为

$$t = \frac{H}{v_2\sin\alpha}$$

故有

$$\frac{L - D}{v_1 - v_2\cos\alpha} = \frac{H}{v_2\sin\alpha}$$

或

$$\frac{L - D}{H}\sin\alpha = \frac{v_1 - v_2\cos\alpha}{v_2}$$

令

$$M = \frac{L - D}{H}, \quad K = \frac{v_1}{v_2}$$

则有

$$M\sin\alpha = K - \cos\alpha$$

或

$$M^2(1 - \cos^2\alpha) = (K - \cos\alpha)^2$$

得出关于 $\cos\alpha$ 的二次方程为

$$(1 + M^2)\cos^2\alpha - 2K\cos\alpha + K^2 - M^2 = 0$$

解出

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{2K \pm \sqrt{4K^2 - 4(1 + M^2)(K^2 - M^2)}}{2(1 + M^2)} \\ &= \frac{K \pm M\sqrt{1 + M^2 - K^2}}{1 + M^2}\end{aligned}$$

为使 $\cos\alpha$ 有实数解，必须满足

$$1+M^2\geqslant K^2$$

即

$$1+\left(\frac{L-D}{H}\right)^2\geqslant\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2$$

即

$$v_2^2\geqslant\frac{v_1^2}{1+\left(\frac{L-D}{H}\right)^2}$$

故炮弹速度至少应为

$$v_2=\frac{v_1}{\sqrt{1+\left(\frac{L-D}{H}\right)^2}}$$

3. 当 v_2 取最小值时，有

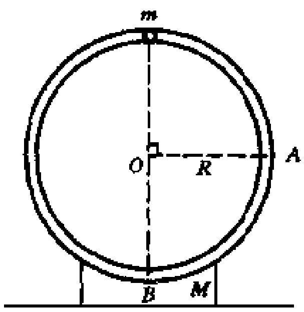
$$K=\frac{v_1}{v_2}=\sqrt{1+\left(\frac{L-D}{H}\right)^2}=\sqrt{1+M^2}$$

故发射角 α 应满足

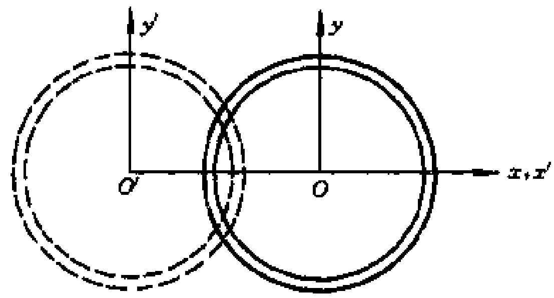
$$\cos\alpha=\frac{K}{1+M^2}=\frac{\sqrt{1+M^2}}{1+M^2}=\frac{1}{\sqrt{1+M^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{L-D}{H}\right)^2}}$$

【题 2】 如力试(一)图 2－1，半径为 R 的空心圆环固定在滑块上，滑块放置在光滑水平地面上，滑块与圆环的总质量为 M，质量为 m 的小球(看成质点)可在环内作无摩擦运动．开始时小球位于圆环最高点，环与小球均静止．在微小扰动下小球沿环下滑．1．试求小球相对地面的轨迹方程．2．试用物理方法求小球轨迹(相对地面)在力试(一)图 2－1 中 A、B 两处的曲率半径．

【分析】 并入求解之中．



力试(一)图 2－1



力试(一)图 2－2

【解】 1．为求小球相对地面的运动轨迹，设置两个坐标系，如力试(一)图 2－2 所示．

固定坐标系 Oxy，固定于地面，开始时的环心位置为坐标原点 O．

运动坐标系 $O'x'y'$，固定于圆环，环心为坐标原点 O'．

在运动坐标系 $O'x'y'$ 中考察小球运动，小球沿圆环作圆周运动，轨迹方程为圆方程，

$$x'^2 + y'^2 = R^2 \tag{1}$$

把上述方程转换到固定的地面坐标系中，因两个坐标系在 y 方向无相对运动，故有

$$y' = y$$

小球与圆环系统在 x 方向不受外力，故系统在 x 方向动量守恒，有

$$m\frac{dx}{dt} + M\frac{dx_M}{dt} = 0$$

即

$$m\,dx + M\,dx_M = 0$$

式中 x 为小球的 x 坐标，x_M 为环心的 x 坐标(表示圆环的位置). 因开始时，有

$$x = x_M = 0$$

故有

$$mx + Mx_M = 0$$

$$x_M = -\frac{m}{M}x$$

由相对运动公式

$$x' = x - x_M = \frac{M+m}{M}x$$

把 x' 和 y' 代人方程(1)式，得出小球在固定的地面坐标系中的轨迹方程为

$$\left(\frac{M+m}{M}\right)^2 x^2 + y^2 = R^2$$

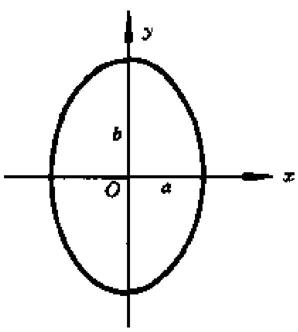
或

$$\frac{x^2}{\left(\dfrac{MR}{M+m}\right)^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1$$

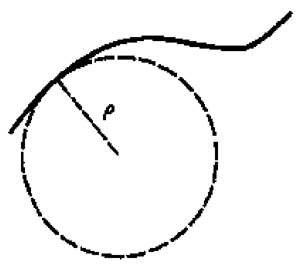
即

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

这是椭圆方程，其中 $a = \dfrac{MR}{M+m}$，$b = R$，$a < b$，如力试(一)图 2-3 所示.



力试(一)图 2-3



力试(一)图 2-4

2. 对于任何曲线运动，如力试(一)图 2－4 所示，曲线的每一小段均可看作是一个圆的圆弧，该圆的半径 ρ 称为曲线在该小段处的曲率半径. 若物体沿曲线运动，在该小段处的法向加速度为 a_n，速度为 v，则有

$$a_n=\frac{v^2}{\rho}$$

可见，由 v 和 a_n 可以求得曲率半径 ρ.

在本题中，当小球沿椭圆轨迹经过 A 点时，设小球的速度为 v(相对地面)，其方向应竖直向下，设小球受圆环的支持力为 N(水平方向)，如力试(一)图 2－5 所示. 由牛顿第二定律，

$$N=m\ \frac{v^2}{\rho_A} \tag{2}$$

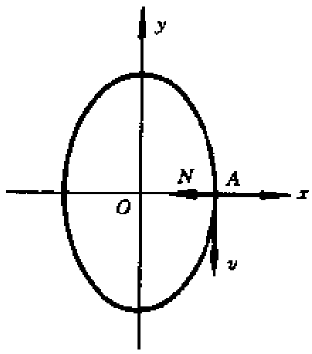
ρ_A 即为小球轨迹在 A 点的曲率半径.

为求 N，取圆环为参考系. 因圆环有加速度 a_M，故是非惯性系. 如力试(一)图 2－6 所示，小球在水平方向除受环的支持力 N 外，还受惯性力 ma_M 的作用. 由牛顿第二定律，

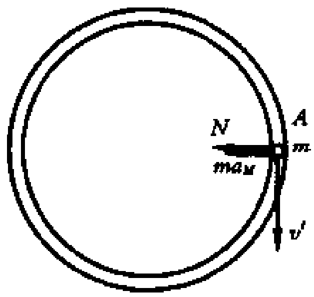
$$N+ma_M=m\ \frac{v'^2}{R}$$

式中 v' 是小球在 A 点相对圆环的速度，其方向竖直向下. 因在竖直方向圆环与地面无相对运动，故

$$v'=v$$



力试(一)图 2－5



力试(一)图 2－6

再以地面为参考系，圆环(连同滑块)在反作用力 N 的作用下产生加速度 a_M，故有

$$N=Ma_M$$

由以上三式，得

$$N=\frac{Mm}{M+m}\ \ \frac{v^2}{R}$$

代入(2)式，得

$$\frac{Mm}{M+m}\ \ \frac{v^2}{R}=m\ \frac{v^2}{\rho_A}$$

故小球椭圆轨迹在 A 点处的曲率半径为

$$\rho_A=\frac{M+m}{M}R$$

再考虑 B 点. 以地面为参考系，如力试(一)图 2－7，小球在 B 点受重力 mg(竖直向下)，环支持力 N(竖直向上)，设小球速度为 v(水平方向). 由牛顿第二定律，

$$N - mg = m\frac{v^2}{\rho_B}$$

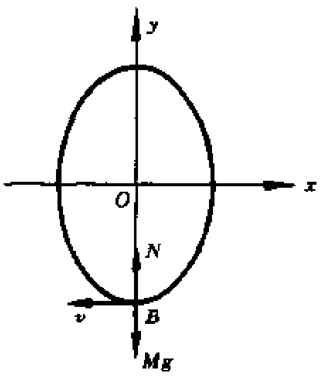
式中 v 是小球在 B 点相对地面的速度，ρ_B 是小球轨迹在 B 点的曲率半径.

再以环为参考系. 如力试(一)图 2－8 所示，小球在 B 点受重力 mg(竖直向下)及支持力 N(竖直向上)，注意，在 B 点小球不受惯性力(请读者考虑为什么). 设小球在 B 点相对圆环的速度为 v'，于是由牛顿第二定律，

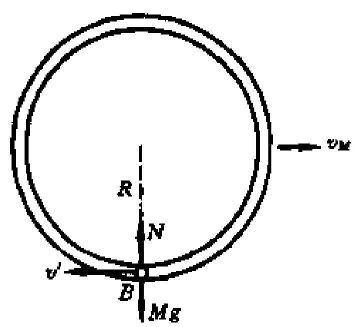
$$N - mg = m\frac{v'^2}{R}$$

由以上两式，得

$$\rho_B = \left(\frac{v}{v'}\right)^2 R$$



力试(一)图 2－7



力试(一)图 2－8

小球位于 B 点时，圆环继续向右运动，设速度为 v_M. 由速度叠加法则，小球相对圆环的速度为

$$v' = v + v_M$$

由动量守恒，

$$mv = Mv_M,\quad v_M = \frac{m}{M}v$$

故

$$v' = v + \frac{m}{M}v = \frac{M+m}{M}v$$

即

$$\frac{v}{v'} = \frac{M}{M+m}$$

代入，得

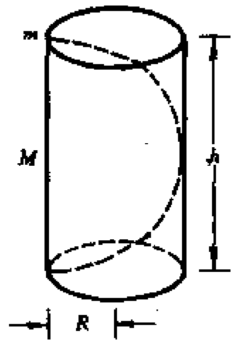
$$\rho_B = \left(\frac{M}{M+m}\right)^2 R$$

又，根据有关椭圆的几何知识，$\rho_A = \dfrac{b^2}{a}$，$\rho_B = \dfrac{a^2}{b}$. 现已知 $a = \dfrac{M}{M+m}R$，$b = R$，代入，可以得

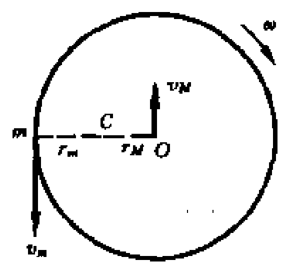
到同样结果.

【题3】 如力试(一)图3－1,质量为 M、半径为 R 的圆筒垂直放置在光滑水平面上.质量为 m 的小球从圆筒顶部沿圆筒内壁的螺旋构槽无摩擦地下滑.筒高 h 正好等于螺距,即小球沿筒壁绕一周时正好到达筒底.开始时小球与圆筒均静止不动.

1. 试分析下滑过程中圆筒的运动.2. 试求小球相对地面参考系所走过的路程.



力试(一)图3－1



力试(一)图3－2

【解】 1. 先分析小球和圆筒在水平面上投影的运动.如力试(一)图3－2,小球－圆筒系统的质心 C 与圆筒轴 O 的距离为

$$r_C = r_M = \frac{mR}{M+m}$$

小球与质心的距离为

$$r_m = \frac{MR}{M+m}$$

运动时,m、C、O 三点始终保持在同一直线上.

因小球－圆筒系统在水平方向不受外力,而且开始时均静止不动,由质心运动定理,质心 C 的速度恒为零,即 C 点相对地面固定不动,质心系亦即固定于地面的坐标系.在质心系中,小球和 O 点(圆筒的轴)均绕 C 点作圆周运动.又因系统不受外力矩,角动量守恒,故当小球作圆运动时,圆筒将获得转动角速度.设圆筒绕垂直轴 O 的自转角速度用 ω 表示.系统绕 C 点的角动量包括小球 m 绕 C 点的角动量 $mr_m v_m$,圆筒轴心 O 绕 C 点的角动量 $Mr_M v_M$,以及圆筒自转角动量 $I\omega$,即系统角动量为

$$mr_m v_m + Mr_M v_M - I\omega = 0$$

式中 v_m 和 v_M 分别是小球 m 和圆筒 M 轴心 O 相对于系统质心 C 点(即相对于地面)的速度,I 是圆筒绕 O 轴的转动惯量,为

$$I = MR^2$$

又,系统在水平方向不受外力,总动量守恒,有

$$mv_m = Mv_M$$

由以上三式,得

$$I\omega = mr_m v_m + Mr_M v_M = mv_m(r_m + r_M) = mRv_m$$

故圆筒的自转角速度为

$$\omega=\frac{mRv_{\mathrm{m}}}{MR^2}=\frac{m}{MR}v_{\mathrm{m}}$$

综上所述，圆筒轴 O 将绕通过固定点 C 的垂直轴作圆周运动，圆半径为

$$r_{\mathrm{M}}=\frac{m}{M+m}R$$

角速度为

$$\omega_{\mathrm{M}}=\frac{v_{\mathrm{M}}}{r_{\mathrm{M}}}=\frac{m}{M}v_{\mathrm{m}}\cdot\frac{M+m}{mR}=\frac{M+m}{MR}v_{\mathrm{m}}$$

同时，圆筒绕自身的轴 O 以角速度 $\omega=\frac{m}{MR}v_{\mathrm{m}}$ 转动.

2. 小球绕 C 点的角速度 $\omega_{\mathrm{m}}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$，$\mathrm{d}\theta$ 为 $\mathrm{d}t$ 时间内小球相对地面转过的角度. 小球相对圆筒的角速度 $\omega'=\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}t}$，$\mathrm{d}\theta'$ 为 $\mathrm{d}t$ 时间内小球相对圆筒转过的角度. 由相对运动公式

$$\omega'=\omega_{\mathrm{m}}+\omega$$

式中 ω 是圆筒的自转角速度. 式中 ω_{m} 是小球相对圆筒轴 O 的角速度，它也等于相对质心 C 的角速度，而后者又等于圆筒轴相对 C 的角速度，即

$$\omega_{\mathrm{m}}=\omega_{\mathrm{M}}=\frac{M+m}{MR}v_{\mathrm{m}}$$

于是

$$\begin{aligned}\omega'&=\frac{M+m}{MR}v_{\mathrm{m}}+\frac{m}{MR}v_{\mathrm{m}}=\frac{M+2m}{MR}v_{\mathrm{m}}\\&=\frac{M+2m}{MR}\cdot r_{\mathrm{m}}\omega_{\mathrm{m}}=\frac{M+2m}{MR}\cdot\frac{MR}{M+m}\omega_{\mathrm{m}}=\frac{M+2m}{M+m}\omega_{\mathrm{m}}\end{aligned}$$

或

$$\mathrm{d}\theta'=\frac{M+2m}{M+m}\mathrm{d}\theta$$

积分，得

$$\theta=\frac{M+m}{M+2m}\theta'$$

当小球相对圆筒绕一周时，即当

$$\theta'=2\pi$$

时，小球相对地面转过的角度为

$$\theta=2\pi\frac{M+m}{M+2m}$$

所以，小球相对地面在水平面内走过的路程为

$$S_{/\!/}=r_{\mathrm{m}}\theta=\frac{MR}{M+m}\cdot2\pi\frac{M+m}{M+2m}=\frac{2\pi M}{M+2m}R$$

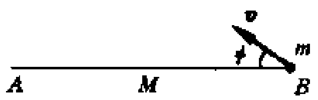
小球在竖直方向走过的路程即为筒高，故

$$S_{\perp}=h$$

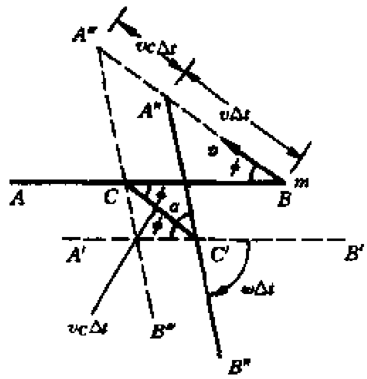
所以小球相对地面走过的总路程为

$$S=\sqrt{S_{\perp}^2+S_{\parallel}^2}=\sqrt{h^2+\left(\frac{2\pi M}{M+2m}\right)^2R^2}$$

【题 4】 如力试(一)图 4-1,质量为 M 的均匀细杆 AB 静止放置在光滑水平面上,B 端的弹簧机构(其质量可略)将质量为 m 的小球(质点)以速度 $\boldsymbol{v}$ 水平弹出,$\boldsymbol{v}$ 的方向与 AB 杆的夹角用 φ 表示.要求弹出的小球恰好能与细杆的 A 端相遇(细杆转过的角度不超过 π).试确定质量比 $\gamma=\frac{M}{m}$ 和角度 φ 的取值范围.



力试(一)图 4-1



力试(一)图 4-2

【分析】 如力试(一)图 4-2,小球弹出后在水平面内作匀速直线运动.细杆则在水平面内同时参与两种运动,即质心 C 的平动和绕质心的转动.经 Δt 时间后,质心 C 沿 $-\boldsymbol{v}$ 方向移至 C' 点,位于 $A'B'$ 位置,同时绕质心 C' 转过 $\omega\Delta t$,细杆位于 $A''B''$,小球则移动了 $v\Delta t$ 到达 A'' 点,于是正好与 A 端相遇.整个过程等效于细杆绕 C 转过 $\omega\Delta t$ 到达 $A'''B'''$ 位移,然后平移到 $A''B''$ 位置.

细杆和小球系统在水平方向不受外力和外力矩,故动量守恒,角动量守恒,利用这两个守恒定律及几何关系,可以得出 γ 与 φ 的关系,从而确定 γ 和 φ 的取值范围.

【解】 设细杆长 l,质心 C 位于杆的中心.由动量守恒和角动量守恒,有

$$mv=Mv_C$$

$$\frac{l}{2}mv\sin\varphi=I_C\omega$$

式中 I_C 是细杆绕质心轴的转动惯量,ω 为细杆转动角速度,有

$$I_C=\frac{1}{12}Ml^2$$

由以上三式,解出

$$v_C=\frac{m}{M}v,\quad \omega=\frac{6mv}{Ml}\sin\varphi$$

因要求小球与细杆 A 端相遇,如力试(一)图 4-2,由几何关系,有

$$\varphi+\alpha=\omega\Delta t$$

$$\frac{1}{2}(v+v_C)\Delta t=\frac{l}{2}\cos\varphi$$

因

$$\varphi=\alpha$$

于是

$$2\varphi=\omega\Delta t$$

$$(v+v_C)\Delta t=l\cos\varphi$$

把 v_C 以及 ω 与 v 的关系式代入，得

$$\left(v+\frac{m}{M}v\right)\frac{2\varphi}{\omega}=l\cos\varphi$$

或

$$\left(1+\frac{m}{M}\right)v\cdot\frac{2\varphi Ml}{6mv\sin\varphi}=l\cos\varphi$$

$$\left(1+\frac{M}{m}\right)=\frac{3\sin2\varphi}{2\varphi}$$

最后得

$$\frac{1+\gamma}{3}=\frac{\sin2\varphi}{2\varphi}$$

为使小球能与细杆 A 端相遇，要求

$$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$$

故

$$\frac{\sin2\varphi}{2\varphi}<1$$

即要求

$$\frac{1+\gamma}{3}<1$$

因 $\gamma=\dfrac{M}{m}>0$，故 γ 的取值范围为

$$0<\gamma<2$$

同时，因 $\gamma>0$，故

$$\frac{\sin2\varphi}{2\varphi}>\frac{1}{3}$$

上式的数值解为

$$\varphi<1.139\ \text{rad}$$

故 φ 的取值范围为

$$o<\varphi<1.139\ \text{rad}$$

【题 5】 一陨石在地表上方高为 $h=4.2\times10^3$ km 的圆形轨道上绕地球运动，它突然与另一质量小得多的小陨石发生正碰，碰后损失掉 2% 的动能. 假定碰撞不改变大陨石的运动方向和质量. 试求大陨石在碰撞后最接近地心的距离. 已知地球半径 $R=6.4\times10^3$ km.

【解】 陨石碰前作圆周运动，其轨道半径 r_0 为

$$r_0 = R + h$$

由牛顿第二定律，

$$\frac{mv^2}{r_0} = \frac{GMm}{r_\Delta^2}$$

式中 m 和 M 分别是陨石和地球的质量. 陨石的动能为

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r_0}$$

碰后动能损失 2%，变为

$$E_k = 0.98\frac{GMm}{2r_0}$$

碰撞前、后引力势能不变，为

$$E_p = -\frac{GMm}{r_0}$$

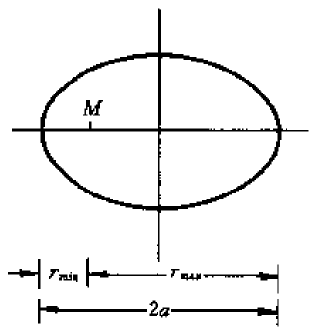
碰后陨石的总机械能为

$$E = E_k + E_p = -\frac{GMm}{r_0}\left(1 - \frac{0.98}{2}\right) = -\frac{1.02GMm}{2r_0}$$

陨石失去部分能量后，将从圆轨道变为椭圆轨道，碰撞点为新的椭圆轨道的远地点. 椭圆长轴直接与总能量 E 相关. 由本书力学第四章题 1，椭圆轨道的远地点和近地点与地球的距离 r_{max} 和 r_{min}（如图）应满足

$$\frac{1}{r_{max}} + \frac{1}{r_{min}} = \frac{2GMm^2}{L^2}$$

$$\frac{1}{r_{max}\, r_{min}} = -\frac{L^2}{2mE}$$



力试(一)图 5-1

式中 L 为陨石的角动量，由以上两式，得

$$r_{max} + r_{min} = 2a = -\frac{GMm}{E}$$

上式是总能量 E 与椭圆长轴 a 的关系. 把 E 的结果代入，得

$$2a = \frac{2r_0 GMm}{1.02GMm} = \frac{2r_0}{1.02} = 2.08 \times 10^4\ \text{km}$$

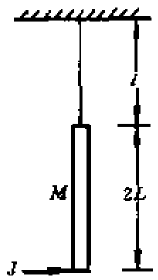
故陨石近地点与地心的距离为

$$r_{min} = 2a - r_0 = 1.02 \times 10^4\ \text{km}$$

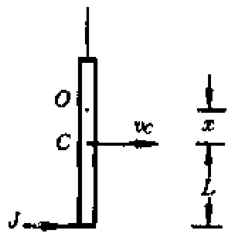
其中 r_0 就是 r_{max}.

【题 6】 如力试(一)图 6-1，质量为 M、长为 $2L$ 的均匀细杆用长为 l 的轻绳竖直悬挂起来，保持静止. 突然对细杆下端沿水平方向施以短时间的冲量 J，绳和细杆均将偏离原来的竖直方向. 设绳和细杆偏离竖直方向的角度分别用 θ 和 φ 表示.

1. 试画出运动开始时刻绳与杆的偏离草图. 2. 试问开始时刻绳的角速度 $\dot{\theta}$ 和杆的角速度 $\dot{\varphi}$ 各等于多少? 3. 试问在最大摆角时，θ 和 φ 应有怎样的关系.



力试(一)图 6-1



力试(一)图 6-2

【解】 1. 处在平衡状态的细杆，下端受到水平冲量 J 的作用后，杆所受绳的拉力和重力仍看作平衡，其运动将包括质心的平动和绕质心的转动. 设质心速度为 v_C，由质心运动定理，杆受到的冲量等于杆的质心获得的动量，即有

$$J = Mv_C \tag{1}$$

杆的最初运动也可看成是绕瞬时轴的单纯转动(参看本书力学第六章题 20). 如力试(一)图 6-2，设瞬时转轴 O 与杆质心 C 的距离为 x，则由角动量定理，

$$J(L+x) = I\omega$$

式中 ω 是杆的角速度，I 是杆对 O 点的转动惯量，分别为

$$\omega = \dot{\varphi}$$

$$I = \frac{1}{3}ML^2 + Mx^2$$

故有

$$J(L+x) = \left(\frac{1}{3}ML^2 + Mx^2\right)\omega \tag{2}$$

因

$$v_C = \omega x$$

故(1)式可改写为

$$J = M\omega x$$

把(3)式代入(2)式，得

$$x(L+x) = \frac{L^2}{3} + x^2 \tag{3}$$

即

$$x = \frac{L}{3}$$

即瞬时转轴 O 与杆下端的距离为 $\frac{4}{3}L$. 杆最初的运动是绕 O 轴的转动，如力试(一)图 6-3 所示.

2. 由力试(一)图 6-3 可知，

$$\varphi = \frac{-l\theta}{2L - \frac{4}{3}L} = -\frac{3l}{2L}\theta$$

对时间求导后，得

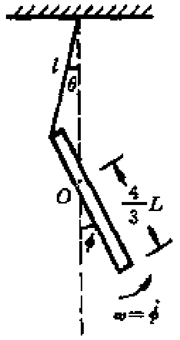
$$\omega=\dot{\varphi}=-\frac{3l}{2L}\dot{\theta}$$

由(3)式，

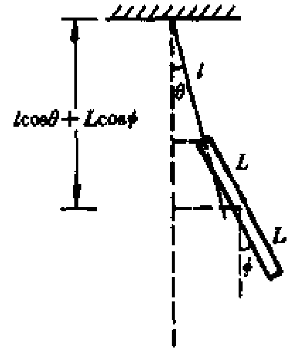
$$\dot{\varphi}=\omega=\frac{J}{Mx}=\frac{3J}{ML}$$

故

$$\dot{\theta}=-\frac{2L}{3l}\dot{\varphi}=-\frac{2J}{Ml}$$



力试(一)图 6－3



力试(一)图 6－4

3. 杆下端受冲量 J 作用后，杆的初始动能为

$$E_{k0}=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}ML^2+Mx^2)\omega^2$$

把 x 和 ω 的结果代入，得

$$E_{k0}=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}ML^2+\frac{1}{9}ML^2)(\frac{3J}{ML})^2=\frac{2J^2}{M}$$

取杆的初始势能为零，则杆的初始总机械能 E_0 为

$$E_0=\frac{2J^2}{M}$$

当杆达到最大摆角时，如力试(一)图 6－4，设杆和绳的摆角分别为 φ 和 θ，此时杆的动能为零，势能 E_p 即总能量 E 为

$$E_p=E=[(l+L)-(l\cos\theta+L\cos\varphi)]Mg$$

在杆摆动过程中，机械能守恒，故

$$E_0=E$$

把 E_0 和 E 的结果代入上式，得出最大摆角时 θ 和 φ 的关系为

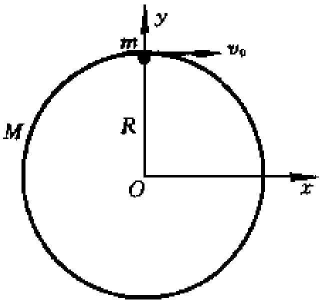
$$l\cos\theta+L\cos\varphi=l+L-\frac{2J^2}{M^2g}$$

【这是北京大学物理试验班的试题之一．试验班是为培训、选拔参加 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)的中国代表队而设立的．】

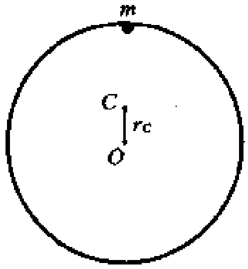
力学试题(二)

【题1】 如力试(二)图1－1,在光滑水平面上有质量为 M 且均匀分布、半径为 R 的圆环.质量为 $m(m<M)$ 的质点可在环内壁作无摩擦滑动.开始时,圆环静止,环心在 O 点,质点位于 (O,R) 处,速度沿 x 方向,大小为 v_0.

1.试证明质点不会离开环内壁.2.试导出质点的运动方程.3.试求质点运动轨迹转折处的曲率半径.



力试(二)图1 1



力试(二)图1－2

【解】 1.在 $t=0$ 时刻,圆环和质点系统质心 C 的位置为(如力试(二)图1－2),

$$r_C=\frac{mR}{M+m}$$

r_C 即为 OC.质点和环心 O 到质心 C 的距离分别为

$$\begin{cases} r_m=\dfrac{MR}{M+m} \\ r_M=\dfrac{mR}{M+m} \end{cases} \tag{1}$$

r_M 就是 r_C.上述距离在此后的运动中均保持不变.

圆环和质点系统在水平面内不受外力,故动量守恒,有

$$(M+m)\boldsymbol{v}_C=m\boldsymbol{v}_0$$

得出质心速度为

$$\boldsymbol{v}_C=\frac{m}{M+m}\boldsymbol{v}_0 \tag{2}$$

可见,系统的质心速度是恒矢量,即系统质心始终平行于 x 轴匀速运动,因而质心系是惯性系.

在质心系中,$t=0$ 时刻,质点和环心的速度分别为

$$\boldsymbol{v}'_m=\boldsymbol{v}_0-\boldsymbol{v}_C=\frac{M}{M+m}\boldsymbol{v}_0$$

$$\boldsymbol{v}'_M=0-\boldsymbol{v}_C=-\frac{m}{M+m}\boldsymbol{v}_0$$

因忽略摩擦力，质点和圆环的相互作用力总是垂直于圆环的，即力的作用线总是通过环心 O 点和质心 C 的. 根据角动量定理，质点和圆环相对质心 C 的角动量保持不变，或质点和圆环绕质心 C 的角速度不变，都等于 $t=0$ 时刻的角速度. 因此，质点和圆环绕质心的角速度的大小分别为

$$\omega'_m=\frac{v'_m}{r_m}=\frac{v_0}{R}$$

$$\omega'_M=\frac{v'_M}{r_M}=\frac{v_0}{R}$$

即

$$\omega=\omega'_m=\omega'_M=\frac{v_0}{R} \tag{3}$$

$\boldsymbol{\omega}'_m$ 与 $\boldsymbol{\omega}'_M$ 都指向同一方向.

可见，在质心系中，质点和环心均以共同的角速度绕质心 C 作匀速圆周运动. 质点在质心系中的轨迹是以 C 为中心，以 r_m 为半径的圆，作圆周运动所需的向心力只能由圆环与质点间的相互作用力提供. 所以在以后的运动中，质点将始终贴着圆环的内壁，不能脱离圆环.

2. 质点在质心系中的轨迹是圆，其参变方程为

$$\begin{cases} x' = r_m\sin\omega t \\ y' = r_m\cos\omega t \end{cases} \tag{4}$$

式中 r_m 由(1)式确定，ω 由(3)式确定.

又，质心 C 在固定的地面坐标系 Oxy 中的运动方程为

$$\begin{cases} x_C = v_C t \\ y_C = r_M = \dfrac{m}{M+m}R \end{cases} \tag{5}$$

质点在质心系中作匀速圆周运动，它的总加速度 a 就是它的向心加速度 a'_n. 因质心系是惯性系，加速度在不同惯性系中是变换不变量，保持不变，故质心在固定的地面坐标系中加速度的大小为

$$a=a'_n=\omega^2 r_m=\frac{M}{M+m}\cdot\frac{v_0^2}{R}$$

在固定的地面坐标系中，当质点在圆环最高处的 A_1 点时，其速度 $v_1=v_0$，质点在 A_1 点时 x 方向不受力，故切向加速度 $a_t=0$，总加速度 a 等于法向加速度 a_n，为

$$a_n=a=\frac{M}{M+M}\cdot\frac{v_0^2}{R}$$

于是，质点轨迹在 A_1 点的曲率半径为

$$\rho_1=\frac{v_1^2}{a_n}=\frac{v_0^2}{a}=\frac{M+m}{M}R$$

当质点在圆环最低处的 A_2 点时，质点的速度为

$$v_2=v_C-\omega r_m=\frac{m}{M+m}v_0-\frac{v_0}{R}\cdot\frac{MR}{M+m}=-\frac{M-m}{M+m}v_0$$

与在 A_1 点一样，切向加速度 $a_t=0$，法向加速度 a_n 等于总加速度 a，故质点轨迹在 A_2 点的曲率半径为

$$\rho_2=\frac{v_2^2}{a}=\frac{\left(\frac{M-m}{M+m}v_0\right)^2}{\frac{Mv_0^2}{R(M+m)}}=\frac{(M-m)^2}{M(M+m)}R$$

当质点在 A_3 点，即质点的速度沿 y 轴时，$v_x=0$，速度 $v_3=v_y$. 因 A_3 的法线方向与 x 轴一致，故法向加速度 $a_n=a_x$.

质点在固定的地面坐标系中的运动方程为

$$\begin{cases}x=x_C+x'\\y=y_C+y'\end{cases}$$

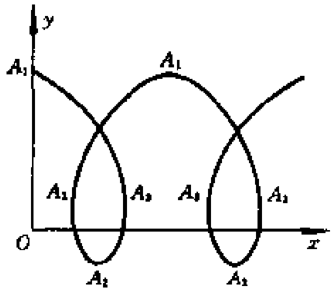
将(4)、(5)式代入，得

$$\begin{cases}x=v_Ct+r_m\sin\omega t\\y=r_M+r_m\cos\omega t\end{cases}$$

再将(1)、(2)、(3)式代入，得

$$\begin{cases}x=\frac{m}{M+m}v_0t+\frac{MR}{M+m}\sin\omega t\\\quad=\frac{1}{M+m}(mv_0t+MR\sin\omega t)\\y=\frac{m}{M+m}R+\frac{MR}{M+m}\cos\omega t\\\quad=\frac{R}{M+m}(m+M\cos\omega t)\end{cases}\tag{6}$$

当 $m<M$ 时，在固定的地面坐标系中，质点的运动轨迹如力试(二)图 1－3 所示，共有 A_1、A_2 和 A_3 三类转折点.



力试(二)图 1－3

3. 质点在轨迹转折点的曲率半径为

$$\rho=\frac{v^2}{a_n}$$

式中 v 为质点在转折点的速度，a_n 为质点在转折点的法向加速度.

质点在转折点 A_1 和 A_2 的曲率半径 ρ_1 和 ρ_2 上面已经求出. 现在求质点在转折点 A_3 的曲率半径 ρ_3.

由运动方程(6)式，质点的速度为，

$$\begin{cases}v_x=\frac{dx}{dt}=\frac{m}{M+m}v_0+\frac{MR}{M+m}\cdot\frac{v_0}{R}\cos\omega t\\\quad=\frac{v_0}{M+m}(m+M\cos\omega t)\\v_y=\frac{dy}{dt}=-\frac{MR}{M+m}\cdot\frac{v_0}{R}\sin\omega t\\\quad=-\frac{Mv_0}{M+m}\sin\omega t\end{cases}\tag{7}$$

质点的加速度为

$$
\begin{cases}
a_x = \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{v_0}{M+m}\cdot\dfrac{Mv_0}{R}\sin\omega t \\
\quad = -\dfrac{Mv_0^2}{R(M+m)}\sin\omega t \\
a_y = \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{Mv_0}{M+m}\cdot\dfrac{v_0}{R}\cos\omega t \\
\quad = -\dfrac{Mv_0^2}{R(M+m)}\cos\omega t
\end{cases}
\tag{8}
$$

由于质点在转折点 A_3 时，质点的速度沿 y 轴，故

$$v_x = 0$$

把(7)式代入，得

$$\frac{v_0}{M+m}(m + M\cos\omega t) = 0$$

即

$$\cos\omega t = -\frac{m}{M}$$

$$\sin\omega t = \pm\sqrt{1-\left(\frac{m}{M}\right)^2} = \pm\frac{1}{M}\sqrt{M^2-m^2}$$

质点在 A_3 点的速度 v_3 为

$$v_3 = v_y$$

把(7)式及上述 $\sin\omega t$ 代入，得

$$v_3 = v_y = \mp\frac{Mv_0}{M+m}\cdot\frac{\sqrt{M^2-m^2}}{M} = \mp\sqrt{\frac{M-m}{M+m}}v_0$$

质点在 A_3 点的法向加速度为

$$a_n = a_x$$

把(8)式及上述 $\sin\omega t$ 代入，得

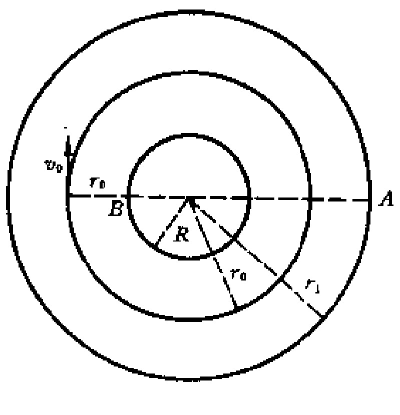
$$a_n = a_x = -\frac{Mv_0^2}{R(M+m)}\sin\omega t$$

$$= \pm\frac{Mv_0^2}{R(M+m)}\frac{\sqrt{M^2-m^2}}{M} = \pm\frac{1}{R}\sqrt{\frac{M-m}{M+m}}v_0^2$$

故质点轨迹在 A_3 点的曲率半径为

$$\rho_3 = \frac{v_3^2}{|a_n|} = \sqrt{\frac{M-m}{M+m}}R$$

【题 2】 如力试(二)图 2-1，一宇宙飞船绕地球作圆周运动，圆轨道半径为 r_0. 开动飞船上的喷气发动机可改变运动轨道. 假定每次喷气只维持极短的时间，因而喷气时间可忽略；每次喷气后飞船质量可看作不变. 喷气后飞船的动量将发生变化，单位质量的动量改变 $\frac{\Delta(mv)}{m} = \Delta v$ 称为比冲量. 已知地球半径为 R，质量为 M.



力试(二)图 2-1

1. 为使飞船从 r_0 轨道上逃逸地球的束缚,发动机作第一次喷气.试问所需最小比冲量是多少? 2. 在飞船飞行过程中,飞船作第二次喷气,使它在半径为 r_1 的更高的圆轨道上飞行.试问所需比冲量是多少? 应向什么方向喷气? 3. 为使飞船从 r_1 轨道返回地球,发动机在 A 点作第三次喷气,要求飞船沿地球表面的切向到达 B 点.喷气按两种不同方式进行,一是向正前方,另一是向外侧,试分别计算两种方式所需的比冲量.若 $r_0=2R$,试比较两种比冲量的大小.

【解】 1. 设飞船在 r_0 圆轨道上飞行时的速度为 v_0,由牛顿第二定律,

$$m\frac{v_0^2}{r_0}=\frac{GMm}{r_0^2}$$

式中 m 和 M 分别是飞船和地球的质量.故

$$v_0=\sqrt{\frac{GM}{r_0}}$$

刚能逃逸所需的比冲量最小.所谓刚能逃逸是使飞船速度刚好达到逃逸速度 v_{e0}.刚能逃逸意指飞船的总能量为零,飞船将沿抛物线轨道飞向无穷.此时有

$$\frac{1}{2}mv_{e0}^2-\frac{GMm}{r_0}=0$$

故在 r_0 轨道上飞船的逃逸速度为

$$v_{e0}=\sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$$

为使比冲最小,应向后(即与 $\boldsymbol{v}_0$ 反向)喷气,比冲量为

$$\Delta v_0=v_{e0}-v_0=(\sqrt{2}-1)\sqrt{\frac{GM}{r_0}}$$

2. 如力试(二)图 2-2,飞船在 r_0 轨道上经第一次喷气后,速度从 v_0 增为逃逸速度 v_{e0},沿抛物线轨道向远处飞行.当飞船到达与地心距离为 r_1 时,发动机作第二次喷气,使飞船改在半径为 r_1 的圆轨道上运行.如力试(二)图 2-2,飞船到达距地心 r_1 处,喷气前的速度记为 $\boldsymbol{v}_{e1}$,第二次喷气后的速度记为 $\boldsymbol{v}_1$(其方向与半径为 r_1 的圆相切),两者的夹角为 φ.根据开普勒第二定律(即角动量守恒)有

$$v_{e0}r_0=v_{e1}r_1\cos\varphi$$

又因飞船沿抛物线轨道飞向无穷时总能量为零,故有

$$\frac{1}{2}mv_{e1}^2-\frac{GMm}{r_1}=0$$

即

$$v_{e1}=\sqrt{\frac{2GM}{r_1}}$$

而 v_1 是飞船沿半径为 r_1 的圆轨道运动的速度,故

$$v_1=\sqrt{\frac{GM}{r_1}}$$

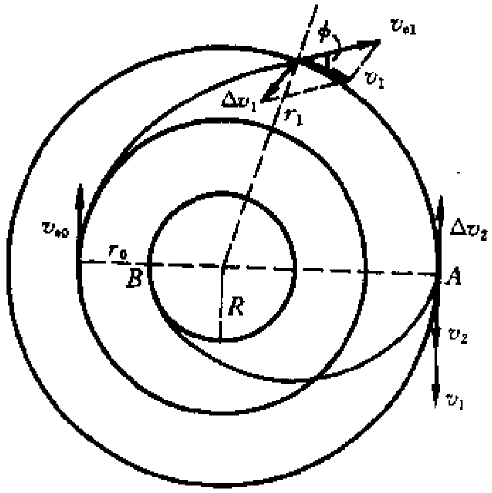
如力试(二)图 2－2,比冲量 $\Delta\boldsymbol{v}_1$ 为

$$\Delta\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_{e1}$$

即

$$\begin{aligned}(\Delta v_1)^2&=v_1^2+v_{e1}^2-2v_1v_{e1}\cos\varphi\\&=\frac{GM}{r_1}+\frac{2GM}{r_1}-2\sqrt{\frac{GM}{r_1}}\frac{r_0}{r_1}v_{e0}\\&=\frac{3GM}{r_1}-\frac{2r_0}{r_1}\sqrt{\frac{GM}{r_1}}\sqrt{\frac{2GM}{r_0}}\\&=\frac{GM}{r_1}\left(3-2\sqrt{\frac{2r_0}{r_1}}\right)\end{aligned}$$

$$\Delta v_1=\sqrt{\frac{GM}{r_1}\left(3-2\sqrt{\frac{2r_0}{r_1}}\right)}$$



力试(二)图 2－2

第二次喷气的方向应沿飞船的左前方(如力试(二)图 2－2),即应沿 $\Delta\boldsymbol{v}_1$ 的反方向喷气.设喷气方向与飞船前进方向($\boldsymbol{v}_{e1}$方向)之间的夹角为 α,则有

$$\cos\alpha=\frac{v_{e1}^2+(\Delta v_1)^2-v_1^2}{2v_{e1}\Delta v_1}$$

上式右边各量均已求出,代入后得

$$\cos\alpha=\frac{2-\sqrt{\frac{2r_0}{r_1}}}{\sqrt{2\left(3-2\sqrt{\frac{2r_0}{r_1}}\right)}}$$

3. 如力试(二)图 2－2,飞船在半径为 r_1 的圆轨道上的 A 点作第三次喷气,使它能沿地球表面的切向到达地球表面的 B 点(A 与 B 的连线经地心).设按第一种方式向正前方喷气,比冲量为 $\Delta\boldsymbol{v}_2$,其方向与飞船运动方向相反,第三次喷气后飞船的速度设为 v_2.喷气后,飞船将沿椭圆轨道到达 B 点.因 $\boldsymbol{v}_2$ 仍沿圆轨道(半径 r_1)的切线方向,到达 B 点时的速度 $\boldsymbol{v}_B$ 也要求沿地球表面的切线方向,故有

$$v_2r_1=v_BR$$

由机械能守恒定律

$$v_2{}^2-\frac{2GM}{r_1}=v_B^2-\frac{2GM}{R}$$

由以上两式解得

$$v_2{}^2=\frac{2GMR}{r_1(r_1+R)}$$

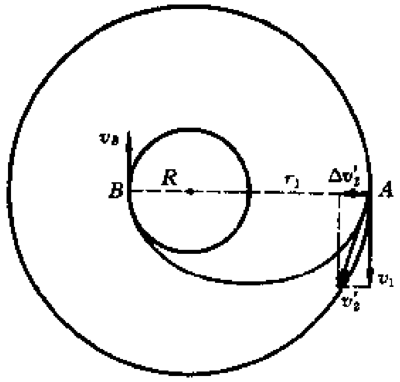
$$v_2=\sqrt{\frac{2GMR}{r_1(r_1+R)}}$$

所需比冲量为

$$\Delta v_2 = v_1 - v_2 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}}\left(1-\sqrt{\frac{2R}{r_1+R}}\right) \tag{1}$$

若按第二种方式喷气，即向飞船外侧第三次喷气，如力试(二)图 2－3，设飞船所受指向地心的比冲量为 $\Delta \boldsymbol{v}'_2$，喷气后的速度为 $\boldsymbol{v}'_2$，喷气前的速度为 $\boldsymbol{v}_1$，因 $\Delta \boldsymbol{v}'_2$ 与 $\boldsymbol{v}_1$ 垂直，故有，

$$(\Delta v'_2)^2 = v'^2_2 - v_1^2$$



力试(二)图 2－3

由机械能守恒定律

$$v'^2_2 - \frac{2GM}{r_1} = v_B^2 - \frac{2GM}{R}$$

式中 v_B 为按第二种方式喷气，飞船到达 B 点时的速度(注意，与按第一种方式喷气的 v_B 不同). 因向外侧喷气，不改变飞船的角动量，故有

$$v_B R = v_1 r_1$$

由以上两式，解出

$$v'^2_2 = \frac{r_1^2}{R^2}v_1^2 - 2GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_1}\right)$$

如力试(二)图 2－3，

$$(\Delta v'_2)^2 = v'^2_2 - v_1^2 = \left(\frac{r_1^2}{R^2} - 1\right)v_1^2 - \frac{2GM(r_1 - R)}{Rr_1}$$

把 v_1 的结果代入，得

$$(\Delta v'_2)^2 = \frac{GM}{r_1}\left[\frac{r_1^2 - R^2}{R^2} - \frac{2(r_1 - R)}{R}\right] = \frac{GM}{r_1}\left(\frac{r_1 - R}{R}\right)^2$$

$$\Delta v'_2 = \frac{r_1 - R}{R}\sqrt{\frac{GM}{r_1}} \tag{2}$$

比较(1)、(2)两式，两种喷气方式所需比冲量之差为

$$\Delta v'_2 - \Delta v_2 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}}\left(\frac{r_1 - R}{R} - 1 + \sqrt{\frac{2R}{r_1 + R}}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{GM}{r_1}}\left(\frac{r_1}{R} + \sqrt{\frac{2R}{r_1 + R}} - 2\right)$$

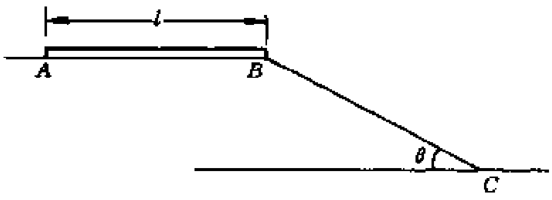
若 $r_0 = 2R$，则 $r_1 > 2R$，上式圆括号内的数总是大于零的，即

$$\Delta v'_2 > \Delta v_2$$

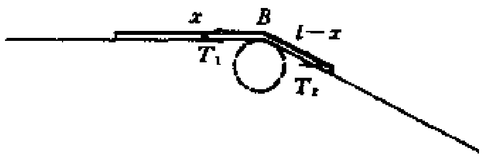
【题 3】 如力试(二)图 3－1，AB 为光滑水平面，BC 是倾角为 θ 的光滑斜面，两者的连结处 B 可看成是半径为 r 的小圆弧面. 质量分布均匀的柔软绳子全长为 l，静止放置在 AB 面上，右端与 B 取齐. 由于不计摩擦力，只要稍有扰动，绳子将在重力作用下沿斜面下滑. 试求下滑过程中绳子与圆弧边 B 接触处的张力及圆弧边对绳子的支持力，并求绳子脱离圆弧边时绳子的位置.

【分析】 圆弧边是否有支持力作用于绳子，完全取决于绳子是否约束在圆弧边上. 绳子被约束在

圆弧边上则由绳子中存在的张力来确保.如力试(二)图 3-2,绳子在 B 处的张力与绳子下滑位置有关,即与 x 有关,x 是绳子左端到B 的距离.一旦绳中张力的法向分量不足以提供所需的向心力时,绳子将脱离 B 边.解本题时应首先求出绳子在 B 边处的张力,B 边对绳子所施支持力.由此,支持力变为零的条件就可得出.



力试(二)图 3-1



力试(二)图 3-2

【解】 设绳子开始时的机械能为零(即取 AB 位置为势能零点).如力试(二)图 3-2,当绳子左端到 B 的距离为x,绳速度为 v 时,由机械能守恒.

$$\frac{1}{2}\lambda l v^2=\frac{1}{2}\lambda(l-x)^2 g\sin\theta$$

式中 λ 是绳子的质量线密度.于是,得出绳子的下滑速度为

$$v=(l-x)\sqrt{\frac{g\sin\theta}{l}} \tag{1}$$

加速度为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\sqrt{\frac{g\sin\theta}{l}}\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

因

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-v$$

故

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=v\sqrt{\frac{g\sin\theta}{l}}=(l-x)\frac{g\sin\theta}{l} \tag{2}$$

如力试(二)图 3-2,为求绳子水平段所受拉力 T_1,以水平段为主体,随着绳子下滑,主体质量不断减少,丢失的质量与主体有共同的速度.由变质量问题的动力方程,绳子水平段的动力方程为

$$\lambda x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=T_1$$

把(2)式代入,得出绳子水平段的拉力为

$$T_1=\frac{\lambda x(l-x)}{l}g\sin\theta$$

再以斜面上的绳子作为主体,如力试(二)图 3-2,随着绳子下滑,主体质量不断增加,加入主体的质量与主体有共同速度,故绳子斜面段的动力方程为

$$\lambda(l-x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-T_2+\lambda(l-x)g\sin\theta$$

故

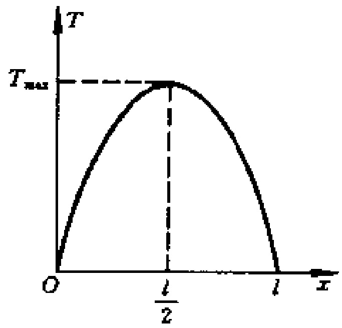
$$T_2=\lambda(l-x)g\sin\theta-\lambda(l-x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

把(2)式代入，得

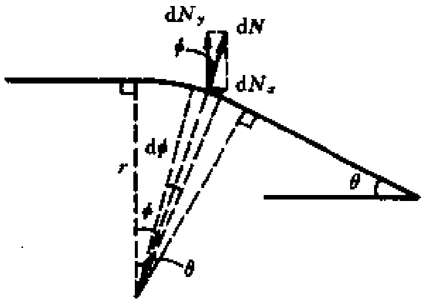
$$T_2=\lambda(l-x)g\sin\theta\left(1-\frac{l-x}{l}\right)=\frac{\lambda x(l-x)}{l}g\sin\theta$$

故

$$T=T_1=T_2=\frac{\lambda x(l-x)}{l}g\sin\theta \tag{3}$$



力试(二)图 3-3



力试(二)图 3-4

可见，在忽略 B 处圆弧半径 r 时，绳子与圆弧接触的部分有相同的张力 T，该张力 T 的大小随 x 而变.

因

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}=\frac{\lambda(l-2x)}{l}g\sin\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{2\lambda g}{l}\sin\theta$$

所以，若绳子始终不脱离 B 边，如力试(二)图 3-3，在开始时，即 $x=l$ 时，$T=0$；随着 x 的减小，张力 T 增大，并在 $x=\frac{l}{2}$时，达到极大值 T_{max}；x 继续减小时，T 减小，并在 $x=0$ 时，T 减为零.

为求圆弧边 B 对绳子的总支持力 N. 如力试(二)图 3-4，考虑 ϕ 角处长度为 $r\mathrm{d}\phi$ 的一小段绳子，其质量为

$$\mathrm{d}m=\lambda r\mathrm{d}\phi$$

该小段绳子在法向受力为$(T\mathrm{d}\phi-\mathrm{d}N)$. 其中 $\mathrm{d}N$ 是圆弧边的支持力，可写成 $\mathrm{d}N=nr\mathrm{d}\phi$，$n$ 是单位长度绳子所受的支持力；其中 $T\mathrm{d}\phi$ 是该小段绳子两端的两个张力(大小均为 T)的合力在法向的投影. 由牛顿第二定律，有

$$T\mathrm{d}\phi-nr\mathrm{d}\phi=\mathrm{d}m\,\frac{v^2}{r}$$

或

$$n=\frac{T}{r}-\frac{\lambda}{r}v^2$$

把(1)、(3)式代入，得

$$n=\frac{\lambda g\sin\theta}{rl}(l-x)(2x-l)$$

如力试(二)图 3-4，绳子的 dm 小段所受支持力$d\boldsymbol{N}$的两个分量为，

$$dN_x=nr\,d\phi\cdot\sin\phi$$

$$dN_y=nr\,d\phi\cdot\cos\phi$$

积分，得出圆弧边对绳子总支持力 $\boldsymbol{N}$ 的两个分量为

$$N_x=\int dN_x=nr\int_0^{\theta}\sin\phi\,d\phi=nr(1-\cos\theta)$$

$$N_y=\int dN_y=nr\int_0^{\theta}\cos\phi\,d\phi=nr\sin\theta$$

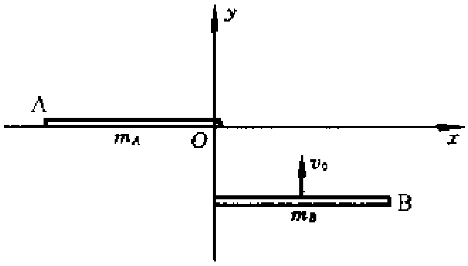
总支持力为

$$N=\sqrt{N_x^2+N_y^2}=nr\sqrt{2(1-\cos\theta)}$$

$$=\frac{\lambda g}{l}\sin\theta\sqrt{2(1-\cos\theta)}(l-x)(2x-l)$$

当 $x=\frac{l}{2}$时，$N=0$，绳子脱离圆弧边．此时 B 处的绳子内有最大张力 T_{max}，但此张力不足以提供绳子圆弧段质元作圆周运动所需的向心力，于是绳子脱离圆弧边．

【题 4】 如图，光滑水平桌面上平行放置两匀质长杆 A 和 B，长度均为 l，质量分别为 m_A 和 m_B．杆 A 静止，位于 x 轴上$(-l+\varepsilon,\varepsilon)$区域，$\varepsilon$ 是一小量．杆 B 位于$(0,l)$区域，并以速度 v_0 向 $+y$ 方向作平移运动．当杆 B 运动到 x 轴时，其左端与杆 A 的右端发生完全弹性碰撞．



力试(二)图 4-1

1．试求碰后 A、B 两杆的质心速度 v_A 和 v_B，以及两杆的转动角速度 ω_A 和 ω_B．

2．试验证下述公式是否正确：

$$v_0=(v_A+\frac{l}{2}\omega_A)-(v_B-\frac{l}{2}\omega_B)$$

【解】 1．取两杆为物体系，因水平方向不受外力和外力矩，故质心动量守恒，有

$$m_Bv_0=m_Av_A+m_Bv_B \tag{1}$$

角动量(对原点 O)守恒，有

$$m_Bv_0\frac{l}{2}=(m_Bv_B\frac{l}{2}+\frac{1}{12}m_Bl^2\omega_B)+(-m_Av_A\frac{l}{2}+\frac{1}{12}m_Al^2\omega_A)$$

即

$$m_Bv_0=m_Bv_B-m_Av_A+\frac{1}{6}m_Bl\omega_B+\frac{1}{6}m_Al\omega_A \tag{2}$$

机械能守恒，有

$$\frac{1}{2}m_Bv_0^2=\frac{1}{2}m_Av_A^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}m_Al^2\omega_A^2+\frac{1}{2}m_Bv_B^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}m_Bl^2\omega_B^2$$

即

$$m_B v_0^2 = m_A v_A^2 + m_B v_B^2 + \frac{1}{12} m_A l^2 \omega_A^2 + \frac{1}{12} m_B l^2 \omega_B^2 \tag{3}$$

另外，两杆端点碰撞时互施的冲量矩大小相等(对各自的质心). 由角动量定理，有

$$J\frac{l}{2} = \frac{1}{12} m_A l^2 \omega_A = \frac{1}{12} m_B l^2 \omega_B$$

即

$$m_A \omega_A = m_B \omega_B \tag{4}$$

(1)、(2)两式相减，并利用(4)式，得

$$m_A v_A = \frac{1}{6} m_A \omega_A l$$

$$\omega_A = \frac{6}{l} v_A \tag{5}$$

由(4)式，

$$\omega_B = \frac{m_A}{m_B}\omega_A = \frac{6 m_A}{m_B l} v_A \tag{6}$$

由(1)式，

$$v_B = \frac{m_B v_0 - m_A v_A}{m_B} \tag{7}$$

以上三式把 ω_A、ω_B、v_B 统一用 v_A 表示，将它们代入(3)式，得

$$m_B v_0^2 = m_A v_A^2 + m_B\left(\frac{m_B v_0 - m_A v_A}{m_B}\right) + \frac{1}{12} m_A l^2 \cdot \frac{36}{l^2} v_A^2 + \frac{1}{12} m_B l^2 \frac{36 m_A^2}{m_B^2 l^2} v_A^2$$

化简，得

$$4\frac{m_A}{m_B}(m_A + m_B) v_A^2 = 2 m_A v_0 v_A$$

即

$$v_A = \frac{m_B}{2(m_A + m_B)} v_0$$

把 v_A 代入(5)、(6)、(7)各式，得

$$\omega_A = \frac{3 m_B}{l(m_A + m_B)} v_0$$

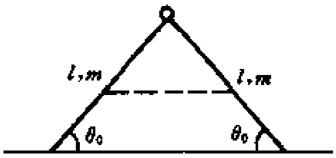
$$v_B = \frac{m_A + 2 m_B}{2(m_A + m_B)} v_0$$

$$\omega_B = \frac{3 m_A}{l(m_A + m_B)} v_0$$

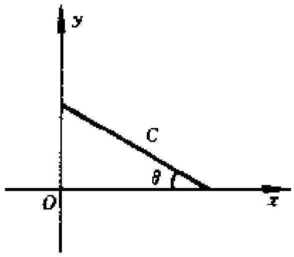
2. 把(5)、(6)、(7)式代入题文所给公式，也可得出同样结论，因此，题文所给公式在本题中是适用的. 然而，该公式并不适用于一般情形. 该公式实际上来源于球的完全弹性对心碰撞，根据动量守恒和机械能守恒，可得碰撞恢复系数 $e = 1$，即碰前接近时的相对速度等于碰后分离时的相对速度，所给公式是 $e = 1$ 的具体体现. 本题不是球的对心碰撞，而是杆与杆的相碰. 如果把杆

端相碰的质元隔离出来并构成一物体系，则该物体系所受外力(杆所施的弹性力)不为零，作功也不为零，因而动量和机械能均不守恒. 所以题文公式一般不适用于杆(或其他刚体)的碰撞.

【题5】 如力试(二)图5－1，质量为 m、长度为 l 的两根相同均匀细杆用光滑铰链和一根线连接起来，竖直设置在光滑地平面上，系统原来静止，$\theta_0=30°$，突然将线剪断. 试求：1. 铰链与平面相碰前的速度. 2. 铰链从开始运动到与平面相碰所需的时间(用积分式表示即可).



力试(二)图5－1



力试(二)图5－2

【解】 1. 因左、右两侧完全对称，只需考虑一侧即可. 设置坐标如力试(二)图5－2，当细杆位于任意倾角 θ 时，质心 C 的坐标为

$$\begin{cases} x_C=\dfrac{l}{2}\cos\theta \\ y_C=\dfrac{l}{2}\sin\theta \end{cases}$$

质心速度的两个分量为

$$\begin{cases} \dot{x}_C=-\dfrac{l}{2}\sin\theta\cdot\dot{\theta} \\ \dot{y}_C=\dfrac{l}{2}\cos\theta\cdot\dot{\theta} \end{cases}$$

取细杆和地球为物体系，细杆两端所受外力均与运动方向垂直，外力不作功，故机械能守恒. 总机械能为

$$E=\frac{1}{2}m(\dot{x}_C^2+\dot{y}_C^2)+\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}mgl\sin\theta$$

式中 I 是细杆绕质心 C 的转动惯量，为

$$I=\frac{1}{12}ml^2$$

把 I 以及 $\dot{x}_C$ 和 $\dot{y}_C$ 的结果代入，得

$$E=\frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}mgl\sin\theta$$

因 E 为恒量，故

$$\frac{dE}{dt}=\frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}\ \ddot{\theta}+\frac{1}{2}mgl\cos\theta\cdot\dot{\theta}=0$$

即

$$\ddot{\theta}=-\frac{3g}{2l}\cos\theta$$

因

$$\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}^2}{\mathrm{d}t}=2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\ddot{\theta}$$

故

$$\mathrm{d}\dot{\theta}^2=2\ddot{\theta}\mathrm{d}\theta=-\frac{3g}{l}\cos\theta\cdot\mathrm{d}\theta$$

积分，得

$$\dot{\theta}^2=-\frac{3g}{l}\sin\theta+C$$

初条件为

$$t=0\text{ 时}，\quad \theta_0=30°，\quad \dot{\theta}=0$$

故

$$C=\frac{3g}{l}\sin\theta_0$$

代入，得

$$\dot{\theta}^2=\frac{3g}{l}(\sin\theta_0-\sin\theta)$$

$$\dot{\theta}=-\sqrt{\frac{3g}{l}(\sin\theta_0-\sin\theta)}=-\sqrt{\frac{3g}{2l}(1-2\sin\theta)}$$

铰链碰地面时 $\theta=0$，故碰地时的角速度为

$$\dot{\theta}=-\sqrt{\frac{3g}{2l}}$$

碰地时的速度为

$$v=l\dot{\theta}=-\sqrt{\frac{3}{2}gl}$$

负号表示指向 $-y$ 方向.

2. 因

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-\sqrt{\frac{3g}{2l}(1-2\sin\theta)}$$

故铰链从开始运动到碰地所需时间为，

$$t=\int\mathrm{d}t=-\sqrt{\frac{2l}{3g}}\int_{30°}^{0}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-2\sin\theta}}=\sqrt{\frac{2l}{3g}}\int_{0}^{30°}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-2\sin\theta}}$$

【题 6】 如力试(二)图 6－1，半径为 R，长为 L 的均匀圆柱体，用两根长为 l、相距为 D 的平行细线悬挂起来. 圆柱体质心 C 的水平位置正好在两悬线之间的正中处.

试求以下三种小振动模式的周期：1. 两悬线在同一铅垂平面内摆动. 2. 以 OO' 为轴摆动. 3. 绕通过圆柱体质心的铅垂轴摆动.

【解】 1. 在摆动过程中圆柱体作平移运动，圆柱体上各点的运动情况完全相同，可用质心的运动代表，故小振动周期即为单摆的周期.

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

2．圆柱体不仅有质心平动，还有转动，属复摆的运动，故周期为

$$T_2=2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl_C}}$$

式中

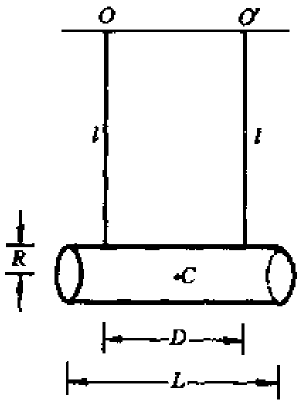
$$l_C=l+R$$

式中 I 为圆柱体绕 OO' 轴的转动惯量，由平行轴定理

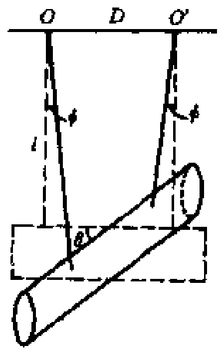
$$I=\frac{1}{2}mR^2+m(l+R)^2$$

故

$$T_2=2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}R^2+(l+R)^2}{g(l+R)}}$$



力试(二)图 6－1



力试(二)图 6－2

3．如力试(二)图 6－2，设圆柱体在水平面内绕竖直的质心轴转过 θ 角，相应地，悬线与铅垂线之间的夹角为 ϕ. 因小振动，θ 和 ϕ 都很小，故有

$$\phi l=\theta\frac{D}{2}$$

即

$$\phi=\frac{D}{2l}\theta$$

设两细线的张力为 T，则圆柱体所受力矩(相对质心轴)为

$$M=2T\sin\phi\cdot\frac{D}{2}=TD\sin\phi$$

对于小角摆动，可忽略质心的上下运动，由质心运动定理

$$2T\cos\phi=mg$$

式中 m 为圆柱体的质量，由以上两式，得

$$M=\frac{mg}{2\cos\phi}D\sin\phi=\frac{1}{2}mgD\tan\phi\approx\frac{1}{2}mgD\phi=\frac{mgD^2}{4l}\theta$$

此力矩是由张力产生的恢复力矩，由转动定理，有

$$I\ddot{\theta}=-\frac{mgD^2}{4l}\theta$$

即

$$\ddot{\theta}+\frac{mgD^2}{4lI}\theta=0$$

故圆频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{mgD^2}{4lI}}$$

式中 I 是圆柱体对通过质心的竖直轴的转动惯量.

以上结果也可以从能量关系得到. 圆柱体摆动时机械能守恒，对于任意摆角 θ，总机械能为

$$E=\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2+mgl(1-\cos\phi)$$

因摆动时 E 保持不变，故

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=I\dot{\theta}\ddot{\theta}+mgl\sin\phi\cdot\dot{\phi}=0$$

因

$$\phi=\frac{D}{2l}\theta$$

$$\dot{\phi}=\frac{D}{2l}\dot{\theta}$$

$$\sin\phi\approx\phi$$

代入，得

$$I\dot{\theta}\ddot{\theta}+mg\frac{D^2}{4l}\theta\dot{\theta}=0$$

即

$$\ddot{\theta}+\frac{mgD^2}{4lI}\theta=0$$

再次得出相同的小振动微分方程.

为了得出最后结果，需要求出圆柱体对通过质心的竖直轴的转动惯量 I.

如力试(二)图 6-3，考虑圆柱体中与质心轴相距为 x、厚度为 $\mathrm{d}x$ 的任一薄圆片，其质量为

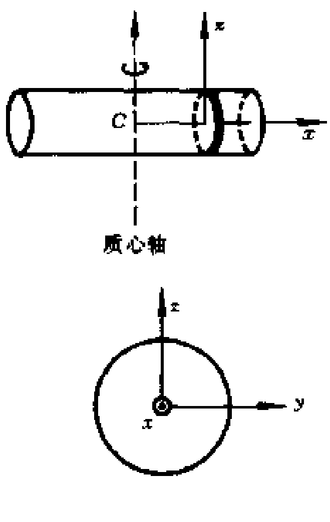
$$\mathrm{d}m=\frac{m}{L}\mathrm{d}x$$

该薄圆片对 x 轴的转动惯量为

$$\mathrm{d}I_x=\frac{1}{2}R^2\mathrm{d}m$$

该薄圆片对 y 轴和 z 轴的转动惯量应相等，即

$$\mathrm{d}I_z=\mathrm{d}I_y$$



力试(二)图 6-3

由垂直轴定理，

$$\mathrm{d}I_x = \mathrm{d}I_z + \mathrm{d}I_y = 2\mathrm{d}I_z$$

即

$$\mathrm{d}I_z = \frac{1}{2}\mathrm{d}I_x = \frac{R^2}{4}\mathrm{d}m = \frac{mR^2}{4L}\mathrm{d}x$$

由平行轴定理，该薄圆片对圆柱体质心轴的转动惯量为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}I &= \mathrm{d}I_z + \frac{m}{L}\mathrm{d}x \cdot x^2 \\ &= \left(\frac{mR^2}{4L} + \frac{m}{L}x^2\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因此，整个圆柱体对质心轴的转动惯量为

$$I = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(\frac{mR^2}{4L} + \frac{m}{L}x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mL^2$$

于是得出周期为

$$T_3 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{4lI}{mgD^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{(L^2+3R^2)l}{3gD^2}}$$

【这是北京大学物理试验班的试题之一.试验班是为培训、选拔参加 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)的中国代表队而设立的.】

热学试题(一)

【题1】 已知 ν mol 理想气体所经历的某准静态过程中，摩尔热容量 C 可表为

$$C=\frac{V_0-2(1+\frac{1}{\gamma})V}{V_0-4V}C_p$$

式中 C_p 为定压摩尔热容量，γ 为绝热指数，C_p 和 γ 均为常量. 设气体体积为 v_0 时，其温度为 T_0. 试求，气体在该过程中体积从 v_0 增为 $2v_0$ 的膨胀阶段对外所作的功 W.

【分析】 由该过程摩尔热容量的表达式，结合热力学第一定律及理想气体状态方程，导出用(p,V)表示的过程方程，于是作功可求.

【解】 由热力学第一定律和理想气体状态方程，可得

$$\begin{cases}\nu C\mathrm{d}T=\nu C_V\mathrm{d}T+p\mathrm{d}V\\ p\mathrm{d}V+V\mathrm{d}p=\nu R\mathrm{d}T\end{cases}$$

由以上两式，消去 $\mathrm{d}T$，得

$$\frac{C-C_V}{R}=\frac{p\mathrm{d}V}{p\mathrm{d}V+V\mathrm{d}p}$$

即

$$(C-C_V)p\mathrm{d}V+(C-C_V)V\mathrm{d}p=Rp\mathrm{d}V$$

因

$$C_p=C_V+R$$

故得

$$\frac{C-C_p}{C_V-C}\frac{\mathrm{d}V}{V}=\frac{\mathrm{d}p}{p}$$

由题设

$$C=\frac{v_0-2\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)V}{v_0-4V}C_p$$

并利用

$$C_p=\gamma C_V$$

由以上各式，得

$$\frac{\left[\frac{v_0-2(1+\frac{1}{\gamma})V-v_0+4V}{v_0-4V}\right]C_p}{\left[\frac{1}{\gamma}-\frac{v_0-2(1+\frac{1}{\gamma})V}{v_0-4V}\right]C_p}\frac{\mathrm{d}V}{V}=\frac{\mathrm{d}p}{p}$$

化简，得

$$\frac{dV}{V-\frac{v_0}{2}}=\frac{dp}{p}$$

这就是根据热力学第一定律，理想气体状态方程，以及题设的用摩尔热容量 C 表述的过程方程，得出的该过程中 p 与 V 的关系，把上式积分即可得出用(p,V)表述的该过程的过程方程，在得出上式时还用到了 $C_p=C_V+R$ 及 $C_p=\gamma C_V$ 的关系. 在体积从 v_0 膨胀到 $2v_0$ 的过程中，气体体积 V 始终大于$\frac{v_0}{2}$，设体积为 v_0 时气体压强为 p_0，体积为 V 时压强为 p，把上式从 v_0 到 V 积分，得

$$\ln\frac{V-\frac{v_0}{2}}{v_0-\frac{v_0}{2}}=\ln\frac{p}{p_0}$$

故该过程用(p,V)表示的过程方程为

$$p=\frac{2p_0}{v_0}V-p_0$$

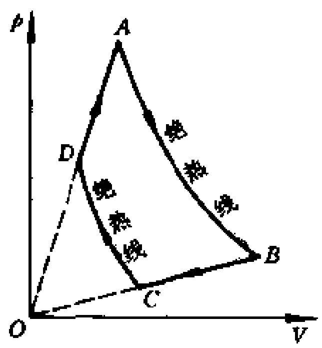
由理想气体状态方程，p_0 为

$$p_0=\frac{\nu RT_0}{v_0}$$

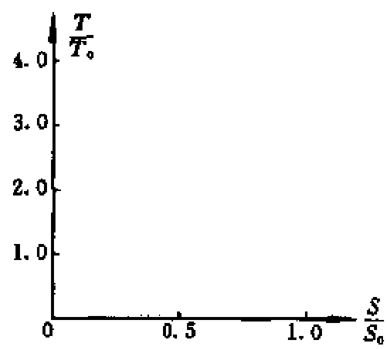
因此，在体积从 v_0 膨胀为 $2v_0$ 过程中，气体对外作功为

$$\begin{aligned}W&=\int_{v_0}^{2v_0}p\,dV=\frac{2p_0}{v_0}\cdot\frac{1}{2}(4V_0^2-V_0^2)-p_0(2v_0-v_0)\\&=2p_0v_0=2\nu RT_0\end{aligned}$$

【题2】 已知某理想气体的绝热指数 γ 为常量，它经历的正循环过程如热试(一)图 2－1 中实线所示，由两个绝热过程和两个直线过程构成.



热试(一)图 2－1



热试(一)图 2－2

1. 已知 T_A 和 T_B，试求循环过程的效率 η.

2. 设该理想气体为 1 mol 的单原子分子理想气体. 已知 $T_B=T_0$，$V_B=V_0$，$S_B=S_0=8R\ln2$，

$T_A=4T_0, V_A=\dfrac{V_0}{8}, V_C=\dfrac{V_0}{2}$.

试求：(a) T_C, T_D, V_D(分别用 T_0, V_0 表示). (b) S_A, S_C, S_D(均用 S_0 表示)，并在热试(一)图 2-2 中画出该循环过程的 $\dfrac{T}{T_0}\sim\dfrac{S}{S_0}$ 曲线.

【分析】 循环过程中的直线过程 DA 和 BC 均为多方过程，且多方指数都是 $n=-1$，因此这两个过程的热容量是相同的常量 C. 由于 AB 和 CD 都是绝热过程，无热量交换，DA 过程吸热，BC 过程放热，因此循环过程的效率 η 取决于上述吸热与放热，从而与 D、A、B、C 四个状态的温度有关. 利用绝热过程方程和直线过程方程，可以找出四个状态的温度之间的关系，于是 η 可求.

利用直线过程方程和绝热过程方程，不难求出 T_C, T_D, V_D 等状态参量.

绝热过程是等熵过程，故 $S_A=S_B, S_C=S_D$. 两个直线过程的热容量 C 可由多方指数 $n=-1$ 确定，再利用熵增量 $\mathrm{d}S=\dfrac{C}{T}\mathrm{d}T$，即可求出两个直线过程的熵变化. 于是，循环过程中 $\dfrac{T}{T_0}\sim\dfrac{S}{S_0}$ 的关系便可确定，并绘图.

【解】 1. DA 过程与 BC 过程均为多方指数 $n=-1$ 的多方过程，两过程具有相同的摩尔热容量 C. 在整个循环过程中，只有 DA 过程吸热，其吸热 Q_1 为

$$Q_1=\nu C(T_A-T_D)$$

式中 ν 是气体的摩尔数. 在循环过程中只有 BC 过程放热 Q_2，为

$$Q_2=\nu C(T_B-T_C)$$

因此，循环过程的效率 η 为

$$\eta=1-\frac{Q_2}{Q_1}=1-\frac{T_B-T_C}{T_A-T_D}=1-\frac{T_B\left(1-\dfrac{T_C}{T_B}\right)}{T_A\left(1-\dfrac{T_D}{T_A}\right)}$$

利用绝热过程方程和直线过程方程，有

$$\frac{p_DV_D^\gamma}{p_AV_A^\gamma}=\frac{p_CV_C^\gamma}{p_BV_B^\gamma},\quad \frac{p_D}{p_A}=\frac{V_D}{V_A},\quad \frac{p_C}{p_B}=\frac{V_C}{V_B}$$

式中 γ 为绝热指数. 由以上三式，得出

$$\frac{V_D}{V_A}=\frac{V_C}{V_B} \tag{1}$$

根据理想气体状态方程

$$pV=\nu RT$$

及直线过程方程

$$pV^{-1}=\text{常量}$$

可以得出

$$\frac{T_D}{T_A}=\frac{p_DV_D}{p_AV_A}=\left(\frac{V_D}{V_A}\right)^2$$

$$\frac{T_C}{T_B}=\frac{p_CV_C}{p_BV_B}=\left(\frac{V_C}{V_B}\right)^2$$

把(1)式代入，得

$$\frac{T_D}{T_A}=\frac{T_C}{T_B}$$

代入 η 的表达式，得

$$\eta=1-\frac{T_B}{T_A}$$

2.(a)由

$$\frac{T_C}{T_B}=\left(\frac{V_C}{V_B}\right)^2=\frac{1}{4}$$

得

$$T_C=\frac{1}{4}T_B=\frac{1}{4}T_0$$

由

$$\frac{T_D}{T_A}=\frac{T_C}{T_B}=\frac{1}{4}$$

得

$$T_D=\frac{1}{4}T_A=T_0$$

由

$$\frac{V_D}{V_A}=\frac{V_C}{V_B}=\frac{1}{2}$$

得

$$V_D=\frac{1}{2}V_A=\frac{1}{16}V_0$$

2.(b)因 AB 为绝热过程，熵不变，由 $S_B=S_0$，得

$$S_A=S_B=S_0$$

BC 过程是多方过程，多方指数 $n=-1$，过程的摩尔热容量为

$$C=\frac{\gamma-n}{1-n}C_V$$

单原子分子理想气体的绝热指数 γ 和定体摩尔热容量 C_V 分别为

$$\gamma=\frac{5}{3},\quad C_V=\frac{3R}{2}$$

由以上三式，得

$$C=2R$$

在此直线过程中，任一元过程的熵增量为

$$\mathrm{d}S=C\frac{\mathrm{d}T}{T}=\frac{2R}{T}\mathrm{d}T$$

积分，得出在直线过程 BC 中，任一状态的温度 T 与熵 S 之间的关系为

$$T=T_B\mathrm{e}^{(S-S_B)/2R}$$

其中

$$T_B = T_0, \quad S_B = S_0$$

代入，得

$$\frac{T}{T_0} = e^{S_0\left(\frac{S}{S_0}-1\right)/2R}$$

上式表明，在直线过程中$\frac{T}{T_0}$与$\frac{S}{T_0}$的关系是指数函数的关系．因

$$T_C = \frac{1}{4}T_0$$

代入，得

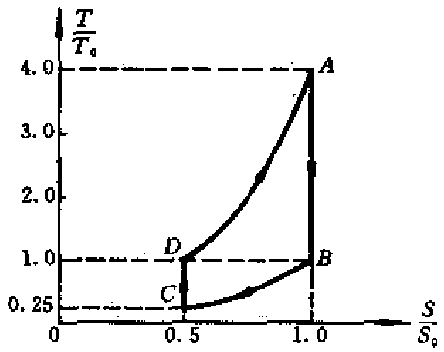
$$S_C = S_0 - 4R\ln 2$$

因

$$S_0 = 8R\ln 2$$

代入，得

$$S_C = \frac{1}{2}S_0 = 4R\ln 2$$



热试(一)图2-3

CD 为绝热过程，熵不变，故

$$S_D = S_C = \frac{1}{2}S_0$$

在 DA 过程中，摩尔热容量仍为 $C=2R$，与 BC 过程类似，同样可得出 DA 过程中任一状态的温度 T 与熵 S 的关系为

$$T = T_D e^{(S-S_D)/2R} = T_0 e^{S_0\left(\frac{S}{S_0}-\frac{1}{2}\right)/2R}$$

可见$\frac{T}{T_0}$与$\frac{S}{S_0}$的关系仍为指数函数关系．(把 $T_A = 4T_0$ 代入，容易验证 $S_A = S_0$)

利用上述求解的结果，可画出循环过程中$\frac{T}{T_0} \sim \frac{S}{S_0}$的关系曲线，如热试(一)图 2－3 所示．

【题 3】 对流层是贴近地面的一层大气，接近地面的部分在缓慢上升过程中与周围大气的热传递可以忽略．设空气分子中有$\frac{4}{5}$的氮分子和$\frac{1}{5}$的氧分子．

1．若地面附近温度为 27℃，压强为 1 atm．试求对流层中距地面 10 km 高度处的温度．

2．设在距地面 10 km 高度处有一个截面积为 1 m^2 的球形人造卫星，它以某初速度开始绕地球运动，如果没有大气的阻碍作用，这一初速度恰好能使人造卫星绕地球沿圆轨道运行．然而，由于存在着大气，人造卫星将会受到阻力．为了估算此空气阻力，可将大气分子与卫星的碰撞近似地处理为大气分子与垂直于飞行方向的卫星圆截面之间的弹性碰撞．试估算开始时卫星所受大气阻力的大小．

【分析】 因大气上升缓慢，可将对流层作静态处理，由此可导出因大气重力形成的压强随高度减小的微分关系．在计及大气分子所受重力时，需引入大气分子的平均质量，它可由题设的氮分子与氧分子的比例关系求得．随着高度的增加，大气作绝热降压膨胀，由理想气体的绝热过程方程，可得出温度与压强的关系．综上，可解出温度随高度的变化，求出地面上 10 km 高度处的温度．

借助力学知识，不难算出卫星运动的初速度，它应与第一宇宙速度 7.92 km/s 相近. 在地面处，大气分子平均速度的数量级为 10^2 m/s，在地面上 10 km 处，因温度降低，分子的平均速率会更小一些. 由于分子热运动的平均速率显然远小于卫星运动的初速度，因此在讨论两者的碰撞时，可以略去分子运动，使问题得到简化，于是卫星运动时所受空气阻力也就比较容易算出.

【解】 1. 取地面为坐标原点，建立竖直向上的 z 轴. 在 z 到 $(z+\mathrm{d}z)$ 之间取面积为 σ 的一薄层大气，它因上下的压强差 $\mathrm{d}p$ 而受到的向下的作用力为 $\sigma\mathrm{d}p$，它所受向下的重力为 $\rho g\sigma\mathrm{d}z$，其中 ρ 为大气密度. 达到平衡时，有

$$\sigma\mathrm{d}p+\rho g\sigma\mathrm{d}z=0$$

大气密度 ρ 等于大气分子的平均质量 $\overline{m}$ 与大气分子数密度 n 的乘积，即

$$\rho=n\overline{m}$$

由以上两式，得

$$\mathrm{d}p+n\overline{m}g\mathrm{d}z=0$$

大气分子平均质量 $\overline{m}$ 与大气的摩尔平均质量 $\bar{\mu}$ 以及阿伏伽德罗常量 N_A 的关系是

$$\overline{m}=\frac{\bar{\mu}}{N_A}$$

其中

$$\bar{\mu}=\frac{4}{5}\mu_{氮}+\frac{1}{5}\mu_{氧}=\left(\frac{4}{5}\times28+\frac{1}{5}\times32\right)\times10^{-3}\ \mathrm{kg/mol}=28.8\times10^{-3}\ \mathrm{kg/mol}$$

于是，有

$$\mathrm{d}p+\frac{n}{N_A}\bar{\mu}g\mathrm{d}z=0 \tag{1}$$

因地面上 10 km 的高度变化远小于地球半径，故 g 可作常量处理. 大气分子数密度 n 与温度 T、压强 p 的关系为

$$p=nkT \tag{2}$$

n 是随高度变化的 .

由绝热过程方程

$$p^{\gamma-1}T^{-\gamma}=常量$$

可得

$$\mathrm{d}p=\frac{\gamma}{\gamma-1}\cdot\frac{p}{T}\mathrm{d}T \tag{3}$$

又

$$R=N_Ak \tag{4}$$

把(2)、(3)、(4)式代入(1)式，得出

$$\mathrm{d}T=-\frac{\gamma-1}{\gamma}\cdot\frac{\bar{\mu}}{R}g\mathrm{d}z$$

积分，得出温度 T 随高度 z 的变化关系为

$$T=T_0-\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{\bar{\mu}}{R}gz$$

式中 $T_0=300$ K 是地面的温度. 在常温下，大气的绝热指数为

$$\gamma=\frac{7}{5}$$

代入,得

$$T=T_0-\frac{2}{7}\frac{\bar{\mu}}{R}gz$$

把 $g=9.8\ \mathrm{m^2/s}$, $z=10^4$ m 代入,得出距地面 10 km 高度处的温度应为

$$T=203\ \mathrm{K}=-70\ ℃$$

2. 由力学,卫星的初始速度为

$$v=\sqrt{\frac{gR_0^2}{R_0+h}}$$

式中 R_0 为地球半径,$h=10^4$ m 为卫星距地面的高度. 因 $h\ll R_0$,故近似有

$$v\approx\sqrt{gR_0}=7.92\times10^3\ \mathrm{m/s}$$

大气中的氮分子在距地面 10 km 高度处的平均速率为

$$\bar{v}_{氮}\sim\sqrt{\frac{RT}{\mu_{氮}}}=2.45\times10^2\ \mathrm{m/s}$$

大气中的氧分子在距地面 10 km 高度处的平均速率为

$$\bar{v}_{氧}\sim\sqrt{\frac{RT}{\mu_{氧}}}=2.30\times10^2\ \mathrm{m/s}$$

它们都约为卫星速度 v 的$\frac{1}{30}$,故可略去,即可近似认为大气分子静止不动.

由题设,卫星与大气分子的碰撞可近似处理为大气分子与垂直于飞行方向的卫星圆截面之间的弹性碰撞. 每个分子与卫星碰撞一次给予卫星的冲量为 $2\bar{m}v$,在 $\mathrm{d}t$ 时间内与卫星碰撞的分子数为 $nvS\mathrm{d}t$,其中 S 是卫星圆截面的面积. 因此,在 $\mathrm{d}t$ 时间内卫星所受冲量为

$$2\bar{m}vnvS\mathrm{d}t$$

故卫星所受的大气阻力为

$$F=2n\bar{m}v^2S$$

利用

$$p=nkT,\quad k=\frac{R}{N_A},\quad p=p_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}},\quad \gamma=\frac{7}{5}$$

得出

$$n=\frac{p_0T^2\sqrt{T}}{RT_0^3\sqrt{T_0}}N_A$$

再利用

$$\bar{\mu}=N_A\bar{m}$$

把以上两式代入 F 表达式,得

$$F=\frac{2\bar{\mu}v^2Sp_0T^2\sqrt{T}}{RT_0^3\sqrt{T_0}}$$

其中 $p_0=1.01\times10^5$ Pa, $T_0=27+273=300$ K 为地面大气的压强和温度,$S=1\ \mathrm{m^2}$,其余 $T,v,\bar{\mu}$

前已求出，代入计算得出，卫星所受的大气阻力为

$$F=5.5\times10^{7}\,\mathrm{N}$$

【题4】 热容量分别为 C_1 和 C_2 的两个金属块用一根热容量可忽略不计的粗棍连接起来，整个系统与外界绝热.设 $t=0$ 时，两金属块的温度分别为 τ_{10}和 τ_{20}，设单位时间两金属块之间借助于粗棍传递的热量正比于两金属块的温度差，比例系数 κ 为常量.设在此过程中每一金属块内部各处的温度差可以忽略.试求两金属块的温度差降为初始温度差之半所需的时间 t，以及在 t 时刻两金属块各自的温度 τ_1 和 τ_2.

【分析】 因整个系统绝热，且粗棍的热容量可忽略不计，故高温金属块释放的热量应等于低温金属块吸收的热量.吸热金属块温度不断上升，放热金属块温度不断下降，两者的温度差随着时间的推移逐渐缩小.同时，题设吸热(或放热)与温度差成正比，因此，温度差随时间的缩小率应与温度差自身的大小成正比.从数学上可以预料，这种关系必然导致温度差随时间按指数衰减，由此即可求出温度差降为初始温度差之半所需的时间 t.最后，由两金属之一的吸热等于另一的放热，可确定 t 时刻两金属块各自的温度.

【解】 热容量为 C_1 和 C_2 的两金属块分别称之为A和B，设A放热，B吸热，热量从A向B传递.设 t 时刻A和B的温度分别为 τ_1 和 τ_2，则从 t 时刻到$(t+\mathrm{d}t)$时刻A放出的热量为

$$-C_1\mathrm{d}\tau_1=\kappa(\tau_1-\tau_2)\mathrm{d}t$$

B吸收的热量为

$$C_2\mathrm{d}\tau_2=\kappa(\tau_1-\tau_2)\mathrm{d}t$$

由以上两式，得

$$\frac{\mathrm{d}\tau_1}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}\tau_2}{\mathrm{d}t}=-\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)\kappa(\tau_1-\tau_2)$$

在 t 时刻，A和B的温度差为

$$\Delta\tau=\tau_1-\tau_2$$

则

$$\frac{\mathrm{d}(\Delta\tau)}{\mathrm{d}t}=-\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}\kappa\Delta\tau$$

在 $t=0$ 时刻，A和B的温度差为

$$\Delta\tau_0=\tau_{10}-\tau_{20}$$

将上式从 $t=0$ 到任意 t 时刻作积分，得

$$\Delta\tau=\Delta\tau_0\mathrm{e}^{-\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}\kappa t}$$

设在特定的 t 时刻，

$$\Delta\tau=\frac{1}{2}\Delta\tau_0$$

则该时刻为

$$t=\frac{C_1C_2}{\kappa(C_1+C_2)}\ln 2$$

因 A 放热等于 B 吸热，故有

$$C_1(\tau_{10}-\tau_1)=C_2(\tau_2-\tau_{20})$$

且在 t 时刻

$$\tau_1-\tau_2=\frac{1}{2}(\tau_{10}-\tau_{20})$$

由以上两式，解出 t 时刻 A 和 B 的温度分别为

$$\tau_1=\frac{2C_1\tau_{10}+C_2(\tau_{10}+\tau_{20})}{2(C_1+C_2)}$$

$$\tau_2=\frac{C_1(\tau_{10}+\tau_{20})+2C_2\tau_{20}}{2(C_1+C_2)}$$

【题 5】 在 NaCl 晶体中，离子间相互作用能量的总和可表为

$$E_p=N\left(\frac{a_m}{r_m}-\frac{ae^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)$$

式中 N 为晶体中正、负离子对的数目，是一个很大的整数，r 为相邻正、负离子的时间距，e 为电子电量，a_m、a 和 m 为常量. E_p 的极小值称为结合能，表为 E_{p0}，相应的相邻正、负离子间距表为 r_0. 任意 r 对应的 E_p 以及 r_0 对应的 E_{p0} 的关系可表为

$$E_p=E_{p0}+U$$

若引入相邻正、负离子间距的相对偏移

$$x=\frac{\Delta r}{r_0}=\frac{r-r_0}{r_0}$$

则 U 是 x 的函数. 由于 x 一般为小量，可将 U 表为 x 的幂级数，

$$U(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+\cdots$$

通常可近似地只取前几项. 如果只取前四项(即取 $U(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3$)，而且认为相对偏移 x 是由热运动引起的，则由玻尔兹曼统计可以证明(略)，当温度为 T 时，x 的统计平均值 $\bar{x}$ 与 T 成正比，即

$$\bar{x}=CT$$

其中 C 是表征晶体线膨胀的一个系数，可通过实验测定，亦可表为

$$C=-\frac{3NkA_3}{4A_2^2}$$

其中 k 为玻尔兹曼常量.

1. 试导出 A_0、A_1、A_2、A_3 各自与参量 m、a、r_0 的关系.

2. 若已测出

$$r_0=2.81\times10^{-10}\ \text{m},\quad C=7.65\times10^{-6}\ \text{K}^{-1}$$

以及 r_0 附近的绝热压缩系数为

$$\kappa_s=-\frac{1}{v}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}p}\right)_s=3.3\times10^{-11}\ \text{m}^2/\text{N}$$

试求 m、a 和 a_m 值.

有用的数学公式

$$(1+x)^{\beta}=1+\beta x+\frac{1}{2!}\beta(\beta-1)x^{2}+\frac{1}{3!}\beta(\beta-1)(\beta-2)x^{3}+\cdots$$

其中 β 为任意实数.

有关的物理常量

$$e=1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C},\quad \varepsilon_0=8.9\times10^{-12}\,\mathrm{C^2/(N\cdot m^2)},\quad k=1.38\times10^{-23}\,\mathrm{J/K}$$

【分析】 NaCl 晶体中离子间相互作用能量总和 E_p 的表达式已经给出，E_p 对应 r，E_p 的极小值 E_{p0}对应 r_0，当 r 偏离 r_0 时，E_p 偏离 E_{p0}，偏离量表为 U. 若用 x 表示相对偏移量，则可利用 E_p 在 r_0 的泰勒展开，得出 U 与 x 的幂级数关系. 把此关系与题目给出的 $U(x)$幂级数关系相比较，即可得出 A_0、A_1、A_2、A_3 与 E_p 表达式中有关参量 m、α 以及 r_0 的关系.

E_p 表达式中有三个参量，即 m、α 和 a_m，为了确定这三个参量，需建立三个方程.

首先，r_0 对应的是 E_p 的极小值 E_{p0}，即由$\frac{dE_p}{dr}=0$ 确定的 r 值就是 r_0，由此可得出 r_0 与参量 m、α、a_m 的关系，这是第一个方程.

其次，C 与系数A_2 和 A_3 的关系题目已经给出，而 A_2、A_3 与参量 m、α、a_m 的关系又在第 1 问中求得，因而 C 与 m、α、a_m 的关系可知，这是第二个方程.

第三，每摩尔 NaCl 晶体的 E_{p0}约为 10^5 J，在室温下热运动动能 E_k 仅为 10^3 J 左右，两相比较，后者可略. 因而在绝热过程中，通过对晶体拉伸或挤压所作的功，应直接与 E_p 的变化相联系，据此，可导出在 r_0 附近的绝热压缩系数 κ_s 与 m、α、a_m 的关系，这是第三个方程.

由以上三个方程，利用已知的 r_0、C、κ_s 即可求出m、α 和a_m.

【解】 1. r_0 对应的 E_{p0}是 E_p 的极小值，故 r_0 应由

$$\frac{dE_p}{dr}=0$$

确定. 把 E_p 的表达式代入，得出 r_0 应由

$$N\left(\frac{-ma_m}{r^{m+1}}-\frac{-\alpha e^2}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\right)=0$$

确定. 即 r_0 应满足下述关系式

$$\frac{ma_m}{r_0^m}=\frac{\alpha e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}$$

于是，E_p 可表为

$$E_p=N\left(\frac{a_m}{r^m}-\frac{\alpha e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)=N\left[\frac{a_m}{r_0^m(1+x)^m}-\frac{\alpha e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0(1+x)}\right]$$

$$=N\left\{\frac{a_m}{r_0^m}\left[1-mx+\frac{1}{2}m(m+1)x^2-\frac{1}{6}m(m+1)(m+2)x^3+\cdots\right]-\right.$$

$$\left.\frac{\alpha e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}(1-x+x^2-x^3+\cdots)\right\}$$

$$=N\left(\frac{a_m}{r_0^m}-\frac{\alpha e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\right)+N\frac{\alpha e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}$$

$$\left\{\left[-x+\frac{1}{2}(m+1)x^2-\frac{1}{6}(m+1)(m+2)x^3+\cdots\right]-(-x+x^2-x^3+\cdots)\right\}$$

$$=E_{p0}+N\frac{\alpha e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\left\{\frac{1}{2}(m-1)x^2-\frac{1}{6}(m-1)(m+4)x^3+\cdots\right\}$$

式中 $x=\frac{\Delta r}{r_0}=\frac{r-r_0}{r_0}$就是离子间距的相对偏移量，在上述推导中利用了题目所附的$(1+x)^\beta$ 的数学公式，还利用了上面得出的 r_0 所满足的关系式.

上式可表为

$$E_p=E_{p0}+U$$

故

$$U=N\frac{\alpha e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\left\{\frac{1}{2}(m-1)x^2-\frac{1}{6}(m-1)(m+4)x^3+\cdots\right\}$$

题目给出的 $U(x)$的幂级数表达式为

$$U(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\cdots$$

两式比较，得出前四项的系数为

$$A_0=0,\quad A_1=0,\quad A_2=\frac{N(m-1)\alpha e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0},\quad A_3=-\frac{N(m-1)(m+4)\alpha e^2}{24\pi\varepsilon_0 r_0}$$

2. 为求参量 m、α、a_m，可由上面给出的 r_0 所满足的关系得出第一个方程，为

$$a_m=\frac{\alpha e^2 r_0^{m-1}}{4\pi m\varepsilon_0} \tag{1}$$

由题目给出的 C 的表达式

$$C=-\frac{3NkA_3}{4A_2^2}$$

把上面求出的 A_2 和 A_3 代入，得出第二个方程为

$$C=\frac{2(m+4)\pi\varepsilon_0 r_0 k}{(m-1)\alpha e^2} \tag{2}$$

为了建立求解 m、α、a_m 所需的第三个方程，要利用 κ_s. 因 NaCl 晶体的 E_p 远大于热运动动能 E_k，故晶体内能为

$$E=E_p+E_k\approx E_p$$

在绝热过程中，有

$$dE_p=-p\,dV$$

即

$$p=-\left(\frac{dE_p}{dV}\right)_s$$

由绝热压缩系数 κ_s 的定义，在 r_0 附近，有

$$\frac{1}{\kappa_s}=-V\left(\frac{dp}{dV}\right)_s\bigg|\,r=r_0$$

由以上两式，

$$\frac{1}{\kappa_s}=V\frac{d^2E_p}{dV^2}\bigg|\,r=r_0$$

因晶体的体积为

$$V=2Nr^3$$

故

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}=6Nr^2,\quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}V}=\frac{1}{6Nr^2}$$

又

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}V^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}\left(\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r}\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}V}\right)\\&=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}\left(\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r}\right)\right]\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}V}+\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}V}\right)\right]=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r}\right)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}V}\right]\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}V}+\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}V}\right)\right]\end{aligned}$$

因

$$\left(\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r}\right)_{r=r_0}=0$$

故

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}V^2}\right)_{r=r_0}=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r}\right)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}V}\right]\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}V}\bigg|_{r=r_0}=\left(\frac{\mathrm{d}^2E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r^2}\right)_{r=r_0}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}V}\right)^2_{r=r_0}$$

利用题目给出的 $E_\mathrm{p}(r)$表达式,可计算出$\left(\frac{\mathrm{d}^2E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r^2}\right)_{r=r_0}$,$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}V}\right)^2_{r=r_0}$已在上面得出,代入上式,可得出$\left(\frac{\mathrm{d}^2E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}V^2}\right)_{r=r_0}$,再代入 κ_s 表达式,得出

$$\frac{1}{\kappa_s}=\frac{(m-1)\alpha}{18r_0^2}\cdot\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}\qquad(3)$$

这就是求解 m、α、a_m 的第三个方程.

把已知的 C 和κ_s 代入(2)、(3)式,得

$$\frac{2(m+4)\pi\varepsilon_0 r_0 k}{(m-1)\alpha e^2}=7.65\times10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$$

$$\frac{72\pi\varepsilon_0 r_0^4}{(m-1)\alpha e^2}=3.3\times10^{-11}\ \mathrm{m^2/N}\qquad(4)$$

两式相除,得

$$m=\left[2.32\times10^5\ \mathrm{N/(m^2\cdot K)}\times\frac{36r_0^3}{k}\right]-4=9.4$$

把上述 m 以及ε_0、r_0、e 等数据代入(4)式,得

$$\alpha=1.77$$

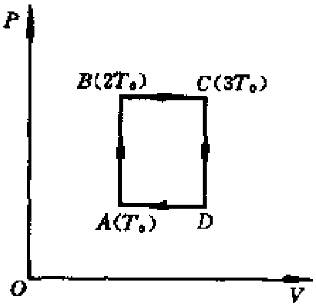
把 m、α、e、r_0、ε_0 等数据代入(1)式,得

$$a_m=2.53\times10^{-109}\mathrm{J\cdot m^{9.4}}$$

【这是北京大学物理试验班的试题之一.试验班是为培训、选拔参加 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)的中国代表队而设立的.】

热学试题(二)

【题1】 已知 ν mol 的某理想气体在 $T<2T_0$ 时的定体热容量为 $C_{V1}=\alpha\nu R$，在 $T>2T_0$ 时的定体热容量为 $C_{V2}=\beta C_{V1}$，其中 α 和 β 均为大于 1 的常量. 该气体经历的循环过程 $ABCDA$ 是如热试(二)图 1-1 所示的矩形.



热试(二)图 1-1

1. 试求状态 D 的温度 T_D，并画出循环过程中系统内能 U 随温度 T 变化的图线.

2. 试计算循环过程的效率 η.

【分析】 由于循环过程在 $p-V$ 图上是矩形，显然，AB 和 CD 为等体过程，BC 和 DA 为等压过程. 据此，很容易由图上标明的 A、B、C 三态的温度确定 D 态的温度 T_D.

在讨论 $U\sim T$ 关系时，需注意题设该理想气体在经过 $T=2T_0$ 的 B 态时，定体热容量发生了突然变化. 这意味着该理想气体分子的某一运动自由度刚好在 $T=2T_0$ 时被激发(当然，这是一种理想化的假设).

由于系统定体热容量在 $T=2T_0$ 处的突变，因此在计算循环效率 η 时，吸收的热量应包括在 B 态($T_B=2T_0$)不升温的吸热，放出的热量应包括在 CDA 过程中某一温度为 $2T_0$ 态的不降温的放热.

【解】 1. 热试(二)图 1-1 已标明 A、B、C 态的温度分别为 T_0、$2T_0$、$3T_0$. 设 A 态的压强为 p_0，体积为 V_0，则由等体过程容易得出 B 态的压强为 $2p_0$，体积为 V_0，再由等压过程得出 C 态的压强为 $2p_0$，体积为 $\frac{3}{2}V_0$. 因 CD 为等体过程，DA 为等压过程，故 D 态的压强为 p_0，体积为 $\frac{3}{2}V_0$，于是，D 态的温度为

$$T_D=\frac{3}{2}T_0$$

显然，在等体过程 CD 中必定存在着某个温度也为 $2T_0$ 的 E 态.

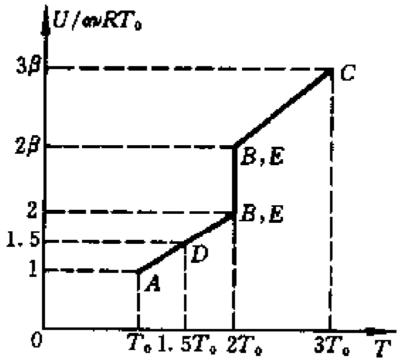
理想气体的内能 U 与温度 T 的关系为

$$U=C_VT$$

这里设定 $T=0$ 时，$U=0$. 由题设，在 $T=2T_0$ 时，C_V 突然变化，但内能 U 只能连续变化，这意味着在 $T=2T_0$ 气体分子的某一个运动自由度刚好被激发. 因此，U 和 T 的关系应完整地表为

$$\begin{cases} U=\alpha\nu RT & T<2T_0 \\ \alpha\nu RT<U<\alpha\beta\nu RT & T=2T_0 \\ U=\alpha\beta\nu RT & T>2T_0 \end{cases}$$

由上式，画出循环过程中气体内能 U 随温度 T 的变化图线，如热试(二)图 1-2 所示. 注意，从 A 态到 B 态的等体过程并不经过 D 态，从 B 态到 C 态的等压过程并不经过 E 态，同样从 C 态到



热试(二)图 1－2

D 态的等体过程并不经过 B 态，但经过 E 态. 又，B 态和 E 态并非同一态，只因两者的内能与温度相同而在热试(二)图 1－2 中用同一点标明，另外，B 态和 E 态的温度 $2T_0$ 刚好是 C_V 突变的温度，会出现不升温的吸热或放热，导致内能变化，所以两者在热试(二)图 1－2 中并非一个点而是一段等温线. 同样，D 态并非 AB 过程中的状态，但与 AB 过程中某态具有相同的内能和温度.

2. AB 等体过程吸热为

$$Q_1 = C_{V1}(2T_0 - T_0) = 2\nu RT_0$$

在 B 态，因 C_V 突变，不升温的吸热为

$$Q_2 = (C_{V2} - C_{V1})2T_0 = 2(\beta - 1)\alpha\nu RT_0$$

BC 等压过程吸热为

$$Q_3 = C_{p2}(3T_0 - 2T_0) = (C_{V2} + \nu R)T_0 = (\alpha\beta + 1)\nu RT_0$$

故循环过程中总的吸热为

$$Q_{吸} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = (3\alpha\beta - \alpha + 1)\nu RT_0$$

CD 等体过程不作功，放热可由热试(二)图 1－2 中内能的变化得出，为

$$Q_4 = (3\beta - 1.5)\alpha\nu RT_0$$

DA 等压过程放热为

$$Q_5 = C_{p1}(1.5T_0 - T_0) = (C_{V1} + \nu R)(1.5T_0 - T_0) = \frac{1}{2}(\alpha + 1)\nu RT_0$$

故循环过程中总的放热为

$$Q_{放} = Q_4 + Q_5 = (3\alpha\beta - \alpha + \frac{1}{2})\nu RT_0$$

循环过程的效率为

$$\eta = 1 - \frac{Q_{放}}{Q_{吸}} = 1 - \frac{3\alpha\beta - \alpha + \frac{1}{2}}{3\alpha\beta - \alpha + 1} = \frac{1}{2(3\alpha\beta - \alpha + 1)}$$

【题 2】 有两个初始温度分别为 T_1 和 T_2($T_2 < T_1$)的大物体，它们的热容量为同一常量 C.

1. 用小型热机在这两个大物体之间工作，即从高温大物体吸热向低温大物体放热. 由于循环过程中吸热和放热的数量较少，可近似认为两个大物体各自的温度变化只发生在各次循环过程之间，即略去每个循环过程中的温度变化. 这样，可将此小型热机设计成可逆卡诺热机，使热机连续工作. 试求热机对外作功总量的极限. 设整个系统（两个大物体及热机）与外界绝热.

2. 设热机内工作物质为 ν 摩尔. 第一次循环过程的初态温度为 T_1，工作物质全部为液相，经等压吸热 L 后刚好全部转变成体积为 V_1 的气相，尔后再等温膨胀成体积为 V_2 的气体，再经绝热等一系列过程后又回到初态. 在上述过程中处于气相的工作物质可看作理想气体. 试定性画出第一次循环过程中，工作物质一种可能的 $p-V$ 曲线和 $T-S$ 曲线，并计算热机所作功的大小.

【分析】 可逆卡诺热机在循环过程中对外作功 W，应等于高温物体放热 Q_1 与低温物体吸热 Q_2 之差.在极限情况下，两物体的温度最终应趋于相同值 T_e.由于热容量 C 及初始温度 T_1 和 T_2 已知，Q_1 和 Q_2 便取决于 T_e.利用卡诺循环中两等温过程的熵变之和为零，可求出 T_e，于是 W 的极大值即可得出.

第一次卡诺循环中，温度为 T_1 的等温过程可分为两个阶段，其一是等温等压的相变阶段，另一是等温膨胀阶段.尔后，经绝热膨胀过程降温到 T_2.温度为 T_2 的等温过程的初态，工作物质为气相，过程的有关细节题目并未给出.第一种可能是，先经无相变的等温压缩，再经等温等压相变由单纯的气相转变为单纯的液相.第二种可能是，等温压缩过程中相变随时都在进行，但终态是单纯的液相.第三种可能是，终态为气、液两相共存.第四种可能是，终态仍为单纯的气相.当然，对于上述各种可能的情况还可以作更细致的分解，由于工作物质的具体性质并未给出，合理的可能情况均符合题意.循环的最后一个过程是从 T_2 绝热压缩到高温 T_1.本解答只按上述第一种可能的 T_2 等温过程，画出相应的 $p-V$ 曲线.

注意到卡诺循环中等温过程温度不变，绝热过程熵不变，容易画出 $T-S$ 曲线.

在温度 T_1 的等温过程中，吸热 $Q_{吸}$ 是两部分之和，其一是相变吸热 L（L 中已包含相变导致的膨胀体积功），另一是等温膨胀体积功.循环过程的效率 η_1 由 T_1 和 T_2 确定，热机作功 W_1 即可由 $Q_{吸}$ 和 η_1 算出.

【解】 1.设两个大物体最终的温度均为 T_e，则高温物体放热 Q_1 和低温物体吸热 Q_2 应分别为

$$Q_1=C(T_1-T_e),\quad Q_2=C(T_e-T_2)$$

热机对外作功总量的极限值为

$$W=Q_1-Q_2=C(T_1+T_2-2T_e)$$

卡诺循环中，工作物质只在两个等温过程中发生熵变，其和为零.把吸热过程中熵增的微分量表为 dS_1，放热过程中熵增的微分量表为 dS_2，则有

$$dS_1=\frac{CdT}{T},\qquad (从\ T_1\ 到\ T_e)$$

$$dS_2=\frac{CdT}{T},\qquad (从\ T_2\ 到\ T_e)$$

吸热过程的总的熵增量为

$$\Delta S_1=\int_{T_1}^{T_e}dS_1=C\ln\frac{T_e}{T_1}$$

放热过程的总的熵增量为

$$\Delta S_2=\int_{T_2}^{T_e}dS_2=C\ln\frac{T_e}{T_2}$$

两者之和应为零，即

$$\Delta S_1+\Delta S_2=0$$

即

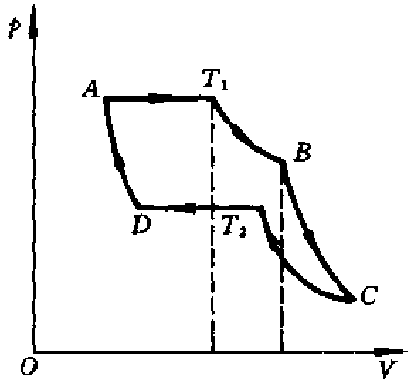
$$\ln\frac{T_e^2}{T_1T_2}=0$$

故

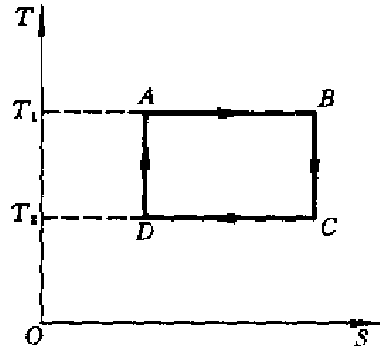
$$T_e = \sqrt{T_1 T_2}$$

代入 W 表达式，得

$$W = C\left(T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_1 T_2}\right) = C(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})^2$$



热试(二)图 2－1



热试(二)图 2－2

2. 根据分析，把第一次循环过程中一种可能的 $p-V$ 曲线定性地画在热试(二)图 2－1 中，其中 AB 为 T_1 等温过程(先等温等压相变，再等温膨胀)，BC 为绝热过程，CD 为 T_2 等温过程，DA 为绝热过程.

从 A 到 B，等温，温度 T_1，熵 S 不断增加. 从 B 到 C，绝热，熵 S 不变，温度则下降为 T_2. 从 C 到 D，等温，温度 T_2，熵 S 不断减少. 从 D 到 A，绝热，熵 S 不变，温度从 T_2 升为 T_1. 由此可定性画出 $T-S$ 曲线如热试(二)图 2－2 所示.

第一次卡诺循环的效率为

$$\eta_1 = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

热机作功为

$$W_1 = \eta_1 Q_{吸}$$

其中 $Q_{吸}$ 是从 A 态到 B 态过程中吸收的热量，应为

$$Q_{吸} = L + \nu R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

由此得

$$W_1 = \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)\left(L + \nu R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}\right)$$

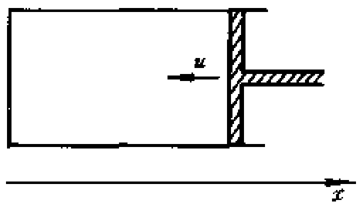
【题 3】 理想气体绝热过程的微观模型.

如图，把气体封闭在一柱形绝热气缸内，气缸的一端安置密封无摩擦刚性活塞，将活塞缓慢地向气缸内推进. 缸内作热运动的气体分子因与运动的活塞作弹性碰撞而增加动能，增加的动能又通过分子间的相互碰撞为各种形式的内能所均分，结果导致气体温度的相应升高.

试利用此微观模型导出用 $T-V$ 关系表述的理想气体绝热过程方程. 设绝热指数为常数.

【分析】 为了导出用 $T-V$ 关系表述的绝热过程方程，应先得出 dT 与 dV 的关系. dV 可理解

为，在 dt 时间内，因活塞推进引起的气体体积增量（随着活塞推进，气体体积减小，故 dV 为负值）．dT 可理解为，在 dt 时间内，气体分子通过与运动活塞作弹性碰撞增加的动能转化为内能增量后，相应的温度增量．设定活塞的推进速度后，dV 容易算出．动能增量 dE_k 是在 x 方向的一维动能增量，可通过一维的麦克斯韦速度分布函数计算．dE_k 应与 dt 时间内参与碰撞的分子数有关，后者显然与 dV 的大小有关．dE_k 转化为内能增量 dU，由理想气体内能与温度的关系可导出 dU 相应的温度增量 dT．由于 dE_k 与 dV 有关，从而 dT 与 dV 有关．找出 dT 与 dV 的关系，积分，即可得出用 $T-V$ 表示的理想气体绝热过程方程．



热试(二)图 3－1

这就是从微观上导出理想气体绝热过程方程的一种方法．

【解】 由麦克斯韦速度分布函数，容易得出在任意 x 方向的一维速度分布函数为

$$f(v_x)=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-mv_x^2/2kT}$$

如图，取 x 坐标，在 dt 时间内，速度的 x 分量处在 v_x 到 (v_x+dv_x) 之间的气体分子，与面积为 S、推进速度为 u 的活塞相碰撞的分子数为

$$dN=n[S(v_x+u)dt][f(v_x)dv_x]$$

其中 n 为气体分子的数密度．由于活塞缓慢推进，即

$$u\ll v_x$$

故

$$dN=nSv_xdtf(v_x)dv_x$$

速度 x 分量为 v_x 的分子与以 u 推进的活塞作弹性碰撞后，分子速度的 y 分量与 z 分量不变，而速度的 x 分量则由 v_x 增为 (v_x+2u)．因此一个分子的动能增量为

$$\frac{1}{2}m(v_x+2u)^2-\frac{1}{2}mv_x^2=2mv_xu+2mu^2\approx 2mv_xu$$

式中 m 为分子质量．dN 个分子的动能增量为

$$dE_k=dN\cdot 2mv_xu=2mn(Su\,dt)[v_x^2f(v_x)dv_x]$$

因 $Su\,dt$ 即为 dt 时间内气体体积的减少量 $-dV$，故

$$dV=-Su\,dt$$

于是

$$dE_k=-2mn\,dV[v_x^2f(v_x)dv_x]$$

把 v_x 从 0 到∞积分，得出在 dt 时间内，因所有可能的碰撞而增加的气体内能为

$$dU=\int_{v_x=0}^{v_x=\infty}dE_k=-2mn\,dV\int_0^{\infty}v_x^2f(v_x)dv_x$$

其中

$$\int_0^{\infty}v_x^2f(v_x)dv_x=\int_0^{\infty}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-mv_x^2/2kT}v_x^2dv_x$$

$$=\left(\frac{1}{4\pi}\right)\left(\frac{2\pi kT}{m}\right)\int_0^{\infty}4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-mv_x^2/2kT}v_x^2dv_x$$

$$=\frac{kT}{2m}\int_0^{\infty}4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\mathrm{e}^{-mv^2/2kT}v^2\mathrm{d}v=\frac{kT}{2m}\int_0^{\infty}f(v)\mathrm{d}v$$

其中 $f(v)$ 即为麦克斯韦速率分布函数. 由归一化条件可知

$$\int_0^{\infty}f(v)\mathrm{d}v=1$$

因此,

$$\mathrm{d}U=-2mn\mathrm{d}V\cdot\frac{kT}{2m}=-nkT\mathrm{d}V$$

理想气体的内能增量 $\mathrm{d}U$ 与相应的温度增量 $\mathrm{d}T$ 的关系是

$$\mathrm{d}U=C_V\mathrm{d}T=\frac{\nu R}{\gamma-1}\mathrm{d}T$$

式中 C_V 为理想气体的定体热容量, γ 为绝热指数, ν 为摩尔数.
由以上两式,得出

$$\frac{\nu R}{\gamma-1}\mathrm{d}T=-nkT\mathrm{d}V$$

其中分子数密度 n 及玻尔兹曼常量 k 可表为

$$n=\frac{\nu N_A}{V},\quad k=\frac{R}{N_A}$$

式中 N_A 为阿伏伽德罗常量, R 为气体常量. 由以上三式,得

$$\frac{\nu R}{\gamma-1}\mathrm{d}T=-\nu RT\frac{\mathrm{d}V}{V}$$

即

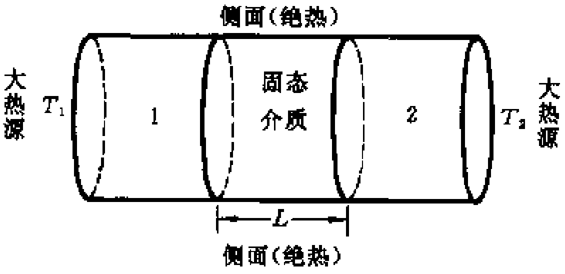
$$\frac{\mathrm{d}T}{T}+(\gamma-1)\frac{\mathrm{d}V}{V}=0$$

积分,得

$$TV^{\gamma-1}=常量$$

这就是用 $T-V$ 关系式表述的理想气体绝热过程方程.

【题 4】 如图所示,侧面绝热的圆柱形容器被一段长为 L 的圆柱形固态导热均匀介质隔成体积相等的两个区域 1 和 2,其中封有相同分子的理想气体,区域 1 中气体的质量为区域 2 中气体质量的两倍. 区域 1 与温度为 T_1 的大热源时刻保持热平衡,区域 2 与温度为 $T_2(T_2>T_1)$ 的另一大热源时刻保持热平衡. 设固态介质不能移动,在长度方向(即圆柱形容器的轴向)有热传导,热传导系数处处相同,在达到稳定的热传导状态时,左端面温度为 T_1,右端面温度为 T_2. 忽略理想气体内因热传导形成的温度差异,忽略固态介质的热膨胀.



热试(二)图 4-1

1. 试求固态介质在长度方向上的温度分布.
2. 设区域 1 气体中的一个分子从 $t=0$ 时刻

出发，经 t 时间后，该分子所处位置与初始位置的间距为 R_1；同样，设区域 2 气体中的一个分子从 $t=0$ 时刻出发，经 t 时间后，该分子所处位置与初始位置的间距为 R_2. 设该分子在 t 时间内未与容器壁碰撞，设 t 远大于分子相邻两次碰撞之间的平均时间. 试求 R_1 与 R_2 的比值.

3. 设理想气体定体摩尔热容量 C_V 为常量，设区域 2 中气体摩尔数为 ν_2. 设固态介质的摩尔数为 ν，设固态介质的摩尔热容量 C 为常量，且有 $\nu C=2\nu_2 C_V$. 现将两个大热源撤去，整个系统（气体与固态介质）与外界绝热，最后达到自身热平衡. 试求最后达到热平衡的温度 T.

【分析】 通过热传导传递的热量正比于温度梯度，在达到稳定时，经固态介质各截面传递的热量应相同，故固态介质各截面的温度梯度相同，即在固态介质中温度沿长度方向应按线性分布. 于是，由固态介质两端面温度分别 T_1 和 T_2 的边条件，即可确定其长度方向的温度分布.

气体分子因不断碰撞其轨道为折线，折线中的每一段直线即为一个自由程. 折线中任意两相邻直线之间的夹角是无规的. 如果从 $t=0$ 到 t 时刻，分子共行走了 $N(t)$ 个直线段自由程，且 $N(t)\gg1$，则可采用统计方法计算所求距离 R. 不难设想，R（即 R_1 或 R_2）应与 $N(t)$ 及气体分子的平均自由程 $\bar{\lambda}$ 有关，$N(t)$ 与分子间碰撞频率 Z 的关系为 $N(t)=Zt$，而 $Z=\bar{v}/\bar{\lambda}$，其中 $\bar{v}$ 是气体分子的平均速率. 这样，R 便取决于 t、$\bar{v}$、$\bar{\lambda}$. 利用 $\bar{v}$ 和 $\bar{\lambda}$ 与气体宏观状态量的关系，即可分别给出 R_1 和 R_2，从而求出其比值.

撤去大热源后，区域 1 中的气体将吸热，区域 2 中的气体将放热，可假设固态介质吸热，因整个系统与外界绝热，吸热应等于放热，由此即可确定达到热平衡后系统的温度 T.

【解】 1. 取 x 轴沿固态介质长度方向，左端面为 $x=0$，右端面为 $x=L$. 设固态介质的面热传导系数为 k，截面积为 S，则 $\mathrm{d}t$ 时间在固态介质内从左到右传递的热量为

$$\mathrm{d}Q=-k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}S\mathrm{d}t$$

式中 k 和 S 均为常量，达到稳定的热传导状态时 $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ 亦为常量，因此 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$ 也是常量，记为 A，即

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}=A$$

积分，得

$$T(x)=Ax+B$$

边条件为

$$\begin{cases}T_{x=0}=T_1\\T_{x=L}=T_2\end{cases}$$

故

$$A=\frac{T_2-T_1}{L},\quad B=T_1$$

因此，达到稳定的热传导状态后，固态介质在长度方向的温度分布为

$$T(x)=\frac{T_2-T_1}{L}x+T_1$$

2. 取分子在 $t=0$ 时刻的位置为坐标原点 O，建立 $Oxyz$ 坐标系. 分子在相邻两次碰撞之间行经的自由程可表为 $\boldsymbol{\lambda}_i(x_i,y_i,z_i)$. 设分子从 $t=0$ 到 t 时刻共经过 $N(t)$ 个自由程，则 t 时刻分子所在位置与原点的距离 R 为

$$R^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{N} z_i\right)^2$$

因 x_i、y_i、z_i 值的正、负分布无规，故当 N 为大数时，上式展开后各交叉项之和应为零，于是

$$R^2 = \sum_{i=1}^{N}(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = \sum_{i=1}^{N}\lambda_i^2 = N(t)\,\overline{\lambda^2}$$

自由程的方均值$\overline{\lambda^2}$可由自由程分布函数

$$f(\lambda) = \frac{1}{\bar{\lambda}}e^{-\lambda/\bar{\lambda}}$$

求得，为

$$\overline{\lambda^2} = \int_0^{\infty}\lambda^2 f(\lambda)\mathrm{d}\lambda = 2\bar{\lambda}^2$$

故

$$R = \sqrt{2N(t)}\,\bar{\lambda}$$

$N(t)$与气体分子碰撞频率 Z 的关系为

$$N(t) = Z\,t$$

Z 与气体分子平均速率$\bar{v}$ 的关系为

$$Z = \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}}$$

把以上两式代入 R 表达式，得

$$R = \sqrt{2\bar{v}\,\bar{\lambda}t}$$

其中

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

$$\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$$

代入，得

$$R = \left(2\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}\cdot\frac{kt}{\sqrt{2}\pi d^2 p}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

设区域 1 和区域 2 中气体压强分别为 p_1 和 p_2，因 t 相同，气体分子相同，故 R_1 与 R_2 之比为

$$\frac{R_1}{R_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{3}{4}}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

又

$$p_1 V = \nu_1 RT_1 = 2\nu_2 RT_1$$

$$p_2 V - \nu_2 RT_2$$

故

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{2T_1}$$

代入，得

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

3. 撤去两个大热源后，因系统与外界绝热，将达到热平衡，设热平衡温度为 T. 则在此过程中，区域 1 中气体吸热为

$$\begin{aligned}Q_{1吸}&=\nu_1C_V(T-T_1)\\&=2\nu_2C_V(T-T_1)\end{aligned}$$

在此过程中，固态介质吸热为

$$Q_{固吸}=\int_0^L\frac{dx}{L}\nu C[T-T(x)]$$

因

$$\nu C=2\nu_2C_V$$

$$T(x)=\frac{T_2-T_1}{L}x+T_1$$

代入，积分，得

$$Q_{固吸}=\nu_2C_V(2T-T_2-T_1)$$

在此过程中，区域 2 中气体放热为

$$Q_{2放}=\nu_2C_V(T_2-T)$$

达到热平衡，要求

$$Q_{2放}=Q_{1吸}+Q_{固吸}$$

即

$$\nu_2C_V(T_2-T)=2\nu_2C_V(T-T_1)+\nu_2C_V(2T-T_2-T_1)$$

故达到热平衡后，系统的温度为

$$T=\frac{1}{5}(3T_1+2T_2)$$

【题 5】 黑体空腔内的热辐射场可以视为包含各种频率光子的光子气. 频率为 ν 的一个光子的能量为 $h\nu$，质量为 $\frac{h\nu}{C^2}$. 把频率为 ν 的光子的数密度表为 n_ν，则频率为 ν 的光子的能量密度 u_ν 为

$$u_\nu=n_\nu h_\nu$$

光子气的总能量密度 u 为

$$u=\sum_\nu u_\nu$$

1. 仿照理想气体的压强，可引入光子气的压强 p.

(a)设空腔的内表面对光子气为完全反射面. 试证明，在热平衡时，光子气的压强与能量密度的关系为

$$p=\frac{1}{3}u$$

(b)采用热力学第二定律的开尔文表述. 试证明 u 与黑体空腔的腔壁材料及空腔体积无关，

即 u 仅为温度 T 的函数. 进而选取适当的热学公式,证明

$$u \propto T^4$$

(c)仿照理想气体准静态绝热过程,可引入光子气的准静态绝热过程. 试导出此过程中光子气压强 p 与体积 V 所满足的过程方程.

2. 空腔内光子的运动速率为常量 c(真空光速),热平衡时光子在速度方向上的分布具有球对称性.

(a)光子速度的 x 分量表为 v_x,一个光子的速度 x 分量处于 v_x 到($v_x + \mathrm{d}v_x$)之间的概率表为 $f(v_x)\mathrm{d}v_x$. 试证明,

$$f(v_x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2c}, & -c \leqslant v_x \leqslant c \\ 0, & |v_x| > c \end{cases}$$

(b)在黑体空腔壁上开一个很小的孔,设不会影响光子气的热平衡. 试证明,在单位时间内通过孔的单位截面辐射出去的能量(即能流密度)为

$$J = \frac{1}{4}cu$$

从而有斯特藩－玻尔兹曼定律

$$J \propto T^4$$

【分析】 光子气的总压强是每一种频率的光子气的压强之和. 每一种频率光子气的压强是该频率光子与容器壁作完全弹性碰撞形成的. 这与理想气体压强形成的机理相同,因此,借用后者的现成公式即可导出光子气的总压强.

热力学第二定律的开尔文表述为:不可能从单一热源吸取热量,使之完全变为有用的功而不产生其他影响. 如果空腔内光子气的能量密度 u 与腔壁材料及空腔体积有关,而压强 p 又与 u 成正比,这就有可能设计出一个同温装置,使得压强 p 因腔壁材料或空腔体积的不同而有所差异,利用这种差异可以从单一热源吸取热量全部变为有用的功而不产生其他影响,从而违背热力学第二定律. 可见 u 应与腔壁材料及空腔体积无关. 为了进一步证明 $u \propto T^4$,应充分利用已得到的关系式 $p = \frac{1}{3}u$,这就提示解题者选用热力学公式

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$$

来进行论证.

由热力学第一定律,绝热过程应遵循的关系式为 $\mathrm{d}U + p\mathrm{d}V = 0$. 结合 $p = \frac{1}{3}u$,即可导出光子气的绝热过程方程.

光子的速率均为 c,在速度空间,光子速度矢量的端点都在以 c 为半径的球面上,且在球面上具有等概率分布的性质. 利用这一性质,并注意到 v_x 是光子速度的 x 分量,再根据 $f(v_x)$ 的含义,即可从数学上导出 $f(v_x)$ 的表达式.

为了求解单位时间通过腔壁小孔单位截面向外辐射的能量,实际上就是要求光子气在单位时间内与容器壁单位截面碰撞的光子数. 对于理想气体,曾利用一维麦克斯韦速度分布讨论过这个问题. 现在,光子气的一维速度分布 $f(v_x)$ 已求出. 仿照对理想气体的讨论,即可得出斯特藩－

玻尔兹曼定律.

【解】 1.(*a*)仿照气体分子运动论中理想气体压强公式的推导,可得出光子气中频率为 ν 的光子通过与器壁的碰撞对压强的贡献为

$$p_\nu = \frac{1}{3} n_\nu m_\nu \overline{v_\nu^2}$$

式中 n_ν 是频率为 ν 的光子的数密度,m_ν 是频率为 ν 的光子的质量,$\overline{v_\nu^2}$是频率为 ν 的光子速率的方均值.因

$$m_\nu = \frac{h\nu}{c^2}$$

$$\overline{v_\nu^2} = c^2$$

代入,得

$$p_\nu = \frac{1}{3} n_\nu h\nu$$

按题意,式中的 $n_\nu h\nu$ 就是频率为 ν 的光子的能量密度 u_ν,即

$$p_\nu = \frac{1}{3} u_\nu$$

光子气的总压强为

$$p = \sum_\nu p_\nu = \frac{1}{3} \sum_\nu u_\nu$$

光子气总的能量密度为

$$u = \sum_\nu u_\nu$$

故

$$p = \frac{1}{3} u$$

(*b*)如果 u 不仅是温度 T 的函数,而且还随空腔壁的材料性质和空腔体积变化,那么,总可以取两个黑体空腔,它们的温度相同,但腔壁材料不同或空腔体积不同,于是两空腔内的 u 不同,即压强 p 不同.把这两个空腔开小孔连通,并在小孔上装活塞,则由于两端压强不同,活塞将被推动并对外作功.这相当于从单一热源(即由两个温度相同的黑体空腔构成的系统)提取热量,全部用来对外作机械功而不产生其他影响.从而违背了热力学第二定律.因此,u 只与温度 T 有关,即

$$u = u(T)$$

于是,光子气的总能量(即内能)为

$$U = u(T)V$$

式中 V 是光子气的体积.

选取热学公式

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$$

利用 $U = uV$ 及 $p = \frac{1}{3}u$,得

$$u = T\left(\frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}T}\right) - \frac{1}{3}u$$

即

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{4\mathrm{d}T}{T}$$

积分,得

$$u = u_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^4$$

即

$$u \propto T^4$$

(c)由热力学第一定律,对绝热过程,有

$$\mathrm{d}U + p\mathrm{d}V = 0$$

因 $U = uV$,得

$$V\mathrm{d}u + u\mathrm{d}V + p\mathrm{d}V = 0$$

因 $u = 3p$,得

$$3V\mathrm{d}p + 3p\mathrm{d}V + p\mathrm{d}V = 0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} + \frac{4}{3}\frac{\mathrm{d}V}{V} = 0$$

积分,得出光子气的绝热过程方程为

$$pV^{\frac{4}{3}} = 常量$$

2.(a)如图,在速度空间以坐标原点 O 为球心,以真空光速 c 为半径作一球面,取 $Ov_xv_yv_z$ 直角坐标,光子速度 c 的端点在此球面上作等概率分布.如图,取一根狭的球带,它介于 v_x 到($v_x + \mathrm{d}v_x$)之间,当 c 的端点落在此球带上时,它的速度的 x 分量即为

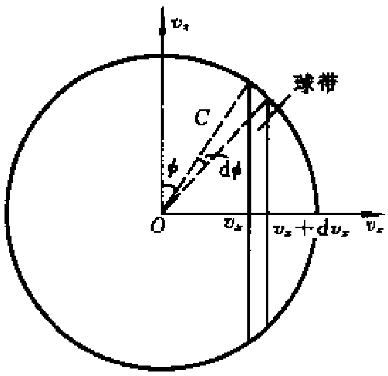
$$v_x = c\sin\phi$$

此球带的面积为

$$\mathrm{d}S = 2\pi\sqrt{c^2 - v_x^2}\cdot c\mathrm{d}\phi = 2\pi c^2\cos\phi\mathrm{d}\phi$$

c 的端点落在此球带上的概率等于球带面积与球面积之比,即为

$$\frac{\mathrm{d}S}{4\pi c^2} = \frac{1}{2}\cos\phi\mathrm{d}\phi$$



热试(二)图 5-1

c 的端点落在此球带上,表明光子速度的 x 分量在 v_x 与($v_x + \mathrm{d}v_x$)之间,故上述概率也是光子速度的 x 分量处于 v_x 与($v_x + \mathrm{d}v_x$)之间的概率,即有

$$f(v_x)\mathrm{d}v_x = \frac{1}{2}\cos\phi\mathrm{d}\phi$$

把

$$\mathrm{d}v_x = c\cos\phi\mathrm{d}\phi$$

代入,得

$$f(v_x)=\frac{1}{2c}$$

因

$$-c\leqslant v_x\leqslant c$$

故得

$$f(v_x)=\begin{cases}\frac{1}{2c}, & 当 -c\leqslant v_x\leqslant c\\ 0, & 当 \quad |v_x|>c\end{cases}$$

(b)取与小孔截面垂直且指向孔外的 x 轴.频率为 ν 且速度 x 分量在 v_x 到$(v_x+\mathrm{d}v_x)$之间的光子,在单位时间内通过小孔单位截面的数目为

$$n_\nu[f(v_x)\mathrm{d}v_x]v_x$$

频率为 ν 的光子,在单位时间内通过小孔单位截面的数目为

$$\int_0^\infty n_\nu[f(v_x)\mathrm{d}v_x]v_x=n_\nu\int_0^c\frac{1}{2c}v_x\mathrm{d}v_x=\frac{1}{4}n_\nu c$$

它们经小孔辐射出去的能量为

$$(\frac{1}{4}n_\nu c)h\nu=\frac{1}{4}(n_\nu h\nu)c=\frac{1}{4}cu_\nu$$

对所有频率求和,得出能流密度为

$$J=\sum_\nu(\frac{1}{4}cu_\nu)=\frac{1}{4}c\sum_\nu u_\nu=\frac{1}{4}cu$$

因

$$u\propto T^4$$

故

$$J\propto T^4$$

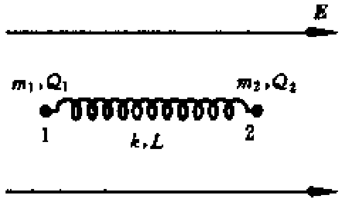
此即黑体辐射的斯特藩－玻尔兹曼定律.

【这是北京大学物理试验班的试题之一.试验班是为培训、选拔参加 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)的中国代表队而设立的.】

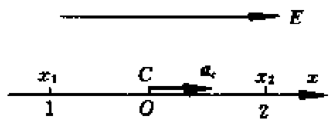
电磁学试题(一)

【题1】 如电试(一)图1-1所示，自由长度为L(足够长)，倔强系数为k的轻弹簧，两端系两小球1和2. 球1的质量为m_1，电量为$Q_1(Q_1>0)$，球2的质量为m_2，电量为$Q_2(Q_2>0)$. 弹簧与两小球在匀强电场中，场强E的方向与球1和球2连线的方向一致. 开始时，弹簧为自由长度，两小球静止. 设两小球之间的电相互作用以及各种引力均可忽略. 试求尔后两小球之间的最大距离.

【分析】 两小球除受电场作用外，还受把它们联系起来的弹簧的作用，因而两小球的运动是相互影响的，在质心系中讨论其运动，进而确定两小球的最大距离比较方便. 由两小球所受电场力，可确定其质心加速度. 在质心系中，球1和球2的初始位置与速度均已知，其运动则由各自所受的电场力、弹簧力和惯性力确定. 其中电场力与惯性力均为恒力，加上弹簧力后所受合力应为线性恢复力，所以球1和球2都作简谐振动，搞清楚两球的运动情况后，不难求出其间的最大距离.



电试(一)图1-1



电试(一)图1-2

【解】 如电试(一)图1-2所示，取x轴沿电场E的方向，原点O点是两球系统的质心C，即在质心系中取x轴，球1和球2任意时刻的位置分别为x_1和x_2. 显然，系统的质心C具有向右的恒定加速度为

$$a_C=\frac{(Q_1+Q_2)E}{m_1+m_2}$$

在质心系中，球1和球2受电力、弹簧力与惯性力的作用，所受合力分别为

$$F_1=Q_1E+k[(x_2-x_1)-L]-m_1a_C$$

$$F_2=Q_2E-k[(x_2-x_1)-L]-m_2a_C$$

把a_C的结果代入，得

$$F_1=\frac{m_2Q_1-m_1Q_2}{m_1+m_2}E+k[(x_2-x_1)-L]$$

$$F_2=-\frac{m_2Q_1-m_1Q_2}{m_1+m_2}E-k[(x_2-x_1)-L]$$

因

$$m_1x_1+m_2x_2=0$$

故有

$$F_1=-k\frac{m_1+m_2}{m_2}x_1+\left[\frac{m_2Q_1-m_1Q_2}{m_1+m_2}E-kL\right]$$

$$F_1=-k\frac{m_1+m_2}{m_1}x_2-\left[\frac{m_2Q_1-m_1Q_2}{m_1+m_2}E-kL\right]$$

设球 1 和球 2 各自受力平衡的位置为 x_1(平)和 x_2(平)，即相应的 F_1 和 F_2 为零，故有

$$x_1(\text{平})=-\frac{m_2}{m_1+m_2}\left[L-\frac{m_2Q_1-m_1Q_2}{k(m_1+m_2)}E\right]$$

$$x_2(\text{平})=-\frac{m_1}{m_1+m_2}\left[L-\frac{m_2Q_1-m_1Q_2}{k(m_1+m_2)}E\right]$$

于是，可将 F_1 和 F_2 表为

$$F_1=-k\frac{m_1+m_2}{m_2}[x_1-x_1(\text{平})]$$

$$F_2=-k\frac{m_1+m_2}{m_1}[x_2-x_2(\text{平})]$$

可见，F_1 和 F_2 都是线性恢复力，因此，球 1 和球 2 将分别以 x_1(平)和 x_2(平)为平衡位置作简谐振动，振动圆频率均为

$$\omega=\sqrt{\frac{k(m_1+m_2)}{m_1m_2}}$$

球 1 和球 2 的初始位置分别为

$$x_1(0)=-\frac{m_2}{m_1+m_2}L$$

$$x_2(0)=\frac{m_1}{m_1+m_2}L$$

球 1 和球 2 的初始位置与平衡位置的差别分别为

$$x_1(0)-x_1(\text{平})=-\frac{m_2(m_2Q_1-m_1Q_2)E}{k(m_1+m_2)^2}$$

$$x_2(0)-x_2(\text{平})=\frac{m_1(m_2Q_1-m_1Q_2)E}{k(m_1+m_2)^2}$$

因两球在初始时刻均静止，故上述初始位置与平衡位置之差就是球 1 与球 2 各自作简谐振动的振幅，即

$$A_1=|x_1(0)-x_1(\text{平})|=\frac{m_2|m_2Q_1-m_1Q_2|E}{k(m_1+m_2)^2}$$

$$A_2=|x_2(0)-x_2(\text{平})|=\frac{m_1|m_2Q_1-m_1Q_2|E}{k(m_1+m_2)^2}$$

下面分三种情况讨论.

1. 若 $m_2Q_1=m_1Q_2$，则

$$A_1=A_2=0$$

即振幅为零,无振动.球1与球2的间距始终为 L,故所求两球之间的最大距离为

$$L_{\max}=L$$

2. 若 $m_2Q_1>m_1Q_2$,则

$$x_1(0)<x_1(\text{平衡}),\quad x_2(0)<x_2(\text{平衡})$$

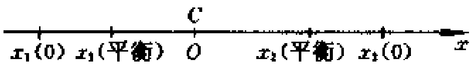
即两个平衡位置都在两个初始位置的内侧,如电试(一)图1-3所示,于是,在质心系中,两球先同时趋向质心 C 运动,再同时背离质心 C 运动,并且同时到达各自的最远点,即各自的初始位置.因此,两球之间的最大距离为

$$L_{\max}=L$$

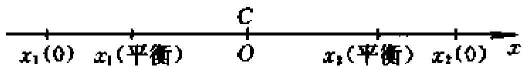
3. 若 $m_2Q_1<m_1Q_2$,则

$$x_1(0)>x_1(\text{平衡}),\quad x_2(0)<x_2(\text{平衡})$$

即两个平衡位置都在两个初始位置的外侧,如电试(一)图1-4所示.于是,在质心系中,两球先同时背离质心 C 运动,分别经过 $2A_1$ 和 $2A_2$ 的距离,同时到达各自的最远点,因此,两球之间的最大距离为



电试(一)图1-3

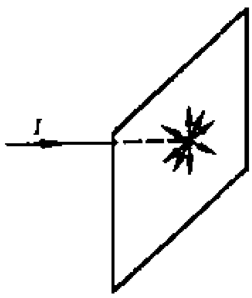


电试(一)图1-4

$$L_{\max}=L+2(A_1+A_2)=L+\frac{2(m_1Q_2-m_2Q_1)}{k(m_1+m_2)}E$$

【题2】 如电试(一)图2-1所示,半无限长直载流导线中的电流为 I,到达与导线垂直的无穷大平面后,电流均匀地沿垂直平面的径向向四处流去.

试求:1. 右半空间磁场 $\boldsymbol{B}$ 的分布;2. 垂直平面上磁场 $\boldsymbol{B}$ 的分布.3. 左半空间(包括导线所在位置)磁场 $\boldsymbol{B}$ 的分布.



电试(一)图2-1

【分析与解】 半无限长直电流 I 产生的磁场 $\boldsymbol{B}_1$ 在全空间的分布具有以该直导线为轴的轴对称性,即在全空间 $\boldsymbol{B}_1$ 的磁感线是以该直导为轴的一系列同轴圆,并且这些圆形磁感线与直导线的电流成右手螺旋关系,在同一个圆上各点磁场的大小 B_1 相同,另外在轴上(即各圆心处)处处磁场 $\boldsymbol{B}_1=0$.

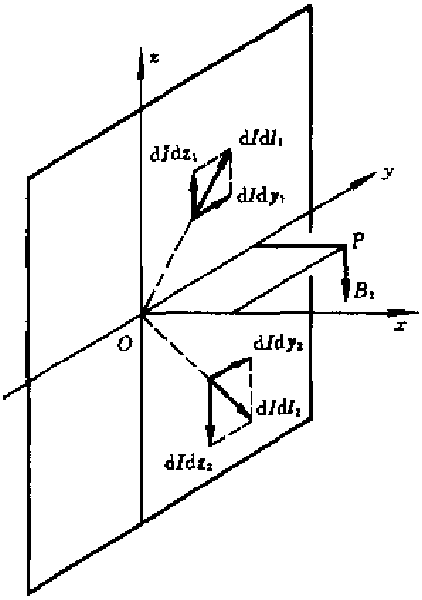
所以,本题的关键是求出在垂直平面中均匀径向流动的电流在全空间的磁场分布 $\boldsymbol{B}_2$.

1. $\boldsymbol{B}_2$ 在右半空间的分布.

先考察 $\boldsymbol{B}_2$ 分布特点.如电试(一)图2-2,取电流中心点(即长直导线与垂直平面的交点)为坐标原点 O,取 x 轴与平面垂直(即沿长直导线),取平面上任意方向为 y 轴,并在平面上取与 y 轴垂直的方向为 z 轴.

在右半空间的 xy 平面上任取一点 P,为了分析 P 点的 $\boldsymbol{B}_2$,以 y 轴为对称轴,在电流平面内上下对称地取电流元 $\mathrm{d}I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$ 和 $\mathrm{d}I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$,如电试(一)图2-2所示,这两个电流元都在 yz 平面内,

可分解为



电试(一)图 2-2

$$dIdl_1 = dIdy_1 + dIdz_1$$
$$dIdl_2 = dIdy_2 + dIdz_2$$

其中 $dIdz_1$ 和 $dIdz_2$ 对 P 点的 $\boldsymbol{B}_2$ 的贡献彼此抵消，$dIdy_1$ 和 $dIdy_2$ 对 P 点的 $\boldsymbol{B}_2$ 的贡献之和应指向 z 轴的正方向(向上)或负方向(向下). 另外，沿 y 轴流动的电流的各电流元对 P 点的 $\boldsymbol{B}_2$ 的贡献也应沿 z 轴的正方向或负方向.

因此，在 xy 平面上任意一点 P 的 $\boldsymbol{B}_2$ 的方向必定与 xy 平面垂直. 考虑到电流平面中，在 z 轴右方(即 y 轴正方向)的电流对 P 点的 $\boldsymbol{B}_2$ 的贡献，应大于 z 轴左方(即 y 轴负方向)电流对 P 点的 $\boldsymbol{B}_2$ 的贡献，故 P 点的 $\boldsymbol{B}_2$ 的方向应沿 z 轴负方向(垂直向下)，如电试(一)图 2-2 所示. 由于平面上的电流分布对 x 轴具有轴对称性，故 $\boldsymbol{B}_2$ 的磁感线应是以 x 为轴的一系列圆，每一个圆上各点的 $\boldsymbol{B}_2$ 的大小应相同.

右半空间各点的总磁场为

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2$$

根据以上分析，在右半空间，$\boldsymbol{B}_1$ 和 $\boldsymbol{B}_2$ 的磁感线都是一系列以 x 轴为轴的圆，且圆上各点 $\boldsymbol{B}_1$ 的大小相同，$\boldsymbol{B}_2$ 的大小也相同. 因此，在右半空间 $\boldsymbol{B}$ 的磁感线也是一系列绕 x 轴的圆，且圆上各点的 $\boldsymbol{B}$ 的大小相同. 应用安培环路定理，取 $\boldsymbol{B}$ 的圆形磁感线为环路，因其中无电流通过，容易证明

$$\boldsymbol{B} = 0$$

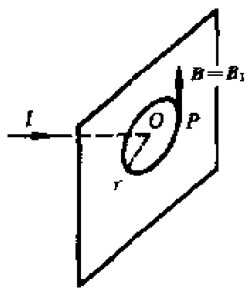
即在右半空间，总磁场处处为零.

2. 把电试(一)图 2-2 中的 P 点移到 y 轴上，即如电试(一)图 2-3 所示. 则电试(一)图 2-2 中，$dIdz_1$ 和 $dIdz_2$ 对 P 点的 $\boldsymbol{B}_2$ 的贡献相互抵消，而且 $dIdy_1$ 和 $dIdy_2$ 对 P 点的 $\boldsymbol{B}_2$ 的贡献也相互抵消，另外，平面中沿 y 轴的电流对 P 点的 $\boldsymbol{B}_2$ 的贡献也为零. 因此，垂直平面上所有点的 $\boldsymbol{B}_2$ 均为零，即

$$\boldsymbol{B}_2 = 0$$

故垂直平面上各点的总磁场为

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1$$



电试(一)图 2-3

$\boldsymbol{B}$ 的磁感线如电试(一)图 2-3 所示，是垂直平面上一系列以 O 为圆心的同心圆. $\boldsymbol{B}$ 的大小是无限长直载流导线产生的磁场之半，为

$$B = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{4\pi r}, & r > 0 \\ 0, & r = 0 \end{cases}$$

式中 r 是电流中心点 O 到垂直平面上某一点 P 的距离，P 点的总磁场为 $\boldsymbol{B}$.

3. 在左半空间 $\boldsymbol{B}_2$ 的分布与右半空间 $\boldsymbol{B}_2$ 的分布具有反向对称关系. 现已证明，在右半空间中 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2 = 0$，即在右半空间 $\boldsymbol{B}_2$ 与 $\boldsymbol{B}_1$ 反向抵消. 因此，在左半空间中，$\boldsymbol{B}_2$ 与 $\boldsymbol{B}_1$ 应同向加强. 应用安培环路定理(略)，可得出总磁场 $\boldsymbol{B}$ 的分布相当于无限长直载流导线产生的磁场. 即 $\boldsymbol{B}$ 的磁感线是以导线为轴的一系列圆，且与电流方向成右手螺旋. $\boldsymbol{B}$ 的大小为

$$B=\begin{cases}\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}, & r>0\\ 0, & r=0\end{cases}$$

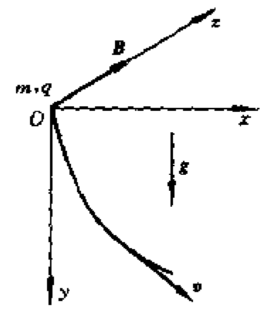
式中 r 是左半空间任一点到半无限长直载流导线的距离.

【题3】 质量为 m，电量为 $q(q>0)$的小球，在离地面高度为 h 处从静止自由落下. 为使小球始终不会与地面相碰，可设想在它开始下落时就加上一个足够强的水平匀强磁场. 试求该磁场磁感应强度的最小可取值 B_0，并画出当磁场取 B_0 时小球的运动轨道. 设空气阻力可略.

【分析】 开始时小球静止，受重力作用向下加速运动，在小球获得速度的同时，随即受到磁场洛伦兹力的作用，使小球的运动偏转. 小球的速度越大，洛伦兹力越强，偏转的程度越高. 当磁场强到一定程度，就有可能使小球在接近地面时向上偏转，从而满足题目关于不与地面相碰的要求.

由于偏转，小球在任意位置的速度 $\boldsymbol{v}$ 一般沿斜向(既非竖直向下，又非水平)，相应的洛伦兹力 $\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 一般也应沿斜向. 由于小球只受重力和洛伦兹力，又要求小球不与地面相碰，即要求小球在某处所受竖直方向的作用力为零. 为此，从洛伦兹力 $\boldsymbol{F}$ 中取出一个向上的分力 $\boldsymbol{F}_1$，使之刚好与小球所受重力 mg 平衡，则小球所受合力就是洛伦兹力 $\boldsymbol{F}$ 的另一个分力 $\boldsymbol{F}_2$，即有 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$. 相应的将小球在任意位置的速度 $\boldsymbol{v}$ 分解为 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$，其中 $\boldsymbol{v}_1$ 相应的洛伦兹力 $\boldsymbol{F}_1=q\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{B}$，刚好与重力 mg 抵消，于是小球所受合力为 $\boldsymbol{F}_2=q\boldsymbol{v}_2\times\boldsymbol{B}$. 容易判断，因 mg 为恒力，故相应的 $\boldsymbol{v}_1$ 应是恒矢量(大小方向均不变)，其方向应沿水平且与 $\boldsymbol{B}$ 垂直，其大小为 $v_1=\dfrac{mg}{qB}$. 由于小球在初始位置的速度 $\boldsymbol{v}_0=0$，故 $\boldsymbol{v}_2$ 的初始值应为 $\boldsymbol{v}_{20}=-\boldsymbol{v}_1$. 与 $\boldsymbol{v}_2$ 相应的洛伦兹力 $\boldsymbol{F}_2$ 只改变 $\boldsymbol{v}_2$ 的方向，不改变 $\boldsymbol{v}_2$ 的大小. 因此，小球的运动可分解为两部分，一部分是以 $\boldsymbol{v}_1$ 为速度的沿水平方向的匀速直线运动，另一部分是以 v_2 为速率的匀速圆周运动，圆半径为 $R=\dfrac{mv_2}{qB}=\dfrac{mv_1}{qB}=\dfrac{m^2g}{q^2B^2}$ (因 $v_2=v_{20}=v_1$)，圆平面在竖直方向. 这相当于半径为 R 的圆轮沿着其顶部的水平直线(相当于速度 $\boldsymbol{v}_1$ 的直线)作匀速纯滚动，这时圆轮边缘上的一点既有随着轮心的匀速直线运动，又有绕轮心的匀速圆周运动，其轨道为滚轮线. 圆轮边缘上一点的运动与本题小球的运动类似. 滚轮线的最低位置在该水平直线下方 $2R=\dfrac{2m^2g}{q^2B^2}$处. 显然，为使小球在运动过程中始终不与地面相碰. 要求 $2R<h$，由此即可确定磁感应强度的最小可取值 B_0.

【解】 如电试(一)图 3－1 所示，$Oxyz$ 直角坐标，原点 O 在小球初始位置，y 轴竖直向下即为重力 mg 的方向，z 轴在水平方向即为匀强磁场 $\boldsymbol{B}$ 的方向，x 轴沿水平方向向右. 小球在 xy 平面内运动.



电试(一)图 3－1

如电试(一)图 3－1，把小球在任意位置的速度 $\boldsymbol{v}$ 分解为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$$

把小球在任意位置时所受洛伦兹力 $\boldsymbol{F}$ 作相应的分解，

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$$

其中

$$\boldsymbol{F}_1=q\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{F}_2 = q\boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{B}$$

适当分解 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$，使 $\boldsymbol{v}_1$ 相应的 $\boldsymbol{F}_1$ 与小球所受重力 $m\boldsymbol{g}$ 抵消，即使

$$\boldsymbol{F}_1 = -m\boldsymbol{g}$$

解出相应的 $\boldsymbol{v}_1$ 的方向应沿 x 轴正方向，其大小为 $v_1 = \frac{mg}{qB}$，即有

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{mg}{qB}\boldsymbol{i}$$

式中 $\boldsymbol{i}$ 是 x 方向的单位矢量. 由

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_1$$

因开始时，小球在 O 点的初始速度 $\boldsymbol{v}_0 = 0$，故 $\boldsymbol{v}_2$ 的初始值为

$$\boldsymbol{v}_{20} = -\boldsymbol{v}_1 = -\frac{mg}{qB}\boldsymbol{i}$$

小球所受合力即为 $\boldsymbol{F}_2$，此力只改变 $\boldsymbol{v}_2$ 的方向，不改变 $\boldsymbol{v}_2$ 的大小. 因此，在 $\boldsymbol{F}_2$ 的作用下，小球以

$$v_2 = \frac{mg}{qB}$$

为速率作匀速圆周运动，圆半径为

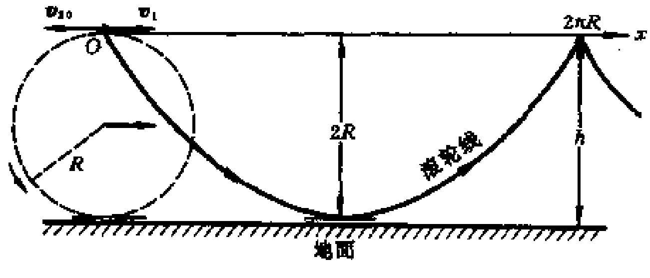
$$R = \frac{mv_2}{qB} = \frac{m^2 g}{q^2 B^2}$$

综上所述，小球从 O 点开始的运动，可分解为两部分. 其一是沿 x 轴以 $\boldsymbol{v}_1$ 的匀速直线运动，另一是以 $\boldsymbol{v}_{20}$ 为初速度的匀速圆周运动. 因 $\boldsymbol{v}_{20} = -\boldsymbol{v}_1$，这两部分运动的合成，相当于电试(一)图 3-2 中 O 点所作的滚轮线运动. 即随着半径为 R 的圆沿 x 轴的纯滚动，O 点随圆心以 $\boldsymbol{v}_1$ 作匀速直线运动，同时以 $-\boldsymbol{v}_1$ 为初速作匀速圆周运动. O 点即小球的轨道是电试(一)图 3-2 所示的滚轮线. 滚轮线的最低位置与 x 轴相距为 $2R$，为使小球不与地面相碰，要求

$$2R < h$$

即

$$\frac{2m^2 g}{q^2 B^2} < h$$



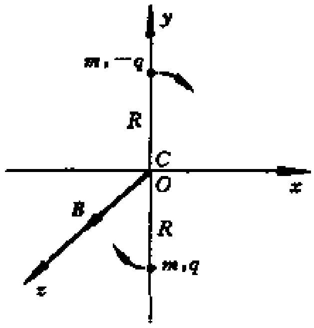
电试(一)图 3-2

因此，磁场可取的最小值 B_0 为

$$B_0 = \sqrt{\frac{2g}{h}}\,\frac{m}{q}$$

即磁场应稍大于此值. 小球的运动轨道如电试(一)图 3-2 所示，可见小球沿滚轮线在 x 轴与地面之间往返运动，每次都刚好不与地面相碰.

【题 4】 如电试(一)图 4-1 所示，质量均为 m，电量分别为 q 和 $-q(q>0)$ 的两个带电质点相距为 $2R$. 开始时，系统的质心 C 静止地位于坐标原点 O 处，且两带电质点在 xy 平面上绕质心 C 沿顺时针方向作圆运动. 设当系统处于电试(一)图 4-1 所示的位置时，规定为 $t=0$ 时刻，从该时刻起在所讨论的空间范围内加上沿 z 轴方向的弱匀强磁场 $\boldsymbol{B}$.



电试(一)图 4-1

试求：1. 质心 C 的速度分量 v_x 和 v_y 随时间 t 的变化关系. 2. 质心 C 的位置 x 和 y 随时间 t 的变化关系. 3. 定性地画出质心 C 的运动轨迹.

设各种万有引力均可忽略. 设两质点间的相互作用可近似处理为库仑作用. 由于所加磁场很弱，可设两质点相对质心 C 的圆运动近似保持不变.

【分析】 开始时，两带电质点的运动速度虽然反向，但因带电量异号，所受洛伦兹力的合力不为零，从而将使系统质心从静止开始运动. 当质心运动后，每一个带电质点的速度为它相对于质心作圆运动的速度与质心速度的矢量和. 带电质点的速度又确定了所受的洛伦兹力，把两个质点所受洛伦兹力之和与质心运动的动力学方程结合，便可解出质心的速度分量 v_x 和 v_y 随时间 t 的变化关系.

由上述 $v_x(t)$ 和 $v_y(t)$，积分，即可得出质心位置随 t 的变化关系 $x(t)$ 和 $y(t)$.

由 $x(t)$ 和 $y(t)$，可画出质心 C 的运动轨迹.

值得指出的是，质心 C 从开始静止到运动，其速率显然有所变化，相应的质心动能也会有所变化. 由于洛伦兹力不作功，又不考虑电磁辐射导致的能量损失，故在运动过程中，系统的能量应守恒. 因此，质心动能的变化必将导致两个质点相对质心 C 的运动有所变化. 但题设磁场很弱，质心动能的增大并不多，故如题设，可以忽略两带电质点相对质心 C 的运动的变化.

【解】 未加磁场前，两带电质点之间的库仑力提供了它们绕质心 C 作圆周运动所需的向心力，由牛顿第二定律，有

$$m\omega^2 R=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2R)^2}$$

式中 ω 是两质点绕 C 旋转的角速度，为

$$\omega=\frac{q}{4R\sqrt{\pi\varepsilon_0 mR}}$$

1. 加磁场 $\boldsymbol{B}$ 后，如电试(一)图 4-2 所示，两质点开始时所受洛伦兹力 $\boldsymbol{F}_+$ 和 $\boldsymbol{F}_-$ 均沿 y 轴的正方向，大小为

$$F_+=F_-=q\,\omega\,RB$$

系统所受合力为

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_++\boldsymbol{F}_-$$

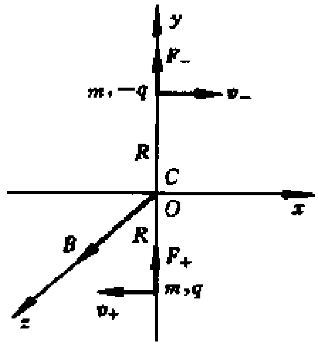
其大小为

$$F=2q\,\omega\,RB$$

系统的质心 C 将在 $\boldsymbol{F}$ 的作用下运动.

在任意 t 时刻，两质点的运动都可看作是两部分的叠加，其一是随质心 C 的运动，其二是质点相对质心 C 的运动. 由题设，质点相对质心的运动仍为开始时的匀速圆周运动. 设任意 t 时刻，质心 C 的运动速度为 $\boldsymbol{v}$，两质点相对 C 的速度分别为 $\boldsymbol{v}_+$ 和 $\boldsymbol{v}_-$，则两质点所受洛伦兹力分别为

$$\boldsymbol{F}_+ = q(\boldsymbol{v}_+ + \boldsymbol{v})\times\boldsymbol{B}$$
$$\boldsymbol{F}_- = -q(\boldsymbol{v}_- + \boldsymbol{v})\times\boldsymbol{B}$$



电试(一)图 4－2

其中

$$\boldsymbol{v}_- = -\boldsymbol{v}_+$$
$$v_- = v_+ = \omega R$$

故合力为

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_+ + \boldsymbol{F}_- = 2q(\boldsymbol{v}_+\times\boldsymbol{B})$$

其中 $\boldsymbol{v}_+$ 是大小不变（$v_+ = \omega R$），以恒定角速度 ω 在 xy 平面旋转的矢量，而 $\boldsymbol{B}$ 是沿 z 轴的匀强磁场，因此，系统所受合力 $\boldsymbol{F}$ 是大小不变（$F = 2q\omega RB$）、以相同角速度 ω 在 xy 平面匀角速旋转的矢量. 因 $t=0$ 时刻，$\boldsymbol{F}$ 沿 y 轴正方向，故在任意 t 时刻，$\boldsymbol{F}$ 的 x 分量 F_x 和 y 分量 F_y 为

$$F_x = F\sin\omega t,\quad F_y = F\cos\omega t$$

其中

$$F = 2q\omega RB$$

由牛顿第二定律，质心 C 在 x 和 y 方向的运动方程为

$$2m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = F_x = F\sin\omega t,\quad 2m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = F_y = F\cos\omega t$$

初条件为

$$t=0\text{ 时},\quad v_x=0,\quad v_y=0$$

积分，得

$$v_x = \frac{F}{2m\omega}(1-\cos\omega t) = \frac{qBR}{m}(1-\cos\omega t)$$
$$v_y = \frac{F}{2m\omega}\sin\omega t = \frac{qBR}{m}\sin\omega t$$

可见，质心 C 在 y 方向具有谐振动速度，在 x 方向则除了具有谐振动速度外，还有沿 x 方向匀速平移的速度，后者为

$$v_{x,\text{平移}} = \frac{qBR}{m}$$

2. 由上述 $v_x(t)$、$v_y(t)$ 及初始条件

$$t=0\text{ 时},x=0,y=0$$

积分，得

$$x = \frac{qBR}{m}\left(t-\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right),\quad y = \frac{qBR}{m\omega}(1-\cos\omega t)$$

$x(t)$ 和 $y(t)$ 描述了质心 C 位置随时间 t 的变化关系.

3. 把上述 $x(t)$和 $y(t)$分解为

$$\begin{cases}x_1=-\dfrac{qBR}{m\omega}\sin\omega t\\ x_2=\dfrac{qBR}{m}t\end{cases} \quad 及 \quad \begin{cases}y_1=\dfrac{qBR}{m\omega}(1-\cos\omega t)\\ y_2=0\end{cases}$$

可见质心 C 的运动可分解为匀速圆周运动(x_1,y_1)以及沿 x 轴正方向的匀速直线运动(x_2,y_2).

质心 C 所作的匀速圆周运动的圆周方程为

$$x_1^2+(y_1-A)^2=A_2$$

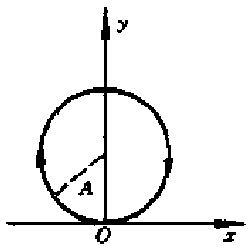
其中

$$A=\frac{qBR}{m\ \omega}=4BR^2\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 R}{m}}$$

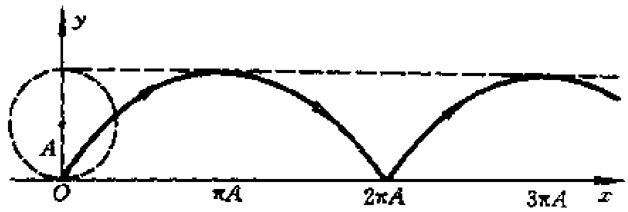
即圆半径为 A,圆心位于 y 轴的 $y=A$ 处,圆运动沿顺时针方向,如电试(一)图 4-3 所示.

质心 C 除上述圆周运动外,还有沿 x 的匀速平移,且平移速度 $v_{x,平移}$与圆周运动的角速度 ω 和圆半径 A 的关系刚好为

$$v_{x,平移}=\frac{qBR}{m}=\omega A$$



电试(一)图 4-3



电试(一)图 4-4

因此,质心 C 的运动,相当于半径为 A 的圆轮在水平地面上作匀速纯滚动时,圆轮边缘点的运动,其轨迹为滚轮线,如电试(一)图 4-4 所示.

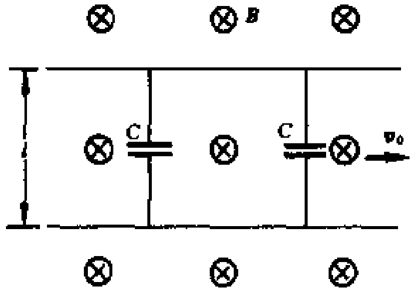
【题 5】 如电试(一)图 5-1 所示,在水平地面上有两条足够长的平行金属导轨,导轨上放着两根可以无摩擦地滑行的平行导体棒,每根导体棒中串接着电容为 C 的相同固体介质电容器,构成矩形回路.整个回路处在均匀磁场区域中,磁场 $\boldsymbol{B}$ 的方向与回路平面垂直.已知两导体棒的长度均为 l,质量均为 m,电阻均为 R,而回路中导轨部分的电阻可以忽略.设开始时左导体棒静止,右导体棒以初速 v_0 平行导轨运动,则在导体棒运动过程中可给两电容器充电.

1. 就电容器 C 的充电过程而言,试问电试(一)图 5-1 的回路能否等效为电试(一)图 5-2 的静态无外磁场回路.在静态回路中两导体棒与电容 C 均保持不变,回路中其余部分的电阻均可忽略.若能,试求电试(一)图 5-2 回路中 $\mathscr{E}$ 和 C' 的值.

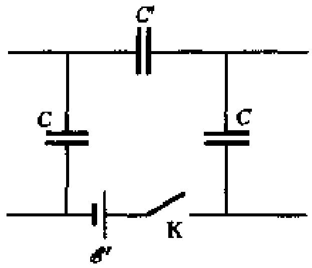
2. 试求电试(一)图 5-1 回路中两导体棒的速度随时间的变化.所有电磁辐射一概忽略.

3. 试问两导体棒的极限速度是否相同,并作定性解释.极限速度是指 $t\to\infty$时的速度.

4. 如电试(一)图 5－1 所示，若将两电容器取走，左、右导体棒连通. 试问：(a)两导体棒的极限速度是否相同？(b)两导体棒之间的极限间距是否为无穷大？



电试(一)图 5－1



电试(一)图 5－2

【分析】 如电试(一)图 5－1，右棒向右运动，切割磁感线，在洛伦兹力的作用下形成电流，电流在回路中沿逆时针方向流动，给两电容器充电，洛伦兹力是非静电力，起着电源的作用. 有电流后，右棒所受安培力向左，为阻力，速度减小；左棒所受安培力向右，为推力，速度从零增大(同时也要切割磁感线，产生电动势). 因此，在任意时刻，当右棒与左棒分别以 v_1 与 v_2 向右运动时，因切割磁感线而产生电动势，因回路中有电流 I 和电阻而形成的电压，以及因电容器极板上有电量 Q 而形成的电压，遵循电路方程. 另外，左棒与右棒所受安培力给出了它们的运动方程. 由此，并利用初条件，即可得出运动回路中电容器的充电方程，即 Q 随 t 变化应满足的方程.

电试(一)图 5－2 中静态无外磁场回路的充电方程(即电路方程)容易给出，与电试(一)图 5－1 回路的充电方程对比，即可看出两者能否等效以及等效的条件——对 $\mathscr{E}$ 和 C' 的要求. 所谓等效，是指对两个电容器 C 充电具有等效性，即无论电试(一)图 5－1 或电试(一)图 5－2 的回路，电容器 C 中电量 Q 值 t 的变化应相同.

求解电试(一)图 5－2 回路的充电方程，得出 $Q(t)$. 代入电试(一)图 5－1 回路中两导体棒的运动方程，即可得出 $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$.

前已指出，有电流后，在电试(一)图 5－1 回路中右棒减速，左棒加速，结果 $\mathscr{E}$ 越来越小，与此同时，Q 增大，两电容器两端的电压增大，当达到与 $\mathscr{E}$ 相同时，回路中不再有电流，安培力随之消失，左棒不再加速，右棒不再减速，而分别以不同的匀速度运动(它们的匀速度不可能相同，否则回路中总电动势 $\mathscr{E}$ 为零)，并维持下去，这就是极限速度. 因此，两棒的极限速度并不相同.

从电试(一)图 5－1 回路中除去两电容器后，两棒的极限速度应相同. 因为只要两棒速度不同，就有 $\mathscr{E}$ 存在，电流也将存在，于是安培力将继续使左棒加速，右棒减速，直至右棒与左棒的速度相同，$\mathscr{E}=0$，$I=0$ 为止. 若两棒开始时的间距有限，则尔后两棒间距的增长系由 $(v_1-v_2)\mathrm{d}t$ 累积所致，在没有电容器时，不难算出两棒间距的极限增量应为有限量.

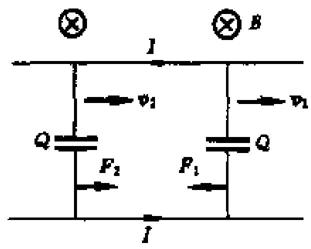
【解】 设在任意时刻 t，电试(一)图 5－1 回路中右棒和左棒的速度分别为 v_1 和 v_2，回路中电流为 I，电容器极板上的电量为 Q，右棒和左棒所受安培力分别为 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$，各量的方向均如电试(一)图 5－3 所示. 规定 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2$ 以向右为正，电流以逆时针为正. 则回路中的电动势 $\mathscr{E}$，回路方程(即充电方程)，以及右棒和左棒的运动方程为

$$\mathscr{E}=Bl(v_1-v_2) \tag{1}$$

$$\mathscr{E}=\frac{2Q}{C}+2RI=\frac{2Q}{C}+2R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

$$m\frac{dv_1}{dt}=F_1=-IlB=-\frac{dQ}{dt}lB \tag{3}$$

$$m\frac{dv_2}{dt}=F_2=IlB=\frac{dQ}{dt}lB \tag{4}$$



电试(一)图 5-3

(3)式积分，得

$$v_1=-\frac{lBQ}{m}+v_{10}$$

因初条件为 $t=0$ 时，$Q=0$，$v_1=v_0$，故上式中的积分常量 $v_{10}=v_0$，有

$$v_1=-\frac{lBQ}{m}+v_0 \tag{5}$$

同样，(4)式积分，并利用初条件 $t=0$ 时，$Q=0$，$v_2=0$，可得(或利用动量守恒亦可)

$$v_2=\frac{lBQ}{m}$$

把(5)、(6)式代入(1)式，再与(2)式联立，消去 $\mathscr{E}$，得

$$Blv_0=2\left(\frac{1}{C}+\frac{B^2l^2}{m}\right)Q+2R\frac{dQ}{dt} \tag{7}$$

这就是电试(一)图 5-1 的运动回路中电容器的充电方程.

1. 在电试(一)图 5-2 的静态充电回路中，充电方程为

$$\mathscr{E}=\frac{Q}{C_{串}}+2R\frac{dQ}{dt} \tag{8}$$

式中 $C_{串}$ 为三个电容器 C、C'、C 串联的等效电容，为

$$\frac{1}{C_{串}}=\frac{1}{C}+\frac{1}{C}+\frac{1}{C'} \tag{9}$$

电试(一)图 5-1 与电试(一)图 5-2 回路的初条件相同，即当 $t=0$ 时，$Q=0$ 时. 因此，比较(7)式和(8)式可知，为使两电路对电容器 C 的充电过程具有等效性，要求

$$\frac{1}{C_{串}}=2\left(\frac{1}{C}+\frac{B^2l^2}{m}\right) \tag{10}$$

$$\mathscr{E}=Blv_0 \tag{11}$$

由(9)式和(10)式，得

$$C'=\frac{m}{2B^2l^2} \tag{12}$$

(11)式和(12)式就是本题第 1 问的解答.

2. 求解充电方程(8)式，得

$$Q=C_{串}\mathscr{E}(1-e^{-t/2RC_{串}}) \tag{13}$$

把(10)、(11)式代入(13)式，得出电试(一)图 5-1 回路中电容器的电量 Q 随时间 t 的变化为

$$Q=\frac{Blv_0}{2\left(\frac{1}{C}+\frac{B^2l^2}{m}\right)}\left[1-e^{-\left(\frac{1}{C}+\frac{B^2l^2}{m}\right)t/R}\right] \tag{14}$$

把(14)式代入(5)式和(6)式，得出电试(一)图 5-1 回路中两导体棒的运动速度 v_1 和 v_2 随时间

t 的变化为

$$v_1(t)=\frac{1}{2\left(\frac{m}{C}+B^2l^2\right)}\left[\left(\frac{2m}{C}+B^2l^2\right)+B^2l^2\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{C}+\frac{B^2l^2}{m}\right)t/R}\right]v_0 \tag{15}$$

$$v_2(t)=\frac{B^2l^2}{2\left(\frac{m}{C}+B^2l^2\right)}\left[1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{C}+\frac{B^2l^2}{m}\right)t/R}\right]v_0 \tag{16}$$

3. 两导体棒的极限速度不相同，定性分析如前. 当 $t\to\infty$时，$I_{(t\to\infty)}=0$，由(1)式和(2)式，得

$$Bl(v_1-v_2)_{t\to\infty}=\mathscr{E}_{(t\to\infty)}=\frac{2}{C}Q_{(t\to\infty)}$$

由(14)式，$t\to\infty$时，

$$Q_{(t\to\infty)}=Q_{\max}=\frac{Blv_0}{2\left(\frac{1}{C}+\frac{B^2l^2}{m}\right)}$$

由以上两式，得

$$(v_1-v_2)_{(t\to\infty)}=\frac{2}{BlC}Q_{\max}=\frac{m}{m+B^2l^2C}v_0$$

直接由(15)式和(16)式也可以得出同样结果.

4.(a)在图 1 回路中除去两电容器后，两导体棒的极限速度应相同，均为$\frac{1}{2}v_0$.

因为，若 $v_1\neq v_2$，则 $\mathscr{E}\neq0, I\neq0, F_1\neq0, F_2\neq0$，左棒将加速，右棒将减速，直至 $v_1=v_2$ 以及 $\mathscr{E}=0, I=0, F_1=0, F_2=0$ 为止.

由动量守恒即可得出，在无电容器时，$v_{1(t\to\infty)}=v_{2(t\to\infty)}=\frac{v_0}{2}$.

(b)设开始($t=0$)时，两棒间距有限. 无电容器时，两棒间距的增长量由$(v_1-v_2)\mathrm{d}t$ 累积而成. 由(4)式，有

$$m\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}=F_2=IlB$$

由(2)式可知，无电容器时，

$$\mathscr{E}=2RI，或\ I=\frac{\mathscr{E}}{2R}$$

由以上两式，并利用(1)式，得

$$m\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}=F_2=IlB=\frac{\mathscr{E}}{2R}lB=\frac{Bl(v_1-v_2)}{2R}lB$$

即

$$(v_1-v_2)\mathrm{d}t=\frac{2mR}{B^2l^2}\mathrm{d}v_2$$

因 $t=0$ 时，$v_2=0$，及 $t\to\infty$时，$v_2=\frac{v_0}{2}$. 故对上式积分可得出两棒间距增长量的极限值为

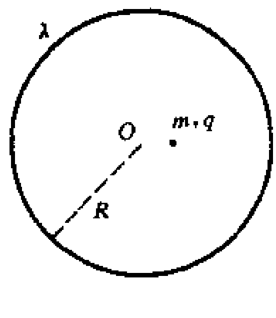
$$\frac{2mR}{B^2l^2}\,\frac{v_0}{2}=\frac{mR}{B^2l^2}v_0$$

因此，只要开始时两棒间距为有限值（当然应如此），则两棒之间的极限距离也为有限值，不会趋于无穷大.

【这是北京大学物理试验班的试题之一.试验班是为了培训、选拔参加 IPhO（国际中学生物理奥林匹克竞赛）的中国代表队而设立的】.

电磁学试题(二)

【题1】 如电试(二)图1-1所示,电荷线密度为$\lambda(\lambda>0)$,半径为R的均匀带电圆环,固定在光滑的水平绝缘桌面上.质量为m,电量为$q(q>0)$的光滑小球静止地放在桌面上与圆环中心O点非常接近的位置处.设圆环上电荷的分布不受小球电荷的影响.试判断小球尔后的运动是否为振动?若为振动,设小球初始位置与O点的距离$r_0 \ll R$.试用适当的近似方法,估算小球的振动周期T.



电试(二)图1-1

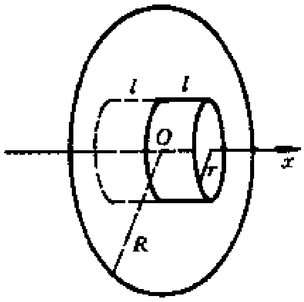
【分析】 本题是一道物理估算题.估算与严格计算之间的区别,在于估算往往可以绕过比较复杂的数学演算,简捷地直接获得正确的定性结论和比较接近的粗略定量结果.例如在本题中,小球的运动究竟是振动,还是非振动,这是定性结论,作出的判断应不得有误.如果小球的运动是振动,其振动周期T为何值,需定量求解.估算得出的粗略T值,与严格解出的T值,允许有数量上的差异,通常要求两者为同一数量级即可.应该强调的是,估算本身在逻辑上必须严谨,出发点要有物理根据,演算中可采用数学上允许的近似,但不能太随意.

对于同一物理问题,可以采用的估算方法往往并不唯一.对于本题,下面给出的是以静电场高斯定理为依据的一种近似处理方法.

高斯定理把封闭曲面内的电量与通过该封闭曲面的电通量联系了起来,所谓电通量则可形象地理解为进进出出的电感线.对本题,如电试(二)图1-1,取走带电小球,只剩下带电圆环,分析一下圆环中心O点附近电感线的走向.首先,在通过O点并与圆环平面垂直的轴上,从O点沿轴向前或向后,各点的电感线均应背离O点向外.因O点附近无电荷(带电小球已取走),由O点沿轴向两个方向外出的电感线,只能由从O点侧面流入的电感来补偿,这是高斯定理的要求.由此即可定性判断,在圆环平面上O点附近各点的场强方向均应指向O点.换言之,在环面上O点附近的带电小球所受的作用力应指向O点(尽管小球与环都带上正电,但小球所在位置使之受电引力而不是电斥力),即为恢复性保守力,O点是小球受力为零的力平衡位置(由对称性).因此,定性的结论是,小球的运动是以O点为平衡位置的振动.

为了定量地估算小球所受圆环的静电力,可以O点为中心,以$r(r \ll R)$为半径,以$2l(l \ll$

上以 O 点为圆心，作半径为 $r(r\ll r)$ 的圆，将此圆沿 x 轴的正方向和负方向各延展 l 距离（$l\ll R$），形成一个圆柱面．取此圆柱面为高斯面，因其中无电荷，由高斯定理，有



电试(二)图 1－2

$$\oint E\cdot \mathrm{d}S=0$$

因在圆柱两端面上各点的电场强度方向指向外面，电通量应为正，因此圆柱侧面各点电场强度的方向应指向里面，电通量为负．由此可知，带正电的小球所受静电力总是指向圆环中心 O 点，为恢复性保守力，因此小球的运动应为振动，振动中心就是 O 点．

圆柱两端面的电通量可近似地用 x 轴上 $x=\pm l$ 点的电场强度 E_l 来计算，即

$$E_l=\frac{\lambda(2\pi R)l}{4\pi\varepsilon_0(R^2+l^2)^{3/2}}=\frac{\lambda Rl}{2\varepsilon_0(R^2+l^2)^{3/2}}$$

故通过两端面的电通量近似为

$$\iint_{\text{两端面}}E\cdot \mathrm{d}S\approx E_l\cdot 2\pi r^2$$

通过圆柱侧面的电通量可近似地用圆平面上与 O 点相距为 r 的电场强度 E_r（规定沿径向向外为正）来计算，即

$$\iint_{\text{侧面}}E\cdot \mathrm{d}S\approx E_r\cdot 2\pi r\cdot 2l$$

由高斯定理，

$$\oint_{\text{圆柱面}}E\cdot \mathrm{d}S=\iint_{\text{两端面}}E\cdot \mathrm{d}S+\iint_{\text{侧面}}E\cdot \mathrm{d}S=0$$

故

$$\iint_{\text{侧面}}E\cdot \mathrm{d}S=-\iint_{\text{两端面}}E\cdot \mathrm{d}S$$

即

$$E_r=-\frac{E_l r}{2l}=-\frac{\lambda Rr}{4\varepsilon_0(R^2+r^2)^{3/2}}\approx-\frac{\lambda r}{4\varepsilon_0R^2}$$

E_r 取负值，表明 $\boldsymbol{E}_r$ 指向 O 点．

带电小球在 r 处所受静电力为

$$F_r=qE_r=-\frac{\lambda q}{4\varepsilon_0R^2}r$$

这是一个线性恢复力，小球在它的作用下将绕 O 点作简谐振动，振动的圆频率 ω 和周期 T 为

$$\omega\approx\sqrt{\frac{\lambda q}{4\varepsilon_0 mR^2}}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=4\pi R\sqrt{\frac{\varepsilon_0 m}{\lambda q}}$$

当然，这是近似的估算值．

【题 2】 试应用毕奥－萨伐尔定律,求解以下两题.

1．椭圆形闭合导线的椭圆方程为

$$\frac{x^2}{A_2}+\frac{y^2}{B^2}=1,\quad A>B$$

其中 A 和 B 均为已知量.设导线中通以稳恒电流 I.试求椭圆焦点处磁感强度 B_1 的大小.

2．在 $x>0$ 区域有一条无限双曲线形导线,其双曲线方程为

$$\frac{x^2}{A_2}-\frac{y^2}{B^2}=1$$

其中 A 和 B 均为已知量.设导线中通以稳恒电流 I.试求双曲线内焦点(即在 $x>0$ 区域中的焦点)处磁感强度 B_2 的大小.

【分析】 由毕－萨定律的矢积关系可知,平面电流中的每一个电流元在该平面上任意一点产生的磁场 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 的方向都垂直于该平面,因此平面电流在该平面上任意一点的磁场大小 B 是各 $\mathrm{d}B$ 的标量和.

椭圆和双曲线均属圆锥曲线,它们在平面极坐标中可表为

$$r=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$$

其倒数为

$$\frac{1}{r}=\frac{1-e\cos\theta}{ep}$$

考虑到电流元对焦点磁场的贡献 $\mathrm{d}B$ 与 r^2 成反比,不难看出,采用极坐标求解本题较为方便.

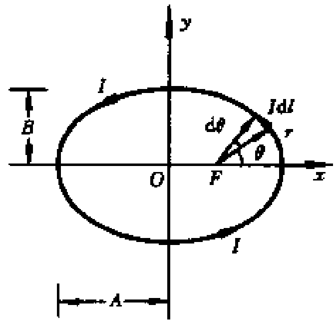
【解】 1．椭圆电流如电试(二)图 2－1 所示,任一电流元 $I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 在焦点 F 的磁场 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}_1$ 的方向垂直图平面向外,由毕－萨定律,为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}_1=\frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times(-\boldsymbol{r})}{4\pi r^3}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 是由焦点 F 到电流元 $I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的距离矢量.$\mathrm{d}\boldsymbol{B}_1$ 的大小为

$$\mathrm{d}B_1=\frac{\mu_0 I(r\mathrm{d}\theta)r}{4\pi r^3}=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}\mathrm{d}\theta$$

其中用到 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 在与 $\boldsymbol{r}$ 垂直方向的投影为 $r\mathrm{d}\theta$.



电试(二)图 2－1

在极坐标系中的椭圆方程为

$$\frac{1}{r}=\frac{1-e\cos\theta}{eP}$$

其中

$$e=\frac{C}{A},\quad p=\frac{B^2}{C},\quad C=\sqrt{A^2-B^2}$$

代入 $\mathrm{d}B_1$ 表达式,得

$$\mathrm{d}B_1=\frac{\mu_0 I}{4\pi ep}(1-e\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

对整个椭圆积分,得(因各 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}_1$ 的方向相同)

$$B_1=\int\mathrm{d}B_1=\frac{\mu_0 I}{4\pi ep}\int_0^{2\pi}(1-e\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi ep}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\mu_0 I}{2ep}$$

把 e 与 p 和 A,B,C 的关系代入，得出椭圆焦点 F 处磁感强度的大小 B_1 为

$$B_1 = \frac{\mu_0 IA}{2B^2}$$

2. 双曲线电流如电试(二)图 2－2 所示，任意电流元 $I\,d\boldsymbol{l}$ 在内焦点 F 处产生的磁场 $d\boldsymbol{B}_2$ 的方向垂直于图平面向外，其大小为

$$dB_2 = \frac{\mu_0 I d\theta}{4\pi r}$$

在极坐标系中双曲线的方程为

$$\frac{1}{r} = \frac{1 - e\cos\theta}{ep}$$

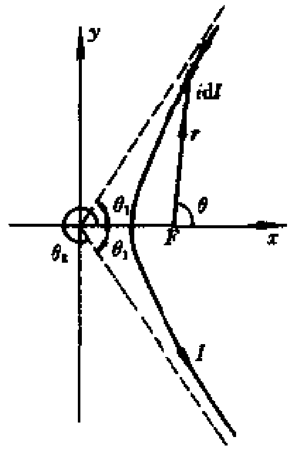
其中

$$e = \frac{C}{A}, \quad p = \frac{B^2}{C}, \quad C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

代入 dB_2 表达式，得

$$dB_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi ep}(1 - e\cos\theta)d\theta$$

对整个双曲线积分，得



电试(二)图 2－2

$$B_2 = \int dB_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi ep}\int_{\theta_1}^{\theta_2}(1 - e\cos\theta)d\theta$$

其中 θ_1 是双曲线右上方无穷远处所对应的极角，即为右上方渐近线与极轴的夹角，为

$$\theta_1 = \arctan\frac{B}{A}$$

θ_2 是双曲线右下方无穷远点所对应的 θ 角，θ_2 与右下方渐近线的关系已在电试(二)图 2－2 中标明，为

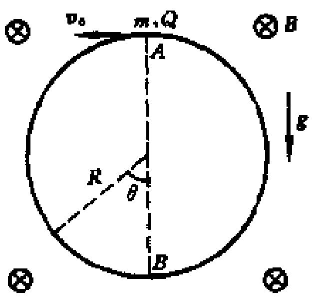
$$\theta_2 = 2\pi - \theta_1$$

代入，得

$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{\mu_0 I}{2\pi ep}\left(\pi - \arctan\frac{B}{A} + e\sin\theta_1\right) \\ &= \frac{\mu_0 IA}{2\pi B^2}\left(\pi - \arctan\frac{B}{A} + \frac{C}{A}\cdot\frac{B}{C}\right) \\ &= \frac{\mu_0 IA}{2\pi B^2}\left(\pi - \arctan\frac{B}{A} + \frac{B}{A}\right) \end{aligned}$$

【题 3】 试讨论带电质点在洛伦兹力的辅助作用下，贴着竖直平面内固定光滑圆环外周作持续圆运动的可能性.

如电试(二)图 3－1 所示，在竖直平面内有一个半径为 R 的固定光滑绝缘圆环，在空间有垂直环面的水平方向的匀强磁场 $\boldsymbol{B}$. 质量为 m，电量为 $Q(Q>0)$ 的质点，开始时在圆环最高点 A（在圆环外）并具有沿水平方向向左的速度 v_0. 引入两个无量纲的非零正参数 λ 和 μ，定义为



电试(二)图 3－1

$$\lambda=\frac{v_0^2}{Rg},\quad \mu=\frac{Q^2B^2R}{m^2g}$$

其中 g 是重力加速度.

1. 假设质点能够沿着圆环外周从最高的 A 点到达最低的 B 点，为了使质点而后刚好能够继续作圆周运动而不离开圆环，试问 μ 与 λ 之间应满足什么关系.

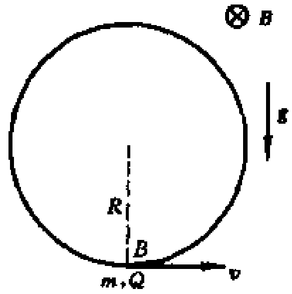
2. 对于上述 $\mu\sim\lambda$ 关系，试证明无论 λ 取何值(注意 $\lambda>0$)，质点在 A 处必能贴着圆环作圆周运动，且在 A 处质点对圆环的正压力 $N>0$.

3. 对于上述 $\mu\sim\lambda$ 关系，为使质点在电试(二)图 3－1 中 $\pi>\theta>0°$ 位置对圆环的正压力均满足 $N>0$，即为了使质点必能贴着圆环的左半圆周运动，试求 λ 的全部可取值.

4. 对于上述 $\mu\sim\lambda$ 关系，试给出质点必能贴着全部圆环作持续圆周运动的条件.

【分析】 带电质点能贴着圆环外周作持续圆周运动的条件，是圆环对质点的沿径向向外的支持力 N 处处大于或等于零. 从直观上可以感觉到，质点在圆环最低的 B 位置处最容易脱离圆环. 如果能确保质点经 B 位置时不离开圆环，则在圆环其他位置就有可能都不离开圆环. 本题各问即循此思路编制.

带电质点在运动过程中受重力、洛伦兹力和圆环支持力，除重力作功外，另两力均不作功，故机械能守恒，由此即可确定带电质点在各位置的速度大小. 又，质点沿圆环外周作圆周运动所需向心力，由重力的径向分量与洛伦兹力以及支持力三者之和提供. 从这两点出发，经适当演算，本题即可求解.



电试(二)图 3－2

【解】 1. 如电试(二)图 3－2 所示，质点在圆环最低点 B 处的速度 v 应沿水平方向向右，由机械能守恒定律，有

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv_0^2+mg(2R)$$

即

$$v=\sqrt{v_0^2+4Rg}$$

利用 $\lambda=\frac{v_0^2}{Rg}$，可将 v 表为

$$v=\sqrt{(\lambda+4)Rg}$$

在 B 点刚好能继续作圆周运动而不离开圆环的条件为，质点所受圆环的支持力为零，于是所需向心力由洛伦兹力和重力提供，为

$$\frac{mv^2}{R}=QBv-mg$$

因引入的 $\mu=\frac{Q^2B^2R}{m^2g}$，即

$$\frac{QB}{m}=\sqrt{\frac{\mu g}{R}}$$

由以上三式，得

$$\lambda+4=\sqrt{\mu(\lambda+4)}-1$$

故所求 $\mu-\lambda$ 关系式为

$$\mu=\frac{(\lambda+5)^2}{\lambda+4} \tag{1}$$

2. 质点在 A 处所受竖直向下的洛伦兹力与重力之和为

$$F=Qv_0B+mg$$

在 A 处以 v_0 作圆周运动所需的竖直向下的向心力为

$$F_{心}=\frac{mv_0^2}{R}$$

若

$$F>F_{心}$$

即若

$$Qv_0B+mg>\frac{mv_0^2}{R}$$

或

$$\sqrt{\mu\lambda}+1>\lambda \tag{2}$$

则质点必能在 A 处贴着圆环作圆周运动，且在 A 处圆环的支持力 $N>0$.

分两种情况讨论.

(i)设 $0<\lambda\leqslant 1$，则(2)式必定成立.

(ii)设 $\lambda>1$，则为

$$\sqrt{\mu\lambda}>\lambda-1$$

即当

$$\mu\lambda>(\lambda-1)^2$$

时，(2)式成立. 由(1)式，得

$$\mu\lambda=\frac{\lambda(\lambda+5)^2}{\lambda+4}>\lambda(\lambda+5)=(\lambda-1)^2+(7\lambda-1)$$

因 $\lambda>1$，故

$$(\lambda-1)^2+(7\lambda-1)>(\lambda-1)^2$$

即 $\mu\lambda>(\lambda-1)^2$ 成立.

综合(i)、(ii)的讨论，可知无论 λ 取何值，质点在 A 处必能贴着圆环作圆周运动，且 $N>0$.

3. 在 θ 角位置，质点的速度大小为

$$v=\sqrt{v_0^2+2Rg(1+\cos\theta)}=\sqrt{(\lambda+2+2\cos\theta)Rg}$$

质点在 θ 角位置对圆环的正压力为

$$N=QvB-mg\cos\theta-\frac{mv^2}{R}$$

计算得出

$$N=\left[\sqrt{\mu(\lambda+2+2\cos\theta)}-(\lambda+2+3\cos\theta)\right]mg$$

因此，只要在 $\pi>\theta>0$ 范围内

$$\sqrt{\mu(\lambda+2+2\cos\theta)}>\lambda+2+3\cos\theta$$

成立，或只要

$$\frac{\lambda+5}{\sqrt{\lambda+4}}\sqrt{\lambda+2+2\cos\theta}>\lambda+2+3\cos\theta \tag{3}$$

成立，就必定有

$$N>0$$

由于(3)式左边总是正值，故可分两种情况讨论.

(i)设$(\lambda+2+3\cos\theta)\leqslant0$，则(3)式必定成立.

(ii)设$(\lambda+2+3\cos\theta)>0$，可将(3)式两边平方，要求

$$(\lambda+5)^2[(\lambda+2)+2\cos\theta]>(\lambda+4)[(\lambda+2)+3\cos\theta]^2$$

即要求

$$(4\lambda+17)(\lambda+2)>9(\lambda+4)\cos^2\theta+2(2\lambda^2+8\lambda-1)\cos\theta$$

成立. 由于函数

$$y=9(\lambda+4)\cos^2\theta+2(2\lambda^2+8\lambda-1)\cos\theta$$

随$\cos\theta$的变化关系是开口向上的二次抛物线函数关系，只有极小值，故函数的最大值只能取自变量$\cos\theta$的最大值或最小值. 由于

$$\pi>\theta>0$$

及

$$\lambda+2+3\cos\theta>0$$

得出

$$\begin{cases}1>\cos\theta>-\dfrac{1}{3}(\lambda+2), & 当\ \lambda<1\\ 1>\cos\theta>-1, & 当\ \lambda\geqslant1\end{cases}$$

($ii-1$)取$\lambda<1$，若y的最大值在$\cos\theta$接近1处，则要求

$$(4\lambda+17)(\lambda+2)\geqslant9(\lambda+4)+2(2\lambda^2+8\lambda-1)$$

即要求

$$4\lambda^2+25\lambda+34\geqslant4\lambda^2+25\lambda+34$$

成立. 此式应取等号，自然成立.

若y的最大值在$\cos\theta$接近$[-\frac{1}{3}(\lambda+2)]$处，则要求

$$(4\lambda+17)(\lambda+2)\geqslant9(\lambda+4)[-\frac{1}{3}(\lambda+2)]^2+2(2\lambda^2+8\lambda-1)[-\frac{1}{3}(\lambda+2)]$$

即要求

$$\lambda^2+10\lambda+25\geqslant0$$

成立，此式显然对于任何$\lambda<1$值均成立.

($ii-2$)取$\lambda\geqslant1$，此时

$$2\lambda^2+8\lambda-1>0$$

故y的最大值必定出现在$\cos\theta$接近1处，则要求

$$(4\lambda+17)(\lambda+2)\geqslant9(\lambda+4)+2(2\lambda^2+8\lambda-1)$$

即要求

$$4\lambda^2+25\lambda+34 \geqslant 4\lambda^2+25\lambda+34$$

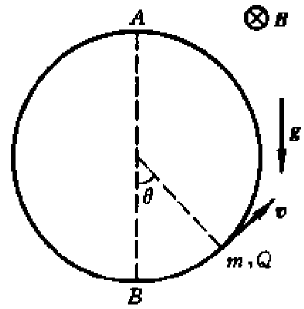
成立. 此式应取等号,自然成立.

综上所述,无论 λ 取何值,对于所有 $\pi>\theta>0$ 的位置,总都有 $N>0$,即质点必能贴着圆环左半圆周作圆运动,故在第 3 问中 λ 的全部可取值即为

$$\lambda>0$$

4. 把 θ 改取为圆环右半部分的方位角,如电试(二)图 3－3 所示,则第 3 问中讨论的内容与结论可以全部用于此处. 因此,质点能贴着圆环右半圆周作圆运动,并且对圆环的正压力都满足 $N>0$ 的全部可取的 λ 值仍为

$$\lambda>0$$



电试(二)图 3－3

质点回到 A 点后,将继续向左绕圆环作圆周运动. 因此,质点在

$$\mu=\frac{(\lambda+5)^2}{\lambda+4}$$

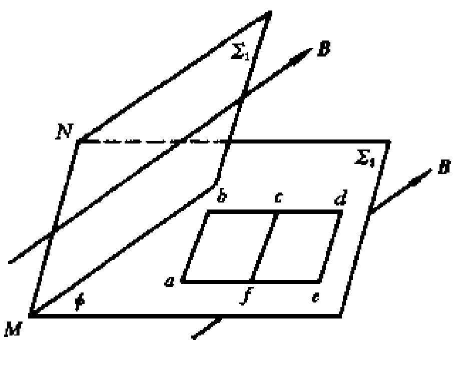
的条件下,能贴着圆环作持续圆周运动的条件是

$$\lambda>0$$

因 $\lambda=\dfrac{v_0^2}{Rg}$,这意味着,质点在圆环最高点 A 处只要稍有向左的速度(即 v_0 可任意小),即可绕圆环作持续的圆周运动.

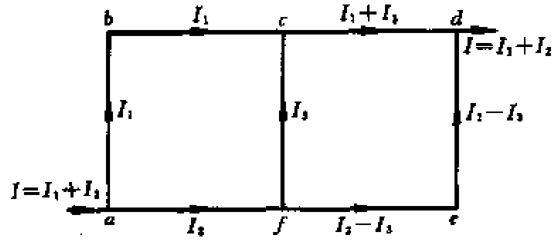
【题 4】 如电试(二)图 4－1 所示,平面Σ_1 与平面Σ_2 相交于直线 MN,两平面之间的夹角为 $\phi=45°$,在周围空间有如电试(二)图 4－1 所示的匀强磁场 $\boldsymbol{B}$,其方向与平面Σ_1 平行且与直线 MN 垂直. 在平面Σ_2 上有一长方形网络,它是由 7 根长度均为 l 的不同材料电阻丝连接而成的,网络的 ab 边与直线 MN 平行,设各段的电阻依次为 $R_{ab}=R_{fc}=R_{ed}=R$, $R_{af}=R_{bc}=2R$, $R_{fe}=R_{cd}=4R$,且电流 I 从 a 点流入,从 d 点流出. 试求电流网络 $abcdef$ 所受磁场安培力的大小 F.

【分析】 本题的一种解法是,根据已知的网络电阻分布,先求出各段电阻丝上的电流,再求各段电流所受的安培力,最后得出网络所受的合力 F. 但在这种方法中,计算网络的电流分布较为麻烦. 是否有较为简便的计算方法呢?

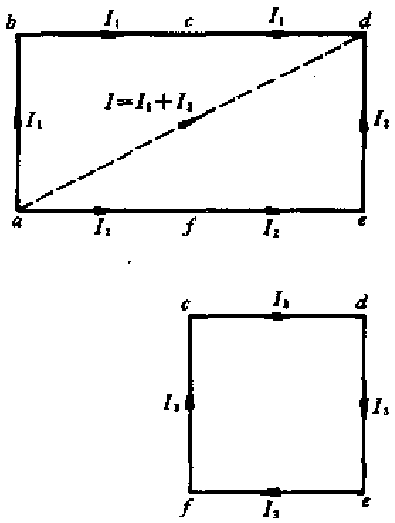


电试(二)图 4－1

稍加观察,不难猜测,整个网络电流所受安培力,似乎可以等效为从 a 到 d 的假想直线电流 I 所受的安培力. 引发这一猜测的原因显然是,任何单回路电流在匀强磁场中所受的安培力为零,或者说,首与尾分别重合的电流线段若其中电流相同,则在匀强磁场中所受安培力相同. 虽然本题的电流网络并非单回路电流,但只要有了这样的猜测,就不难证明其正确性.



电试(二)图 4-2



电试(二)图 4-3

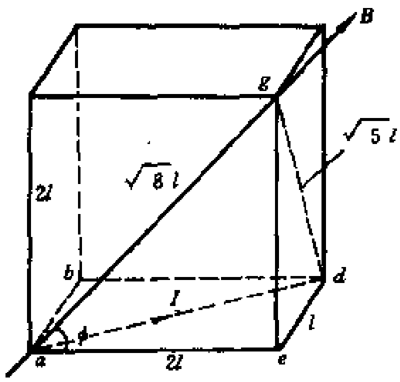
【解】 网络中的电流分布可标明如电试(二)图 4-2 所示. 它等效为电试(二)图 4-3 中两个网络电流的叠加. 因此，电试(二)图 4-2 的网络电流所受的安培力，就等于电试(二)图 4-3 的两个网络电流所受安培力之和. 电试(二)图 4-3 中小网络，即闭合电流 $cdef$ 在匀强磁场中所受安培力为零，电试(二)图 4-3 中大网络所受安培力，则等于该网络中电流为 $I=I_1+I_2$ 的虚直线 ad 所受的安培力. 因此，电试(二)图 4-2 的网络电流所受安培力的大小为

$$F=Il_{ad}B\sin\theta$$

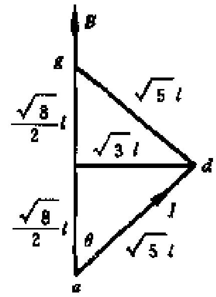
其中

$$l_{ad}=\sqrt{5}l$$

其中 θ 为磁感线与直线 ad 之间的夹角.



电试(二)图 4-4



电试(二)图 4-5

为了计算 θ 角，从电试(二)图 4-4 所示的长方体框架中，取出其中的三角形 agd，画在电试(二)图 4-5 中. 于是，磁感线(B 线)ag 与电流线(I 线)ad 之间的夹角 θ 满足

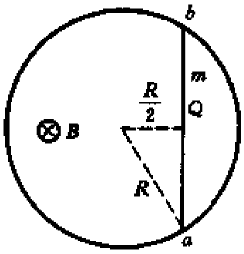
$$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}l}{\sqrt{5}l}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

把 l_{ad} 和 $\sin\theta$ 代入，得出电流网络（如电试(二)图 4－2）所受总安培力 F 为

$$F = Il_{ad}B\sin\theta = I\sqrt{5}lB\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \sqrt{3}IlB$$

可见 F 与网络中各线段的电阻大小无关.

【题 5】 如电试(二)图 5－1 所示，半径为 R 的光滑绝缘圆环固定在水平面上，环所在的与水平面垂直的长直圆柱体空间内有均匀磁场，圆柱体空间外无磁场. 磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的基准方向竖直向下. 在圆环内有一根质量为 m，电量为 $Q(Q>0)$，且都均匀分布的绝缘刚性细杆 ab，杆中心与圆环中心的距离为 $\frac{R}{2}$，杆两端被约束在环壁上可绕环作无摩擦的运动. 设 $t=0$ 时，杆静止，尔后，因磁场 $\boldsymbol{B}$ 的大小按 $B=B_0\sin\omega_0 t$ 变化，杆在环内先逆时针转过 2π 角，再顺时针转回 2π 角，并如此不断交替. 设杆的运动并不改变杆上电荷的均匀分布.



电试(二)图 5－1

1. 试确定 ω_0 与 m, Q, B_0 之间的关系.

2. 试确定杆通过其 a 和 b 两端对环所施作用力 $\boldsymbol{N}_a$ 和 $\boldsymbol{N}_b$ 随时间 t 的变化规律.

【分析】 因细杆被约束在环壁上，细杆的运动是在水平面内的刚体绕定轴转动. 细杆转动的原因是，磁场随时间变化产生的涡旋电场对细杆上电荷的作用力相对圆环的中央轴有非零的力矩. 显然，细杆运动过程中其中的电荷还会受到磁场的洛伦兹力，另外，圆环通过细杆的 a 和 b 端也会对细杆施加作用力，但因这两种力的作用线都通过圆环中心，其力矩都为零，对细杆的转动并无影响.

由于磁场的大小随时间简谐式地变化，因而所产生的涡旋电场以及相应的涡旋电场力矩也都将随时间简谐式地变化，从而使细杆的转角也随时间简谐式地变化. 由题设，细杆先逆时针转过 2π 角，再顺时针转回 2π 角，并不断往复，这表明转角从 0 增为 2π，再从 2π 减为 0，亦即转角的振幅为 π，理解了细杆转动的原因，及各种有关因素与条件，第 1 问即可求解.

圆环对细杆的作用力虽对细杆的转动力矩无贡献，但这种作用力与洛伦兹力以及涡旋电场力一起，决定了细杆质心的运动，细杆质心的运动可由细杆的转动确定，洛伦兹力也与细杆的转动有关，涡旋电场力则已在第 1 问的求解过程中给出. 于是，由质心运动定理便可求出细杆通过 a 端和 b 端对圆环施加的作用力.

【解】 1. 杆的运动是绕定轴转动，可用环心 O' 与杆中心（也是杆的质心）O 的连线 $O'O$ 的旋转运动代表，杆逆时针的转角表为 θ，如电试(二)图 5－2 所示.

当杆在 θ 角位置时，环对杆 a 端和 b 端的作用力 $\boldsymbol{N}_a$ 和 $\boldsymbol{N}_b$ 以及杆上各处电荷因绕 $0'$ 运动所受洛伦兹力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}'$ 的方向都通过 O' 点，故相对 O' 无力矩. 杆上各处电荷所受涡旋电场的作用力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 相对 O' 有力矩，此力矩使杆绕 O' 旋转.

如电试(二)图 5－2 所示，建立随杆一起转动的 Oxy 坐标. 杆上任意 x 处（与 O' 的距离为 r）的涡旋电场的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的正方向如电试(二)5－2 所示，由

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\iint \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

得

$$E\cdot 2\pi r=|-B_0\omega_0\cos\omega_0 t\cdot \pi r^2|$$

故 $\boldsymbol{E}$ 的大小为

$$E=\left(\frac{1}{2}B_0\omega_0\cos\omega_0 t\right)r$$

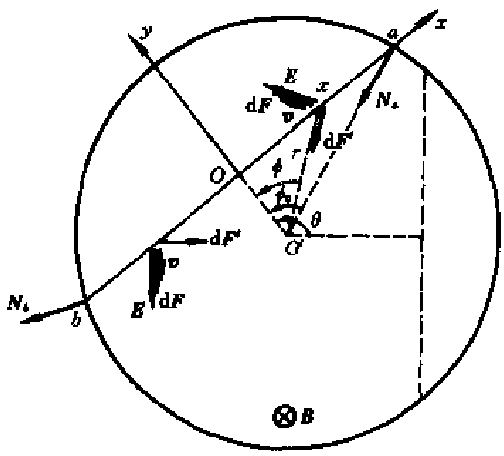
为了方便，引入辅助量

$$D=\frac{R}{2}$$

则

$$OO'=D,\quad O'a=O'b=R=2D,\quad Oa=Ob=\sqrt{3}D$$

在正 x 轴方向 x 处，dx 小段的电荷 $dQ=\lambda dx$，它所受涡旋电场力 dF 的方向如电试(二)图 5－2 所示，大小为



电试(二)图 5－2

$$dF=EdQ=\frac{1}{2}B_0\omega_0\cos\omega_0 t\cdot\lambda r dx$$

其中电荷线密度 λ 为

$$\lambda=\frac{Q}{ab}=\frac{Q}{2\sqrt{3}D}$$

$d\boldsymbol{F}'$ 对 O' 的逆时针方向的力矩的大小为

$$dM=rdF=\left(\frac{Q}{4\sqrt{3}}B_0\omega_0\cos\omega_0 t\right)\left(D+\frac{x^2}{D}\right)dx$$

其中用到

$$r^2=D^2+x^2$$

Oa 段涡旋电场力的力矩为

$$\int_0^a dM=\frac{1}{2}(QB_0\omega_0\cos\omega_0 t)D^2$$

显然，杆所受涡旋电场力相对 O' 的总力矩为上述结果的二倍，即

$$M=(QB_0\omega_0\cos\omega_0 t)D^2$$

设杆的转动角加速度为 β，由刚体定轴转动定理，有

$$M=I\beta$$

其中转动惯量 I 为

$$I=\frac{1}{3}m(Oa)^2+m(OO')^2=2mD^2$$

由以上三式，得

$$\beta=\frac{QB_0\omega_0}{2m}\cos\omega_0 t$$

因初条件为 $t=0$ 时，$\omega=0$，上式积分，得角速度为

$$\omega=\frac{QB_0}{2m}\sin\omega_0 t=\frac{QB}{2m}$$

因初条件为 $t=0$ 时，$\theta=0$，再积分，得转角为

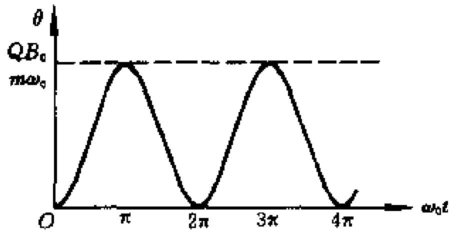
$$\theta=\frac{QB_0}{2m\omega_0}(1-\cos\omega_0 t)$$

$\theta(t)$曲线如电试(二)图 5－3 所示，θ 在 0 与$\frac{QB_0}{m\omega_0}$之间变化. 当 t 从 0 到$\frac{\pi}{\omega_0}$期间，θ 从 0 沿逆时针方向增为$\frac{QB_0}{m\omega_0}$，当 t 从$\frac{\pi}{\omega_0}$到$\frac{2\pi}{\omega_0}$期间，θ 从$\frac{QB_0}{m\omega_0}$沿顺时针方向减为 0. 尔后，不断地如此往复. 由题文所述，应有

$$\frac{QB_0}{m\omega_0}=2\pi$$

故

$$\omega_0=\frac{QB_0}{2\pi m}$$



电试(二)图 5－3

2. 如电试(二)图 5－2 所示，涡旋电场 $\boldsymbol{E}$ 的分布具有对称性，可知细杆各处所受涡旋电场作用力的 y 分量互相抵消. 在正 x 方向，在杆上 x 处的 $\mathrm{d}x$ 小段所受涡旋电场作用力的 x 分量为

$$\mathrm{d}F_x=-\mathrm{d}F\cos\phi$$

角 ϕ 已在电试(二)图 5－2 中标明，为

$$\cos\phi=\frac{O'O}{r}=\frac{D}{r}$$

把 $\mathrm{d}F$ 表达式代入，得

$$\mathrm{d}F_x=-\left(\frac{QB_0\omega_0}{4\sqrt{3}}\cos\omega_0 t\right)\mathrm{d}x$$

沿正 x 方向积分，得

$$\int_0^a \mathrm{d}F_x=-\left(\frac{1}{4}QB_0\omega_0\cos\omega_0 t\right)D$$

由对称性，杆所受总的涡旋电场作用力的 x 分量为上式的二倍，即

$$F_x=-\left(\frac{1}{2}QB_0\omega_0\cos\omega_0 t\right)D$$

再看洛伦兹力. 杆上两对称点的速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向如电试(二)图 5－2 所示，相应的两个洛伦兹力$\mathrm{d}\boldsymbol{F}'$均指向环心 O'，它们的 x 分量互相抵消，合力沿 y 轴负方向，即指向 O'. 由于在正 x 方向，在 x 处的 $\mathrm{d}x$ 小段的速度为

$$v=\omega r$$

$\mathrm{d}x$ 小段的电量为 $\mathrm{d}Q$，所受洛伦兹力为

$$\mathrm{d}F'=\mathrm{d}Q\cdot vB=\lambda\mathrm{d}x\cdot\omega rB$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{F}'$的 y 分量为

$$\mathrm{d}F'_y=-\mathrm{d}F'\cos\phi=-\lambda\mathrm{d}x\cdot\omega BD$$

其中用到 $\cos\phi=\frac{D}{r}$. 沿正 x 方向积分，得

$$\int_0^a \mathrm{d}F'_y=\int_0^a -\lambda\omega BD\mathrm{d}x=-\lambda\omega BD(Oa)$$

因对称性，杆所受总的洛伦兹力应为上式的二倍(因 x 分量为零)，即为

$$F'_y=-2\lambda\omega BD(Oa)=-Q\omega BD$$

在第 1 问中已经得出 $\omega=\dfrac{QB}{2m}$，即 $QB=2m\omega$，代入，得

$$F'_y = -2m\omega^2 D=2F_{心}$$

式中 $F_{心}=m\omega^2 D$ 是细杆质心作圆周运动所需的向心力，上式表明洛伦兹力时时刻刻都刚好等于杆质心圆周运动所需向心力的两倍.

最后，讨论杆两端对环的作用力 N_a 和 N_b，其方向如电试(二)图 5-2 所示. 故环对杆的总作用力的 x 分量和 y 分量分别为

$$N_x=N_a\sin\phi_0+N_b\sin\phi_0$$
$$N_y=N_a\cos\phi_0-N_b\cos\phi_0$$

角 ϕ_0 已在电试(二)图 5-2 中标明，有

$$\sin\phi_0=\frac{Oa}{O'a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos\phi_0=\frac{1}{2}$$

代入，得

$$N_x=\frac{\sqrt{3}}{2}(N_a+N_b)$$
$$N_y=\frac{1}{2}(N_a-N_b)$$

由于杆所受总的洛伦兹力刚好等于杆质心圆周运动所需向心力的两倍，而涡旋电场对杆的作用力又无 y 分量，故应有

$$N_y=m\,\omega^2 D$$

细杆质心在 x 方向(切向)的运动方程为

$$m\beta D = -(F_x+N_x)$$

故

$$\begin{aligned}N_x &= -F_x-m\beta D\\ &=\left(\frac{1}{2}QB_0\omega_0\cos\omega_0 t\right)D-mD\frac{QB_0\omega_0}{2m}\cos\omega_0 t=0\end{aligned}$$

由此解出

$$N_a=N_y=m\omega^2 D=\frac{Q^2B_0^2}{8m}R\sin^2\omega_0 t$$
$$N_b=-N_a=-\frac{Q^2B_0^2}{8m}R\sin^2\omega_0 t$$

Na 恒为正，表明 N_a 的方向与电试(二)图 5-2 中标明的方向一致. N_b 恒为负，表明 N_b 的方向与电试(二)图 5-2 中标明的方向相反.

【这是北京大学物理试验班的试题之一. 该试验班是为了培训、选拔参加 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)的中国代表队而设立的.】

电磁学试题(三)
(电路)

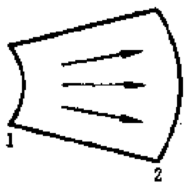
【题1】 若二维曲面上分布着稳恒的或似稳的电场 $\boldsymbol{E}$,即若相应的电场线在该曲面上,则曲面上任意两点1和2之间的电势差为

$$\Delta U=\int_1^2 \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

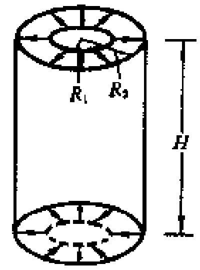
其中$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$是线元矢量,按习惯方式定义.在曲面上引入二维电流密度(实为电流的线密度)$\boldsymbol{j}^*$,并引入法向线元矢量$\mathrm{d}\boldsymbol{l}^*$,其大小仍为 $\mathrm{d}l$,其方向与$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$垂直,则流过曲面上某段曲线 l 的电流强度为

$$I=\int_l \boldsymbol{j}^*\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}^*$$

1. 设在二维金属曲面上自由电子数的面密度为 n^*,电子质量为 m,电子电量为 $-e$,温度为 T 时自由电子的平均自由程为$\bar{\lambda}^*$,热运动平均速率为 $\bar{v}^*$,不考虑磁场力.试导出金属曲面上欧姆定律的微分形式 $\boldsymbol{j}^*=\sigma^*\boldsymbol{E}$,并给出二维电导率 σ^* 与 n^*、e、m、$\bar{\lambda}^*$、$\bar{v}^*$之间的关系.



电试(三)图1-1



电试(三)图1-2

2. 在二维曲面上取一段二维流管如电试(三)图1-1所示,端线1和2分别为等势线,因$\boldsymbol{j}^*=\sigma \boldsymbol{E}^*$,电试(三)图1-1中带箭头的方向线既表示 $\boldsymbol{E}$ 的电场线又表示$\boldsymbol{j}^*$的电流线.若1和2之间的电势差为 ΔU,流过端线1或端线2的电流强度相同,为 I,则该段流管的电阻定义为 $R=\dfrac{\Delta U}{I}$.

把二维电阻率(二维电导率的倒数)为常数 ρ^* 的金属材料构成如电试(三)图1-2所示的几何面,其侧面是高度为 H,半径为 R_2 的圆柱面,上、下两端面都是内半径为 R_1、外半径为 R_2 的圆环面.设电流从上端面内圆线均匀流入,从下端面内圆线均匀流出.试求其电阻 R.

【分析】 实体的导体都是三维的,欧姆定律微分形式 $\boldsymbol{j}=\sigma \boldsymbol{E}$ 中的各个物理量都是三维的.三维的电导率 σ 与微观量 n(电子数体密度)、e、m、$\bar{\lambda}$(三维的平均自由程)、$\bar{v}$(三维的热运动平均速率)之间的关系,已由金属导电的经典电子论导出.

本题把实际的薄板导体抽象为二维曲面,引入相应的二维量,仿照三维情形的讨论,即可导

出二维情形的欧姆定律微分形式 $\boldsymbol{j}^*=\sigma^*\boldsymbol{E}$,并得出二维电导率 σ^* 与微观量 n^*、e、m、$\bar{\lambda}^*$、$\bar{v}^*$ 之间的关系.在此基础上,不难计算二维曲面的二维电阻.

【解】 1.在电场 $\boldsymbol{E}$ 的作用下,二维金属曲面上的自由电子在无规则热运动基础上,产生附加的定向漂移运动,这种定向漂移运动在曲面上形成宏观的二维电流.

由于电子无规则地与金属的晶格离子碰撞,可以认为每次碰撞都使得电子已有的漂移速度 $\boldsymbol{u}^*$ 降为零,然后被电场 $\boldsymbol{E}$ 重新加速.设 $\bar{\tau}^*$ 为每相邻两次碰撞之间的平均时间,则电子的最大漂移速度为

$$\boldsymbol{u}^*=\bar{\tau}^*\boldsymbol{a}=\bar{\tau}^*\frac{(-e)}{m}\boldsymbol{E}$$

平均漂移速度为

$$\overline{\boldsymbol{u}}^*=\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^*=-\frac{e}{2m}\tau^*\boldsymbol{E}$$

电子热运动的平均速率 $\bar{v}^*$ 与平均自由程 $\bar{\lambda}^*$ 以及 $\bar{\tau}^*$ 之间的关系为

$$\bar{\tau}^*=\frac{\bar{\lambda}^*}{\bar{v}^*}$$

代入上式,得

$$\overline{\boldsymbol{u}}^*=-\frac{e}{2m}\frac{\bar{\lambda}^*}{\bar{v}^*}\boldsymbol{E}$$

二维电流密度 $\boldsymbol{j}^*$ 与自由电子数的面密度 n^* 以及平均漂移速度 $\overline{\boldsymbol{u}}^*$ 的关系为

$$\boldsymbol{j}^*=-n^*e\overline{\boldsymbol{u}}^*$$

把上述 $\overline{\boldsymbol{u}}^*$ 的结果代入,即可得出金属曲面中欧姆定律的微分形式为

$$\boldsymbol{j}^*=\sigma^*\boldsymbol{E}$$

式中的二维电导率 σ^* 为

$$\sigma^*=\frac{n^*e^2}{2m}\frac{\bar{\lambda}^*}{\bar{v}^*}$$

2.设流过电试(三)图 1-2 金属曲面的电流强度为 I,上端面内圆线与下端面内圆线之间的电势差为 ΔU,则金属曲面的电阻为

$$R=\frac{\Delta U}{I}$$

把上端面内圆线与外圆线之间的电势差表为 ΔU_1,圆柱面上、下之间的电势差表为 ΔU_2,下端面外圆线与内圆线之间的电势差表为 ΔU_3,则有

$$\Delta U=\Delta U_1+\Delta U_2+\Delta U_3$$

上端面电流密度 $\boldsymbol{j}^*$ 沿径向向外(见电试(三)图 1-2),大小为

$$j^*=\frac{I}{2\pi r},R_1\leqslant r\leqslant R_2$$

电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{j}^*}{\sigma^*}=\rho^*\boldsymbol{j}^*$$

$\boldsymbol{E}$ 的方向也是沿径向向外,大小为

$$E=\frac{\rho^* I}{2\pi r}$$

于是有

$$\Delta U_1=\int_{R_1}^{R_2}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{R_1}^{R_2}E\mathrm{d}r=\frac{\rho^* I}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

圆柱面上的电流密度 $\boldsymbol{j}^*$ 竖直向下，大小为

$$j^*=\frac{I}{2\pi R_2}$$

电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\rho^*\boldsymbol{j}^*$$

$\boldsymbol{E}$ 的方向也是竖直向下，大小为

$$E=\frac{\rho^* I}{2\pi R_2}$$

于是有

$$\Delta U_2=\int_{上}^{下}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_0^H E\mathrm{d}h=\frac{\rho^* IH}{2\pi R_2}$$

仿照上端面 ΔU_1 的计算，得出下端面的 ΔU_3 为

$$\Delta U_3=\frac{\rho^* I}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

把 $\Delta U_1,\Delta U_2,\Delta U_3$ 相加，得

$$\Delta U=\Delta U_1+\Delta U_2+\Delta U_3=\frac{1}{\pi}\left(\ln\frac{R_2}{R_1}+\frac{H}{2R_2}\right)\rho^* I$$

故

$$R=\frac{\Delta U}{I}=\frac{1}{\pi}\left(\ln\frac{R_2}{R_1}+\frac{H}{2R_2}\right)\rho^*$$

【题 2】 二端电阻网络等效电阻的计算.

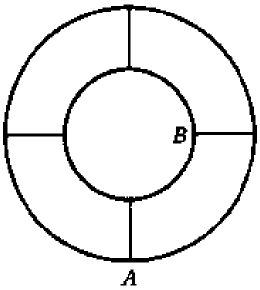
1. 在如电试(三)图 2-1 所示的平面电阻丝网络中，每一直线段和每一圆弧段电阻丝的电阻均为 r. 试求 A 点和 B 点之间的等效电阻 R_{AB}. 只要求简单叙述解题步骤，写出必要的中间结果和答案.

2. 如电试(三)图 2-2 所示的无限内接正方形金属丝网络是由粗细一致、材料相同的金属丝构成的，其中每一个内接正方形的顶点都在外侧正方形四边的中点. 已知最外侧大正方形一边的电阻为 R_0. 试求：(a)网络中 A 点和 C 点之间的等效电阻 R_{AC}. (b)网络中 E 点和 G 点之间的等效电阻 R_{EG}.

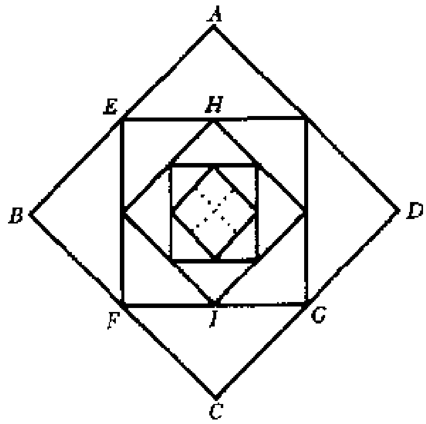
【分析与解】 1. 提供两种解法.

电流分解法.

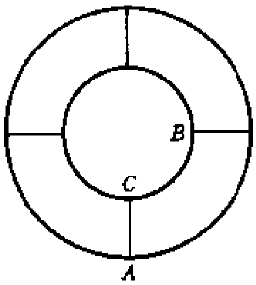
如电试(三)图 2-3，设电流 I 从 A 点流入，从 B 点流出，设流过 AC 支路的电流为 I_{AC}，流过 CB 支路的电流为 I_{CB}，则有



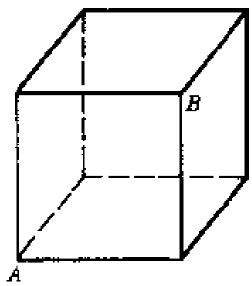
电试(三)图 2-1



电试(三)图 2-2



电试(三)图 2-3



电试(三)图 2-4

$$R_{AB}=\frac{I_{AC}r+I_{CB}r}{I}$$

网络的这种不对称的电流分布可以分解为两个对称的电流分布.

其一,电流 I 从 A 点流入,从 C 点流出,流过 AC 支路的电流表为 $I_{AC}(1)$,流过 CB 支路的电流表为 $I_{CB}(1)$.

其二,电流 I 从 C 点流入,从 B 点流出,流过 AC 支路的支流表为 $I_{AC}(2)$,流过 CB 支路的电流表为 $I_{CB}(2)$,则有

$$I_{AC}=I_{AC}(1)+I_{AC}(2)$$

$$I_{CB}=I_{CB}(1)+I_{CB}(2)$$

电流 I 从 A 点流入,从 C 点流出,利用网络电流分布所具有的对称性,不难算出

$$I_{AC}(1)=\frac{7}{12}I,\quad I_{CB}(1)=-\frac{5}{24}I$$

电流 I 从 C 点流入,从 B 点流出,同样利用网络电流分布所具有的对称性,可算出

$$I_{AC}(2)=-\frac{5}{24}I,\quad I_{CB}(2)=\frac{7}{12}I$$

于是,得

$$I_{AC}=I_{AC}(1)+I_{AC}(2)=\frac{3}{8}I$$

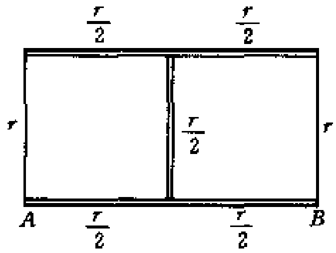
$$I_{CB}=I_{CB}(1)+I_{CB}(2)=\frac{3}{8}I$$

代人 R_{AB}的公式，得

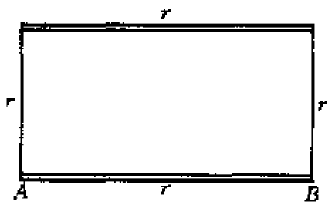
$$R_{AB}=\frac{3}{4}r$$

网络等效变形法．电试(三)图 2－1 的平面网络，可以等效地变形为如电试(三)图 2－4 所示的立方体网络．利用电试(三)图 2－4 的立方体网络相对 A,B 两点连线所具有的对称性，可将其等效地变形为如电试(三)2－5 所示的平面网络，其中单线支路的电阻均为 r，双线支路的电阻均为$\frac{r}{2}$，电试(三)图 2－5 的网络左、右对称，中间支路无作用可拆去，从而等效地变形为如电试(三)图 2－6 所示的网络，由电试(三)图 2－6，容易算出 A 和B 之间的等效电阻为

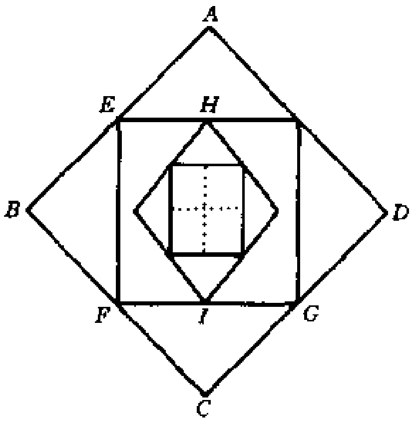
$$R_{AB}=\frac{3}{4}r$$



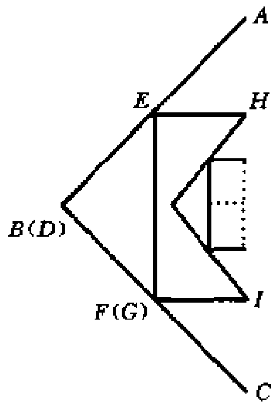
电试(三)图 2－5



电试(三)图 2－6



电试(三)图 2－7



电试(三)图 2－8

2．电试(三)图 2－2 的网络相对两种输入、输出端连线，各自具有相应的对称性，据此，可将电试(三)图 2－2 的网络作简化的等效变形．再利用网络内、外之间的相似性，建立递推关系，于是 R_{AC}和 R_{EG}即可求解．

(a)先考察电试(三)图 2－2 网络中 B 点和D 点连线上的结点．由于这些结点都处于 A 点到C 点途径的中间，在 A 和C 两端接上电源时，这些结点必定处在一等势线上，因此，可将这些结点“拆开”，把电试(三)图 2－2 的网络等效地变形为如电试(三)图 2－7 所示的网络．

接着，可将电试(三)图 2－7 的网络沿 A、C 连线对叠，使原来左、右对称的金属丝、结点相

互重合，从而等效地变形为电试(三)图2-8所示的网络.

如电试(三)图2-8，注意到A和C之间的网络与H和I之间的网络在形式上相似，并且后者恰好比前者缩小一倍，因此，有

$$R_{HI}=\frac{1}{2}R_{AC}$$

把长度为AE的双金属丝的电阻表为R_1，把长度为EH的双金属丝的电阻表为R_2，则不难算出

$$R_1=\frac{R_0}{4}=\sqrt{2}R_2$$

$$R_2=\frac{\sqrt{2}}{8}R_0$$

于是可把电试(三)图2-8的网络具体化为电试(三)图2-9的网络，其中虚线框内上、下两端之间的电阻为

$$R'=2\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}=2(2-\sqrt{2})R_2$$

由电试(三)图2-9，R_{AC}与R_{HI}之间的递推关系为

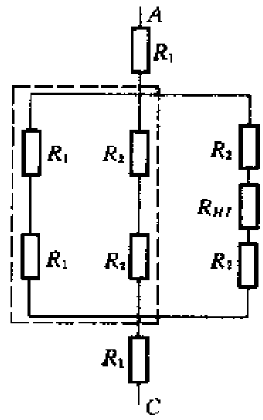
$$R_{AC}=2R_1+\frac{R'(2R_2+R_{HI})}{R'+2R_2+R_{HI}}$$

把$R_{HI}=\frac{1}{2}R_{AC}$以及$R_1=\sqrt{2}R_2$代入，得

$$R_{AC}=2(\sqrt{6}+\sqrt{2}-2)R_2$$

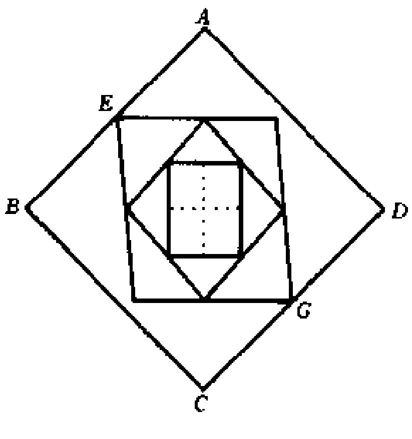
再把$R_2=\frac{\sqrt{2}}{8}R_0$代入，得

$$R_{AC}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1-\sqrt{2})R_0$$

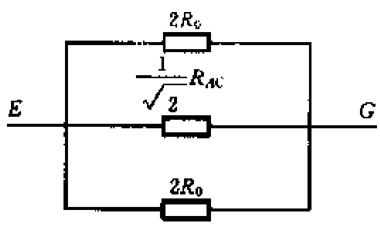


电试(三)图2-9

(b)能否采用(a)中的递推方法来求解R_{EG}呢？由于对E,G两点不存在结构相似的内层网络，故不宜直接采用(a)的方法.但可利用(a)的结果作简化，间接地采用递推方法.



电试(三)图2-10



电试(三)图2-11

根据电试(三)图 2-2 网络对 E,G 连线的对称性，可把电试(三)图 2-2 网络 AD 的中点以及 BC 中点处的结点"拆开"，等效为电试(三)图 2-10 的网络. 在电试(三)图 2-10 中，通过 E,G 两端与外正方形连接的内无限小网络与原网络电试(三)图 2-2 结构相同，只是线度缩小为原线度的$\frac{1}{\sqrt{2}}$倍，故 E,G 之间小网络的等效电阻应为 A,C 之间原网络等效电阻 R_{AC} 的$\frac{1}{\sqrt{2}}$倍. 据此，可把图 10 的网络具体化为电试(三)图 2-11 的网络．由电试(三)图 2-11，有

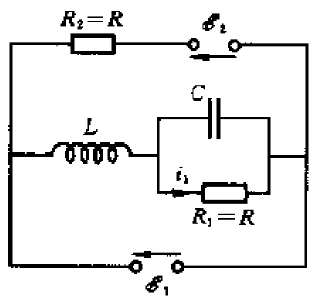
$$R_{EG}=\left(\frac{1}{R_0}+\frac{\sqrt{2}}{R_{AC}}\right)^{-1}$$

把(a)中的 R_{AC} 代入，得

$$R_{EG}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}R_0=(\sqrt{3}-\sqrt{2})R_0$$

【题 3】 如电试(三)图 3-1 所示的电路已经达到稳定状态，两个无内阻电源电动势的正方向分别如电试(三)图 3-1 中箭头所示，其值为

$$\mathscr{E}_1=\mathscr{E}_0\sin^2\omega t$$
$$\mathscr{E}_2=\mathscr{E}_0\cos\omega t$$



电试(三)图 3-1

电试(三)图 3-1 中其他参量为 $R_1=R_2=R,L=\frac{R}{2\omega},C=\frac{1}{2\omega R}$. 设流过电阻 R_1 的电流 i_1 的正方向如电试(三)图 3-1 所示. 试求 i_1 与 t 的关系，并以 ωt 为横坐标、i_1 为纵坐标，画出 $i_1\sim t$ 曲线.

【分析】 电动势 $\mathscr{E}_1$ 可分解为直流部分与角频率为 2ω 的简谐交流部分之和. 由于电路是线性的，$\mathscr{E}_1$ 与 $\mathscr{E}_2$ 共同存在时在电路中 R_1 上产生的电流 i_1，可以看作 $\mathscr{E}_1$ 与 $\mathscr{E}_2$ 单独存在时各自在电路中 R_1 上产生的电流之和. 其中 $\mathscr{E}_1$ 单独存在时在电路中 R_1 上产生的电流，又可看作是上述直流部分与简谐交流部分单独存在时，分别在电路中 R_1 上产生的电流之和.

经过上述线性分解后，复杂的多电源问题简化为一个个单一电源的简单问题. 由于电路是简单的串、并联，利用矢量图解法即可求解.

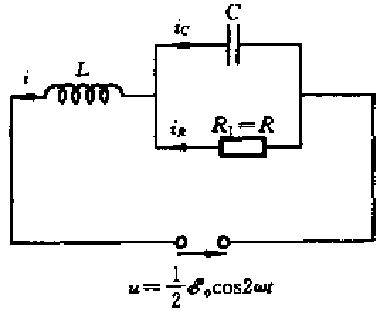
【解】 把电源分解如下．

$$\mathscr{E}_1=\frac{1}{2}\mathscr{E}_0-\frac{1}{2}\mathscr{E}_0\cos2\omega t$$
$$\mathscr{E}_2=\mathscr{E}_0\cos\omega t$$

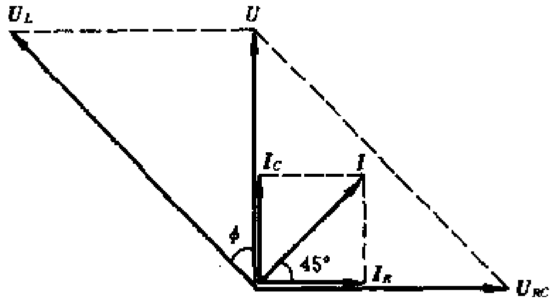
1. $\frac{1}{2}\mathscr{E}_0$ 对 i_1 的贡献 $i(1)$

$\frac{1}{2}\mathscr{E}_0$ 是直流电源，如电试(三)图 3-1，L 短路，C 断路，相当于直流电源直接加在 R_1 两端，有

$$i(1)=\frac{\mathscr{E}_0}{2R}$$



电试(三)图 3-2



电试(三)图 3-3

2. $-\frac{1}{2}\mathscr{E}_0\cos2\omega t$，对 i_1 的贡献 $i(2)$

$i(2)$可等效为电试(三)图 3-2 中的$(-i_R)$，i_R 可用矢量图解法求解. 作矢量图如电试(三)图 3-3，则

$$\frac{I_R}{I_C}=\frac{R}{\frac{1}{2\omega C}}=1$$

得

$$I=\sqrt{2}I_R$$

$$U_L=I(2\omega)L$$

$$U_{RC}=I_RR=\frac{I}{\sqrt{2}}\cdot 2\omega L=\frac{U_L}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\phi=\frac{U_{RC}}{U_L}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\phi=45°$$

$$U=U_L\cos\phi=U_{RC}$$

因 U_{RC}落后 U 的相位为$\frac{\pi}{2}$，故有

$$u_{RC}=\frac{1}{2}\mathscr{E}_0\cos(2\omega t-\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}\mathscr{E}_0\sin2\omega t$$

由此得出

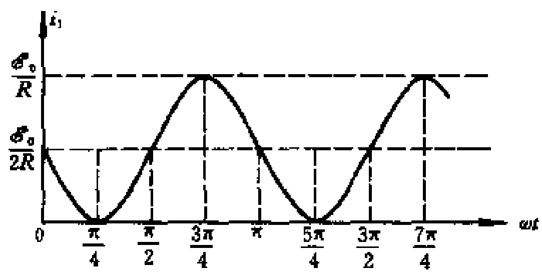
$$i_R=\frac{u_{RC}}{R}=\frac{\mathscr{E}_0}{2R}\sin2\omega t$$

$$i(2)=-i_R=-\frac{\mathscr{E}_0}{2R}\sin2\omega t$$

3. $\mathscr{E}_0\cos\omega t$ 对 i_1 的贡献 $i(3)$

由于 $\mathscr{E}_1$ 是无内阻的理想电源，故 $\mathscr{E}_2=\mathscr{E}_0\cos\omega t$ 对 i_1 的贡献相当于 $\mathscr{E}_1$ 电源被短接且无电动势时，流经 R_1 的电流，该电流显然为零，即

$$i(3)=0$$



电试(三)图 3-4

综上所述，有

$$i_1 = i(1) + i(2) + i(3)$$
$$= \frac{\mathscr{E}_0}{2R}(1 - \sin 2\omega t)$$

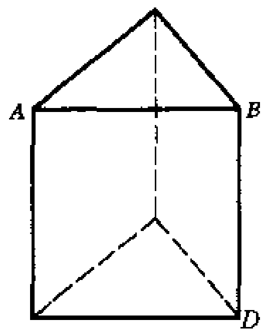
$i_1(t)$曲线如电试(三)图 3-4 所示.

【题 4】 几何图形化的 R、L 网络如电试(三)图 4－1 所示，其中每一根直线段都代表一条相同的 R、L 串联电路，对于所取的交流角频率 ω，有 $\omega L = \sqrt{3}R$.

1. 试计算 A，B 之间的等效电抗 Z_{AB}(复阻抗 $\tilde{Z}_{AB}$ 的模量)，答案仅用 R 表示.

2. 以 A 为输入端，D 为输出端，为使 A，D 之间网络总功率的功率因素成为 $\cos\phi = \frac{\sqrt{2}}{2}$，可在每一支路上串联一个相同的电容 C_1. 试求最小的 C_1 值，答案仅用 ω 和 R 表述.

3. 每一支路都不串联电容，但在 D 点之外串联一个电容 C_2，使网络 AD 与 C_2 构成的串联组总功率的功率因数成为 $\cos\phi = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 试求最小的 C_2 值，答案仍用 ω 和 R 表述.



电试(三)图 4－1

【分析与解】 1. 每一支路的复阻抗为

$$\tilde{Z} = R + j\omega L$$

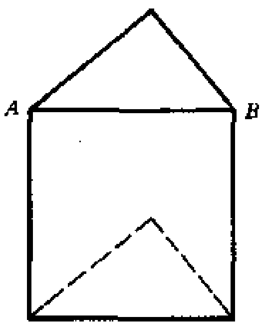
其中

$$\omega L = \sqrt{3}R$$

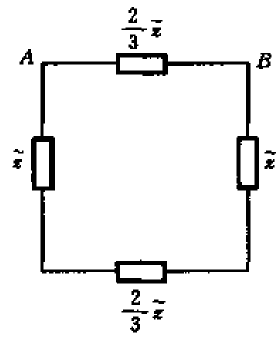
阻抗为

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = 2R$$

如电试(三)图 4－1，当电流从 A 点流入从 B 点流出时，由于网络具有的对称性，电试(三)图 4－1 中与 ABD 平面平行的虚直线支路上处处等势，无电流流过，可以拆去，使电试(三)图 4－1 的网络简化成如电试(三)图 4－2 所示的网络. 再由简单的串、并联关系，可将电试(三)图 4－2 的网络简化为电试(三)图 4－3 的网络. 由电试(三)图 4－3，容易算出 A，B 之间的等效复阻抗为



电试(三)图 4－2



电试(三)图 4－3

$$\widetilde{Z}_{AB}=\frac{8}{15}\widetilde{Z}$$

等效阻抗为

$$Z_{AB}=\frac{8}{15}Z=\frac{16}{15}R$$

2. 因各支路复阻抗 $\widetilde{Z}$ 相同，A 和 D 之间的等效阻抗应与 $\widetilde{Z}$ 成正比，且比例系数为实数，故 A 和 D 之间网络的总功率因数应与各支路网络的功率因数相同，为

$$\cos\phi_0=\frac{R}{Z}=\frac{1}{2}$$

为了将功率因数提高到

$$\cos\phi=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

在各支路上串联 C_1，为使 C_1 取最小值，要求

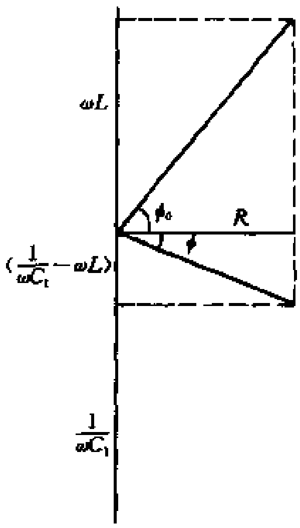
$$\frac{1}{\omega C_1}>\omega L$$

如电试(三)图 4－4 所示，有

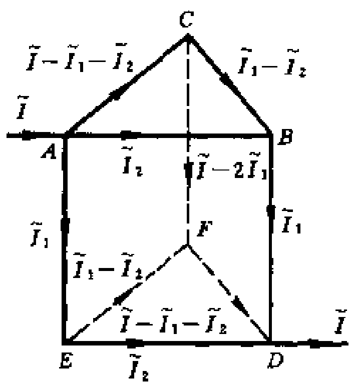
$$\cos\phi=\frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C_1}-\omega L\right)^2}}$$

解出

$$C_1=\frac{1}{(\sqrt{3}+1)\omega R}$$



电试(三)图 4－4



电试(三)图 4－5

3. 本问涉及网络外串联电容，故不得不首先求出 A 和 D 之间的等效复阻抗. 与直流网络一样，交流网络也可采用电流分布法来求解等效复阻抗.

设复电流 $\tilde{I}$ 从A 点流入，从 D 点流出，利用网络的对称性和节点电流关系，可将网络中各支路的复电流标志如电试(三)图 4－5 所示，其中只有两个未知量 $\tilde{I}_1$ 和 $\tilde{I}_2$. 利用 ACB 支路及AB 支路的等电压关系，得

$$(\tilde{I}-\tilde{I}_1-\tilde{I}_2)\tilde{Z}+(\tilde{I}_1-\tilde{I}_2)\tilde{Z}=\tilde{I}_2\tilde{Z}$$

解出

$$\tilde{I}_2=\frac{1}{3}\tilde{I}$$

再利用 ACF 支路和AEF 支路的等电压关系，得

$$(\tilde{I}-\tilde{I}_1-\tilde{I}_2)\tilde{Z}+(\tilde{I}-2\tilde{I}_1)\tilde{Z}=\tilde{I}_1\tilde{Z}+(\tilde{I}_1-\tilde{I}_2)\tilde{Z}$$

解出

$$\tilde{I}_1=\frac{2}{5}\tilde{I}$$

于是，A 和D 之间的复电压为

$$\tilde{U}_{AD}=\tilde{I}_1\tilde{Z}+\tilde{I}_2\tilde{Z}=\frac{11}{15}\tilde{I}\tilde{Z}$$

A 和D 之间的复阻抗为

$$\tilde{Z}_{AD}=\frac{\tilde{U}_{AD}}{\tilde{I}}=\frac{11}{15}\tilde{Z}$$

在第 2 问中得出，为每一支路串联电容 C_1，即为 $\tilde{Z}$ 串联复容抗$\frac{1}{j\omega C_1}$后，可使 A、D 间网络的功率因数增为 $\cos\phi=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 现在，为 $\tilde{Z}_{AD}$串联复容抗$\frac{1}{j\omega C_2}$后，也要使功率因数同样增为 $\cos\phi=\frac{\sqrt{2}}{2}$，这就要求

$$\frac{1}{j\omega C_2}=\frac{11}{15}\frac{1}{j\omega C_1}$$

即

$$C_2=\frac{15}{11}C_1=\frac{15}{11(\sqrt{3}+1)\omega R}$$

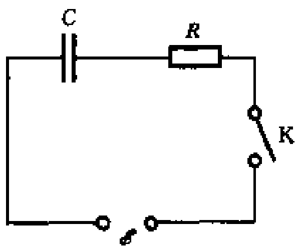
【题 5】 锯齿波形电源对应的 RC 串联暂态过程.

电路如电试(三)图 5－1 所示，开始时断路，电容器上无电量. $t=0$ 时合上电键 K，设 $\mathscr{E}\sim t$ 的关系如电试(三)图 5－2 所示，且 $T=RC$，试求 $t=NT(N=1,2,3\cdots)$时，电容器正极板上的电量 Q_N，并给出 $N\to\infty$的 Q_N 极限.

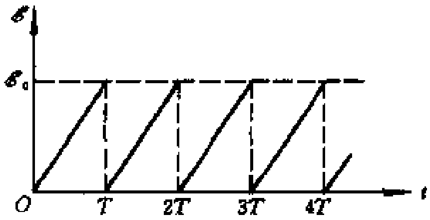
【分析】 在电磁学教科书中，通常讨论的是直流电源供电的暂态过程. 本题讨论的则是锯齿波形电源对应的暂态过程. 尽管电源有所不同，但 RC 串联暂态过程满足的回路微分方程形式相同，列出此方程，即可从数学上求解本题的暂态过程.

需要注意的是，现在，电源电动势 $\mathscr{E}$ 随时间 t 的变化关系并非连续函数，而是有周期性的突变，故微分方程需分段求解. 例如，电容器正极板上的电量 Q 在第一个周期末的值 Q_1，也就刚好

是第二周期初始时刻的值.考虑到这一递推关系,即可求解.



电试(三)图 5－1



电试(三)图 5－2

【解】 合上电键 K 后,在任一时刻通过电阻 R 上的电流强度表为 i,电容 C 正极板上的电量表为 Q,则电试(三)图 5－1 回路的电压方程为

$$iR+\frac{Q}{C}=\mathscr{E}$$

式中

$$i=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

代入,得出一阶线性非齐次微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\frac{Q}{RC}=\frac{\mathscr{E}}{R}$$

因题设

$$T=RC$$

代入,得

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\frac{Q}{T}=\frac{C\mathscr{E}}{T}$$

第一周期

$$\mathscr{E}=\mathscr{E}_0\frac{t}{T}$$

代入,方程为

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\frac{Q}{T}=\frac{C\mathscr{E}_0 t}{T^2}$$

解出

$$Q=\mathrm{e}^{-\int\frac{\mathrm{d}t}{T}}\left\{\int\frac{C\mathscr{E}_0 t}{T^2}\mathrm{e}^{\int\frac{\mathrm{d}t}{T}}\mathrm{d}t+A\right\}=\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}\left\{\frac{C\mathscr{E}_0}{T^2}\int t\mathrm{e}^{\frac{t}{T}}\mathrm{d}t+A\right\}$$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}\left\{\frac{C\mathscr{E}_0}{T^2}\left[T^2\mathrm{e}^{\frac{t}{T}}\left(\frac{t}{T}-1\right)\right]+A\right\}=C\mathscr{E}_0\left(\frac{t}{T}-1\right)+A\mathrm{e}^{-t/T}$$

初条件为

$$t=0\text{ 时},\quad Q=0$$

代入,得出积分常量 A 为

$$A=C\mathscr{E}_0$$

代入,解为

$$Q=C\,\mathscr{E}_0\left(\frac{t}{T}-1\right)+C\,\mathscr{E}_0\mathrm{e}^{-t/T}$$

在 $t=T$ 时,即在第一周期末,电容器 C 上的电量为

$$Q_1=\frac{C\,\mathscr{E}_0}{e}$$

第二周期,改取时间为

$$t'=t-T$$

则回路电压方程的形式仍为

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t'}+\frac{Q}{T}=\frac{C\mathscr{E}_0t'}{T^2}$$

解仍为

$$Q=C\mathscr{E}_0\left(\frac{t'}{T}-1\right)+A'\mathrm{e}^{-t'/T}$$

初条件为

$$t'=0\text{ 时},Q=Q_1=\frac{C\,\mathscr{E}_0}{e}$$

代入,得出积分常量 A'为

$$A'=C\,\mathscr{E}_0(\mathrm{e}^{-1}+1)$$

故解为

$$Q=C\,\mathscr{E}_0\left(\frac{t'}{T}-1\right)+C\,\mathscr{E}_0(\mathrm{e}^{-1}+1)\mathrm{e}^{-t'/T}$$

当 $t'=T$,即当 $t=2T$ 时,亦即在第二周期末,电容器 C 上的电量为

$$Q_2=C\,\mathscr{E}_0\,\frac{(\mathrm{e}^{-1}+1)}{\mathrm{e}}$$

……

第 N 周期.把上述求解过程继续下去,不难得出,当 $t=NT$ 时,即在第 N 周期末,电容器 C 上的电量为

$$\begin{aligned}Q_N&=C\,\mathscr{E}_0\{\cdots\{\{(\mathrm{e}^{-}+1)\mathrm{e}^{-1}+1\}\mathrm{e}^{-1}+1\}\mathrm{e}^{-1}+\cdots\}\\&=C\,\mathscr{E}_0\{\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e}^{-2}+\cdots+\mathrm{e}^{-N}\}=C\,\mathscr{E}_0\mathrm{e}^{-1}\{1+\mathrm{e}^{-1}+\cdots+\mathrm{e}^{-N+1}\}\\&=C\,\mathscr{E}_0\mathrm{e}^{-1}\left(\frac{1-e^{-N}}{1-\mathrm{e}^{-1}}\right)\end{aligned}$$

即

$$Q_N=\frac{1-\mathrm{e}^{-N}}{\mathrm{e}-1}C\,\mathscr{E}_0$$

当 $N\to\infty$时,有

$$\lim_{N\to\infty}Q_N=\frac{C\,\mathscr{E}_0}{\mathrm{e}-1}$$

【这是北京大学物理试验班的试题之一.试验班是为了培训、选拔参加 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)的中国代表队而设立的.】

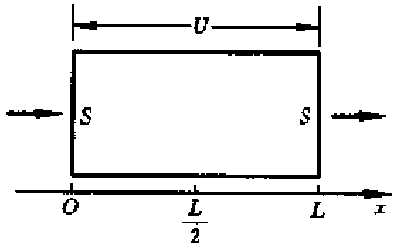
电磁学试题(四)
(电路)

【题1】 截面积为 S,长为 L 的圆柱形电阻器如图所示,电流从 $x=0$ 端面均匀地流入,从 $x=L$ 端面均匀地流出.设电阻器的电阻率分布为

$$\rho=\rho_0\left|\sin 2\pi\frac{x}{L}\right|$$

设电阻器两端面之间所加电压为 U.

试求:1.电阻器的电阻 R.2.电阻器中体电荷密度 ρ_e 的分布及 $\rho_e>0$ 的区域.(体电荷密度 ρ_e 与电阻率 ρ 请勿混淆.)3.电阻器中 $x=\frac{L}{2}$处的面电荷密度 σ_e.



电试(四)图 1-1

【分析】 由于电阻器的电阻率 ρ 沿圆柱长度方向按上述函数分布,各段电阻不同,可分段计算,经积分得出总电阻 R.

由电压 U 和总电阻 R 可得出总电流 I.因设电流分布均匀,电流密度 j 均匀且可知.由欧姆定律的微分形式 $\boldsymbol{E}=\rho\boldsymbol{j}$,可得出电阻器内电场 $\boldsymbol{E}$ 的分布(因 ρ 沿 x 轴有一定分布,故 $\boldsymbol{E}$ 也有相应的分布).再由静电场高斯定理的微分形式 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$,求出体电荷密度 ρ_e 的分布.需要注意的是,虽然 $\sin 2\pi\frac{x}{L}$ 曲线处处光滑,但其绝对值曲线在 $x=\frac{L}{2}$处并不光滑,故计算电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的散度,需以 $x=\frac{L}{2}$为界,分两段进行.

在 $x=\frac{L}{2}$处场强 $\boldsymbol{E}$ 并无突变,故该处不应有面电荷积累,这也可从静电场高斯定理的积分形式得到证实.

【解】 1.如图,电阻器从 x 到$(x+\mathrm{d}x)$任意一小段的电阻为

$$\mathrm{d}R=\frac{\rho\mathrm{d}x}{S}$$

因各小段串联,总电阻为各小段之和,可由积分求出,为

$$\begin{aligned}R&=\int_0^L\frac{\rho\mathrm{d}x}{S}\\&=\frac{\rho_0}{S}\int_0^L\left|\sin 2\pi\frac{x}{L}\right|\mathrm{d}x\\&=\frac{2\rho_0}{S}\int_0^{\frac{L}{2}}\sin 2\pi\frac{x}{L}\mathrm{d}x=\frac{2\rho_0L}{\pi S}\end{aligned}$$

2.电阻器中的总电流 I 为

$$I=\frac{U}{R}$$

因设电流均匀分布，故电流密度 $\boldsymbol{j}$ 的方向为 x 轴正方向，其大小为

$$j=\frac{I}{S}=\frac{U}{RS}$$

由欧姆定律的微分形式 $\boldsymbol{E}=\rho\boldsymbol{j}$，可知 $\boldsymbol{E}$ 的方向与 $\boldsymbol{j}$ 相同，其大小为

$$E=\rho j=\frac{\rho U}{RS}$$

把题设的 $\rho(x)$ 及上面求出的 R 代入，得

$$E=\frac{\pi U}{2L}\left|\sin 2\pi\frac{x}{L}\right|$$

下面分段计算电阻器中体电荷密度 ρ_e 的分布.

在 $0<x<\frac{L}{2}$ 区域，电场强度为

$$E=\frac{\pi U}{2L}\sin 2\pi\frac{x}{L}$$

由静电场高斯定理的微分形式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$$

得

$$\rho_e=\varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}=\frac{\varepsilon_0\pi^2U}{L^2}\cos 2\pi\frac{x}{L}$$

在 $\frac{L}{2}<x<L$ 区域，电场强度为

$$E=-\frac{\pi U}{2L}\sin 2\pi\frac{x}{L}$$

类似的计算得出体电荷密度 ρ_e 为

$$\rho_e=-\frac{\varepsilon_0\pi^2U}{L^2}\cos 2\pi\frac{x}{L}$$

因此，由三角函数的性质可知，电阻器内 $\rho_e>0$ 的区域为

$$\begin{cases}0<x<\frac{L}{4}\\ \frac{L}{2}<x<\frac{3}{4}L\end{cases}$$

3. 第 2 问中的计算表明，在电阻器内 $x=\frac{L}{2}$ 处，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 是连续的，即有

$$E\left(\frac{L}{2}-\right)=0$$

$$E\left(\frac{L}{2}+\right)=0$$

以 $x=\frac{L}{2}$ 为中央位置. 在电阻器内取圆柱形高斯面，其端面为 S 与 x 轴垂直，其长度极短，则由

静电场高斯定理的积分形式,得

$$\frac{\sigma_e S}{\varepsilon_0} = \oiint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

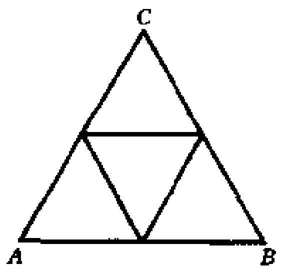
故在电阻器中间$\frac{L}{2}$处的面电荷密度为

$$\sigma_e = 0$$

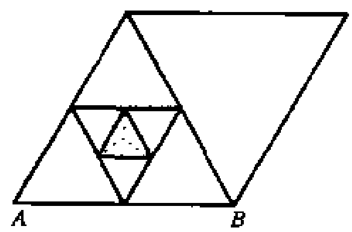
【题2】 内部连通,有N个外接端的电阻网络称为N端网络.把没有内节点,每两个外接点之间有一个电阻的N端网络,称为N端标准网络或N端完全网络.把有内节点的N端网络称为N端非完全网络.

可以证明,任何一个N端非完全网络,无论所包含的内节点是有限的还是无限的,均可等效变换成一个相应的N端完全网络.

1. 试画出四端完全网络.试画出一个由8个电阻(其间并无串并联关系)组成的,含有一个内节点的四端非完全网络.



电试(四)图2－1



电试(四)图2－2

2. 用电阻丝连成的三端非完全网络如电试(四)图2－1所示,其中每一小段电阻丝的电阻均为R,A、B、C是三个外接点.试把这个三端非完全网络等效变换为三端完全网络,并求出后者的各电阻.

3. 用单位长度电阻为r的电阻丝连成的网络如电试(四)图2－2所示,其中两个大三角形的边长均为a,从左侧大三角形三边中点开始无限内接小三角形.试求A点和B点之间的等效电阻R_{AB}.

【分析】 任何一个二端电阻网络,无论其内部结构如何复杂,都可等效变换为仅由一个电阻构成的二端网络,该电阻就是原二端网络的等效电阻.三端电阻网络等效变换的一个简单例子是熟知的$Y-\Delta$变换.

问题在于,一般的三端电阻网络乃至更普遍的一般的N端电阻网络,是否也能作等效变换,如何变换?回答这个问题的关键在于确定作为等效变换目标的某种基准结构,并证明任意的N端电阻网络都能够等效变换为上述基准结构.这样的研究才具有理论和实际意义.

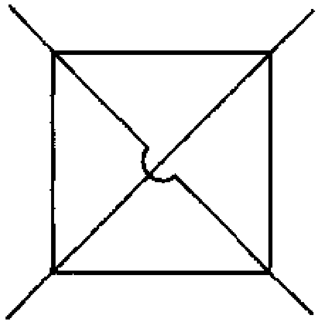
韦韬同学把N端电阻网络分为N端完全网络(无内节点)和N端非完全网络(有内节点)两类,取前者为基准结构,并证明后者都可以等效变换为前者,从而出色地解决了这个问题.关于韦韬同学的论文见本题末的附注.(作为例子,△型的三端网络就是三端完全网络,而Y型的三端网络则是一个三端非完全网络,因为Y型网络有节点.)

本题第 1 问要求画出四端完全网络和一个特殊的四端非完全网络，解答并不困难，目的是借此了解完全网络与非完全网络的区别，作为求解后两个问题的铺垫.

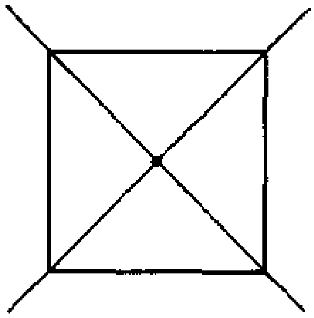
第 2 问讨论的是三端网络之间的等效变换. 三端完全网络是△型网络. 利用电试(四)图 2－1 给出的三端非完全网络所具有的对称性，不难求出与它等效的三端完全网络.

第 3 问中电试(四)图 2－2 所示的网络，其左半部分的无限内接三角形网络也是一个具有对称性的三端非完全网络，把它等效变换为相应的三端完全网络后，再与右半部分结合起来，即可算出 A 和 B 之间的等效电阻.

【解】 1. 四端完全网络如电试(四)图 2－3 所示. 由 8 个电阻(其间并无串并联关系)组成的含有一个内节点的四端非完全网络如电试(四)图 2－4 所示，电试(四)图 2－4 中每一段直线代表一个电阻.

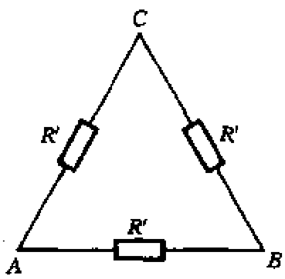


电试(四)图 2－3

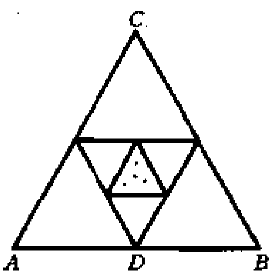


电试(四)图 2－4

2. 三端完全网络就是 $Y-\triangle$ 变换中的△型网络. 由于如电试(四)图 2－1 所示的三端非完全网络具有很强的对称性，因此它经等效变换得出的三端完全网络中的三个电阻应相同，表为 R'，如电试(四)图 2－5 所示. 只需在特殊情况下确定 R' 即可.



电试(四)图 2－5



电试(四)图 2－6

当电试(四)图 2－1 网络中 C 点的外接电阻为无穷大时，即当 C 点与外电路断开时，利用网络的对称性，容易算出

$$R_{AB}=\frac{10}{9}R$$

当电试(四)图 2－5 网络中 C 点与外电路断开时，有

$$R_{AB}=\frac{2}{3}R'$$

由于电试(四)图 2－1 与电试(四)图 2－5 的网络等效，在两网络中的 C 点都与外电路断开时，也应等效，故以上两个 R_{AB} 应相等，于是得出

$$R'=\frac{5}{3}R$$

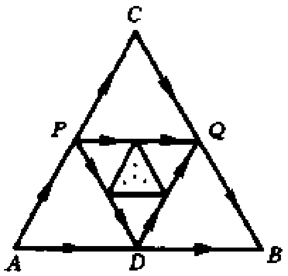
3. 把电试(四)图 2－2 网络的左边部分取出，取为如电试(四)图 2－6 所示的无穷内接三端网络，因对称性，可仿照第 2 问把它等效变换为仍如电试(四)图 2－5 所示的三端完全网络.

电试(四)图 2－6 网络相对 D，C 连线左右对称．若设 C 端与外电路断开，电流从 A 点流入，从 B 点流出，则从左侧流向 DC 连线的电流分布应与从 DC 连线向右侧流出的电流分布相同，如电试(四)图 2－7 所示．因此，从 A 到 D 的电流与从 D 到 B 的电流相同，从 P 到 D 的电流与从 D 到 Q 的电流相同．这样，PDQ 与 ADB 可在 D 处拆开，等效成如电试(四)图 2－8 所示网络．电试(四)图 2－8 网络相当于在大三角形两边中点 P 和 Q 之间连接一个边长为 $\frac{a}{2}$ 的无限内接三角形网络，后者在 P，Q 两点之间的等效电阻表为 R_{PQ}，则电试(四)图 2－8 网络可等效为电试(四)图 2－9 所示的网络．容易得出

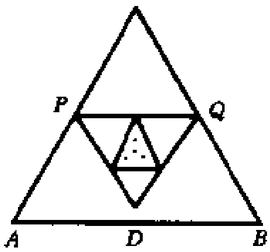
$$R_{AB}=\left(\frac{ar+2R_{PQ}}{2ar+3R_{PQ}}\right)ar$$

式中 R_{PQ} 对应的是外边长为 $\frac{a}{2}$ 的无限内接三角形网络，R_{AB} 对应的是外边长为 a 的无限内接三角形网络，因电阻与长度成正比，故应有

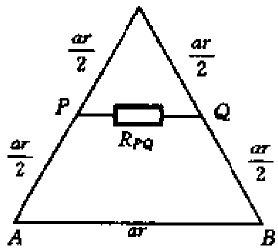
$$R_{PQ}=\frac{1}{2}R_{AB}$$



电试(四)图 2－7



电试(四)图 2－8



电试(四)图 2－9

由以上两式，得

$$R_{AB}=\frac{1}{3}(\sqrt{7}-1)ar$$

对于与电试(四)图 2－7 网络等效的电试(四)图 2－5 网络，仍有

$$R_{AB}=\frac{2}{3}R'$$

由以上两式，解出

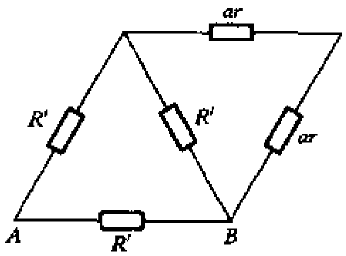
$$R'=\frac{1}{2}(\sqrt{7}-1)ar$$

现在，可将电试(四)图 2－2 的网络等效变换为电试(四)图 2－10 所示的网络．容易算出

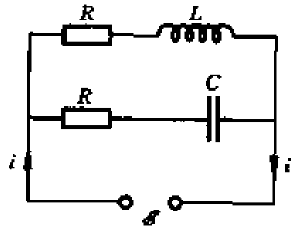
$$R_{AB}=\frac{R'(R'+4ar)}{2(R'+3ar)}$$

把上述 R'代入,得

$$R_{AB}=\frac{1}{12}(5\sqrt{7}-7)ar$$



电试(四)图 2-10



电试(四)图 3-1

【本题取自韦韬,"n 端线性电阻网络的等效变换",大学物理,1995.9.该文证明任意 n 端非完全网络均可等效交换为 n 端完全网络,并讨论了一些具体例子.韦韬是参加 1993 年第 24 届 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)的中国队队员,北京大学物理系 93 级学生.】

【题 3】 交流电路如电试(四)图 3-1 所示.

1. 设电源电动势为

$$\mathscr{E}=\mathscr{E}_0\sin^2\omega t$$

且

$$\omega L=\frac{1}{\omega C}=R$$

试用矢量图解法求 $i(t)$.

2. 设电源电动势可普遍地表为

$$\mathscr{E}=\mathscr{E}_0+\sum_i\mathscr{E}_{io}\cos(\omega_i t+\phi_i)$$

其中 $\mathscr{E}_0,\mathscr{E}_{io},\omega_i,\phi_i$ 均为常量,且

$$R=\sqrt{\frac{L}{C}}$$

试用复数法求 $i(t)$.

【分析】 利用三角函数平方项的展开式,可将第 1 问中电源电动势 $\mathscr{E}=\mathscr{E}_0\sin\omega t$ 分解为直流部分 $\mathscr{E}_1$ 与交流部分 $\mathscr{E}_2$ 之和,其中 $\mathscr{E}_2$ 是角频率为 2ω 的简谐交流电.对于直流电源 $\mathscr{E}_1$,RC 串联部分断路,RL 串联部分中 L 不起作用,相应的干路直流电流 i_1 容易求得.对于交流电源 $\mathscr{E}_2$,用通常的矢量图解法容易求出干路交流电流 i_2.i_1 与 i_2 之和即为与 $\mathscr{E}$ 相应的干路电流 i.

第 2 问的 $\mathscr{E}$ 是最普遍的周期性电动势,因为任何一个周期函数都可以通过傅里叶级数的数学理论展开成一系列简谐函数的叠加.$\mathscr{E}$ 中的常数项 $\mathscr{E}_0$ 对干路电流的贡献 i_0(直流)容易求得,

其余各 $\mathscr{E}_i=\mathscr{E}_{i0}\cos(\omega_i t+\phi_i)$对干路电流的贡献 i_i(交流)，可用交流电路的复数法求出. i_0 与各 i_i 之和，即为与 $\mathscr{E}$ 对应的干路电流 i.

【解】 1. 电源电动势 $\mathscr{E}$ 可分解为

$$\mathscr{E}=\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2$$

其中

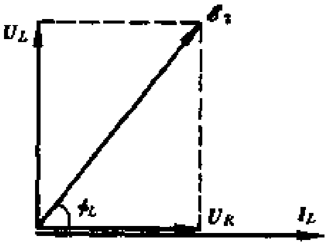
$$\begin{cases}\mathscr{E}_1=\dfrac{1}{2}\mathscr{E}_0\\ \mathscr{E}_2=-\dfrac{1}{2}\mathscr{E}_0\cos2\omega t\end{cases}$$

可见，$\mathscr{E}_1$ 是直流电源，$\mathscr{E}_2$ 是简谐交流电源，其角频率为 2ω. 电试(四)图 3－1 中的干路电流 i 可分解为直流电流 i_1 与交流电流 i_2 之和，即

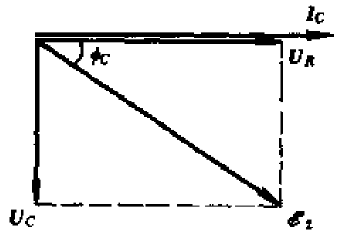
$$i=i_1+i_2$$

i_1 由 $\mathscr{E}_1$ 提供，因 $\mathscr{E}_1$ 为直流电源，电试(四)图 3－1 中 RC 串联部分断路，RL 串联部分 L 短路，故

$$i_1=\frac{\mathscr{E}_1}{R}=\frac{\mathscr{E}_0}{2R}$$



电试(四)图 3－2



电试(四)图 3－3

i_2 由交流电源 $\mathscr{E}_2$ 提供. 如电试(四)图 3－1，设 RL 串联支路的电流为 i_L，RC 串联支路的电流为 i_C，则干路电流 i 为

$$i=i_L+i_C$$

为了求解 i_L，对 RL 串联支路作矢量图如电试(四)图 3－2 所示，有

$$U_R=I_LR$$

$$U_L=I_L(2\omega l)=2I_LR$$

$$\mathscr{E}_2=\sqrt{U_R^2+U_L^2}=\sqrt{5}I_LR$$

$$\tan\phi_L=\frac{U_L}{U_R}=2,\quad I_L=\frac{\mathscr{E}_2}{\sqrt{5}R}$$

其中利用了题设的 $\omega L=R$，为了求解 i_C，对 RC 串联支路作矢量图如电试(四)图 3－3 所示，有

$$U_R=I_CR,\quad U_C=I_C\left(\frac{1}{2\omega C}\right)=\frac{1}{2}I_CR$$

$$\mathscr{E}_2=\sqrt{U_R^2+U_C^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}I_CR,\quad \tan\phi_C=\frac{U_C}{U_R}=\frac{1}{2},\quad I_C=\frac{2\mathscr{E}_2}{\sqrt{5}R}$$

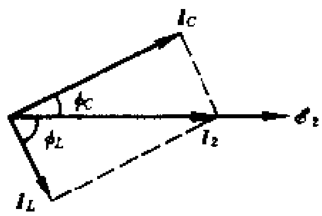
其中利用了题设的 $\omega C=\frac{1}{R}$.

电试(四)图 3－1 干路中的交流电流为

$$i_2=i_L+i_C$$

作矢量图如电试(四)图 3－4. 注意到以上计算的结果中有

$$\tan\phi_C=\cot\phi_L$$



电试(四)图 3－4

故

$$\phi_C+\phi_L=\frac{\pi}{2}$$

又有

$$\frac{I_L}{I_C}=\frac{1}{2}=\tan\phi_C$$

故合矢量

$$\boldsymbol{I}_2=\boldsymbol{I}_L+\boldsymbol{I}_C$$

刚好与 $\mathscr{E}_2$ 同方向，且有

$$I_2=\sqrt{I_L^2+I_C^2}$$

故

$$i_2=\frac{\mathscr{E}_2}{R}=-\frac{\mathscr{E}_0}{2R}\cos 2\omega t$$

电试(四)图 3－1 干路中的总电流 i 为

$$i=i_1+i_2=\frac{\mathscr{E}_0}{2R}-\frac{\mathscr{E}_0}{2R}\cos 2\omega t$$

$$=\frac{\mathscr{E}_0}{R}\sin^2\omega t=\frac{\mathscr{E}}{R}$$

第 2 问的计算表明，上述简单结果具有普遍意义.

2. 电源的直流部分对干路电流(直流)的贡献为

$$i_D=\frac{\mathscr{E}_0}{R}$$

电源交流部分中的 $\mathscr{E}_i=\mathscr{E}_{i0}\cos(\omega_i t+\phi_i)$对干路电流(交流)的贡献表为 i_i. 现用复数法求解 i_i. 相应的电试(四)图 3－1 电路的复阻抗为

$$\tilde{Z}_i=\left[\frac{1}{R+j\omega_i L}+\frac{1}{R+\frac{1}{j\omega_i C}}\right]^{-1}=\left[\frac{1}{R+j\omega_i L}+\frac{j\omega_i C}{1+jR\omega_i C}\right]^{-1}$$

题设

$$L=R^2C$$

代入，得

$$\tilde{Z}_i=\left[\frac{1}{R(1+jR\omega_i C)}+\frac{j\omega_i C}{1+jR\omega_i C}\right]^{-1}=\left(\frac{1}{R}\right)^{-1}=R$$

电试(四)图 3－1 干路中相应的复电流为

$$\tilde{I}_i=\frac{\tilde{\mathscr{E}}_i}{\tilde{Z}_i}=\frac{\bar{\mathscr{E}}_i}{R}$$

$$i_i=\frac{\mathscr{E}_i}{R}=\frac{\mathscr{E}_{i0}}{R}\cos(\omega_i t+\phi_i)$$

电试(四)图 3－1 干路中的总电流 i 是上述直流电流 i_0 及各交流电流 i_i 之和，为

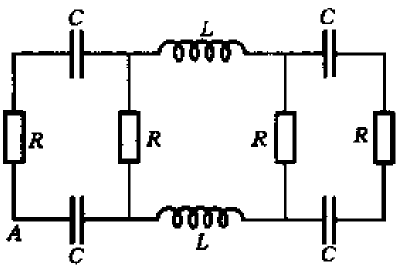
$$i=i_0+\sum_i i_i=\frac{\mathscr{E}_0}{R}+\sum_i\frac{\mathscr{E}_{i0}}{R}\cos(\omega_i t+\phi_i)=\frac{\mathscr{E}}{R}$$

【题 4】 交流电路二端网络如电试(四)图 4－1 所示，设交流电角频率为 ω. 试求 A 和 B 两端之间的等效复阻抗 $\tilde{Z}_{AB}$. 再设 $\omega L=\frac{1}{\omega C}=R$. 试求 Z_{AB}(用 R 表示)及此二端网络的功率因素 $\cos\phi$.

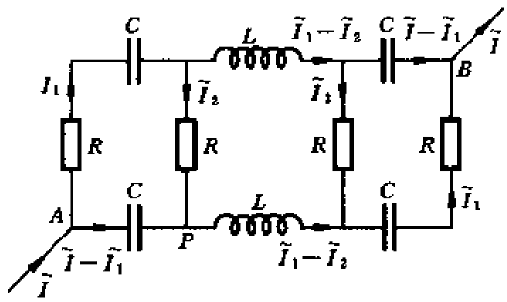
【分析】 直流二端网络的等效电阻可采用电流分布法求解. 办法是假设电流 I 从 A 端流入从 B 端流出，然后求出网络中各支路的电流分布，据此算出 A 和 B 之间的电压 U_{AB}，于是 A 和 B 之间的等效电阻可由 $R_{AB}=\frac{U_{AB}}{I}$ 得出.

交流电路采用复数表述，也可采用复电流分布法求解二端网络的等效复阻抗. 办法也是假设复电流 $\tilde{I}$ 从 A 端流入从 B 端流出，然后求出网络中各支路的复电流分布，据此算出 A 和 B 之间的复电压 $\tilde{U}_{AB}$，于是 A 和 B 之间的等效复阻抗可由 $\tilde{Z}_{AB}=\frac{\tilde{Z}_{AB}}{\tilde{I}}$ 得出.

本题采用复电流分布法求出 $\tilde{Z}_{AB}$ 后，由复阻抗 $\tilde{Z}_{AB}$ 的幅角 ϕ 给出的 $\cos\phi$ 就是该二端网络的功率因数.



电试(四)图 4－1



电试(四)图 4－2

【解】 如电试(四)图 4－2 所示，设复电流 $\tilde{I}$ 从 A 端流入，从 B 端流出. 根据网络的对称性，其中各支路的复电流可假设为如电试(四)图 4－2 中的标示. P 点的复电流方程为

$$(\tilde{I}-\tilde{I}_1)+\tilde{I}_2=\tilde{I}_1-\tilde{I}_2$$

得

$$\tilde{I}_1-\tilde{I}_2=\frac{1}{2}\tilde{I}$$

A 和 P 之间的复电压方程为

$$\tilde{I}_1(R+\frac{1}{j\omega C})+\tilde{I}_2R=(\tilde{I}-\tilde{I}_1)\frac{1}{j\omega C}$$

由以上两式,得出

$$\tilde{I}_1=\frac{\dfrac{R}{2}+\dfrac{1}{j\omega C}}{2(R+\dfrac{1}{j\omega C})}\tilde{I}$$

为了下面计算的需要,再写出

$$\tilde{I}_1-\tilde{I}_2=\frac{\tilde{I}}{2}$$

$$\tilde{I}-\tilde{I}_1=\frac{\dfrac{3}{2}R+\dfrac{1}{j\omega C}}{2(R+\dfrac{1}{j\omega C})}\tilde{I}$$

现在,可计算 A 和 B 之间的复电压 $\tilde{U}_{AB}$ 为

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{AB}&=\tilde{I}_1(R+\frac{1}{j\omega C})+(\tilde{I}_1-\tilde{I}_2)j\omega L+(\tilde{I}-\tilde{I}_1)\frac{1}{j\omega C}\\&=\left\{\frac{(2+R^2\omega^2C^2)R}{4(1+R^2\omega^2C^2)}+j\left[\frac{\omega L}{2}-\frac{1}{\omega C}-\frac{R^2\omega C}{4(1+R^2\omega^2C^2)}\right]\right\}\tilde{I}\end{aligned}$$

A 和 B 之间的复阻抗 $\tilde{Z}_{AB}$ 为

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_{AB}&=\frac{\tilde{U}_{AB}}{\tilde{I}}\\&=\frac{(2+R^2\omega^2C^2)R}{4(1+R^2\omega^2C^2)}+j\left[\frac{\omega L}{2}-\frac{1}{\omega C}-\frac{R^2\omega C}{4(1+R^2\omega^2C^2)}\right]\end{aligned}$$

题设

$$\omega L=\frac{1}{\omega C}=R$$

代入,得

$$\tilde{Z}_{AB}=\frac{3}{8}R+j\left(\frac{R}{2}-R-\frac{R}{8}\right)=\frac{R}{8}(3-5j)$$

复阻抗 $\tilde{Z}_{AB}$ 的模为阻抗 Z_{AB},即

$$Z_{AB}=\frac{1}{8}\sqrt{3^2+5^2}R=\frac{\sqrt{34}}{8}R$$

复阻抗 $\tilde{Z}_{AB}$ 的幅角 ϕ 的余弦 $\cos\phi$,就是 $\tilde{Z}_{AB}$ 的实部与其模 Z_{AB} 之比,即

$$\cos\phi=\frac{3}{8}R\Big/\frac{\sqrt{34}}{8}R=\frac{3}{\sqrt{34}}=0.51$$

$\cos\phi$ 就是二端网络的功率因数.

【题 5】 长方体导体块如电试(四)图 5－1 所示,从 $t=0$ 开始,外加与导体左右侧面垂直的交变

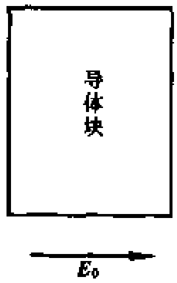
匀强电场 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\cos\omega t$，其中常矢量 $\boldsymbol{E}_0$ 的方向已在电试(四)图 5－1 中标明. 设导体的电导率

$$\sigma=\alpha\varepsilon_0\omega$$

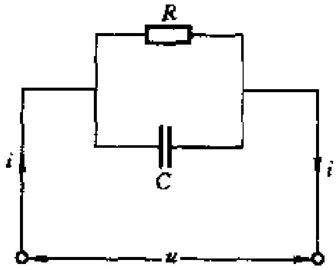
其中 α 是无量纲的常量. 忽略边缘效应(即在需要时可把导体块的侧面视为无穷大平面).

1. 以 $\boldsymbol{E}_0$ 的方向为基准方向，引入导体块中的电流密度 $\boldsymbol{j}$，试求 $t>0$ 的 $j(t)$ 关系.

2. 导体块左右侧面的大小实际上是有限的，导体块中的电流强度 i 也是有限的. 把外电场 $\boldsymbol{E}$ 从导体块左侧面到右侧面的电势降表为 u. 试求电流达到稳定后，i 超前 u 的相位 ϕ(用 $\tan\phi$ 表示).



电试(四)图 5－1



电试(四)图 5－2

3. 设导体块左、右侧面的面积均为 S，其间的间距为 l. 另取如电试(四)图 5－2 所示的并联电路，若当外加电压为第 2 问中的 u 时，电试(四)图 5－2 电路中的总电流刚好是第 2 问中的 i. 试求电试(四)图 5－2 电路中的 R 和 C，又，若电试(四)图 5－2 电路中的电容器是平行板介质电容器，极板面积也为 S，两板间距(亦即其中介质的厚度)也为 l. 试求该介质的相对介电常量 ε_r，并判断该电容器能否制作.

【分析】 外加交变匀强电场 $\boldsymbol{E}$ 后(交变是指电场随时间变化，匀强是指电场的空间分布均匀)，由欧姆定律的微分形式可知，在导体块内部沿着 $\boldsymbol{E}$ 的方向将立即产生均匀的传导电流. 传导电流使导体块左、右两侧面上形成电荷积累，积累的电荷会在导体块内部产生与外电场 $\boldsymbol{E}$ 反向的附加匀强电场 $\boldsymbol{E}'$. 导体块内的总电场 $\boldsymbol{E}_{总}$ 是 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{E}'$ 之和，其中 $\boldsymbol{E}'$ 的大小与导体块右侧面上的电荷面密度 σ_e 成正比，导体块内的电流密度 $\boldsymbol{j}$ 则与总电场 $\boldsymbol{E}_{总}$ 成正比，$\boldsymbol{j}$ 的大小即为 σ_e 随时间 t 的变化率. 据此，可建立 σ_e 随 t 变化的微分方程，解方程，得出 $\sigma_e(t)$，把 $\sigma_e(t)$ 对 t 求导，即得 $j(t)$. (注意，电荷面密度 σ_e 与导体块的电导率 σ 请勿混淆.)

导体块在外加电场中达到平衡或稳定的过程是暂态过程. 如果外加电场是匀强恒定电场，则相应的过程与直流 RC 电路的暂态过程类似. 如果外加电场是匀强简谐式交变电场，则相应的过程与交流 RC 电路的暂态过程类似. 本题第 1 问讨论的正是后一种过程，它的解在 $t\to\infty$ 时的极限就是稳态的 $j(t)$ 关系式. 达到稳态后，$\tilde{j}$ 与外电场 $\tilde{E}$ 之间的相位差 ϕ，就是本题第 2 问所求的导体块中电流强度 i 与外电场在导体块左右侧面电势降 u 之间的相位差.

由于在外电场下导体块中达到稳态的过程相当于交流 RC 电路的暂态过程，故导体块中的稳态应与交流 RC 电路的稳态相对应，后者就是通常的交流电路状态. 由本题第 3 问提供的条件，把导体块中达到稳态后的电流与电试(四)图 5－2 中 RC 并联电路的干路电流类比，即可由已经求出的 i 和 u 反过去解出 R 和 C. 最后由得出的 C 值判断该平板介质电容器能否制作.

【解】 1. 在任意 t 时刻，导体块右侧面积累的电荷面密度表为 σ_e，则导体块中的电流密度 j 应

为

$$j=\frac{\mathrm{d}\sigma_e}{\mathrm{d}t}$$

因导体块左右两侧面积累异号电荷而在导体块中形成的附加反向匀强电场 E' 为

$$E'=\frac{\sigma_e}{\varepsilon_0}$$

故导体块中的总电场为

$$E_{总}=E-E'=E-\frac{\sigma_e}{\varepsilon_0}$$

由欧姆定律的微分形式，有

$$j=\sigma E_{总}=\sigma\left(E-\frac{\sigma_e}{\varepsilon_0}\right)$$

于是得出 σ_e 遵循的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_e}{\mathrm{d}t}+\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\sigma_e=\sigma E=\sigma E_0\cos\omega t$$

其通解为

$$\begin{aligned}\sigma_e&=\mathrm{e}^{-\int\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\mathrm{d}t}\left\{\int\sigma E_0\cos\omega t\,\mathrm{e}^{\int\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C_0\right\}\\&=\mathrm{e}^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t}\left\{\frac{\sigma E_0\mathrm{e}^{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t}(\omega\sin\omega t+\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cos\omega t)}{(\frac{\sigma}{\varepsilon_0})^2+\omega^2}+C_0\right\}\\&=\frac{\sigma E_0(\omega\sin\omega t+\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cos\omega t)}{\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2+\omega^2}+C_0\mathrm{e}^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t}\end{aligned}$$

式中 C_0 为待定的积分常量.题设

$$\sigma=\alpha\varepsilon_0\omega$$

代入，得

$$\sigma_e=\frac{\alpha\varepsilon_0E_0}{1+\alpha^2}(\sin\omega t+\alpha\cos\omega t)+C_0\mathrm{e}^{-\alpha\omega t}$$

初条件为

$$t=0\text{ 时},\sigma_e=0$$

代入，得出积分常量

$$C_0=-\frac{\alpha^2\varepsilon_0E_0}{1+\alpha^2}$$

故 σ_e 为

$$\sigma_e=\frac{\alpha\varepsilon_0E_0}{1+\alpha^2}\{(\sin\omega t+\alpha\cos\omega t)-\alpha\mathrm{e}^{-\alpha\omega t}\}$$

对 σ_e 求导，即得导体块中的电流密度为

$$j=\frac{\alpha\varepsilon_0\omega}{1+\alpha^2}E_0\{(\cos\omega t-\alpha\sin\omega t)+\alpha^2 e^{-\alpha\omega t}\}$$

2. 因 j 均匀分布，电流强度 i 与 j 成正比，外电场 E 提供的电势降 u 与 E 成正比，故 i 与 u 的相位差 ϕ 就是 j 与 E 的相位差.

当 $t\to\infty$ 达到稳态时，有

$$j=\frac{\alpha\varepsilon_0\omega}{1+\alpha^2}E_0(\cos\omega t-\alpha\sin\omega t)$$
$$=\frac{\alpha\varepsilon_0\omega}{\sqrt{1+\alpha^2}}E_0\left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\cos\omega t-\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\sin\omega t\right)$$

引入 ϕ，使

$$\cos\phi=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}},\sin\phi=\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

得

$$j=\frac{\alpha\varepsilon_0\omega}{\sqrt{1+\alpha^2}}E_0\cos(\omega t+\phi)$$

与外电场

$$E=E_0\cos\omega t$$

比较，可知 j 比 E 超前相位 ϕ(即 i 超前 u 相位 ϕ)，且有

$$\tan\phi=\alpha$$

3. 容易求出

$$i=jS=\frac{\alpha\varepsilon_0 S\omega}{\sqrt{1+\alpha^2}}E_0\cos(\omega t+\phi)$$
$$u=El=E_0 l\cos\omega t$$

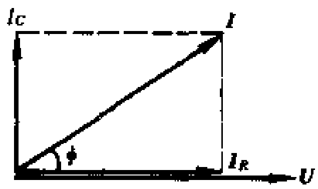
在 RC 并联电路中，有

$$i_R=i\cos\phi$$
$$i_C=i\sin\phi$$

结合如电试(四)图 5-3 所示的矢量图，有

$$I_R=I\cos\phi=\frac{\alpha\varepsilon_0 S\omega}{\sqrt{1+\alpha^2}}E_0\cos\phi$$

$$I_C=I\sin\phi=\frac{\alpha\varepsilon_0 S\omega}{\sqrt{1+\alpha^2}}E_0\sin\phi$$



电试(四)图 5-3

其中用到

$$I=\frac{\alpha\varepsilon_0 S\omega}{\sqrt{1+\alpha^2}}E_0$$

把 $\cos\phi$ 和 $\sin\phi$ 与 α 的关系式代入，得

$$I_R=\frac{\alpha\varepsilon_0 S\omega E_0}{1+\alpha^2}$$

$$I_C=\frac{\alpha^2\varepsilon_0 S\omega E_0}{1+\alpha^2}$$

于是

$$R=\frac{U}{I_R}=\frac{E_0 l(1+\alpha^2)}{\alpha\varepsilon_0 S\omega E_0}=\frac{(1+\alpha^2)l}{\alpha\varepsilon_0 S\omega}$$

$$C=\frac{I_C}{\omega U}=\frac{\alpha^2\varepsilon_0 S}{(1+\alpha^2)l}$$

其中用到

$$U=E_0 l$$

平行板介质电容器的极板面积为 S,两板间距为 l,介质的相对介电常数为 ε_r,故其电容 C 为

$$C=\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 S}{l}$$

与上面得出的 C 的表达式比较,得

$$\varepsilon_r=\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}$$

显然,

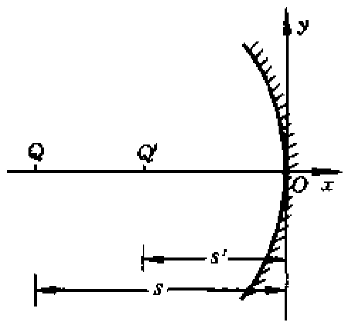
$$\varepsilon_r<1$$

由于任何介质都有 $\varepsilon_r\geqslant 1$,不存在 $\varepsilon_r<1$ 的介质,故这种 $\varepsilon_r<1$ 的电容器是不存在的.

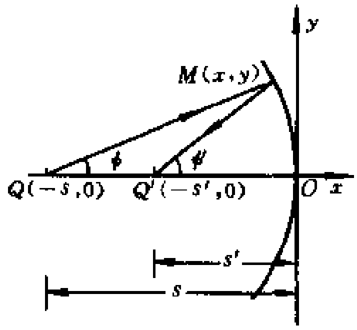
【这是北京大学物理试验班的试题之一.该试验班是为了培训、选拔参加 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)的中国代表队而设立的.】

光学试题

【题1】 如光试图1-1所示，物点Q位于某凹面反射镜的主光轴上，Q点与顶点O的距离为s. 要求从Q点发出的所有光线经反射后都能会聚在主光轴上的Q'点，Q'点与顶点O的距离为s'. 试根据费马原理证明凹面是一个旋转椭球面，即曲面与xy平面的截线是一个椭圆，写出椭圆的方程式，并求椭圆中心的位置和长、短半轴.



光试图1-1



光试图1-2

【解】 既然从Q点发出的所有光线经反射后都会聚在同一点，故曲面对主光轴应具有旋转对称性. 如光试图1-2所示，设置平面直角坐标Oxy，Q点和Q'点的坐标分别为$(-s,0)$和$(-s',0)$. 在曲面与xy平面的截线上任取一点$M(x,y)$，光线QM反射后必与主光轴交于Q'点，根据费马原理，成像系统具有等光程性，即

$$QM+MQ'=QO+OQ'$$

即

$$L=[(x+s)^2+y^2]^{\frac{1}{2}}+[(x+s')^2+y^2]^{\frac{1}{2}}=s+s'$$

即

$$[(x+s)^2+y^2]^{\frac{1}{2}}=(s+s')-[(x+s')^2+y^2]^{\frac{1}{2}}$$

两端平方，化简，得

$$(s-s')x=ss'+s'^2-(s+s')[(x+s')^2+y^2]^{\frac{1}{2}}$$

两端同除以$(s+s')$，得

$$\frac{s-s'}{s+s'}x-s'=-[(x+s')^2+y^2]^{\frac{1}{2}}$$

两端平方，得

$$(x+s')^2+y^2=\left(\frac{s-s'}{s+s'}x-s'\right)^2$$

即

$$\left[1-\left(\frac{s-s'}{s+s'}\right)^2\right]x^2+2s'x\left(1+\frac{s-s'}{s+s'}\right)+y^2=0$$

即

$$\frac{4ss'}{(s+s')^2}x^2+\frac{4ss'}{s+s'}x+y^2=0$$

这是椭圆方程，可以写成椭圆方程的标准形式如下

$$\frac{x^2}{(s+s')^2}+\frac{x}{s+s'}+\frac{y^2}{4ss'}=0$$

$$\left(\frac{x}{s+s'}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{y^2}{4ss'}=\frac{1}{4}$$

$$\left(x+\frac{s+s'}{2}\right)^2+\frac{y^2}{\frac{4ss'}{(s+s')^2}}=\frac{(s+s')^2}{4}$$

$$\frac{\left(x+\frac{s+s'}{2}\right)^2}{\left(\frac{s+s'}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{ss'}=1$$

由上述标准形式可知，椭圆中心位于

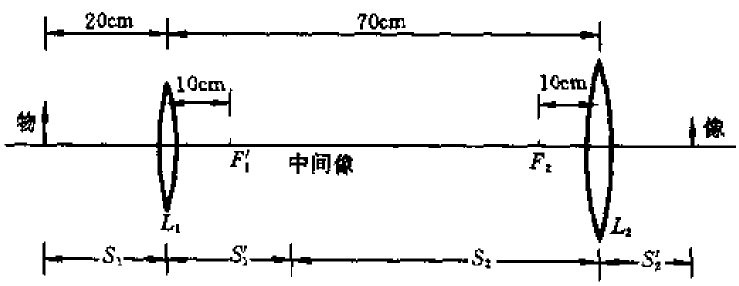
$$x=-\frac{s+s'}{2}$$

椭圆的半长轴 a 和半短轴 b 分别为

$$a=\frac{s+s'}{2}$$

$$b=\sqrt{ss'}$$

【题2】 在如光试图 2－1 所示的薄透镜系统中，透镜 L_1 和 L_2 的焦距 $f_1=f_2=10$ cm，两透镜的间距为 70 cm，物在 L_1 前方 20 cm 处. 1. 试求最后像的位置，大小和正倒. 2. 为提高光能利用率（增加系统的聚光能力），可增加第三个会聚透镜 L_3，为了使最后像的位置仍保持不变，试问 L_3 应放在何处？ 3. 试借助于特殊光线用作图法解释 L_3 能提高聚光能力的原因.



光试图 2－1

【解】 1. 用逐次成像法求最后像的位置. 物经薄透镜 L_1 后第一次成像，物距 $s_1=20$ cm，由高斯成像公式，像距为

$$s'_1 = \frac{f_1 s_1}{s_1 - f_1} = \frac{10\times 20}{20-10} = 20 \text{ cm}$$

横向放大率

$$M_1 = -\frac{s'_1}{s_1} = -1$$

中间像经薄透镜 L_2 第二次成像，物距为

$$s_2 = (70-20) = 50 \text{ cm}$$

像距为

$$s'_2 = \frac{f_2 s_2}{s_2 - f_2} = \frac{10\times 50}{50-10} = 12.5 \text{ cm}$$

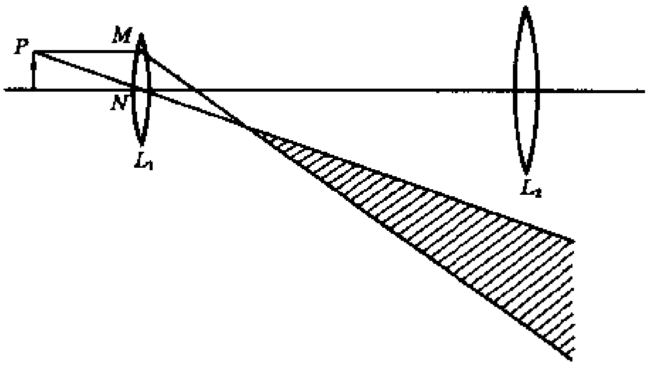
横向放大率

$$M_2 = -\frac{s'_2}{s_2} = -\frac{12.5}{50} = -0.25$$

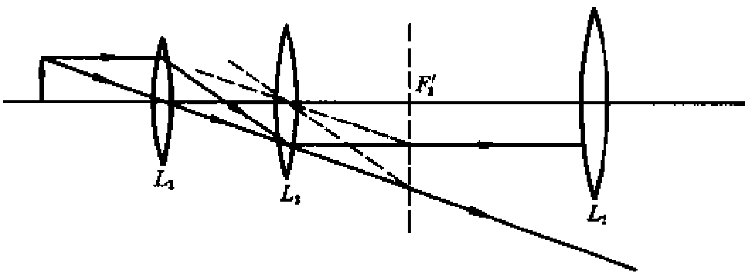
总横向放大率为

$$M = M_1 M_2 = 0.25$$

最后像位于 L_2 后方与 L_2 相距 12.5 cm 处，是正立的缩小实像.



光试图 2－2



光试图 2－3

2. 从薄透镜 L_1 射出的光线必定有一部分不能进入薄透镜 L_2，从而使像的亮度减小. 为了使更多的光能进入 L_2，可在 L_1 和 L_2 之间加第三个会聚薄透镜 L_3，一般情形，加 L_3 后将改变

最后像的位置，只有当 L_3 位于由 L_1 所成的中间像处，即位于 L_1 和 L_2 之间并在与 L_1 相距 20 cm 处，才能确保最后像的位置不变.

如光试图 2－2 所示，考虑从物上 P 点发出的光束，其边缘光线为 PM 和 PN，PM 与主光轴平行，PN 通过 L_1 的光心. 由光试图 2－2 可知，该光束经 L_1 后完全不能进入 L_2 并参与成像.

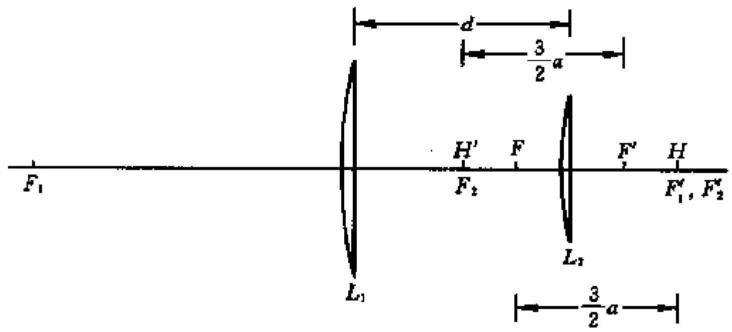
如光试图 2－3 所示，若在中间像处加薄透镜 L_3，由作图法可以得出从 L_3 射出的光束，它能部分进入 L_2 参与成像，从而提高最后像的亮度，而不改变最后像的位置.

【题 3】 目镜由向场境 L_1 和接目镜 L_2 构成，L_1 和 L_2 均为会聚透镜，并可看作薄透镜，焦距分别为 f_1 和 f_2，两者的间距为 d. 对于惠更斯目镜，有 $f_1:f_2:d=3:1:2$. 对于冉斯登目镜，有 $f_1:f_2:d=1:1:\frac{2}{3}$. 试确定两种目镜的两个主点和两个焦点的位置. 试问哪种目镜可当普通放大镜使用.

【解】 1. 惠更斯目镜.

如光试图 3－1 所示，设 $f_1=3a$，$f_2=a$，$d=2a$，L_1 和 L_2 的像方焦点 F'_1 和 F'_2 重合，L_2 的物方焦点 F_2 在 L_1 和 L_2 的正中间，两透镜均在空气中，透镜组的有效焦距为

$$f=f'=-\frac{f_1f_2}{d-f_1-f_2}=-\frac{3a\times a}{2a-3a-a}=\frac{3}{2}a$$



光试图 3 1

因 $f>0$，故目镜等效于一个正透镜.

像方主点 H' 和物方主点 H 的位置为

$$x'_H=\frac{d}{d-f_1-f_2}f_2=\frac{2a}{2a-3a-a}\times a=-a$$

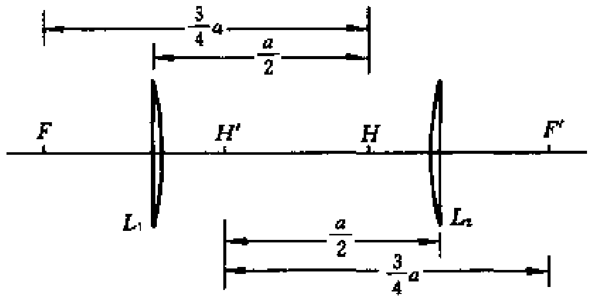
$$x_H=\frac{d}{d-f_1-f_2}f_1=\frac{2a}{2a-3a-a}\times 3a=-3a$$

可见，像方主点 H' 位于 L_2 的前方与 L_2 相距为 a 处，即位于两透镜的正中间. 像方焦点 F' 与 H' 的距离为 $\frac{3}{2}a$，即位于 L_2 后方 $\frac{a}{2}$ 处. 物方主点 H 位于 L_1 的后方 $3a$ 处，即与两透镜的像方焦点 F'_1 和 F'_2 重合，物方焦点 F 在 H 点的左侧 $\frac{3}{2}a$ 处. 用普通放大镜观察物体时，物应放在物方焦点 F 附近，由于惠更斯目镜的物方焦点位于目镜内部，故不能当作普通放大镜使用.

2. 冉斯登目镜.

如光试图 3－2 所示，设 $f_1=f_2=a, d=\frac{2}{3}a$，目镜的有效焦距为

$$f=f'=-\frac{f_1f_2}{d-f_1-f_2}=\frac{3}{4}a$$



光试图 3－2

像方主点 H' 和物方主点 H 的位置为

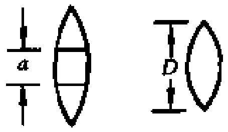
$$x'_H=\frac{d}{d-f_1-f_2}f_2=-\frac{a}{2}$$

$$x_H=\frac{d}{d-f_1-f_2}f_1=-\frac{a}{2}$$

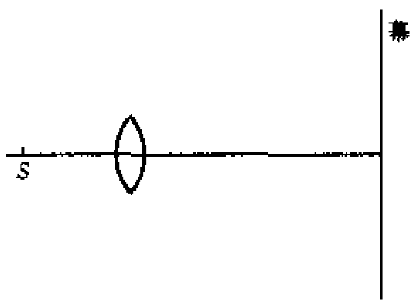
故像方主点 H' 位于 L_2 的前方 $\frac{a}{2}$ 处，像方焦点 F' 位于 H' 点后方 $\frac{3}{4}a$ 处，即在 L_2 后方 $\frac{a}{4}$ 处. 物方主点 H 位于 L_1 后方 $\frac{a}{2}$ 处，物方焦点 F 位于 H 前方 $\frac{3}{4}a$ 处，即在 L_1 前方 $\frac{a}{4}$ 处. 由于物方焦点 F 在目镜之外，故冉斯登目镜可作为普通放大镜使用.

【题 4】 如光试图 4－1 所示，将焦距 $f=20$ cm 的薄凸透镜从正中切去宽度为 a 的一小部分，再将剩下的两半粘合在一起，构成新的粘合透镜，已知粘合透镜的直径 $D=2.0$ cm. 如光试图 4－2 所示，在粘合透镜的中心轴上放置一个波长为 $\lambda=500$ nm 的单色点光源 S，S 与透镜的距离为 20 cm. 透镜另一侧放置一个与中心轴垂直的幕，测得幕上干涉条纹的间距为 $\Delta x=0.20$ mm.

试问：1. 切去部分的宽度 a 是多少？ 2. 幕离透镜多远时干涉条纹数最多？

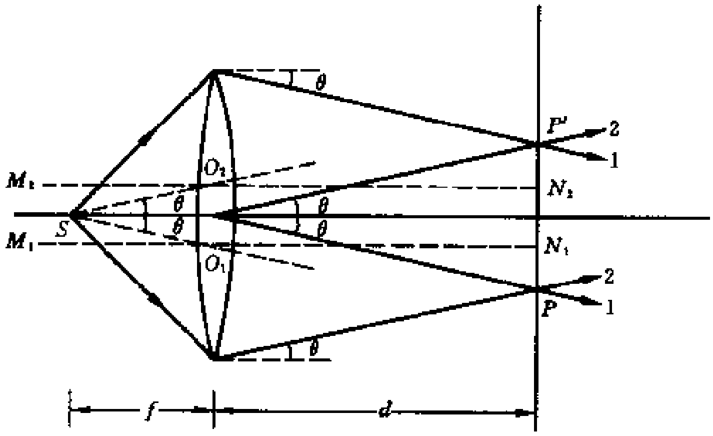


光试图 4－1



光试图 4－2

【解】 如光试图 4-3 所示，由于原透镜中央已切去一部分，上半透镜和下半透镜的光心和主光轴彼此分离，上半透镜的主光轴为 M_1N_1，光心为 O_1；下半透镜主光轴为 M_2N_2，光心为 O_2. 按题目所给的数据，点光源 S 位于上半透镜和下半透镜的物方焦面上，故从 S 发出的光经上半透镜折射后变成平行光束 1—1，经下半透镜折射后变成平行光束 2—2. 两束平行光与中心轴的夹角均为 θ（平行光束 1—1 斜向下，平行光束 2—2 斜向上），它们在幕上叠加时产生干涉，干涉条纹的间距 Δx 为（参看本书第四部分光学第二章光的干涉中的题 6 或题 7）



光试图 4-3

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\sin\theta}$$

对于傍轴光线，如光试图 4-3，有几何关系

$$\sin\theta = \frac{\frac{a}{2}}{f} = \frac{a}{2f}$$

式中 $\frac{a}{2}$ 是从 O_1 或 O_2 到中央轴的距离，而 $O_1O_2 = a$. 由以上两式，得

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2 \times \frac{a}{2f}} = \frac{\lambda f}{a}$$

故

$$a = \frac{\lambda f}{\Delta x} = \frac{5.0 \times 10^{-5} \times 20}{2.0 \times 10^{-2}}\ \text{cm} = 5.0 \times 10^{-2}\ \text{cm} = 0.50\ \text{mm}$$

2. 由光试图 4-3 可知，当幕位于 PP' 位置时，两束平行光的重叠区最大，干涉条纹最多（PP' 是两束平行光 1—1 和 2—2 交点的连线）. 由光试图 4-3，重叠范围是

$$PP' = 2d\tan\theta = \frac{2d \cdot \frac{a}{2}}{f} = \frac{da}{f} = \frac{D}{2}$$

故得

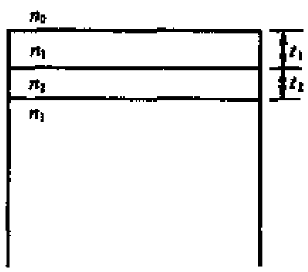
$$d = \frac{Df}{2a} = 4.0 \times 10^2\ \text{cm} = 4.0\ \text{m}$$

可见，当幕与透镜相距 4.0 m 时，幕上的干涉条纹最多.

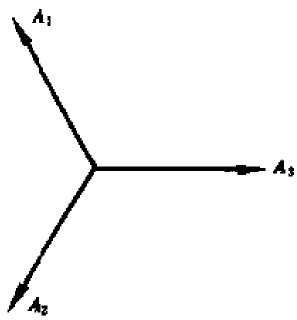
【题 5】 如光试图 5－1 所示，在玻璃基底上涂两层薄膜，它们的厚度分别用 t_1 和 t_2 表示. 空气，两层薄膜以及玻璃的折射率依次为 n_0, n_1, n_2, n_3，且满足

$$n_0 < n_1 < n_2 > n_3$$

波长为 λ 的单色光垂直入射，已知在三个界面处反射后所得三束反射光的振幅相等. 为了使反射光的总强度为零，必须适当选择所涂薄膜的厚度 t_1 和 t_2. 试求 t_1 的最小值，以及 t_1 取上述最小值时 t_2 的最小值.



光试图 5－1



光试图 5－2

【解】 要求三束反射光相干叠加后总强度为零，则在矢量图上它们的振幅矢量的合矢量应为零. 如光试图 5－2 所示，设三束反射光的振幅矢量分别为 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3$，因题设三者的大小相同，故只有当三矢量依次夹 120° 角时，合矢量才等于零.

当 t_1 取最小值时，$\boldsymbol{A}_2$ 比 $\boldsymbol{A}_1$ 落后的相位为 $\frac{2}{3}\pi$；当 t_2 也取最小值时，$\boldsymbol{A}_3$ 比 $\boldsymbol{A}_2$ 也落后 $\frac{2}{3}\pi$ 的相位. 由已知的折射率大小关系可知，第一和第二两束反射光之间无附加光程差，故有

$$\frac{2\pi}{\lambda}2n_1t_1 = \frac{2}{3}\pi$$

即

$$t_1 = \frac{\lambda}{6n_1}$$

第二和第三两束反射光之间有附加的光程差 $\frac{\lambda}{2}$，附加相位差为 $\pm\pi$，故有

$$\frac{2\pi}{\lambda}(2n_1t_1 + 2n_2t_2) \pm \pi = \frac{4}{3}\pi$$

即

$$2n_1t_1 + 2n_2t_2 = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{4}{3} \mp 1\right)$$

把 $2n_1t_1 = \frac{\lambda}{3}$ 代入，得

$$2n_2t_2 - \frac{\lambda}{2}\left(\frac{4}{3} \mp 1\right) - \frac{\lambda}{3}$$

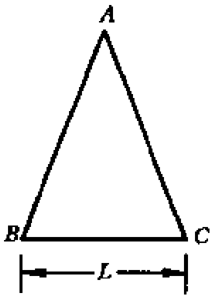
因 $2n_2t_2$ 总是大于零的，故上式圆括号中应取正号，即

$$2n_2t_2=\left(\frac{7}{6}-\frac{1}{3}\right)\lambda=\frac{5}{6}\lambda$$

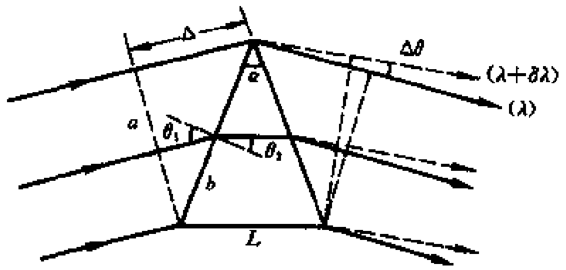
故 t_2 的最小值为

$$t_2=\frac{5\lambda}{12n_2}$$

【题6】 如光试图 6－1 所示，棱镜光谱仪中等腰三棱镜 ABC 的底边长 $BC=L$，棱镜材料的色散率为$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}$，棱镜在最小偏向角条件下工作．由于入射光波前受到 AB 面的限制而产生衍射，AB 面可以看成是宽度为 AB 的单狭缝．试导出棱镜分辨本领$\frac{\lambda}{\delta\lambda}$的表达式，其中 $\delta\lambda$ 是刚能分辨的波长差．



光试图 6－1



光试图 6－2

【解】 如光试图 6－2 所示，设三棱镜顶角为 α，工作在最小偏向角时的入射角为 θ_1，最小偏向角为 $\delta_{\min}$．棱镜折射率 n 与 $\delta_{\min}$的关系为

$$n=\frac{\sin\frac{\alpha+\delta_{\min}}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

故

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\delta_{\min}}=\frac{\cos\frac{\alpha+\delta_{\min}}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \tag{1}$$

式中

$$\frac{\alpha+\delta_{\min}}{2}=\theta_1$$

代入(1)式，得

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\delta_{\min}}=\frac{\cos\theta_1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

因不同波长有不同的偏向角，故不同波长的衍射峰将彼此分离．波长为 λ 和$(\lambda+\delta\lambda)$(其中 $\delta\lambda$ 为

刚能分辨的波长差)的衍射峰之间的角间距为

$$\frac{\mathrm{d}\delta_{\min}}{\mathrm{d}\lambda}\delta\lambda=\frac{\mathrm{d}\delta_{\min}}{\mathrm{d}n}\cdot\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\delta\lambda=\Delta\theta$$

把 AB 面看成是宽度为 $b=AB$ 的足够长的单狭缝,入射光是斜入射,根据单缝衍射斜入射时衍射峰的半角宽公式,半角宽 $\Delta\theta'$ 为

$$\Delta\theta'=\frac{\lambda}{a}=\frac{\lambda}{b\cos\theta_1}$$

刚能分辨时,有

$$\Delta\theta=\Delta\theta'$$

由以上三式,得

$$\frac{\mathrm{d}\delta_{\min}}{\mathrm{d}n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\delta\lambda=\frac{\lambda}{b\cos\theta_1}$$

故

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda}=b\cos\theta_1\frac{\mathrm{d}\delta_{\min}}{\mathrm{d}n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}$$

把(1)式代入,得

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda}=\frac{b\cos\theta_1}{\dfrac{\cos\theta_1}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}}\cdot\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}=2b\sin\frac{\alpha}{2}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}$$

因

$$\frac{L}{2}=b\sin\frac{\alpha}{2}$$

故最后得

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda}=L\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}$$

【这是北京大学物理系试验班的试题之一.该试验班是为了培训、选拔参加 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)的中国队队员而设立的.】

近代物理试题

【题1】 气体分子因热运动而会有热辐射，其逆过程则是对辐射的吸收. 假设热辐射的某一谱线的频率为 ν_0，相应的波长为 $\lambda_0=\frac{c}{\nu_0}$，由于作为辐射源的分子处于热运动状态，对于观察者就会有相应的多普勒频移，这将使 λ_0 谱线展宽. 分子间的热运动碰撞使得每一个分子的辐射均为间断的，据海森堡测不准原理，辐射的能量有不确定性，这也会使谱线展宽.

1. 设摩尔质量为 μ 的理想气体处于温度为 T 的热平衡态，对于中心频率为 ν_0 的谱线，试导出由于多普勒展宽引起的频率分布函数 $F(\nu)$.

2. 在一容器中盛有氩气，温度为 200 ℃，压强为 10 mmHg. 容器内有一小块钠，使氩气中有少量的钠蒸气，实验观察从钨灯发出的光通过容器后的波长为 589.6 nm 的吸收谱线，已知钠的原子量为 23，钠原子直径约为 0.1 nm.

(a)取 ν_0 两侧 $F(\nu)=\frac{1}{\sqrt{2}}F(\nu_0)$ 的频率间隔 $\Delta\nu$ 为多普勒效应的频率展宽范围，试计算吸收谱线 $\Delta\nu$ 对应的波长展宽.

(b)试估算吸收谱线波长的碰撞展宽.

【分析】 因气体分子热运动的速度远小于光速，可采用经典多普勒频移公式. 在观察热辐射时，接收者位置固定，频移只与热运动速度的一维分量 v_x 有关，与此相对应，只需考虑麦克斯韦一维速度分布函数 $F(v_x)$. 分子速度分量在 v_x 到($v_x+\mathrm{d}v_x$)范围的概率为 $F(v_x)\mathrm{d}v_x$，相应的频率范围为 ν 到($\nu+\mathrm{d}\nu$)，概率为 $F(\nu)\mathrm{d}\nu$，两个概率是相等的，由此即可导出本题第 1 问所求的频率分布函数 $F(\nu)$.

589.6 nm 是钠原子气体热辐射式吸收的特征谱线的中心波长. 把第 1 问求出的 $F(\nu)$用于钠原子气体，可求出 589.6 nm 吸收谱线的多普勒效应频率展宽范围 $\Delta\nu$，继而算出第 2 问(a)所求的波长展宽.

作为估算，辐射光子的能量不确定范围 ΔE 与辐射发射时间的不确定范围 Δt 所遵循的海森堡不确定关系可取为 $\Delta E\Delta t=h$. 由 $E=h\nu$，得出 $\Delta\nu=\frac{1}{\Delta t}$，其中 $\Delta\nu$ 为频率的不确定范围，亦即频率展宽，Δt 是分子两次相邻碰撞之间的平均时间，$\frac{1}{\Delta t}$即为碰撞频率 Z. 再利用 λ 与 ν 之间的关系，即可求出波长的碰撞展宽. 吸收是辐射的逆过程，辐射谱线波长的碰撞展宽 $\Delta\lambda$ 也就是吸收谱线波长的碰撞展宽，于是第 2 问(b)可解.

【解】 1. 在实验室参考系中，沿波源到接收者的方向取 x 轴，接收者静止，波源速度为 $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{v}$ 与 x 轴的夹角为 θ. 根据经典的多普勒效应，接收频率 ν 与发射频率 ν_0 的关系为

$$\nu=\frac{c}{c-v\cos\theta}\nu_0$$

式中 c 为波速，对于热辐射，c 就是光速，可取为真空中的光速，$v\cos\theta$ 是分子热运动速度的一维

分量,即

$$v\cos\theta = v_x$$

因

$$v \ll c$$

近似有

$$\nu = \left(1+\frac{v_x}{c}\right)\nu_0$$

理想气体处于热平衡态,其一维速度分布函数为

$$F(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-mv_x^2/2kT}$$

式中 m 为分子质量.上式可改写为

$$F(v_x) = \left(\frac{\mu}{2\pi RT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\mu v_x^2/2RT}$$

式中 μ 为摩尔质量,R 为气体常量.气体分子热运动的速度分量处在 v_x 与$(v_x+\mathrm{d}v_x)$之间的概率为

$$F(v_x)\mathrm{d}v_x$$

设 v_x 对应的接收频率为ν,从 v_x 到$(v_x+\mathrm{d}v_x)$对应 ν 到$(\nu+\mathrm{d}\nu)$,故有

$$F(\nu)\mathrm{d}\nu = F(v_x)\mathrm{d}v_x$$

式中 $F(\nu)$即为多普勒效应的频率分布函数.由上式,

$$F(\nu) = F(v_x)\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}\nu}$$

利用上述 $\nu(v_x)$关系,得

$$\mathrm{d}\nu = \frac{\nu_0}{c}\mathrm{d}v_x$$

由以上两式,得

$$F(\nu) = \left(\frac{\mu}{2\pi RT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\mu v_x^2/2RT} \cdot \frac{c}{\nu_0}$$

把

$$v_x = \frac{\nu-\nu_0}{\nu_0}c$$

代入,得

$$F(\nu) = \frac{1}{\nu_0}\left(\frac{\mu c^2}{2\pi RT}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{\mu c^2}{2RT}\left(\frac{\nu-\nu_0}{\nu_0}\right)^2\right]$$

这就是多普勒展宽的频率分布函数.

2.(a)对于 $\nu=\nu_0$,由上式,有

$$F(\nu_0) = \frac{1}{\nu_0}\left(\frac{\mu c^2}{2\pi RT}\right)^{\frac{1}{2}}$$

故 $F(\nu)$可表为

$$F(\nu)=F(\nu_0)\exp\left[-\frac{\mu c^2}{2RT}\left(\frac{\nu-\nu_0}{\nu_0}\right)^2\right]$$

对于

$$F(\nu)=\frac{1}{\sqrt{2}}F(\nu_0)$$

有

$$\nu-\nu_0=\pm\sqrt{\frac{RT\ln 2}{\mu c^2}}\nu_0$$

即有较大的 ν_1 和较小的 ν_2,分别为

$$\nu_1-\nu_0=\sqrt{\frac{RT\ln 2}{\mu c^2}}\nu_0$$

$$\nu_1-\nu_2=\sqrt{\frac{RT\ln 2}{\mu c^2}}\nu_0$$

ν_1 与 ν_2 的间隔 $\Delta\nu$ 为

$$\Delta\nu=\nu_1-\nu_2=2\sqrt{\frac{RT\ln 2}{\mu c^2}}\nu_0$$

对于钠原子气,

$$\mu=23\times10^{-3}\ \text{kg/mol}$$
$$T=473\ \text{K}$$

代入,得

$$\Delta\nu=2.30\times10^{-6}\nu_0$$

利用

$$\lambda\nu=c$$

考虑到 $\Delta\nu$ 和 $\Delta\lambda$ 均为小量,有

$$\lambda\Delta\nu+\nu\Delta\lambda=0$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}=-\frac{\Delta\nu}{\nu}$$

即

$$\Delta\lambda=-\frac{\lambda}{\nu}\Delta\nu=-\frac{\lambda_0}{\nu_0}\Delta\nu=-2.30\times10^{-6}\lambda_0$$

波长展宽通常取正值,即取 $|\Delta\lambda|$,把 $\lambda_0=589.6$ nm 代入,得

$$|\Delta\lambda|=1.36\times10^{-3}\ \text{nm}$$

这就是钠原子气对 589.6 nm 特征吸收谱线的多普勒波长展宽.

(*b*)光子能量的不确定范围 ΔE 和光波波列传播时间 Δt 之间的不确定关系可近似取为

$$\Delta E\cdot\Delta t=h$$

因

$$E=h\nu$$

代入,得出光波频率的不确定范围为

$$\Delta\nu = \frac{1}{\Delta t}$$

对于钠原子气，Δt 可取为原子间相邻两次碰撞之间的平均时间，故$\frac{1}{\Delta t}$即为碰撞频率Z，故

$$\Delta\nu = Z$$

在氩气中，钠原子所占比例小，Z 为钠原子与氩原子的碰撞频率，因此，有

$$Z = \pi\left(\frac{d_{钠} + d_{氩}}{2}\right)^2 n_{氩}\bar{u}$$

式中 $d_{钠}$ 和 $d_{氩}$ 分别是钠原子和氩原子的直径，两者有相同数量级，$n_{氩}$ 为氩原子的数密度，$\bar{u}$ 为钠原子与氩原子之间的平均相对运动速率．上式可近似为

$$Z = \pi d_{钠}^2 n_{氩}\bar{u}$$

由热学，

$$n_{氩} = \frac{p}{kT}$$

由题设，

$$p = 10(\text{Torr})(\text{乇}) = 10(\text{mmHg})(\text{毫米汞柱}) = 1.3\times 10^3\ \text{Pa}$$
$$T = 473\ \text{K}$$

k 为玻尔兹曼常量，代入，得

$$n_{氩} = 2.0\times 10^{23}\ \text{m}^{-3}$$

平均相对速率 $\bar{u}$ 为

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{8kt}{\pi m^*}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu^*}}$$

式中 m^*是原子折合质量，μ^*为摩尔折合质量，为

$$\mu^* = \frac{\mu_{钠}\mu_{氩}}{\mu_{钠} + \mu_{氩}}$$

计算得出

$$\mu^* = 1.46\times 10^{-2}\ \text{kg/mol}$$
$$\bar{u} = 8.3\times 10^2\ \text{m/s}$$

近似取

$$d_{钠} \approx 10^{-10}\ \text{m}$$

算出

$$Z = 5.0\times 10^6\ \text{s}^{-1}$$

故钠原子气因热碰撞导致 589.6 nm 特征吸收谱线的频率展宽为

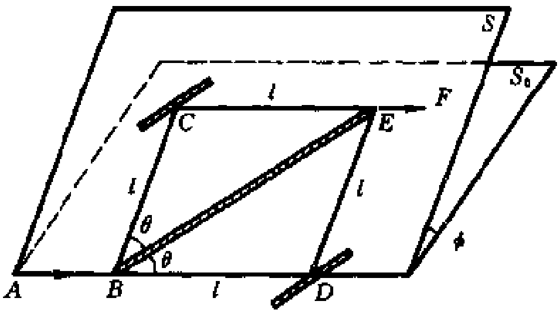
$$\Delta\nu = 5.0\times 10^6\text{Hz}$$

相应的波长展宽为

$$|\Delta\lambda| = \frac{\lambda_0}{\nu_0}\Delta\nu = \frac{\lambda_0^2}{c}\Delta\nu = 6.0\times 10^{-6}\text{nm}$$

【题 2】 核反应产生的低能中子，可用来检验重力引起的物质波的干涉．实验装置如图所示．从

同一块单晶片上切下的三块单晶片 C，BE，D 平行地放置在平面 S 中，平面 S 与水平面 S_0 的夹角为 ϕ，$|\phi|\leqslant 90°$，从 S_0 到 S 逆时针旋转时 ϕ 取正，顺时针旋转时 ϕ 取负. 低能中子束从 A 射到 B，一束反射，经 BCE 路径射向 F，另一束透射，经 BDE 路径射向 F. 其中 BC、CE、BD 和 DE 段的长度均为 l，BE 与 BC 之间的夹角为 θ，因此 BE 与 BD 之间的夹角也为 θ. 实验装置可绕 BD 转动，使 ϕ 值可调. 当 $\phi\neq 0$ 时，两束中子所受重力的影响不对称，在 E 点相遇后会发生中子波的干涉，这种干涉可被 F 处的中子计数器测出. 实验中，l 取得较短，使中子重力势能的变化远小于中子的动能.



近试图 2－1

1. 试证明两束中子波在 E 点的相位差 δ 可表为

$$\delta = q\sin\phi$$

其中

$$q = k\lambda l^2\sin 2\theta$$

其中 λ 为入射中子的波长，k 为常量，证明过程中应确定常量 k 与哪些因素有关.

2. 设入射中子的动能为 3.9×10^{-2}eV，设实验装置中的 $l=4$ cm，$\theta=22.5°$. 试问在 ϕ 从 $-90°$ 转到 $90°$ 的全过程中，在 F 处的中子计数器的读数出现多少次极大.

已知中子静止质量 $m=939$ MeV/c^2，$\hbar c=1.97\times10^{-11}$ MeV·cm.

【分析】 入射中子束在 B 处一部分反射，另一部分透射，出射中子的动能不变，动量大小相同，德布洛意波长 λ_1 均为入射波长 λ，经 D 点反射后，中子波长仍为 λ_1. 从 B 到 C 和从 D 到 E，在 $\phi\neq0$时，中子动能因其重力势能变化而有所变化，动量与波长随之相应变化，在 C 处和 E 处的波长相同，表为 λ_2. 对于每一个 ϕ 角，重力势能的变化可求，于是 C 处和 E 处的动能及动量的大小可以确定，λ_2 即可算出. 沿 BCE 行进的中子波束和沿 BDE 行进的中子波束，在 BC 段和 DE 段波长同步变化，不产生相对相位差. 但是在 CE 段和 BD 段的波长分别为 λ_2 和 λ_1，会产生相对相位差，这便构成两束沿不同路径行进的中子束在 E 处的相位差 δ. λ_1 和 λ_2 已知，δ 便可算出，于是第 1 问可以得到证明，常量 k 也可以确定.

由题目给定的中子初始动能，可先算出 λ(即 λ_1). 由给定的 l 和 θ 值及 ϕ 的取值范围，可以算出 δ 的变化范围. δ 每变化 2π，在 F 处的中子计数器读数出现一次极大，δ 变化 2π 的次数就是第 2 问所求的读数出现极大的次数.

【解】 1. 设中子束入射时的德布洛意波长为 λ，则在 B 处反射及透射的出射中子波长均为

$$\lambda_1 = \lambda$$

入射中子的速度表为 v_1，因为低能中子，不必考虑相对论效应，故有

$$\lambda_1 = \lambda = \frac{h}{mv_1}$$

其中 m 为中子的静止质量. 在 C 和 E 处，中子速度均为 v_2，考虑到重力势能的变化，应有

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + mgl\sin2\theta\sin\phi = \frac{1}{2}mv_1^2$$

由此得出

$$(v_1-v_2)(v_1+v_2)=2gl\sin2\theta\sin\phi$$

因题设重力势能变化远小于中子动能，故 v_1 与 v_2 相差不大，近似有

$$v_1-v_2=\frac{gl}{v_1}\sin2\theta\sin\phi$$

在 C 和 E 处的中子波长为

$$\lambda_2=\frac{h}{mv_2}>\lambda_1$$

从 B 沿两条不同路径行进的中子束，在 BC 段和 DE 段不产生相对相位差，在 CE 段和 BD 段产生相对相位差，此相位差即为沿两条路径行进的两中子束在 E 处相遇时的相位差 δ，故有

$$\begin{aligned}\delta &=2\pi\frac{l}{\lambda_1}-2\pi\frac{l}{\lambda_2}\\ &=2\pi l\left(\frac{mv_1}{h}-\frac{mv_2}{h}\right)=\frac{2\pi ml}{h}(v_1-v_2)\\ &=\frac{2\pi ml}{h}\cdot\frac{gl}{v_1}\sin2\theta\sin\phi=\frac{2\pi mgl^2}{h}\cdot\frac{m\lambda}{h}\sin2\theta\sin\phi\end{aligned}$$

即

$$\delta=q\sin\phi$$

其中

$$q=k\lambda l^2\sin2\theta$$

其中常量 k 为

$$k=\frac{m^2g}{2\pi\hbar^2}$$

2. 中子的初始动能可表为

$$E_k=\frac{1}{2}mv_1{}^2=\frac{h^2}{2m\lambda^2}$$

为了利用给定的 $\hbar c$ 数据，E_k 也可表为

$$E_k=\frac{2\pi^2\hbar^2c^2}{mc^2\lambda^2}$$

即

$$\lambda=\sqrt{\frac{2}{mc^2E_k}}\pi\hbar c$$

把有关数据代入，得

$$\lambda=0.145\ \text{nm}$$

当 ϕ 从 $-90°$ 变到 $90°$ 时，$\sin\phi$ 从 -1 变到 1，δ 从 $-q$ 变到 q，又因

$$\frac{q}{2\pi}=\frac{m^2g}{4\pi^2\hbar^2}l^2\lambda\sin45°=10.3$$

故 $\frac{\delta}{2\pi}$ 从 -10.3 变到 10.3，可见中子计数器的读数共出现 20 次或 21 次极大.

【题3】 P_b 原子核内有82个质子，核半径为7.1 fm(费米)，1 fm=10^{-6} nm. P_b 原子核与81个电子及1个 μ^- 子构成的原子称为 P_b 的 μ 介子原子. 假设所有电子均在原子核外，μ^- 子的基态轨道在第一激发态轨道之内，第一激发态轨道在所有电子轨道之内，但在原子核外. 实验上测得 μ^- 子从第一激发态跃迁到基态所发出的光子能量为6.0 MeV. 试估算 μ^- 子的基态轨道半径.

已知 μ^- 子的质量为电子的207倍，所带电荷与电子电荷相同.

【分析与解】 μ^- 子的第一激发态轨道在原子核外，按照常规，它的基态轨道似乎也在原子核外. 另一方面，由于这两个轨道均在电子轨道内，可以不必考虑电子的作用. 将 μ^- 子的轨道半径表为 r，轨道速度表为 v，则其圆运动的公式可表为

$$\frac{m_\mu v^2}{r}=\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

式中 $Z=82$，m_μ 为 μ^- 子的质量，因 μ^- 子的质量远小于 P_b 原子核的质量，上式中不必用折合质量代替 μ^- 子质量. 圆运动轨道的能量为

$$E=\frac{1}{2}m_\mu v^2-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}=-\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$$

轨道量子化条件为

$$mvr=\frac{nh}{2\pi},\quad n=1,2$$

其中 $n=1$ 对应基态，$n=2$ 对应第一激发态. 由以上三式，可解出

$$r_1=\frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_\mu Ze^2}$$

$$r_2=4r_1$$

$$E_1=-\frac{m_\mu Z^2e^4}{8\varepsilon_0^2h^2}$$

$$E_2=\frac{E_0}{4}$$

氢原子中电子基态的轨道半径(即玻尔半径)r_{10}和基态能量 E_{10}分别为

$$r_{10}=\frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2}$$

$$E_{10}=-\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2h^2}$$

其中 m_e 为电子质量. 于是，μ^- 子的基态轨道半径 r_1 与基态能量 E_1 可表为

$$r_1=\frac{m_e}{Zm_\mu}r_{10}$$

$$E_1=\frac{Z^2m_\mu}{m_e}E_{10}$$

因

$$m_\mu=207m_e$$

$$Z=82$$

$$r_{10}=0.0592\ \text{nm}$$
$$E_{10}=-13.6\ \text{eV}$$

故

$$r_1=\frac{r_{10}}{82\times 207}=3.49\ \text{fm}$$
$$E_1=82^2\times 207E_{10}=-18.9\ \text{MeV}$$
$$r_2=4r_1=13.96\ \text{fm}$$
$$E_2=-4.73\ \text{MeV}$$

第一激发态轨道半径 r_2 大于 P_b 原子核半径 $R=7.1$ fm，这与题设第1激发态轨道在原子核外相符. 基态轨道半径 r_1 小于 R，这与基态轨道在原子核外的常规假设不符. 另外，从第一激发态到基态跃迁放出的光子能量应为

$$\Delta E=E_2-E_1=14.2\ \text{MeV}$$

这与实验测出的 6.0 MeV 也不符合.

综上所述，上面算出的 μ^- 子第一激发态轨道半径 r_2 和轨道能量 E_2 均属可取. 上面计算 r_1 时，假设 μ^- 子的基态轨道在原子核外，所得结果却是 r_1 在原子核内，两相矛盾；又由 E_1 与 E_2 得出的 ΔE 也与实验不符，故 r_1 与 E_1 均不可取.

因 μ^- 子的基态轨道在 P_b 原子核内，为了估算 r_1，可简化地假设 P_b 原子核中的正电荷 Ze 均匀地分布在 $R=7.1$ fm 的球体内，则球内距球心 r 处的场强与电势分别为

$$E(r)=\frac{Zer}{4\pi\varepsilon_0R^3},\quad r<R$$

$$U(r)=\frac{Ze}{8\pi\varepsilon_0R}\left(3-\frac{r^2}{R^2}\right),\quad r<R$$

μ^- 子在半径为 r_1 的基态圆轨道上以速度 v_1 作圆运动的公式为

$$\frac{m_\mu v_1^2}{r_1}=eE(r_1)=\frac{Ze^2r_1}{4\pi\varepsilon_0R^3}$$

基态的能量为

$$E_1=\frac{1}{2}m_\mu v_1^2-eU(r_1)=\frac{1}{2}m_\mu v_1^2-\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0R}\left(3-\frac{r_1^2}{R^2}\right)$$

由以上两式，得

$$E_1=\frac{Ze^2r_1^2}{8\pi\varepsilon_0R^3}-\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0R}\left(3-\frac{r_1^2}{R^2}\right)=\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0R}\left(\frac{2r_1^2}{R^2}-3\right)$$

实验数据为

$$E_2-E_1=6.0\ \text{MeV}$$

故

$$E_1=E_2-6.0\ \text{MeV}=-10.73\ \text{MeV}$$

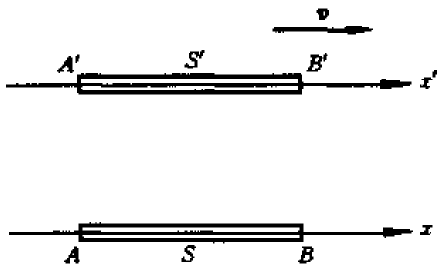
把有关常量代入，得

$$-10.73\ \text{MeV}=8.3\ \text{MeV}\times\left(\frac{2r_1^2}{R^2}-3\right)$$

由此解出 μ^- 子基态轨道的半径 r_1 约为

$$r_1 = 0.9R = 6.4\ \text{fm}$$

【题 4】 参考系 S' 相对惯性系 S 按图示方向以 $\boldsymbol{v}$ 匀速运动.两根细长的直尺 $A'B'$ 和 AB 的静止长度相同,它们分别按图中所示的方式静置于 S' 系和 S 系中,且设两尺在垂直于长度方向上的间距可略.静止在 A' 和 B' 上的两个钟的计时率已按相对论的要求调好,静止在 A 和 B 上的两个钟的计时率也已按相对论的要求调好,但这四个钟的零点却是按下述方式确定的:当 A' 钟与 A 钟相遇时,两钟均调到零点;当 B' 钟与 B 钟相遇时,两钟均调到零点.



近试图 4－1

设 A' 与 A 相遇时,A 发出光讯号.已知 B' 接收到该讯号时,B' 钟的读数为 1 个时间单位.

1. 试问 B 接收到该讯号时,B 钟的读数为多少个时间单位?

2. 若 B' 接收到讯号后,立即发出应答光讯号.试问:(a) A' 接收到该应答讯号时,A' 钟的读数为多少时间单位? (b) A 接收到该应答讯号时,A 钟的读数为多少时间单位.

注意:引入 $\beta=\dfrac{v}{c}$,其中 c 为真空中的光速,全部答案均请用 β 表述.

【分析与解】 设 $A'B'$ 和 AB 的静长为 l_0.

1. S' 系认为 AB 长为 $\sqrt{1-\beta^2}\,l_0$,B' 与 B 相遇时刻早于 A' 与 A 相遇时刻的时间为

$$\Delta t' = \frac{l_0 - \sqrt{1-\beta^2}\,l_0}{v}$$

A' 发出的光讯号经 l_0 到达 B',所需时间为 $\dfrac{l_0}{c}$,故 B' 接收到讯号时 B' 钟的读数应为

$$t_{B'} = \frac{l_0}{c} + \Delta t' = \frac{l_0}{c} + \frac{l_0 - \sqrt{1-\beta^2}\,l_0}{v}$$

已知

$$t_{B'} = 1$$

故

$$1 = \frac{l_0}{c}\left(1 + \frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}\right)$$

即

$$\frac{l_0}{c} = \frac{\beta}{\beta + (1-\sqrt{1-\beta^2})}$$

S 系认为 $A'B'$ 长为 $\sqrt{1-\beta^2}\,l_0$,B' 与 B 相遇时刻晚于 A' 与 A 相遇时刻的时间为

$$\Delta t = \frac{l_0 - \sqrt{1-\beta^2}\,l_0}{v}$$

A'发出光讯号经 l_0 到达 B 所需时间为$\frac{l_0}{c}$,故 B 接收到讯号时B 钟的读数应为

$$t_B=\frac{l_0}{c}-\Delta t=\frac{l_0}{c}-\frac{l_0-\sqrt{1-\beta^2}\,l_0}{c}$$
$$=\frac{l_0}{c}\left(1-\frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}\right)=\left[\frac{\beta}{\beta+(1-\sqrt{1-\beta^2})}\right]\left[\frac{\beta-(1-\sqrt{1-\beta^2})}{\beta}\right]$$
$$=\frac{\beta-(1-\sqrt{1-\beta^2})}{\beta+(1-\sqrt{1-\beta^2})}=\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\quad(\text{时间单位})$$

2.(a)S'系认为,A'发出光讯号经 l_0 的路程到达 B',B'发出应答光讯号经 l_0 的路程到达 A',共需时间$\frac{2l_0}{c}$,故 A'接收到应答讯号时,A'钟的读数应为

$$t_{A'}=\frac{2l_0}{c}=\frac{2\beta}{\beta+(1-\sqrt{1-\beta^2})}=1+\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\quad(\text{时间单位})$$

(b)S 系中的A 钟认为A'接收到应答讯号时,A 钟的读数应为

$$t_A(1)=\frac{t_{A'}}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{2l_0}{c\sqrt{1-\beta^2}}$$

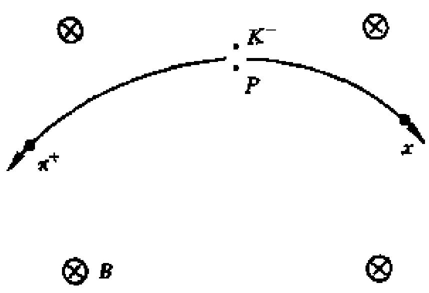
此时 A'与A 相距

$$\Delta l_{AA'}=vt_A(1)=\frac{2vl_0}{c\sqrt{1-\beta^2}}$$

光讯号又经$\frac{\Delta l_{AA'}}{c}$时间到达A,故 A 接收到光讯号时A 钟的读数应为

$$t_A=t_A(1)+\frac{\Delta l_{AA'}}{c}=\frac{2(1+\beta)l_0}{c\sqrt{1-\beta^2}}$$
$$=\frac{2\beta(1+\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}[\beta+(1-\sqrt{1-\beta^2})]}=1+\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\quad(\text{时间单位})$$

【题 5】 如图所示,在一次粒子碰撞实验中,观察到一个低速 k^- 介子与一个静止质子 p 发生相互作用,生成一个 π^+ 介子和一个未知的 x 粒子,在匀强磁场 B 中 π^+ 介子和 x 粒子的径迹已在图中画出. 已知磁场的磁感应强度大小为 $B=1.70\ \mathrm{Wb/m^2}$,测得 π^+ 介子径迹的曲率半径为 $R_1=34.0$ cm.



近试图 5-1

1. 试确定 x 粒子径迹的曲率半径 R_2.

2. 请参考下表确认 x 为何种粒子.

粒 子 名 称	符 号	静质量/MeV*	电荷(e)
正电子,电子	e^+,e^-	0.511	±1
μ子	μ^+,μ^-	105.7	±1
π介子	$\pi^+\pi^-$	139.6	±1
k介子	k^+k^-	493.8	±1
质子	p	938.3	1
中子	n	939.6	0
Λ粒子	Λ^0	1115.4	0
正Σ粒子	Σ^+	1189.4	1
中性Σ粒子	Σ^0	1192.3	0
负Σ粒子	Σ^-	1197.2	−1
中性Ξ粒子	Ξ^0	1314.3	0
负Ξ粒子	Ξ^-	1320.8	−1
Ω粒子	Ω^-	1675	−1

* 此处静质量是指静能量 m_0c^2

【分析】 由题设碰撞前 k^- 介子低速运动，可近似取为零．碰撞后产生的 π^+ 介子和未知的 x 粒子，一般来说运动速度都很大，应采用相对论动力学来讨论．

由电荷守恒可知，x 粒子必为带 $-e$ 的粒子，因此与 π^+ 介子一样，在磁场中运动时会受到洛伦兹力的作用，其径迹正是如图所示的圆形曲线．因洛伦兹力不做功，粒子速度的大小不变，其质量(能量)也就是常量，相对论形式的牛顿第二定律简化为经典牛顿第二定律的形式．据此，π^+ 介子和 x 粒子轨道曲率半径的计算公式就是通常的经典公式

$$R=\frac{mv}{eB}$$

因速度 v 很大，式中的 m 不可近似地取为静质量 m_0．系统在碰撞前的动量近似为零，碰撞后产生的 π^+ 介子和 x 粒子的动量之和也应为零，因此图中两者的运动方向相反．碰后，π^+ 介子和 x 粒子的动量大小相同，由上述公式可知 x 粒子径迹的曲率半径与 π^+ 介子径迹的曲率半径应相同．

π^+ 介子的静质量 m_{10} 可由表中查出，由

$$m_1=\frac{m_{10}}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}$$

结合径迹曲率半径的公式及 R_1 的数据，可求出 π^+ 粒子的速度大小 v_1，进而求出它的能量 $E_1=m_1c^2$．为了从表中查出 x 为何种粒子，必须确定 x 粒子的静质量 m_{20}．利用动量守恒可为 m_{20} 列出一个方程，但式中必定包含 x 粒子的速度 v_2，它也是一个未知量．为此，必须再列出一个独立的方程，例如可取系统能量守恒的表达式．系统的能量近似等于 k^- 介子静能与质子 p 静能之和，

两个静能均可从表中查出. 解出 m_{20}后,参考附表即可确定 x 为何种粒子.

【解】 1. 由电荷守恒,可知 x 粒子应带电 $-e$,考虑到系统碰撞前动量为零(近似),碰撞后产生的 π^+ 介子和 x 粒子的动量之和也必为零. 设 π^+ 介子的速度为 v_1,质量为 m_1,设 x 粒子的速度为 v_2,质量为 m_2,则

$$m_1 v_1 = m_2 v_2$$

这两个粒子在磁场中都要受洛伦兹力的作用,但洛伦兹力都不作功,两粒子速度大小和质量都保持不变. 由相对论形式的牛顿第二定律

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v})$$

在 m 不变的情况下,可简化为

$$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = m\boldsymbol{a}$$

上式与经典形式相同,但注意式中的 m 并非静质量. π^+ 介子和 x 粒子在洛伦兹力作用下,作匀速圆周运动,所需向心力由洛伦兹力提供,即有

$$evB = \frac{mv^2}{R}$$

旋转半径为

$$R = \frac{mv}{eB}$$

因 $m_1 v_1 = m_2 v_2$,且两粒子的电量(绝对值)相同,故 x 粒子圆形径迹的半径 R_2 与 π^+ 介子圆形径迹的半径 R_1 相同,即得

$$R_2 = R_1 = 34.0\ \mathrm{cm}$$

2. 对于 π^+ 介子,有

$$eB = \frac{m_1 v_1}{R_1} = \frac{m_{10}}{\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}}\frac{v_1}{R_1}$$

式中 π^+ 介子的静质量 m_{10}为

$$m_{10} = 139.6\ \mathrm{MeV}/c^2$$

由以上两式,解出

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{eBR_1 c}{\sqrt{m_{10}^2 c^2 + e^2B^2R_1^2}} \\ &= \frac{1.6\times10^{-19}\times1.7\times0.34\times3\times10^8}{\sqrt{\left(\frac{139.6\times10^6\times1.6\times10^{-19}}{3\times10^8}\right)^2 + (1.6\times10^{-19}\times1.7\times0.34)^2}} \\ &= 2.34\times10^8\ \mathrm{m/s} \end{aligned}$$

π^+ 介子的能量为

$$m_1c^2 = \frac{m_{10}c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}} = 223\ \mathrm{MeV}$$

因系统能量守恒，故 x 粒子的能量为

$$m_2c^2=(m_{k0}c^2+m_{p0}c^2)-m_1c^2$$

由表可知，k^- 介子和质子 p 的静能量分别为

$$m_{k0}c^2=493.8\ \text{MeV}$$

$$m_{p0}c^2=938.3\ \text{MeV}$$

代人，得

$$m_2c^2=1209.1\ \text{MeV}$$

故 x 粒子速子的大小为

$$v_2=\frac{m_1v_1}{m_2}=\frac{m_1c^2}{m_2c^2}v_1=4.32\times10^7\ \text{m/s}$$

x 粒子的静质量为

$$m_{20}=m_2\sqrt{1-\left(\frac{v_2}{c}\right)^2}$$

x 粒子的静能量为

$$m_{20}c^2=m_2c^2\sqrt{1-\left(\frac{v_2}{c}\right)^2}=1196\ \text{MeV}$$

查表可知，x 粒子为 Σ^- 粒子.

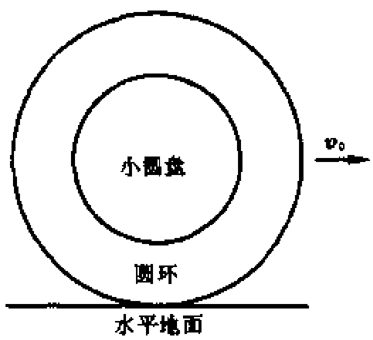
【这是北京大学物理系试验班的试题之一. 该试验班是为了培训、选拔参加 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)的中国队而设立的.】

综合试题(一)

【题 1】 如综试(一)图 1－1 所示，在质量均匀的刚性圆盘中间切割出一个半径为原圆盘半径二分之一的同轴小圆盘，切割使得小圆盘与其外部的圆环之间形成很小的缝隙，缝隙的宽度虽可忽略，但它却使小圆盘与圆环之间只有点接触(实际上相接触的是垂直于盘面的一小段直线，其长度为盘的厚度)．如综试(一)图 1－1 所示，把小圆盘和圆环放在水平地面上，并通过打击使它们具有共同的沿水平方向的初速度 v_0．设圆环与地面之间的摩擦系数为 $\mu_0=0.5$，设圆环与小圆盘之间的摩擦系数为 μ．

1．设在尔后的运动过程中，圆环与小圆盘之间曾发生过相对滑动，试确定 μ 的取值范围．

2．设 $\mu=0.2$，试计算系统最后的沿水平方向的速度．



综试(一)图 1－1

【分析】 1．运动过程．

圆环因受到地面给予的向左的摩擦力，将顺时针转动．在圆环转动的同时，通过圆环给予小圆盘的摩擦力，将带动小圆盘也作顺时针转动．当 μ 足够大时，小圆盘与圆环一起转动，其间无相对滑动．当 μ 较小时，小圆盘的转动会落后于圆环的转动，其间有相对滑动．小圆盘转动加速度记为 β_1，角速度记为 ω_1；圆环的转动加速度记为 β_2，角速度记为 ω_2；系统质心向左的加速度记为 a，系统右行的速度记为 v．下面分阶段讨论系统的运动情况．

第一阶段：$\beta_1<\beta_2$，$\omega_1<\omega_2$，a 对 v 起减速作用．当 ω_2 达到与 v 匹配，恰好使圆环与地面的接触点为瞬心时，即当

$$\omega_2 2R=v$$

的时刻，地面给予圆环的向左滑动摩擦力消失．其中 R 为小圆盘半径．

第二阶段：因小圆盘的转速 ω_1 小于圆环的转速 ω_2，故两者之间的滑动摩擦继续存在，使 ω_1 继续加速，ω_2 继续减速，圆环与地面的接触点又有相对滑动趋势，圆环又会受到地面摩擦力作用．

圆环所受地面摩擦力不能向右，否则质心会加速，圆环的角速度 ω_2 减小，使接触点右行，这显然与摩擦力向右矛盾．故圆环所受地面摩擦力只能向左，但又不能是滑动摩擦力，否则动力学方程与第一阶段完全相同，将使 ω_2 继续加速，质心继续减速，圆环的触地点左行，与摩擦力向左矛盾．

综上，圆环所受地面的摩擦力只能是向左的静摩擦力，触地点仍为瞬心．这样，ω_2 减小，质心继续减速，且两者匹配，有

$$a=\beta_2 2R,\ v=\omega_2 2R$$

当 ω_2 减小到与 ω_1 相等，小圆盘与圆环之间无相对滑动时，系统达到稳定状态，此后，质心右行

速度为恒量.

2. 小圆盘与圆环之间的作用力.

在运动过程中,无论小圆盘与圆环之间作用力的作用点在何位置,小圆盘所受法向支持力 $\boldsymbol{N}_1$ 与摩擦力 $\boldsymbol{f}_1$ 均应满足下述关系,

$$\boldsymbol{f}_1 \perp \boldsymbol{N}_1$$

$$f_1 = \mu N_1$$

其中 $\boldsymbol{N}_1$ 未必在铅垂方向,N_1 也未必就等于小圆盘所受重力的大小.故小圆盘所受圆环总的作用力 $\boldsymbol{F}_1$ 为,

$$\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{N}_1$$

$$F_1 = \sqrt{1+\mu^2} N_1$$

且有

$$F_{1\perp} = mg$$

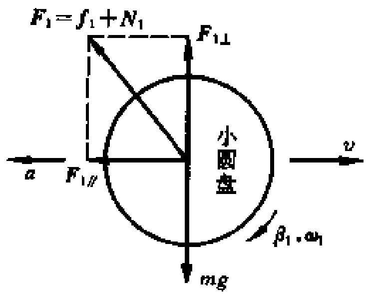
$$F_{1/\!/} = ma$$

其中 m 为小圆盘的质量 . 因此

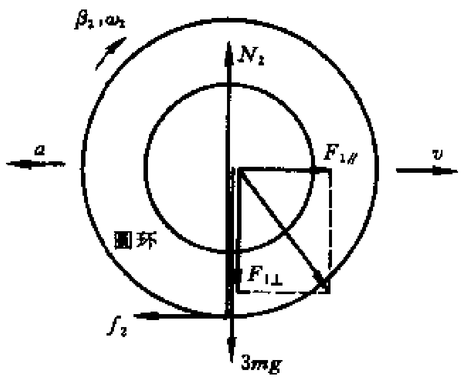
$$N_1 = \frac{m\sqrt{a^2+g^2}}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

$$f_1 = \frac{\mu m\sqrt{a^2+g^2}}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

3. 开始时圆环与小圆盘之间的接触点在小圆盘正右侧略偏下处,第一阶段中接触点降在小圆盘右下侧某处,第二阶段接触点进一步下降在右下侧另一处,最后达到稳定运动状态时,接触点在小圆盘正下方 . 接触点以上四个位置的过渡是连续的,但因缝隙极小,过渡的时间可视为无穷小,忽略,按不连续过渡方式处理.换言之,在求解中不必考虑接触点连续过渡的极短时间内的影响.



综试(一)图 1-2



综试(一)图 1-3

【解】 1. 设小圆盘质量为 m,则圆环质量为 $3m$,它们绕各自中心轴的转动惯量分别为

$$I_1=\frac{1}{2}mR^2$$

$$I_2=\frac{15}{2}mR^2$$

设圆环所受地面支持力与摩擦力的大小分别为 N_2 与 f_2,其他物理量已在上述分析中给出.

第一阶段,如综试(一)图 1－2 所示,对于小圆盘,有

$$\begin{cases} F_{1\perp}=mg & (1)\\ F_{1/\!/}=ma & (2)\\ f_1=\dfrac{\mu m\sqrt{a^2+g^2}}{\sqrt{1+\mu^2}} & (3)\\ f_1R=I_1\beta_1 & (4)\end{cases}$$

如综试(一)图 1－3 所示,对于圆环,有

$$\begin{cases} f_2-F_{1/\!/}=3ma & (5)\\ N_2=3mg+F_{1\perp} & (6)\\ f_2 2R-f_1R=I_2\beta_2 & (7)\\ f_2=\mu_0N_2 & (8)\end{cases}$$

由(1)式至(8)式,可解出其中所含的 8 个未知量,感兴趣的有

$$a=\mu_0g=\frac{g}{2} \tag{9}$$

$$\beta_1=2\sqrt{\frac{1+\mu_0^2}{1+\mu^2}}\mu\frac{g}{R}=\sqrt{\frac{5}{1+\mu^2}}\mu\frac{g}{R} \tag{10}$$

$$\beta_2=\frac{2}{15}\left(8\mu_0-\sqrt{\frac{1+\mu_0^2}{1+\mu^2}}\mu\right)\frac{g}{R}=\frac{1}{15}\left(8-\sqrt{\frac{5}{1+\mu^2}}\mu\right)\frac{g}{R} \tag{11}$$

在以上计算中已将 $\mu_0=0.5$ 代入.

小圆盘与圆环之间有相对滑动,要求

$$\beta_2>\beta_1$$

即要求

$$\mu<\frac{1}{\sqrt{19}}=0.23 \tag{12}$$

这就是 μ 的取值范围.

2. 现在 $\mu=0.2$,满足(12)式的要求,代入(10)式和(11)式,得

$$\beta_1=0.44\frac{g}{R}$$

$$\beta_2=0.50\frac{g}{R}$$

当

$$(\beta_2t)(2R)=\omega'_2(2R)=v'=v_0-at=v_0-\mu_0gt$$

时,第一阶段结束,此时可求得

$$v'=0.67v_0$$

$$\omega'_2=0.33\frac{v_0}{R}$$

$$\omega'_1=\frac{\beta_1}{\beta_2}\omega_2=0.29\frac{v_0}{R}$$

即有

$$\omega'_2>\omega'_1$$

根据前面的分析可知，系统将进入第二阶段的运动.

在第二阶段中，圆环受到地面向左的静摩擦力，(1)式至(6)式仍成立，但(8)式不成立，应代之以

$$a=\beta_2 2R \tag{13}$$

β_2 为逆时针方向，故(7)式也应改为

$$f_2 2R-f_1R=I_2(-\beta_2) \tag{7$'$}$$

为了方便，引入 μ'_0，使其满足

$$f_2=\mu'_0N_2 \tag{8$'$}$$

(7)′式、(8)′式在形式上与(7)式、(8)式完全相同，故(1)式至(6)式以及(7)′、(8)′式有与(9)、(10)、(11)式形式类似的解，为

$$a=\mu'_0g \tag{9$'$}$$

$$\beta_1=2\sqrt{\frac{1+\mu'^2_0}{1+\mu^2}}\mu\frac{g}{R} \tag{10$'$}$$

$$-\beta_2=\frac{2}{15}\left(8\mu'_0-\sqrt{\frac{1+\mu'^2_0}{1+\mu^2}}\mu\right)\frac{g}{R} \tag{11$'$}$$

结合(13)式，并将 $\mu=0.2$ 代入，得

$$\mu'_0=0.0167$$

代入(9)′，(10)′，(11)′式，得

$$a=0.0167g$$

$$\beta_1=0.39\frac{g}{R}$$

$$\beta_2=0.0083\frac{g}{R}$$

注意，β_1 使 ω_1 增大，β_2 使 ω_2 减小. 设再经 t' 时间，达到

$$\omega_1=\omega_2$$

即

$$\omega'_1+\beta_1t'=\omega'_2-\beta_2t'$$

解出

$$t'=\frac{\omega'_2-\omega'_1}{\beta_1+\beta_2}=0.050\frac{v_0}{g}$$

此后系统达到稳定的运动状态，其水平向右的速度保持为

$$v = v' - at' = 0.67\ v_0$$

【附注】 本题第 2 问另有简单解法．取地面某点为参考点，重力、地面支持力和摩擦力的力矩和为零，圆环与小圆盘之间的作用力为内力，故系统的角动量守恒，有

$$(4m)v_0(2R) = (4m)v(2R) + I_{系}\omega$$

$$I_{系} = I_1 + I_2 = 8mR^2$$

$$\omega = \frac{v}{2R}$$

由此可解出

$$v = \frac{2}{3}v_0 = 0.67v_0$$

【题 2】 试求解关于万有引力和天体运动的以下两小题．

1．设万有引力的大小为

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

其中各量的意义不言自明．已知地球绕太阳运动的轨道是一个 $A \neq B$ 的椭圆，其中 A 和 B 分别是椭圆的半长轴和半短轴．

(a)如果太阳位于椭圆的中心，试确定 α 的可取值．

(b)如果太阳位于椭圆的某个焦点上，试确定 α 的可取值．

2．牛顿万有引力的大小为

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

(a)已知太阳的质量为 M，地球绕太阳椭圆轨道的半长轴和半短轴分别为 A 和 B．试求地球在距太阳最近点处的速度和地球椭圆运动的周期．

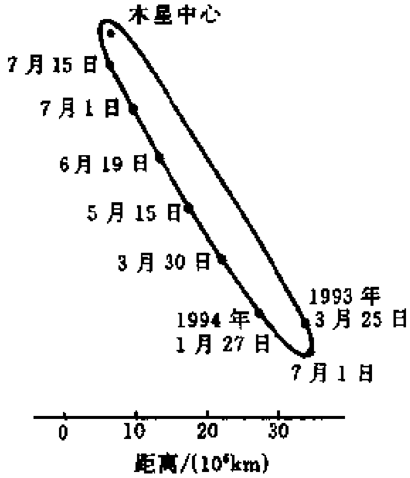
(b)1994 年 7 月 16 日 20 时 15 分，哈勃望远镜观察到了苏梅克－列维 9 号彗星的第一块碎片与木星相撞，尔后其他碎片相继与木星相撞．

在这之前，彗星早已开始绕木星作椭圆运动，据天文测量数据绘制的椭圆运动轨道如综试(一)图 2－1 所示，图平面即为轨道所在平面．试根据此图，估算彗星碎片刚进入木星大气层时相对木星的速度大小．

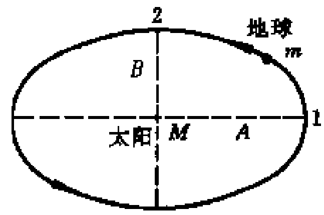
【分析】 万有引力是有心力，与 α 取何数值无关．在太阳万有引力的作用下，地球围绕太阳运动过程中，地球相对太阳的角动量守恒，故开普勒第二定律(即面积定律)成立．为了确定 α 的数值，需要建立关于 α 的方程．为此，可恰当选择椭圆轨道中的两个位置 1 和 2，地球在这两个位置邻近的小运动可视为相应的圆运动，圆运动所需向心力自然来源于太阳引力，由此可建立 v_1(地球在位置 1 处速度的大小)，v_2(地球在位置 2 处速度的大小)和 α 的两个方程．借助于面积定律，又可建立 v_1, v_2, α 的第三个方程．这样，在第 1 问两种情况下的 α 均可获解．为使面积定律得到最方便的应用，位置 1 和 2 选在椭圆轨道的顶点处为宜．

由第 1 问两小题的求解可以看出，在已知地球轨道为椭圆的条件下，太阳在椭圆中心或在椭圆焦点上，相应的 α 有所不同，表明太阳位置对 α 值的确定起着重要作用．

第 2 问的第 2 小题是一道估算题．把彗星与木星均处理为质点,则彗星绕木星作椭圆运动相应的 $v_{近}$ 也可求出,它必由 A 和 B 确定,而 A 和 B 可在综试(一)图 2－1 中近似量出．真实情况下彗星碎片刚进入木星大气时相对木星的速度大小 v 与 $v_{近}$ 相差不会太大,故 v 可用 $v_{近}$ 来估算．另外,由综试(一)图 2－1 所示的日期数据,也可估算出彗星绕木星的轨道周期 T,解题时可供参考.



综试(一)图 2－1



综试(一)图 2－2

【解】 1. 取太阳质量为 M,地球质量为 m

(a)地球椭圆轨道如综试(一)图 2－2 所示,由题设,太阳位于椭圆中心．取综试(一)图 2－2 中 1 和 2 两个顶点,地球在这两处附近的曲线运动可近似处理为相应的圆运动,设椭圆在 1 和 2 两处的曲率半径分别为 ρ_1 和 ρ_2,则可列出动力学方程如下,

$$\frac{mv_1^2}{\rho_1}=G\frac{Mm}{A^{\alpha}}$$

$$\frac{mv_2^2}{\rho_2}=G\frac{Mm}{A^{\alpha}}$$

其中 v_1 和 v_2 分别是地球在 1 和 2 两处的速度大小.由数学知识可知

$$\rho_1=\frac{B^2}{A}$$

$$\rho_2=\frac{A^2}{B}$$

联立以上四式,得

$$\frac{v_1^2}{v_2^2}=\left(\frac{B}{A}\right)^{\alpha+3}$$

因地球所受万有引力为有心力,取太阳为参考点,地球的角动量守恒,开普勒第二定律成立,即有

$$v_1A=v_2B$$

或

$$\frac{v_1^2}{v_2^2}=\left(\frac{B}{A}\right)^2$$

与上面的结果相比较,注意到 $A \neq B$,应有

$$\alpha+3=2$$

解出

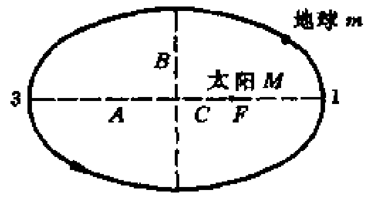
$$\alpha=-1$$

当 $\alpha=-1$ 时,万有引力为沿径向的线性恢复力,它在两个任意相互垂直方向上的分力均为线性恢复力,对应角频率相同的两个简谐振动,其合运动的轨道正是椭圆.

(*b*)地球椭圆轨道如综试(一)图 2-3 所示,由题设,太阳位于椭圆的一个焦点上.取综试(一)图 2-3 中 1 和 3 两个顶点,可列出地球在该处的动力学方程如下,

$$\frac{mv_1^2}{\rho_1}=G\frac{Mm}{(A-C)^\alpha}$$

$$\frac{mv_3^2}{\rho_3}=G\frac{Mm}{(A+C)^\alpha}$$



综试(一)图 2-3

式中 ρ_3 是椭圆在 3 处的曲率半径,显然有

$$\rho_3=\rho_1$$

由以上三式,得

$$\frac{v_1^2}{v_3^2}=\left(\frac{A+C}{A-C}\right)^\alpha$$

再由开普勒第二定律,得

$$v_1(A-C)=v_3(A+C)$$

由以上两式,得

$$(A-C)^{\alpha-2}=(A+C)^{\alpha-2}$$

因 $A \neq B$,故

$$C=\sqrt{A^2-B^2}\neq 0$$

解出

$$\alpha=2$$

2.(*a*)地球距太阳的最近点为综试(一)图 2-3 中的 1 点,由 1.(*b*)中的第一个方程式可得

$$v_1^2=G\frac{M\rho_1}{(A-C)^\alpha}$$

把

$$\alpha=2$$

$$\rho_1=\frac{B^2}{A}$$

代入,得

$$v_1^2=G\frac{MB^2}{A(A-C)^2}=GM\frac{(A^2-C^2)}{A(A-C)^2}$$

$$=GM\frac{(A+C)}{A(A-C)}=GM\frac{(A+C)^2}{A(A^2-C^2)}$$

$$= GM\frac{(A+C)^2}{AB^2}$$

因此，地球在距太阳最近点处的速度为

$$v_1 = \frac{A+C}{B}\sqrt{\frac{GM}{A}}$$

其中

$$C = \sqrt{A^2 - B^2}$$

太阳到地球的矢径在单位时间内扫过的面积 S 为常量，在 1 处可得

$$\dot{S} = \frac{1}{2}v_1(A-C)$$

把 v_1 代入，得

$$\dot{S} = \frac{B}{2}\sqrt{\frac{GM}{A}}$$

地球轨道运动的周期 T 为

$$T = \frac{S}{\dot{S}}$$

椭圆的面积 S 为

$$S = \pi AB$$

故

$$T = 2\pi A\sqrt{\frac{A}{GM}}$$

(b)从综试(一)图 2－1 中量出，彗星椭圆轨道中最远两点的间距约为 5.6 cm，与此间距线垂直的椭圆轨道的最宽间距约为 0.3 cm. 又在图 1 标度尺中 30×10^6 km 对应的长度约为 3.5 cm，故有

$$2A \doteq \frac{5.6}{3.5}\times30\times10^6\ \text{km} = 48\times10^6\ \text{km}$$

$$2B = \frac{0.3}{3.5}\times30\times10^6\ \text{km} = 2.6\times10^6\ \text{km}$$

即

$$A = 24\times10^6\ \text{km}$$

$$B = 1.3\times10^6\ \text{km}$$

1993 年 7 月 1 日彗星的位置为远木星点，1994 年 7 月 16 日彗星与木星相撞的位置应非常接近彗星的近木星点，这两个位置相隔约半个椭圆，故彗星运动的周期可估算为

$$T = 2\times(1\ \text{a(年)} + 15\ \text{d(天)}) = 760\ \text{d(天)}$$

彗星碎片刚进入木星大气层时相对木星的速度可估算为椭圆轨道中近木星点的速度，即相当于综试(一)图 2－3 中 1 处的速度 v_1. 设木星的质量为 M，仿照 2.(a)的解答，可求得

$$v_1 = \frac{A+C}{B}\sqrt{\frac{GM}{A}}$$

如综试(一)图 2－1，因

$$A \gg B$$
$$C \approx A$$

故近似有

$$v_1 = \frac{2A}{B}\sqrt{\frac{GM}{A}}$$

相应地，彗星轨道运动的周期 T 也应为

$$T = 2\pi A\sqrt{\frac{A}{GM}}$$

即

$$GM = \frac{4\pi^2 A^3}{T^2}$$

代入 v_1 的表达式，得

$$v_1 = \frac{4\pi A^2}{BT}$$

把 A, B, T 的数据代入，得

$$v_1 = 85\ \mathrm{km/s}$$

【题 3】 试讨论四维欧氏空间中的四维单元理想气体.

1. 设分子的质量为 m，分子的四维平动速度矢量为 $\boldsymbol{v}$. 设系统处于平衡态时，能均分原理仍成立，每一个方向的平均平动动能 $\bar{\varepsilon}_k$ 仍为 $\frac{1}{2}kT$，其中 k 为波耳兹曼常量，T 为热力学温度.

(a) 试写出温度为 T 时气体分子的方均根速率 $\sqrt{\overline{v^2}}$.

(b) 试写出四维麦克斯韦速度分布律 $F_4(\boldsymbol{v})$ 的表达式.

(c) 试由 $F_4(\boldsymbol{v})$ 导出四维麦克斯韦速率分布律 $f_4(v)$ 的表达式.

(d) 试计算温度为 T 时气体分子的平均速率 $\bar{v}$.

2. 引入四维空间容器器壁的压强

$$p = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S_3}$$

其中 F 是作用力，S_3 是三维器壁的"面积"，在平衡时压强 p 为常量. 引入分子的四维数密度

$$n = \frac{N}{V_4}$$

其中 N 是总分子数，V_4 是四维体积，在平衡时数密度 n 为常量. 采用气体分子运动论的方法可以同样导出

$$p = 2n\bar{\varepsilon}_k$$

(a) 设四维理想气体的摩尔数为 ν，试导出其平衡态的状态方程.

(b) 设四维理想气体的泊松比(即绝热指数)为常量 γ，试导出绝热过程的 $p(V_4)$ 方程.

(c) 单原子四维理想气体的某个准静态过程在 $P-V_4$ 坐标面上的过程线如综试(一)图 3-1 所示. 试导出该过程的摩尔热容量 C. 要求答案除数字外，只能包含一个 R 参量，R 仍定义为 $R = N_A k$，其中 N_A 为阿伏伽德罗常量.

【分析与解】 本题是为了考察学生对物理理论的理解深度以及处理抽象问题的数学、物理能力而编制的.



综试(一)图 3-1

例如,为了写出四维麦克斯韦速度分布律,学生首先应对通常三维情形的理想气体麦克斯韦速度分布律的数理特征有较深的理解.如所周知,在平衡态时,三维理想气体分子无规热运动的特征是各向同性,而且在任意相互垂直的 x_1,x_2,x_3 三个方向上的速度分布是彼此独立的.因此,三维麦克斯韦速度分布 $F_3(\boldsymbol{v})$ 可以分解为在 x_1,x_2,x_3 三个方向上的独立分布 $F_1(v_1),F_1(v_2),F_1(v_3)$.所谓分布实际上是概率密度,由概率相乘的关系,得

$$F_3(\boldsymbol{v})=F_1(v_1)F_1(v_2)F_1(v_3)$$

其中

$$F_1(v_i)=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-mv_i^2/2kT},\quad i=1,2,3$$

即一维分布 $F_1(v)$ 是数学上的正态分布.理想气体的上述特征在真实的三维情形成立,在简化的二维情形以及抽象的四维情形也都成立.这样,即可写出四维分布 $F_4(\boldsymbol{v})$.

在由 $F_4(\boldsymbol{v})$ 导出 $f_4(v)$ 的过程中,必定会涉及半径为 R 的四维球体的"面积",这一抽象几何"面"的计算要求学生能够独立完成.

1.(a)在四维空间,气体分子有四个平动方向,每一方向平动动能的平均值都是

$$\bar{\varepsilon}_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}kT$$

故一个分子总的平均平动动能 $\bar{\varepsilon}$ 为

$$\bar{\varepsilon}=4\bar{\varepsilon}_{\mathrm{k}}=2\,kT$$

因

$$\varepsilon=\frac{1}{2}mv^2$$

其中 v 是四维速率.由以上两式,得出温度为 T 时,分子方均根速率(四维)为

$$\sqrt{\overline{v^2}}=2\sqrt{\frac{kT}{m}}$$

(b)如上所述,四维麦克斯韦速度分布律可写为

$$F_4(\boldsymbol{v})=F_1(v_1)F_1(v_2)F_1(v_3)F_1(v_4)$$
$$=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^2\mathrm{e}^{-m(v_1^2+v_2^2+v_3^2+v_4^2)/2kT}$$

(c)为了由 $F_4(\boldsymbol{v})$ 导出 $f_4(v)$,首先计算四维空间中半径为 R 的球体的"面积".

如综试(一)图 3-2 所示,把半径为 R 的四维球体平行地分割成半径为

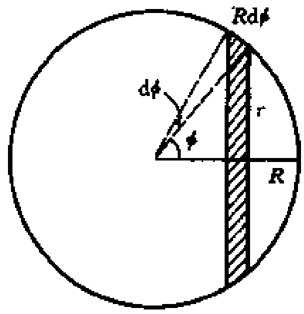
$$r=R\sin\phi$$

宽为 $R\mathrm{d}\phi$ 的四维薄柱体,其三维侧"面积"为

$$\mathrm{d}S_3=(4\pi r^2)R\mathrm{d}\phi$$

故四维球体的"面积"为

$$S_3=\int_0^\pi dS_3=\int_0^\pi 4\pi R^3\sin^2\phi d\phi=2\pi^2R^3$$



综试(一)图 3-2

因 $F_4(\nu)$具有球对称性，故在速度空间中，一个分子速度矢量的端点落在 v 到$(v+dv)$的四维球壳中的概率为

$$F_4(\nu)dV_4$$

其中 dV_4 为该球壳的体积. 在此球壳中，引入径向概率密度 $f_4(v)$，定义为

$$f_4(v)=\frac{F_4(\nu)dV_4}{dv}$$

则 $f_4(v)$即为四维麦克斯韦速率分布函数．把

$$dV_4=S_3(v)dv$$

$$S_3(v)=2\pi^2v^3$$

代入，得

$$f_4(v)=2\pi^2v^3F_4(\nu)=2\pi^2\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^2e^{-mv^2/2kT}v^3$$

(d)温度为 T 时，分子的平均速率为

$$\bar{v}=\int_0^\infty vf_4(v)dv=\int_0^\infty v2\pi^2\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^2e^{-mv^2/2kT}v^3dv$$

上式被积函数中的关键项是

$$v^4e^{-mv^2/2kT}$$

记得在计算三维理想气体分子方均速率的积分式中，刚好出现这一项，具体内容为

$$\int_0^\infty v^2f_3(v)dv=\int_0^\infty v^24\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-mv^2/2kT}v^2dv=\frac{3kT}{m}$$

利用上述积分结果，得

$$\bar{v}=\int_0^\infty v2\pi^2\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^2e^{-mv^2/2kT}v^3dv$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty v^24\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-mv^2/2kT}v^2dv$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3kT}{m}\right)=\sqrt{\frac{9\pi kT}{8m}}$$

2.(a)题目已给出

$$p=2n\bar{\varepsilon}_k$$

$$\bar{\varepsilon}_k=\frac{1}{2}kT$$

故

$$P=nkT$$

其中

$$n=\frac{N}{V_4}$$

代入，得

$$pV_4 = NkT$$

总分子数 N，摩尔数 ν 与阿伏伽德罗常量 N_A 的关系为

$$N = \nu N_A$$

代入，得出四维理想气体状态方程为

$$pV_4 = \nu N_A kT = \nu RT$$

与三维理想气体状态方程相同.

(*b*)对于单原子情形，内能为

$$U = N\bar{\varepsilon} = \nu N_A 2kT = 2\nu RT$$

因此摩尔定体热容量为

$$C_V = 2R$$

设摩尔定压热容量为 C_p，对等压过程，有

$$\nu C_p \mathrm{d}T = \mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + p\mathrm{d}V_4$$

$$\mathrm{d}U = \nu C_V \mathrm{d}T$$

$$p\mathrm{d}V_4 = \nu R\mathrm{d}T$$

由此得出

$$C_p = C_V + R = 3R$$

故绝热指数为

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{3}{2}$$

绝热方程仍可由

$$\nu C_V \mathrm{d}T + p\mathrm{d}V_4 = 0$$

$$p\mathrm{d}V_4 + V_4\mathrm{d}p = \nu R\mathrm{d}T$$

导出，过程从略，结果为

$$pV_4^{\gamma} = 常量$$

(*c*)如综试(一)图 3－1 所示的过程曲线，其过程方程为

$$pV_4^{-1} = 常量$$

由此立刻联想到多方过程. 因此，不妨一般地讨论一下四维理想气体的多方过程.

四维理想气体的多方过程仍定义为过程中摩尔热容量 C 为常量的过程. 仿照三维情形，过程方程仍可由

$$\nu C\mathrm{d}T = \nu C_V \mathrm{d}T + p\mathrm{d}V_4$$

$$p\mathrm{d}V_4 + V_4\mathrm{d}p = \nu R\mathrm{d}T$$

导出 . 引入多方指数

$$n = \frac{C - C_V - R}{C - C_V}$$

后，可得出过程方程为

$$pV_4^n = 常量$$

综试(一)图 3-1 所示的过程曲线,对应 $n=-1$ 的多方过程,过程的摩尔热容量 C 可由

$$-1=\frac{C-C_V-R}{C-C_V}$$

解出,为

$$C=\frac{5}{2}R$$

当然,C 也可用其他方法求得,不再细述.

【题 4】 在如综试(一)图 4-1 所示的支流电路中,三个电源的电动势分别为

$$\mathscr{E}_1=\mathscr{E}_0\cos(\frac{1}{2}\omega t+30^\circ)$$

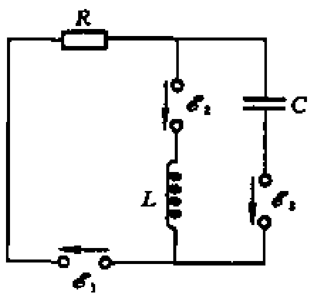
$$\mathscr{E}_2=\mathscr{E}_0\cos(\omega t+45^\circ)$$

$$\mathscr{E}_3=\mathscr{E}_0\cos(2\omega t+60^\circ)$$

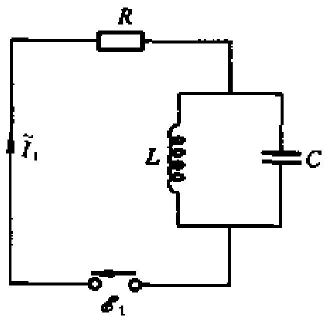
且有

$$\omega L=\frac{1}{\omega C}=R$$

试求通过电阻 R 的电流 i 以及在电阻 R 上消耗的平均功率 $\overline{P}$.



综试(一)图 4-1



综试(一)图 4-2

【分析】 三个电源单独存在时,各自对通过电阻 R 的电流的贡献之和,就是三电源并存时通过 R 的总电流 i. 电阻 R 上的瞬时功率为 $P=i^2R$,由此可进而计算 R 上消耗的平均功率 $\overline{P}$.

【解】 当 $\mathscr{E}_1$ 单独存在,电源 $\mathscr{E}_2$ 和 $\mathscr{E}_3$ 短接时的等效电路如综试(一)图 4-2 所示.设通过 R 的电流为 i_1,相应的复电流为 $\tilde{I}$.由

$$Z_L=(\frac{1}{2}\omega)L=\frac{R}{2}$$

$$Z_C=[(\frac{1}{2}\omega)C]^{-1}=2R$$

电路总的复阻抗为

$$\tilde{Z}_1=R+\frac{\tilde{Z}_L\tilde{Z}_C}{\tilde{Z}_L+\tilde{Z}_C}=R+\frac{\left(\frac{R}{2}j\right)(-2Rj)}{\frac{R}{2}j-2Rj}=R(1+\frac{2}{3}j)$$

或表为

$$\tilde{Z}_1=\frac{\sqrt{13}}{3}Re^{j\phi_{10}}$$

$$\phi_{10}=\arctan\frac{2}{3}=33.7^\circ$$

复电流 $\tilde{I}_1$ 为

$$\tilde{I}_1=\frac{\tilde{\mathscr{E}}_1}{\tilde{Z}_1}=\frac{\mathscr{E}_0e^{j\left(\frac{1}{2}\omega t+30^\circ\right)}}{\frac{\sqrt{13}}{3}R\ e^{j\phi_{10}}}=\frac{3}{\sqrt{13}}\frac{\mathscr{E}_0}{R}e^{j\left(\frac{1}{2}\omega t+\phi_1\right)}$$

$$\phi_1=30^\circ-\phi_{10}=-3.7^\circ$$

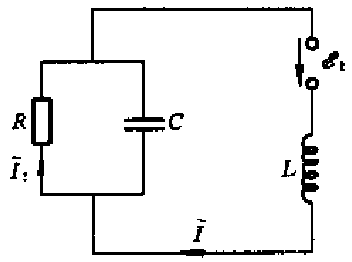
相应的电流 i_1 为

$$i_1=I_{10}\cos\left(\frac{1}{2}\omega t+\phi_1\right)$$

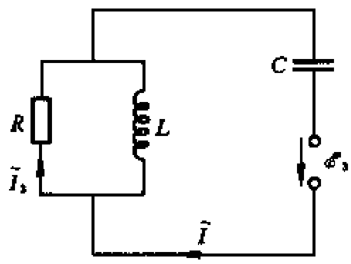
$$I_{10}=\frac{3}{\sqrt{13}}\frac{\mathscr{E}_0}{R}$$

当 $\mathscr{E}_2$ 单独存在，电源 $\mathscr{E}_1$ 和 $\mathscr{E}_3$ 短接时的等效电路如综试(一)图 4－3 所示，设通过 R 的电流为 i_2，相应的复电流为 $\tilde{I}_2$. 此时，

$$Z_L=R$$
$$Z_C=R$$



综试(一)图 4－3



综试(一)图 4－4

电路总的复阻抗为

$$\tilde{Z}_2=\frac{R\tilde{Z}_C}{R+\tilde{Z}_C}+\tilde{Z}_L=\frac{R\times(-Rj)}{R-Rj}+Rj=\frac{R}{2}(1+j)$$

干路复电流为

$$\tilde{I}=\frac{\tilde{\mathscr{E}}_2}{\tilde{Z}_2}=\frac{\mathscr{E}_0e^{j(\omega t+45^\circ)}}{\frac{R}{2}(1+j)}=\frac{\mathscr{E}_0}{R}e^{j\omega t}$$

通过 R 的复电流 $\tilde{I}_2$ 为

$$\tilde{I}_2=\frac{\tilde{Z}_C}{R+\tilde{Z}_C}\tilde{I}=\frac{-Rj}{R-Rj}\cdot\frac{\mathscr{E}_0}{R}e^{j\omega t}=\frac{\mathscr{E}_0}{R}e^{j(\omega t+\phi_2)}$$

$$\phi_2=-45^\circ$$

相应的电流 i_2 为

$$i_2=I_{20}\cos(\omega t+\phi_2)$$

$$I_{20}=\frac{\mathscr{E}_0}{R}$$

当 $\mathscr{E}_3$ 单独存在，电源 $\mathscr{E}_1$ 和 $\mathscr{E}_2$ 短接时的等效电路如综试(一)图 4－4 所示. 设通过 R 的电流为 i_3，相应的复电流为 $\tilde{I}_3$. 此时，

$$Z_L=2R$$

$$Z_C=\frac{R}{2}$$

电路总的复阻抗为

$$\tilde{Z}_3=\frac{R\tilde{Z}_L}{R+\tilde{Z}_L}+\tilde{Z}_C=\frac{R\times(2Rj)}{R+2Rj}-\frac{R}{2}j=\frac{R}{10}(8-j)$$

干路复电流为

$$\tilde{I}=\frac{\tilde{\mathscr{E}}_3}{\tilde{Z}_3}=\frac{\mathscr{E}_0e^{j(2\omega t+60^\circ)}}{\frac{R}{10}(8-j)}=\frac{10}{8-j}\frac{\mathscr{E}_0}{R}e^{j(2\omega t+60^\circ)}$$

通过 R 的复电流 $\tilde{I}_3$ 为

$$\tilde{I}_3=\frac{\tilde{Z}_L}{R+\tilde{Z}_L}\tilde{I}=\frac{2Rj\times10}{(R+2Rj)(8-j)}\frac{\mathscr{E}_0}{R}e^{j(2\omega t+60^\circ)}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{13}}\frac{\mathscr{E}_0}{R}e^{j(2\omega t+\phi_3)}$$

$$\phi_3=60^\circ+\arctan\frac{2}{3}=93.7^\circ$$

相应的 i_3 为

$$i_3=I_{30}\cos(2\omega t+\phi_3)$$

$$I_{30}=\frac{4}{\sqrt{13}}\frac{\mathscr{E}_0}{R}$$

故原电路中通过电阻 R 的总电流为

$$\begin{aligned}i&=i_1+i_2+i_3\\&=\frac{\mathscr{E}_0}{R}\left[\frac{3}{\sqrt{13}}\cos\left(\frac{1}{2}\omega t+\phi_1\right)+\cos(\omega t+\phi_2)+\frac{4}{\sqrt{13}}\cos(2\omega t+\phi_3)\right]\end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases}\phi_1=-3.7^\circ\\ \phi_2=-45^\circ\\ \phi_3=93.7^\circ\end{cases}$$

电阻 R 上消耗的瞬时功率为

$$P=i^2R=\frac{\mathscr{E}_0^2}{R}\left[\frac{3}{\sqrt{13}}\cos\left(\frac{1}{2}\omega t+\phi_1\right)+\cos(\omega t+\phi_2)+\frac{4}{\sqrt{13}}\cos(2\omega t+\phi_3)\right]^2$$

消耗的平均功率为

$$\overline{P}=\frac{\mathscr{E}_0^2}{R}\overline{\left[\frac{3}{\sqrt{13}}\cos\left(\frac{1}{2}\omega t+\phi_1\right)+\cos(\omega t+\phi_2)+\frac{4}{\sqrt{13}}\cos(2\omega t+\phi_3)\right]^2}$$

利用三角函数积化和差的公式，把上式平方中的交叉项展开，其中随时间 t 变化的部分分别为

$$\cos\left(\frac{1}{2}\omega t-\phi_1\right)\cos(\omega t+\phi_2)=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{3}{2}\omega t+\phi_1+\phi_2\right)+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}\omega t+\phi_2-\phi_1\right)$$

………

这些项的平均值均为零.因此，平均功率 $\overline{P}$ 中只包含平方项的平均值，这也就相当于电流 i_1,i_2,i_3 各自单独通过 R 时消耗的平均功率之和，即有

$$\overline{P}=\overline{P}_1+\overline{P}_2+\overline{P}_3$$

其中

$$\overline{P}_1=\overline{i_1^2R}=\frac{1}{2}I_{10}^2R=\frac{9}{26}\frac{\mathscr{E}_0^2}{R}$$

$$\overline{P}_2=\overline{i_2^2R}=\frac{1}{2}I_{20}^2R=\frac{1}{2}\frac{\mathscr{E}_0^2}{R}$$

$$\overline{P}_3=\overline{i_3^2R}=\frac{1}{2}I_{30}^2R=\frac{8}{13}\frac{\mathscr{E}_0^2}{R}$$

故

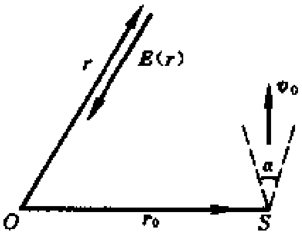
$$\overline{P}=\frac{19}{13}\frac{\mathscr{E}_0^2}{R}$$

【题5】 综试(一)图5－1所在的纸平面代表某惯性系中一个平面.设在此平面上有以 O 点为力心的径向向心静电场，其电场强度分布为

$$\boldsymbol{E}(r)=-kr^{-\beta}\frac{\boldsymbol{r}}{r},\beta\neq1$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 是在平面上所要考察的点相对 O 点的位矢，k 是正的常量，β 为常量.

静电场中的 S 点是带电粒子发射源，发射的带电粒子的电量均为 $q>0$，质量均为 m，粒子间的相互作用可略.在理想情况下，从 S 发射的带电粒子具有横向速度 $\boldsymbol{v}_0$，且尔后粒子刚好能绕力心 O 点作匀速圆周运动.



综试(一)图5－1

1. 试确定 S 点相对 O 点的位矢 $\boldsymbol{r}_0$ 的大小 r_0.

2. 设从 S 点发射的粒子束在横向邻域有一个很小的散射角 α 范围，如综试(一)图 5－1 中虚线所示(即在图 1 中，矢量 v_0 在 α 角的范围内，当然未必刚好居中)，但每个粒子的初始速率仍为 v_0. 试问 β 取哪些值可使这些粒子重新会聚，且会聚点与 O 点的距离仍为 r_0?

再求第一次重新会聚前，粒子束绕 O 点转过的角度(称为聚焦角)ϕ_1，以及从 S 点开始转到 $\frac{\phi_1}{2}$ 时粒子束的径向宽度 Δr_1，并就 $\beta=-13$ 的特例画出粒子束绕 O 点转过 2π 角的轨迹.

3. 保留第 2 问开始时确定的 β 取值范围，设从 S 点发射的粒子束无散射，但横向速度的大小分布在从 v_0 到 $(v_0+\Delta v_0)$ 的小范围内($\Delta v_0>0$)，于是粒子束将会先散开尔后又会聚到一点.

试求这种情况下的聚焦角 ϕ_2，并求从 S 点出发转到 $\frac{\phi_2}{2}$ 时，粒子束的径向宽度 Δr_2，最后仍就 $\beta=-13$ 的特例画出粒子束绕 O 点转过 2π 角的轨迹.

【分析】 在理想情况，带电粒子绕 O 点作匀速圆周运动，所需向心力刚好由径向电场力提供，由此可确定 r_0 的大小.

r_0 就是带电粒子的径向平衡位置. 如果发射角稍稍偏离垂直方向，具有微小的径向速度分量，则带电粒子还会在径向平衡位置附近作小振动. 若这种小振动为简谐振动，则与角向的近似圆运动相结合，就有可能使粒子重新在 r_0 的距离上聚焦. 由径向简谐振动的要求，可以确定 β 的取值. 径向简谐振动的振幅和周期决定了带电粒子的运动轨迹，于是，与运动轨迹有关的各个问题便可逐一求解.

如果带电粒子的发射方向严格沿横向无散射，而发射速率的大小稍稍偏离圆周运动所要求的 v_0 值，则粒子也会偏离圆周运动，具有沿径向的小运动. 由此，同样可以讨论相关的各种问题.

【解】 径向静电场的大小为

$$E(r)=-kr^{-\beta}$$

式中负号表示场强 $\boldsymbol{E}$ 指向力心 O 点.

1. 在理想情况下，带电粒子作匀速圆周运动，所需向心力由静电场力提供，故有

$$-qE(r_0)=\frac{mv_0^2}{r_0}$$

即

$$qkr_0^{-\beta}=\frac{mv_0^2}{r_0}$$

解出

$$r_0=\left(\frac{kq}{mv_0^2}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}$$

2. 由于粒子束从 S 点发射时的发散角很小，粒子的运动开始时稍微偏离圆周运动. 把粒子在任意时刻与 O 点的距离表为 r，绕 O 点旋转的角速度表为 ω，则粒子的径向动力学方程以及粒子相对 O 点的角动量守恒方程如下：

$$m\ddot{r}-m\omega^2r=qE(r)$$
$$\omega r^2=\omega_0r_0^2$$

在小发散角条件下，近似有

$$\omega_0=\frac{v_0}{r_0}$$

如分析中所述，为了使粒子束能够重新在 r_0 的距离上会聚，要求粒子在 r_0 附近作小振动，因此，r 相对 r_0 的偏离应为小量，可表为

$$r=r_0+x$$

其中 x 是沿径向的微小变量，可正可负. 于是，有

$$\omega=\frac{r_0^2\omega_0}{r^2}=\frac{r_0^2\omega_0}{(r_0+x)^2}\approx\left(1-\frac{2x}{r_0}\right)\omega_0$$

把 $E(r)$代入上述径向动力学方程，并把上述 r 和 ω 的结果代入，得

$$\begin{aligned}m\ddot{r}&=m\omega^2r+qE(r)=m\omega^2r-qkr^{-\beta}\\&=m\left(1-\frac{2x}{r_0}\right)^2\omega_0^2(r_0+x)-qk(r_0+x)^{-\beta}\\&=m\left(1-\frac{4x}{r_0}\right)\omega_0^2r_0\left(1+\frac{x}{r_0}\right)-qkr_0^{-\beta}\left(1+\frac{x}{r_0}\right)^{-\beta}\\&=m\left(1-\frac{4x}{r_0}\right)\omega_0^2r_0\left(1+\frac{x}{r_0}\right)-qkr_0^{-\beta}\left(1-\beta\frac{x}{r_0}\right)\end{aligned}$$

把

$$qkr_0^{-\beta}=\frac{mv_0^2}{r_0}=m\omega_0^2r_0$$

代入，得

$$m\ddot{r}=m\left(1-\frac{3x}{r_0}\right)\omega_0^2r_0-m\omega_0^2r_0\left(1-\beta\frac{x}{r_0}\right)=-m(3-\beta)\omega_0^2x$$

因

$$r=r_0+x$$

故

$$\ddot{r}=\ddot{x}$$

于是得出关于 x 的微分方程为

$$\ddot{x}+(3-\beta)\omega_0^2x=0$$

为了使粒子重新在 r_0 距离上会聚，要求上述微分方程为谐振动方程，即要求

$$3-\beta>0$$

因此，仅当 β 的取值范围为

$$\beta<3$$

时，粒子束才能重新在 r_0 距离上会聚.

x 的振动角频率为

$$\Omega=\sqrt{3-\beta}\,\omega_0$$

Ω 与 ω_0 各自对应的周期 T 与 T_0 之间的关系为

$$T=\frac{T_0}{\sqrt{3-\beta}}$$

粒子经半周期

$$\frac{T}{2}=\frac{T_0}{2\sqrt{3-\beta}}$$

重新会聚.因粒子原来经 T_0 时间绕 O 点转过 2π 角，现在经$\frac{T}{2}$时间转过的角度为

$$\phi_1=\left(\frac{T}{2T_0}\right)2\pi$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{3-\beta}}$$

ϕ_1 即为粒子束的聚焦角.

如综试(一)图 5－2 所示，将小发散角 α 分解为偏离垂直方向(即横向)向外的最大偏转角 α_1 和向里的最大偏转角 α_2.则向外和向里的最大径向初速度分别为

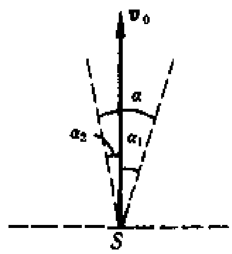
$$v_0\sin\alpha_1\approx v_0\alpha_1$$

$$v_0\sin\alpha_2\approx v_0\alpha_2$$

它们将相应于各粒子沿径向微小变量 x 中的两个振幅 A_1 和 A_2，其间的关系为

$$v_0\alpha_1=\Omega A_1$$

$$v_0\alpha_2=\Omega A_2$$



综试(一)图 5－2

当粒子束转过$\frac{\phi_1}{2}$角(即经过四分之一径向谐振动周期)时，粒子束的径向宽度即为 A_1 与 A_2 之和，即

$$\Delta r_1=A_1+A_2=\frac{v_0}{\Omega}(\alpha_1+\alpha_2)$$

其中

$$\Omega=\sqrt{3-\beta}\omega_0$$

$$\omega_0=\frac{v_0}{r_0}$$

$$\alpha_1+\alpha_2=\alpha$$

代入，得

$$\Delta r_1=\frac{\alpha r_0}{\sqrt{3-\beta}}$$

若 $\beta=-13$，则

$$\phi_1=\frac{\pi}{4}$$

$$\Delta r_1=\frac{\alpha r_0}{4}$$

粒子束转过 2π 期间的轨迹如综试(一)图 5－3 所示($\beta=-13$，每经 $\phi_1=\frac{\pi}{4}$聚焦一次).

3. 从 S 发射的粒子无散射，但横向速度分布在 v_0 到$(v_0+\Delta v_0)$的小范围内.因 Δv_0 很小，粒子的运动也是稍稍偏离圆周运动.设某粒子的初速率为

$$v = v_0 + \delta v_0, \delta v_0 \leqslant \Delta v_0$$

该粒子的径向动力学方程和相对 O 点的角动量守恒方程分别为

$$m\ddot{r} - m\frac{v_\theta^2}{r} = qE(r)$$

$$v_\theta r = vr_0 = (v_0 + \delta v_0) r_0$$

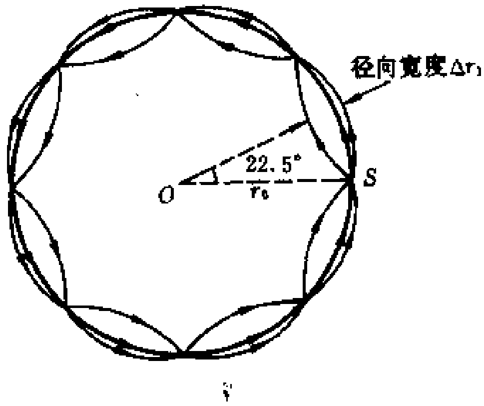
式中 v_θ 为该粒子在运动过程中的角向速度. 因 r 对 r_0 的偏离很小, 可表为

$$r = r_0 + x$$

式中 x 仍为沿径向的微小变量. 联立以上三式, 有

$$m\ddot{x} = m\ddot{r} = m\frac{(v_0+\delta v_0)^2 r_0^2}{(r_0+x)^3} - qk(r_0+x)^{-\beta}$$

$$= m\frac{v_0^2}{r_0}\left(1+2\frac{\delta v_0}{v_0}\right)\left(1-3\frac{x}{r_0}\right) - m\frac{v_0^2}{r_0}\left(1-\beta\frac{x}{r_0}\right)$$



综试(一)图 5-3

即

$$\ddot{x} = \frac{v_0^2}{r_0}\left[2\frac{\delta v_0}{v_0} - (3-\beta)\frac{x}{r_0}\right]$$

引入 x_0 满足

$$\frac{2\delta v_0}{v_0} - (3-\beta)\frac{x_0}{r_0} = 0$$

即

$$x_0 = \frac{2r_0\delta v_0}{(3-\beta)v_0}$$

对于每一个粒子, δv_0 和 x_0 都是确定的量. 现在引入变化的 x', 使得

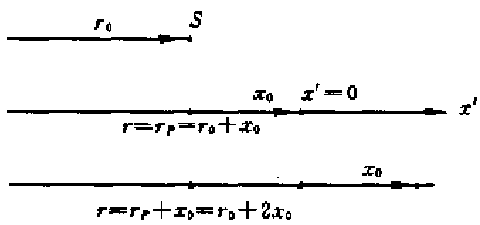
$$x = x_0 + x'$$

则 x' 的方程为

$$\ddot{x}' = -(3-\beta)\frac{v_0^2}{r_0^2}x' = -(3-\beta)\omega_0^2 x'$$

可见 x' 也作简谐振动, 振动的角频率也是

$$\Omega = \sqrt{3-\beta}\,\omega_0$$



综试(一)图 5-4

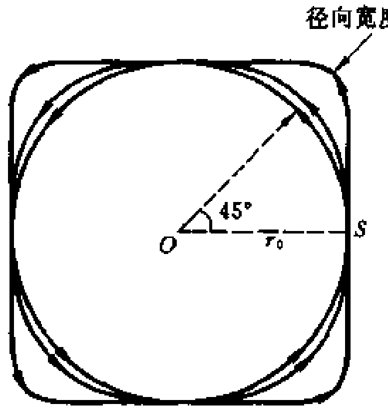
需要注意的是, 各粒子自己的径向振动平衡位置为综试(一)图 5-4 中的

$$r_p = r_0 + x_0$$

r_0 相同, x_0 各不相同. 在原出发点 S 位置时, 各粒子的 r 均处于最小值 r_0, 经四分之一振动周期, 各自的 r 达到 $r_p + x_0 = r_0 + x_0$ 值, x_0 即为该粒子的振幅. 再经四分之一周期, 各自的 r 达到 $r_p + x_0 = r_0 + 2x_0$ 值. 再经二分之一周期(共经一个周期), 各自的

r 又恢复到 r_0 值，此时粒子束才又重新会聚. 可见聚焦角 ϕ_2 应为本题第 1 问中聚焦角 ϕ_1 的两倍，为

$$\phi_2=2\phi_1=\frac{2\pi}{\sqrt{3-\beta}}$$



综试(一)图 5-5

从 S 点转过 $\frac{\phi_2}{2}$ 角时，粒子束径向振动达二分之一周期，此时，粒子中 x_0 最小者（即对应 $\delta v_0=0$ 者）的径向距离仍为 r_0，x_0 最大者（即对应 $\delta v_0=\Delta v_0$ 者）的径向距离达到 $[r_0+2(x_0)_{\max}]$. 因此，粒子束的径向宽度为

$$\Delta r_2=2(x_0)_{\max}=2\frac{2r_0\Delta v_0}{(3-\beta)v_0}=\frac{4r_0\Delta v_0}{(3-\beta)v_0}$$

若

$$\beta=-13$$

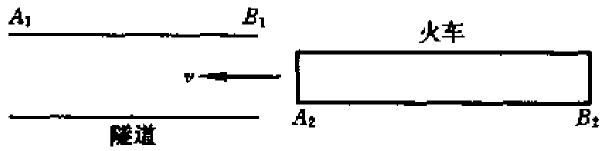
则

$$\phi_2=\frac{\pi}{2}$$

粒子束转过 2π 角期间（经过四个周期）的轨迹如综试(一)图 5-5 所示.

【题 6】 已知隧道 A_1B_1 的长度为 L_1，火车 A_2B_2 的静长为 L_2，$L_2>L_1$.

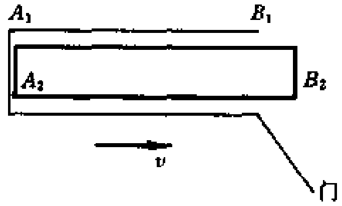
1. 如综试(一)图 6-1 所示，设火车以匀速率 v 驶进隧道，使得地面 S_1 系中的观察者发现 A_2 与 A_1 相遇时，B_2 与 B_1 也相遇. 试求 v 值.



综试(一)图 6-1

2. 引入随火车一起运动的惯性系 S_2，在 S_2 系中的观察者必定认为 A_1 与 A_2 先相遇，尔后 B_1 与 B_2 相遇. 试求其间的时间间隔 Δt_2.

3. 设隧道 A_1 端封闭，B_1 端有一大门. S_1 系中的观察者既然认定 A_2 与 A_1 相遇时 B_2 与 B_1 也相遇，便可在这一时刻把 B_1 端的大门关闭，将火车 A_2B_2 装入隧道. 设 S_2 系不会因火车运动受阻而减速，即 S_2 始终是一个惯性系. S_2 系的观察者认为，A_1 与 A_2 相遇后，需经 Δt_2 时间，B_1 才与 B_2 相遇，但又必须承认火车会被装入隧道这一事实. 为此，S_2 系的观察者提出一种可能的物理模型来进行解释.



综试(一)图 6-2

为了使问题简化，设隧道质量足够大，而且不会发生形变. 当隧道封闭的 A_1 端与火车的 A_2 端相遇时，即令带动 A_2 端以 v 速率向综试(一)图 6-2 的右方运动. 如果 A_2 被带动的瞬间，火车

的所有部位(包括 B_2 端)都被以 v 速率向右带动，即若火车具有经典的刚性结构，则隧道不可能把火车关入．现在假设被带动事件在火车中以一恒定的有限速度 u 从 A_2 传递到 B_2，便有可能在 B_2 被带动之前或被带动之时，B_1 已到达 B_2 位置，则 B_1 端的大门可将火车关入．

试先根据上述模型，确定 u 的可取值．再假设 u 是一个独立于 v 和 L_2 的火车内部结构参量，试证明 $u \leqslant c$．

【分析与解】 本题重在考察学生对题文的理解，同时使学生了解在狭义相对论中相互作用变化传递速度的有限性．

1．火车因相对 S_1 系以 v 速度沿其长度方向运动，而使其相对 S_1 系的长度成为

$$L_{2动}=\sqrt{1-\beta^2}L_2$$

其中

$$\beta=\frac{v}{c}$$

在 S_1 系中认定 A_2 与 A_1 相遇时，B_2 与 B_1 相遇，即有

$$L_{2动}=L_1$$

由以上三式解出

$$1-\beta^2=\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2$$

$$v=\sqrt{1-\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2}\,c$$

2．在 S_2 系中火车静止，隧道沿其长度方向运动，速度大小也为 v，故隧道的动长为

$$L_{1动}=\sqrt{1-\beta^2}L_1=\frac{L_1^2}{L_2}<L_2$$

因此，在 S_2 系中的观察者认为 A_1 与 A_2 先相遇，B_1 与 B_2 后相遇，其间的时间间隔为

$$\Delta t_2=\frac{(L_2-L_{1动})}{v}=\frac{\left[1-\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2\right]L_2}{\sqrt{1-\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2}\,c}=\sqrt{1-\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2}\,\frac{L_2}{c}$$

3．在 S_2 系中，A_1 与 A_2 相遇后，经 Δt_2 时间，B_1 才与 B_2 相遇．为了使被带动事件从 A_2 传递到 B_2 之时或之前，B_1 已经到达 B_2 位置，要求

$$u\Delta t_2 \leqslant L_2$$

把 Δt_2 的表达式代入，即可得出的 u 的取值范围为

$$u \leqslant \frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2}}$$

利用第 1 问得出的 v 与 c 的关系，也可把 u 的取值范围表为

$$u \leqslant \frac{c^2}{v}$$

若 u 与 v 及 L_2 的取值无关，可用反证法证明 $u \leqslant c$ 如下．设

$$u > c$$

则可引入数 α_0，使得

$$u = \alpha_0 c, \alpha_0 > 1$$

此时，又一定可引入数 α，使得

$$\alpha_0 > \alpha > 1$$

选择 L_2，使得

$$v = \frac{c}{\alpha} < c$$

因

$$v = \sqrt{1 - \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2} c$$

即选取

$$L_2 = \frac{L_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2}} > L_1$$

这是可以做到的．于是，有

$$u = \alpha_0 c > \alpha c = \frac{c^2}{v}$$

即得

$$u > \frac{c^2}{v}$$

前面得出的 u 的取值范围是

$$u \leqslant \frac{c^2}{v}$$

以上两式是矛盾的．因此，假设 $u > c$ 是不成立的，即应有

$$u \leqslant c$$

【这是北京大学物理试验班的试题之一．该试验班是为了培训、选拔参加 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)的中国队队员而设立的．】

综合试题(二)

【题1】 试用物理方法讨论以下两个数学问题.

1. 试用力学方法求解光滑曲线的曲率半径.

(a)在平面直角坐标系中,双曲线方程可表为

$$\frac{x^2}{A^2}-\frac{y^2}{B^2}=1$$

此双曲线与 x 轴的交点称为顶点.试利用小行星绕太阳运动可能采取的双曲线轨道,计算双曲线顶点处的曲率半径 ρ,结果用 A 和B 表示.

(b)旋转半径为 r、螺距为 h 的等距螺旋线,曲率半径 ρ 处处相同.试用质点运动学方法求解 ρ 值.

2. 光滑弯曲液面上任意某点内、外压强差的拉普拉斯公式为

$$P_{内}-P_{外}=\sigma\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)$$

其中 σ 为液体表面张力系数,ρ_1 和 ρ_2 为曲面上该点任意一对正交正截面两截线的曲率半径.由于 $P_{内}$ 和$P_{外}$ 的值与一对正交正截面的选取无关,拉普拉斯公式成立的数学前提是,在光滑曲面上每一位置 Q 点处任意一对正交正截面两截线的曲率半径的倒数之和只是 Q 点位置的函数,而与这一对正交正截面的选取无关.

取一个圆柱面,在面上任选一点 Q,试自行设计两对通过 Q 点的正交正截面,并用物理方法验证这两对正截面各自对应的两条截线在 Q 点的曲率半径倒数之和相同.

【分析】 质点运动轨道为一平面光滑曲线时,质点在任意小段的运动均可处理为相应的圆弧运动,向心加速度 $a_{心}$、运动速率 v 和曲率半径ρ 之间的关系为

$$a_{心}=\frac{v^2}{\rho}$$

即

$$\rho=\frac{v^2}{a_{心}}$$

对于任何一条数学上给定的平面光滑曲线,总可以为质点设计一种运动,一方面使质点的运动轨道即为此曲线,另一方面又可算出 v 和$a_{心}$ 的分布,这样,便可用上面的公式确定曲线的曲率半径 ρ.当然,在有些情况下,光滑曲线某处两侧的曲率半径并不相同(例如圆弧与其切线连接处两侧的曲率半径不相同),则可在该处两侧分别计算曲率半径.

对于空间光滑曲线,其上任意不共线的三点可确定一个平面,当三点无限靠近时将确定一个极限平面.空间曲线上的一无限小曲线段可看作是极限平面上一个相应圆的无限小圆弧段,该圆称为密接圆.通过这种极限方法,把空间曲线的曲率半径问题转化为相应的平面曲线的曲率半径问题,从而同样可利用质点运动学的方法来求解其曲率半径.

利用质点动力学公式

$$F_{心}=\frac{mv^2}{\rho}$$

在已知 v 和$F_{心}$ 时,也可求出曲率半径为

$$\rho=\frac{mv^2}{F_{心}}$$

本题1(a)要求采用质点动力学方法求解双曲线顶点处的曲率半径,动力学结构已经给出,不必另行设计了.对本题1(b),则需先设计质点的一种运动,使其轨道为等距螺旋线,然后再求解曲率半径.显然,质点运动的设计越简单越方便,联想到带电粒子在斜交匀强磁场中可作等距螺旋线运动,不妨将质点的运动设计为匀速圆周运动与匀速直线运动的叠加.

本题第2问涉及圆柱面上两对正交正截面的选取.第一对正交正截面可选为与圆柱面母线垂直的平面 S_1 以及由圆柱面一条母线与中央轴线确定的平面 S_2. S_1 在圆柱面上的截线是一个圆,其曲率半径 ρ_1 即为圆柱的半径 r. S_2 在圆柱面上的截线即为母线,其曲率半径 ρ_2 为无穷大.由此得出

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{1}{r}$$

再取一对分别与 S_1 和 S_2 斜交的正交正截面 S'_1 和 S'_2, S'_1 与 S'_2 互相垂直. S'_1 和 S'_2 在圆柱面上的截线均为椭圆,采用质点运动学方法可以求出两椭圆顶点处的曲率半径 ρ'_1 和 ρ'_2,然后证明必定有

$$\frac{1}{\rho'_1}+\frac{1}{\rho'_2}=\frac{1}{r}$$

也可利用本题1(b)的解答,因为 S'_1 和 S'_2 在圆柱面上椭圆截线顶点处的极限曲率圆与通过顶点的两条正交等距螺旋线的极限曲率圆相同,故 ρ'_1 和 ρ'_2 可以简单写出,使上式的验证得以简化.

【解】 1.(a)如综试(二)图1-1所示,小行星沿双曲线轨道运动,太阳位于焦点 F,从太阳到小行星所作矢径在单位时间内扫过的面积 $\dot{S}$为恒量,$\dot{S}$可用小行星在双曲线顶点 D 处的参量来表示,为

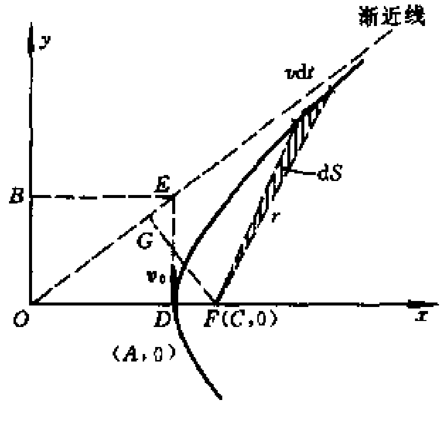
$$\dot{S}=\frac{1}{2}v_0(C-A)$$

式中

$$C=\sqrt{A^2+B^2}$$

上述表述与小行星实际上是否经过 D 点无关.在其他位置,小行星在 dt 时间的位移为 $v dt$,矢径扫过的面积为综试(二)图1-1中用平行斜线标出的三角形面积.当小行星趋向无穷远时,$v dt$ 逼近双曲线的渐近线,三角形的 $v_\infty dt$ 底边上的高即为焦点F 到渐近线的距离 $H=\overline{FG}$.因两个直角三角形 OED 与OFG 全等,故有

$$H=\overline{FG}=\overline{DE}=B$$



综试(二)图1-1

无穷远矢径在 dt 时间内扫过的面积为

$$dS=\frac{1}{2}(v_\infty dt)H$$
$$=\frac{1}{2}v_\infty B dt$$

即

$$\dot{S}=\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}v_\infty B$$

与前述 $\dot{S}$表达式相比较，得

$$v_\infty=\frac{C-A}{B}v_D$$

小行星在顶点 D 处与在无穷远处的能量相同，故有

$$\frac{1}{2}mv_D^2-G\frac{Mm}{C-A}=\frac{1}{2}mv_\infty^2$$

式中 m 为小行星质量，M 为太阳质量. 由以上两式，得

$$v_D^2=\frac{GMB^2}{A(C-A)^2}$$

设双曲线在顶点 D 处的曲率半径为 ρ，当小行星在 D 点附近时，太阳对小行星的引力全部用来为小行星的极限圆弧运动提供向心力，故有

$$G\frac{Mm}{(C-A)^2}=\frac{mv_D^2}{\rho}$$

由以上两式，得出双曲线顶点 D 处的曲率半径为

$$\rho=\frac{B^2}{A}$$

(b)综试(二)图 1－2 是在圆柱面上的等距螺旋线的正视图. 等距螺旋线是空间曲线，并非在一个平面内，但具有明显的对称性. 具体地说，在综试(二)图 1－2 中，等距螺旋线相对于其上任意一点 Q 具有右上与左下的对称性，在 Q 点的曲率圆的圆心必定在从 Q 点到圆柱中央轴的垂线上.

设质点沿此螺旋线轨道作匀速运动，则质点的运动可分解为在半径为 r 的圆上的匀速圆周运动以及沿母线方向的匀速直线运动的叠加，两者的速度大小分别为 v_r 和 v_h，都是常量. 故质点合运动速度的大小为

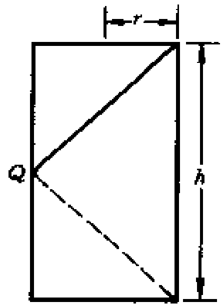
$$v=\sqrt{v_r^2+v_h^2}$$

质点合运动加速度 a 的大小即为在半径为 r 的圆上所作匀速圆周运动的加速度，a 的方向指向中央轴. 因此，在任意 Q 点的加速度 a 指向相应的曲率圆圆心，a 就是质点所作螺旋运动的向心加速度. a 的大小为

$$a=\frac{v_r^2}{r}$$

在任意 Q 点曲率圆的曲率半径为

$$\rho=\frac{v^2}{a}=\left(\frac{v}{v_r}\right)^2 r$$



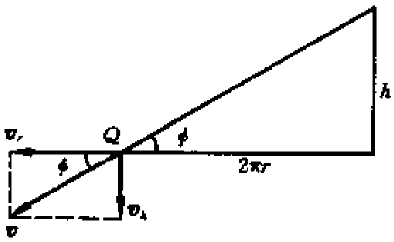
综试(二)图 1－2

把质点沿螺旋线轨道在圆柱面上绕行一周的运动曲线展成如综试(二)图 1－3 所示的几何图线，各个速度 v_r、v_h、v 的相对方向也已在图中标明. 由综试(二)图 1－3，利用几何关系，可得

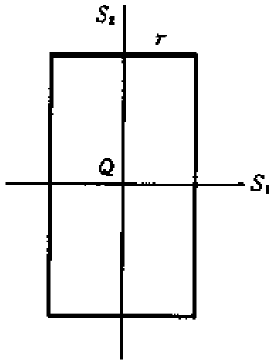
$$\frac{v}{v_r}=\frac{1}{\cos\phi}=\frac{1}{2\pi r}\sqrt{(2\pi r)^2+h^2}$$

由以上两式，即可得出等距螺旋线的曲率半径为

$$\rho=\left(1+\frac{h^2}{4\pi^2r^2}\right)r$$



综试(二)图 1－3



综试(二)图 1－4

2. 如综试(二)图 1－4 所示，圆柱面的旋转半径为 r，通过圆柱面上任意一点 Q 所作的第一对正交正截面 S_1 和 S_2 在综试(二)图 1－4 中用两条直线代表，它们在圆柱面上的截线分别是半径为 r 的圆以及直线，两者的曲率半径分别为

$$\rho_1=r$$

$$\rho_2=\infty$$

即

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{1}{r}$$

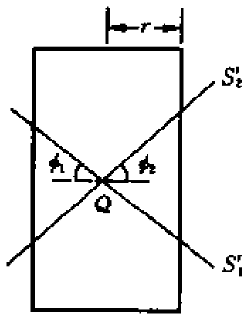
通过圆柱面上 Q 点所作的任意另一对正交正截面 S'_1 和 S'_2 如综试(二)图 1－5 所示，它们的方位角 ϕ_1 和 ϕ_2 已在综试(二)图 1－5 中标明，且有

$$\phi_1+\phi_2=\frac{\pi}{2}$$

S'_1 和 S'_2 在圆柱面上的截线分别是椭圆，椭圆在 Q 点的曲率圆即为相应的等距螺旋线在 Q 点的曲率圆. 仿照综试(二)图 1－3，把这两条相应的等距螺旋线展成如综试(二)图 1－6 所示的几何图线，则相应的螺距分别为

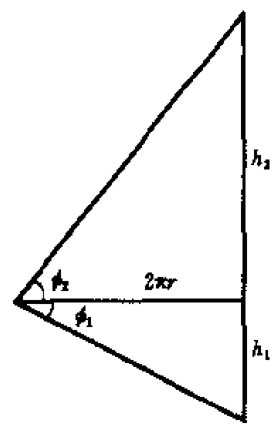
$$h_1=2\pi r\tan\phi_1$$

$$h_2=2\pi r\tan\phi_2$$



综试(二)图 1－5

曲率半径分别为



综试(二)图 1－6

$$\rho'_1=\left[\frac{(2\pi r)^2+h_1^2}{(2\pi r)^2}\right]r$$

$$\rho'_2=\left[\frac{(2\pi r)^2+h_2^2}{(2\pi r)^2}\right]r$$

它们的倒数和为

$$\frac{1}{\rho'_1}+\frac{1}{\rho'_2}=\left[\frac{(2\pi r)^2}{h_1^2+(2\pi r)^2}+\frac{(2\pi r)^2}{h_2^2+(2\pi r)^2}\right]\frac{1}{r}$$

$$=\left[\frac{1}{\tan^2\phi_1+1}+\frac{1}{\tan^2\phi_2+1}\right]\frac{1}{r}$$

因

$$\phi_1+\phi_2=\frac{\pi}{2}$$

即

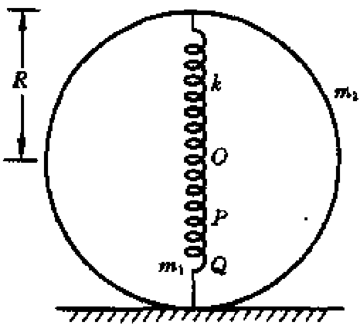
$$\tan\phi_2=\frac{1}{\tan\phi_1}$$

代入，得

$$\frac{1}{\rho'_1}+\frac{1}{\rho'_2}=\frac{1}{r}$$

可见，通过圆柱面上任意一点 Q 作任意一对正交正截面，它们与圆柱面的截线在 Q 点的曲率半径的倒数之和是一个相同的量.

【题 2】 如综试(二)图 2－1 所示，质量为 m_1 的小球连在质量可略、倔强系数为 k 的弹簧的一端，弹簧的另一端连在质量为 m_2 的均匀薄球壳内壁之上. 弹簧的自由长度与球壳的半径相同，均为 R，开始时，球壳置于水平地面之上，弹簧在球壳内处于竖直状态并位于球壳直径处，小球在其力平衡点 P 点下方的 Q 点处，并用一根轻而直的细绳与球壳底端相连，如综试(二)图 2－1 所示. 在某时刻，断开细绳，尔后发现球壳时而升离地面，时而无碰撞地落回地面，并且在球壳升离与落回的两个瞬间小球离地的高度相同.



综试(二)图 2－1

1. 如综试(二)图 2－1，把 P 点和 Q 点的间距表为 H，在忽略空气阻力的条件下，试导出可用于确定最小 H 值的一组公式.

2. 设 $m_1=m_2=m$，$k=10\,\frac{mg}{R}$. 试计算 H 的最小值，其中的系数要求精确到两位有效数字.

【分析与解】 1. 先分析一下系统的运动过程.

设想如果既没有地面支持力的作用(例如当球壳升离地面时)又没有重力的作用，则系统(球壳与小球)只受弹性力作用，在沿弹簧长度方向的运动相对质心参考系而言必定是简谐振动，其角频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

式中

$$\mu=\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)}$$

为约化质量.如果没有地面支持力的作用,但有重力的作用,则因重力是恒力,在质心参考系中系统仍将作上述简谐振动.

在本题中,系统不仅受地面支持力的作用,而且支持力的大小还在不断变化.例如,细绳断开前,支持力 N 为

$$N=(m_1+m_2)g$$

细绳断开后瞬间,支持力 N 增为

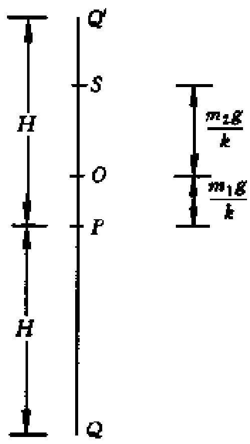
$$N=(m_1+m_2)g+kH$$

尔后,球壳先不动,小球先作向上的简谐振动,其振幅 A_1、角频率 ω_1、周期 T_1 分别为

$$A_1=H,\quad \omega_1=\sqrt{\frac{k}{m_1}},\quad T_1=2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}$$

与此同时,支持力 N 将随之减小.如综试(二)图 2－2 所示,小球经过$\frac{T_1}{4}$的时间走过 H 的路程到达它自身的力平衡点 P,又走过$\frac{m_1g}{k}$的路程到达球心 O 点,此时支持力 N 减小到m_2g,小球若能继续向上运动(要求 $H>\frac{m_1g}{k}$),则弹簧被压缩,支持力 N 继续减小.小球若能继续上升到达综试(二)图 2－2 中的 S 点,则相应的弹簧压缩力为 m_2g,从而支持力 N 降为零.若小球还能继续上升,则球壳才有可能会被弹簧顶起,升离地面.因此,为使球壳升离地面,H 必须满足的条件应是

$$H>\frac{(m_1+m_2)g}{k}$$



综试(二)图 2－2

小球从 P 点到达 S 点所需时间 t_{PS}应满足下式,

$$A_1\sin\omega_1t_{PS}=\frac{(m_1+m_2)g}{k}$$

小球从 Q 点到达 S 点所需时间为,

$$\Delta t_1=\frac{T_1}{4}+t_{PS}=\sqrt{\frac{m_1}{k}}\left\{\frac{\pi}{2}+\arcsin\left[\frac{(m_1+m_2)g}{kH}\right]\right\}$$

小球经过 S 点后,由于系统失去了地面的支持力 N,如前所述,小球和球壳将相对系统的质心以角频率 ω 作简谐振动,质心则以初速度

$$v_{C0}=\frac{m_1v_S}{m_1+m_2}$$

作上抛运动.其中 v_S 是小球在 S 点相对地面的速度,它满足下述能量方程,

$$\frac{1}{2}m_1v_S^2+m_1g(H+\overline{PS})+\frac{1}{2}k\,\overline{OS}^2=\frac{1}{2}k(H+\overline{PO})^2$$

其中

$$\overline{PS}=\frac{(m_1+m_2)g}{k},\quad \overline{OS}=\frac{m_2g}{k},\quad \overline{PO}=\frac{m_1g}{k}$$

代入能量方程，得

$$v_S^2=\frac{k}{m_1}\left\{H^2-\left[\frac{(m_1+m_2)g}{k}\right]^2\right\}>0$$

球壳升离地面后，经过一定时间后又将返回接触地面，若球壳接触地面时小球也刚好返回 S 点，则系统的质心也必定返回原处并且具有向下的速度 v_{C0}. 此过程经过的时间为

$$\Delta t_2=\frac{2v_{C0}}{g}=\frac{2m_1v_S}{(m_1+m_2)g}$$

如果此时小球在 S 位置刚好具有向下的大小为原来的 v_S 的速度，则球壳的速度必为零，从而实现无碰撞落地. 当然，还应要求在这之前球心离地面的高度始终大于 R. 球壳落地后，地面支持力 N 将从零开始增大以便阻止球壳向下运动，小球则又单独地以角频率 ω_1 作简谐振动，并经过 Δt_1 时间后到达 Q 点. 至此，系统完成了一次周期性运动，尔后将不断重复这种运动.

为了确定 H 的值，需详细分析小球升到 S 点后系统的运动情况. 我们在这里将不引用二体振动问题的结果，而是直接求解.

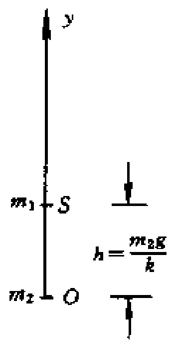
取小球升到 S 点的时刻为计时起点 $t=0$. 如综试(二)图 2－3 所示，取竖直向上的 y 坐标，取原点在 $t=0$ 时刻的球心位置 O 点. 则小球与球壳(球壳中心)的运动方程为，

$$m_1\ddot{y}_1=k\{[(y_2+R)-y_1]-R\}-m_1g$$
$$m_2\ddot{y}_2=-k\{[(y_2+R)-y_1]-R\}-m_2g$$

注意，弹簧对球壳的作用力是通过球壳上端顶点施予的. 以上两个方程可简化为

$$\ddot{y}_1=\frac{k}{m_1}(y_2-y_1)-g$$

$$\ddot{y}_2=-\frac{k}{m_2}(y_2-y_1)-g$$



综试(二)图 2－3

两式相减，得

$$\ddot{y}_2-\ddot{y}_1=-\frac{(m_1+m_2)}{m_1m_2}k(y_2-y_1)$$

这是(y_2-y_1)的简谐振动方程，其解为

$$y_2-y_1=A\cos(\omega t+\phi)$$

式中

$$\omega=\sqrt{\frac{k(m_1+m_2)}{m_1m_2}}$$

利用初条件

$$t=0\text{ 时，}\begin{cases}y_1=\dfrac{m_2g}{k}=h, & \dot{y}_1=v_S\\ y_2=0, & \dot{y}_2=0\end{cases}$$

得出

$$A=\sqrt{h^2+\frac{v_S^2}{\omega^2}}$$

$$\phi=\pi-\arctan\frac{v_S}{\omega h}\qquad(\pi>\phi>0)$$

系统质心的上抛运动可表为

$$y_C=\frac{m_1}{m_1+m_2}h+\frac{m_1}{m_1+m_2}v_St-\frac{1}{2}gt^2$$

把

$$m_1y_1+m_2y_2=(m_1+m_2)y_C$$

与上述

$$y_2-y_1=A\cos(\omega t+\phi)$$

联立，可解出

$$y_1=y_C-\frac{m_2}{m_1+m_2}A\cos(\omega t+\phi)$$

$$y_2=y_C+\frac{m_1}{m_1+m_2}A\cos(\omega t+\phi)$$

质心在

$$t^*=2\frac{m_1v_S}{(m_1+m_2)g}=\frac{2v_S}{\omega^2h}$$

时刻回到初始位置，质心的速度与其初速度大小相同方向相反．若在此时刻小球也刚好回到其初始位置，且小球的速度也与其初速度大小相同、方向相反，即若

$$y_1(t^*)=y_1(0)$$
$$\dot{y}_1(t^*)=-\dot{y}_1(0)$$

则有

$$y_C(t^*)-\frac{m_2}{m_1+m_2}A\cos(\omega t^*+\phi)=y_C(0)-\frac{m_2}{m_1+m_2}A\cos\phi$$

$$\dot{y}_C(t^*)+\frac{m_2}{m_1+m_2}\omega A\sin(\omega t^*+\phi)=-\left[\dot{y}_C(0)+\frac{m_2}{m_1+m_2}\omega A\sin\phi\right]$$

即

$$\cos(\omega t^*+\phi)=\cos\phi$$
$$\sin(\omega t^*+\phi)=-\sin\phi$$

那么球壳必定能够触地且触地时速度为零，实现无碰撞触地．由以上两式解出

$$\omega t^*=2n'\pi-2\phi$$

或

$$\omega t^*=2n\pi+2\arctan\frac{v_S}{\omega h}$$

把上面求出的

$$t^*=\frac{2v_S}{\omega^2h}$$

代人，得

$$\frac{v_S}{\omega h}=n\pi+\arctan\frac{v_S}{\omega h}$$

小的 H 对应小的 v_S，从而对应小的$\frac{v_S}{\omega h}$，因此 n 应取最小. n 不可为负. n 也不可为零，因为方程

$$\frac{v_S}{\omega h}=\arctan\frac{v_S}{\omega h}$$

的右边只能在第Ⅰ象限取值，这相当于在第Ⅰ象限要求有

$$x=\arctan x$$

即

$$x=\tan x$$

但在第Ⅰ象限，对于非零的 x，总有

$$x<\tan x$$

因此，最小的 H 必定对应 $n=1$，即有

$$\begin{cases}\dfrac{v_S}{\omega h}=\pi+\arctan\dfrac{v_S}{\omega h}\\[2ex]\pi<\dfrac{v_S}{\omega h}<\dfrac{3}{2}\pi\end{cases}$$

这等价于

$$\begin{cases}\dfrac{v_S}{\omega h}=\tan\dfrac{v_S}{\omega h}\\[2ex]\pi<\dfrac{v_S}{\omega h}<\dfrac{3}{2}\pi\end{cases}$$

结合前面已经给出的有关公式，可以写出确定最小 H 的一组公式为

$$\begin{cases}H=\sqrt{\dfrac{m_1}{k}v_S^2+\left[\dfrac{(m_1+m_2)g}{k}\right]^2}\\[2ex]\omega=\sqrt{\dfrac{k(m_1+m_2)}{m_1m_2}}\\[2ex]h=\dfrac{m_2g}{k}\\[1ex]v_S=\omega hx\\ x\text{ 为方程 }x=\tan x\text{ 在第Ⅲ象限的解}\end{cases}$$

或简化为

$$\begin{cases}H=\dfrac{g}{k}\sqrt{(m_1+m_2)[m_1+m_2(1+x^2)]}\\ x\text{ 为方程 }x=\tan x\text{ 在第Ⅲ象限的解}\end{cases}$$

补充说明两点：

第一，k 需足够大，以确保小球的平衡点 P 在球壳内，而且 H 也能在球壳范围内有解.

第二，需要排除在 $0<t<t^*$ 的某个中间时刻球壳与地面相遇的可能性，因为这种相遇可能

使球壳与地面发生碰撞．球壳在 0 到$\frac{t^*}{2}$时间内，一方面随质心上升，另一方面又相对质心"下降"；在$\frac{t^*}{2}$到 t^* 时间内，一方面随质心下降，另一方面又相对质心"上升"．因此，在 0 到 t^* 时间内，球壳不会与地面相遇是需要讨论的．

球壳升离地面后，球心的位置可表为

$$y_2 = y_C + y_2'$$

其中质心的运动即质心位置为

$$y_C = \frac{m_1}{m_1+m_2}h + \frac{m_1}{m_1+m_2}v_S t - \frac{1}{2}gt^2$$

球心相对于质心的运动即球心相对质心的位置为

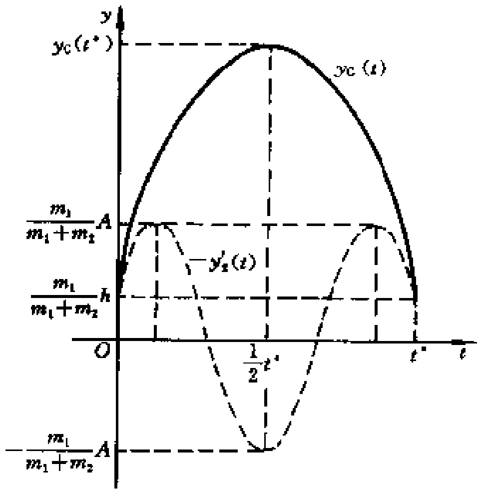
$$y_2' = \frac{m_1}{m_1+m_2}A\cos(\omega t + \phi)$$

式中的 ϕ 在第Ⅱ象限．

经细致分析，绘制如综试(二)图 2－4 所示的曲线，综试(二)图 2－4 中上方的实线与虚线之间的距离即为球心距离其初始($t=0$ 时)位置的高度，它等于球壳下端离地的高度．开始时，小球在 S 点有向上的速度，弹簧会被继续压缩，球壳受到的向上的作用力大于自身的重力，球壳必定离地上升，否则地面将施以向下的拉力，而这是不可能的．故综试(二)图 2－4 中虚线的开始部分必定在实线的下方．由于曲线在$\frac{t^*}{2}$两侧的对称性以及在每一侧曲线的单调性，只要保证在$\frac{t^*}{2}$时刻 y_C 的值大于虚线的振幅，即只要

$$y_C\left(\frac{t^*}{2}\right) > \frac{m_1}{m_1+m_2}A$$

则综试(二)图 2－4 中的虚线必定始终在实线的下方，从而确保球壳不会中途与地面相遇．上述不等式即为



综试(二)图 2－4

$$\frac{m_1}{m_1+m_2}h + \frac{m_1}{m_1+m_2}v_S\left(\frac{t^*}{2}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{t^*}{2}\right)^2 > \frac{m_1}{m_1+m_2}\sqrt{h^2+\frac{v_S^2}{\omega^2}}$$

因

$$\frac{m_1}{m_1+m_2}v_S = \frac{1}{2}gt^*$$

上式可简化为

$$h + \frac{1}{4}v_S t^* > \sqrt{h^2+\frac{v_S^2}{\omega^2}}$$

把

$$t^* = \frac{2v_S}{\omega^2 h}$$

代人,得

$$h\left(1+\frac{v_S^2}{2\omega^2 h^2}\right) > h\sqrt{1+\frac{v_S^2}{\omega^2 h^2}}$$

两边平方,得

$$1+\frac{v_S^2}{\omega^2 h^2}+\left(\frac{v_S^2}{2\omega^2 h^2}\right)^2 > 1+\frac{v_S^2}{\omega^2 h^2}$$

上式显然成立,因此确保球壳只会在 t^* 时刻无碰撞地落到地面上,中途不会与地面接触.

2. 若

$$m_1 = m_2 = m$$

$$k = 10\frac{mg}{R}$$

则可算出

$$H = \frac{R}{5}\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}$$

采用二分逼近法求方程

$$x = \tan x$$

在第Ⅲ象限的解. 逐点计算,结果列表如下.

x	4	5	4.5	4.25
$\tan x$	1.16	−3.38	4.65	2.01
x	4.4	4.45	4.48	4.49
$\tan x$	3.10	3.72	4.23	4.42

故方程的解可取为

$$x = 4.42$$

代人 H 表达式,得出

$$H = 0.67R$$

【题3】 类比是物理学的重要研究方法之一,对物理学的发展起过积极的促进作用.

早在 1697 年,J·伯努利在研究均匀重力场中最快下降路线时,想起了光在行进中所采取的路线是经历时间最短的路线(费马原理),他发现这两个问题在数学上是相似的. 于是,伯努利把待求的重力场中的最快下降路线与光在折射率沿某方向连续变化介质中所采取的行进路线相类比,后者运用光的折射定律容易求解,从而前者也被求解.

现在请遵循 J·伯努利的类比方法,试求解简单情形的重力场中最快下降路线问题.

如综试(二)图 3－1 所示,在均匀重力场 g 中,在竖直平面建立水平向右的 x 轴和竖直向下的 y 轴(g 沿 y 轴). 在此平面内任取 P 点,其坐标为 $x_P = a > 0, y_P = b > 0$. 试找出一条从坐标原

点 O 点到 P 点的光滑曲线轨道，使得质点从 O 点静止出发无摩擦地沿此轨道滑到 P 点所需时间最短.

【分析与解】 光的折射定律为 $n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2$

式中 n_1 和 n_2 分别是入射媒质和折射媒质的折射率，θ_1 和 θ_2 分别是入射角和折射角．在折射率随 y 坐标分层连续变化的情况下，光因连续折射，其行进的路线是如综试(二)图 3－2 所示的弯曲光线. 在光线上任一点 S 作光线的切线，如综试(二)图 3－2，θ 角与切线的倾角 α 互为余角，故

$$\sin\theta=\cos\alpha$$

由折射定律，有

$$n(y)\sin\theta=\text{常量}$$

由以上两式，得

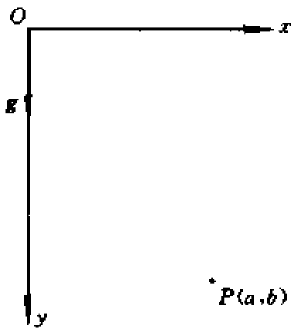
$$n(y)\cos\alpha=\text{常量}$$

在 y 处光的速度 $u(y)$ 与真空中光速 c 以及 y 处折射率 $n(y)$ 的关系为

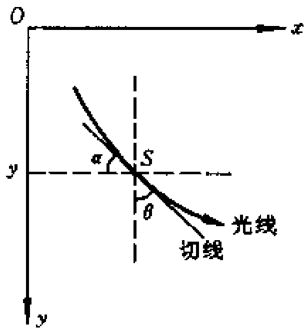
$$u(y)=\frac{c}{n(y)}$$

由以上两式，得

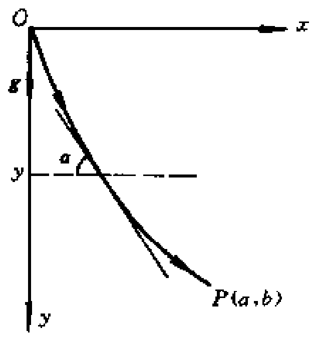
$$\frac{\cos\alpha}{u(y)}=\text{常量}$$



综试(二)图 3－1



综试(二)图 3－2



综试(二)图 3－3

设本题所求的从 O 点到 P 点的最快下降路线为综试(二)图 3－3 所示的曲线，则在曲线的 y 处，质点的运动速率为

$$u(y)=\sqrt{2gy}$$

曲线在 y 处的切线的倾角表为 α. 根据 J. 伯努利提出的类比方法，应有

$$\frac{\cos\alpha}{u(y)}=\text{常量}$$

即有

$$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{y}}=\text{常量}$$

因

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

其中 y' 是曲线的斜率，为

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

由此得出

$$y(1+y'^2) = A(\text{常量})$$

引入参量 β，使得

$$y = A\sin^2\beta$$

代入上式，得

$$1+y'^2 = \frac{A}{y} = \frac{1}{\sin^2\beta}$$

即

$$y'^2 = \frac{1}{\sin^2\beta} - 1 = \cot^2\beta$$

$$y' = \cot\beta$$

另一方面又有

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\beta}\frac{d\beta}{dx} = 2A\sin\beta\cos\beta\frac{d\beta}{dx}$$

由以上两式，得

$$dx = 2A\sin^2\beta d\beta$$

因在 $x=0$ 处 $y=0$，故相应的 $\beta=0$，把上式积分，得

$$\begin{aligned} x &= \int_0^\beta 2A\sin^2\beta d\beta \\ &= A\beta - \frac{A}{2}\sin 2\beta = \frac{A}{2}(2\beta - \sin 2\beta) \end{aligned}$$

再把 $y = A\sin^2\beta$ 改写为

$$y = \frac{A}{2}(1-\cos 2\beta)$$

引入新的参量

$$R = \frac{A}{2}$$

$$\phi = 2\beta$$

得出质点在重力场中最快下降路线的参量表达式为

$$\begin{cases} x = R(\phi - \sin\phi) \\ y = R(1-\cos\phi) \end{cases}$$

可见最快下降路线是一条滚轮线或者说是一条摆线．参量 R 可由 P 点的坐标 a 和 b 通过以下两式确定，

$$\begin{cases} a = R(\phi_P - \sin\phi_P) \\ b = R(1-\cos\phi_P) \end{cases}$$

ϕ 的取值范围在 0 到 ϕ_P 之间，ϕ_P 也由以上两式确定.

【题 4】 假设万有引力与距离的一次方成正比.

1. 试仿照开普勒三定律的内容，建立相应的行星闭合轨道三定律.

2. 若施力者为若干固定的质点，试问受力质点能取什么样的运动轨道？

【分析】 万有引力是有心力，无论它和距离的具体关系如何，总可以证明行星在太阳引力作用下的运动轨道必定是平面曲线. 设任何时刻，行星所受太阳引力为 $\boldsymbol{F}$，行星相对太阳的矢径为 $\boldsymbol{r}$，行星相对太阳的运动速度为 $\boldsymbol{v}$，在 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$ 三者不共线的一般情况下，可以唯一确定一个平面 S，太阳和行星都在 S 内. $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$ 是确定行星尔后怎样运动的根据，三者都在 S 内. 由因果关联可知，作为结果的运动也必定保留这种特性，即行星只能在平面 S 内运动，其轨道为平面曲线. 如果 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$ 三者共线，则行星的运动轨道必为直线，这是平面曲线的特殊情形.

行星的轨道为平面曲线也可以直接通过分析行星的运动得出. 设初始时刻行星的 $\boldsymbol{r}_0$ 与 $\boldsymbol{v}_0$ 不共线，则由 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\boldsymbol{v}_0$ 可确定一个 Oxy 平面，此时太阳与行星均在该平面内. 行星所受引力在 z 方向上无分力，因此行星在 z 方向上没有分运动. 把行星的运动分解为 x 和 y 方向上的两个分运动，行星的轨道当然是 xy 平面的曲线. 若 $\boldsymbol{r}_0$ 与 $\boldsymbol{v}_0$ 共线，取 x 轴沿该直线，则行星只在 x 轴上运动，轨道为直线 . 由题设，万有引力与距离的一次方成正比，把行星运动分解为 x 和 y 方向上的分运动，这是建立相应的行星闭合轨道运动三定律的基础，从而第 1 问可以求解.

第 2 问中施力者为固定的质点组 $\{M_i\}$，为了讨论受力质点 m 的运动轨道，首先需要确定后者所受合力

$\boldsymbol{F} = -\sum\limits_i GM_i m\boldsymbol{r}_i = -G\left(\sum\limits_i M_i \boldsymbol{r}_i\right)m$ 的性质. 上式求和项中的 $\boldsymbol{r}_i$ 是 M_i 到 m 的矢径，由此，容易联想到力学中的质心，所以 m 所受 $\{M_i\}$ 的合力可以等效为 $\{M_i\}$ 的质心所施予的引力. 作此约化后，即可知 m 的运动轨道应与第 1 问中的行星运动轨道相同.

设置第 2 问的意图是，希望学生通过求解，对径向力场单一约化的可能性有所理解.

牛顿万有引力和库仑力都沿径向，单一质点的引力场是沿径向的有心力场，单一点电荷的真空静电场也是沿径向的有心力场. 然而，多个质点的引力场或多个点电荷的真空静电场不再是沿径向的有心力场，换言之，不能把这种力场等效为某个单一质点的引力场或某个单一点电荷的真空静电场. 只有球对称分布的物体(物体可看作是连续分布的质点组)或球对称分布的带电体(带电体可看作连续分布的点电荷组)，它们的力场才是沿径向的有心力场，即是场强线汇集于一点(球心)的力场. 例如球外场区可等效为某个位于球心的单一质点的引力场或某个位于球心的单一点电荷的真空静电场. 一般的引力场和真空静电场不能等效为沿径向的有心力场，其原因在于万有引力和静电力都是与距离平方成反比的沿径向的作用力. 值得提醒学生思考的问题是，什么样的(即与距离具有何种关系的)沿径向的有心力场可以一般地等效为单一的沿径向的有心力场. 本题第 2 问的解答指出，这样的沿径向的有心力场应与距离的一次方成正比.

【解】 由题设，质量分别为 M 和 m，相距为 r 的两个质点之间的万有引力 F 可表为

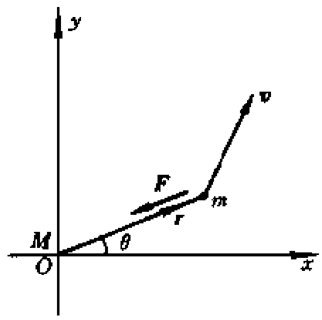
$$F = GMmr$$

式中 G 是根据题设引入的引力常量.

1. 如图所示，某时刻太阳 M 到行星 m 的矢径为 $\boldsymbol{r}$，行星相对太阳的速度为 $\boldsymbol{v}$. 在由 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 确定的平面上，取 Oxy 坐标，坐标原点 O 在太阳的位置上 . 由题设，行星所受太阳的万有引力

可表为

$$\boldsymbol{F}=-GMm\boldsymbol{r}$$



综试(二)图 4－1

由于 $\boldsymbol{F}$ 是沿径向的有心力，行星将始终在 xy 平面内运动，即只有 x 和 y 方向的分运动，运动轨道为平面曲线，在特殊情况可能退化为直线. 如图，$\boldsymbol{r}$ 与 x 轴的夹角为 θ，故 $\boldsymbol{F}$ 的 x 分量和 y 分量分别为

$$F_x=-GMmr\cos\theta=-GMmx$$

$$F_y=-GMmr\sin\theta=-GMmy$$

可见，F_x 和 F_y 都是线性恢复力，由此判定行星在 x 方向和 y 方向的分运动都是简谐振动，且角频率 ω 相同，均为

$$\omega=\sqrt{GM}$$

这两个简谐振动可分别一般地表为

$$x=A\cos(\omega t+\phi_1)$$

$$y=B\cos(\omega t+\phi_2)$$

式中的振幅 A 和 B 以及初相位 ϕ_1 和 ϕ_2 可以由初条件即 $t=0$ 时刻的 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\boldsymbol{v}_0$ 来确定. 以上两式消去时间 t，得出行星运动的轨道方程为

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-2\frac{xy}{AB}\cos(\phi_2-\phi_1)=\sin^2(\phi_2-\phi_1)$$

因此，当

$$\phi_2-\phi_1=k\pi, k=0, \pm1, \pm2, \cdots$$

时，行星轨道为直线 . 当

$$\phi_2-\phi_1\neq k\pi, k=0, \pm1, \pm2, \cdots$$

时，行星轨道为椭圆(包括圆). 若行星轨道为直线，则行星 m 终将与太阳 M 相撞，不能形成闭合轨道，不在本题讨论之内.

对于上述行星运动的椭圆轨道，相应于开普勒第一定律的新定律的内容如下 .

定律一 . 太阳系中所有的行星分别在大小不同的共心椭圆轨道上围绕太阳运动，太阳位于这些椭圆的共同中心上.

由于题设的万有引力仍为有心力，行星运动时相对太阳的角动量仍然守恒，故相应于开普勒第二定律的新定律的内容如下 .

定律二 . 对每个行星来说，太阳和行星的联线(即该行星的矢径)在相等的时间内扫过相等的面积.

如上所述，行星沿椭圆轨道运动的周期就是它在 x 和 y 方向所作的简谐振动的周期 T，为

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{GM}}$$

可见，周期 T 与各行星的运动参量及各行星的质量都无关. 由此，相应于开普勒第三定律的新定律的内容如下.

定律三 . 所有行星沿椭圆轨道公转的周期都相等，为 $T=\dfrac{2\pi}{\sqrt{GM}}$.

2. 设在某惯性系中的施力者为固定质点组，其中各质点的固定位矢和质量分别表为 $\boldsymbol{R}_i$ 和

M_i，受力质点的位矢和质量分别表为 $\boldsymbol{r}$ 和 m. m 相对各个 M_i 的矢径表为 $\boldsymbol{r}_i$，则 m 所受合力为

$$\boldsymbol{F} = -\sum_i GM_i m\boldsymbol{r}_i$$
$$= -G\left(\sum_i M_i \boldsymbol{r}_i\right)m$$

由$\left(\sum_i M_i\boldsymbol{r}_i\right)$，容易联想到质点组的质心，可以直观地看出，$m$ 所受合力可等效为质点组$\{M_i\}$的质心对 m 的引力. 为了严格地论证，把 $\boldsymbol{r}_i$ 改写为

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_i$$

则

$$\sum_i M_i\boldsymbol{r}_i = \sum_i M_i\boldsymbol{r} - \sum_i M_i\boldsymbol{R}_i$$

把质点组$\{M_i\}$的质心 C 的质量和位矢分别表为 M_C 和 $\boldsymbol{R}_C$，则有

$$\sum_i M_i\boldsymbol{r}_i = M_C\boldsymbol{r} - M_C\boldsymbol{R}_C = M_C(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_C)$$

式中$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_C)$即为质心 C 到质点 m 的矢径，表为 $\boldsymbol{r}_C$，有

$$\boldsymbol{r}_C = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_C$$

于是质点 m 所受质点组$\{M_i\}$的合力可表为

$$\boldsymbol{F} = -GM_C m\boldsymbol{r}_C$$

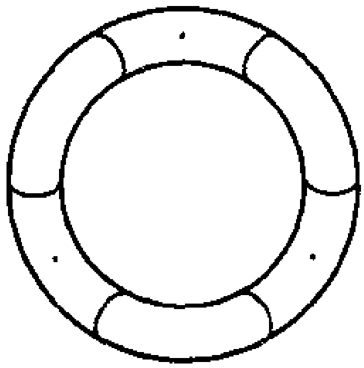
即 m 所受合力等于质点组$\{M_i\}$质心 C 的引力. 根据本题第 1 问的求解可知，受力质点 m 的运动轨道一般也应为椭圆（特殊情况下可退化为直线），椭圆中心就是施力固定质点组质心所在的位置. 当然，排除了质点 m 在运动过程中与施力质点组中某个质点相碰的可能性，这也是合理的.

【题 5】 试求解以下三道估算题.

1. 看电影时，常常发现银幕上的小轿车虽然在开动，但其车轮似乎并未转动. 设车轮的外观如综试(二)图 5－1 所示. 试估算此时轿车行进的最低非零速度，并把它与学生百米短跑的平均速度相比，看看哪一个速度快.

2. 把教室里的桌椅取走，只留下学生和教师. 试估算全体师生的质量与教室内空气质量之比.

3. 设半径为 R 的圆环均匀带电，总电量为 $Q(Q>0)$. 试用适当的近似方法估算圆环平面上与圆心相距 r 处的电场强度 $\boldsymbol{E}_r$，已知 $r \ll R$.



综试(二)图 5－1

【分析与解】 估算是物理学研究中经常使用的一种手段，一般说来，并不要求估算的结果很精确，但在数量级上应相差不大. 对于同一个问题，可采用的估算方法并不唯一，但每一种方法都应有坚实的物理依据，这样的估算才有意义，也比较可靠.

1. 放电影时每秒映出 24 幅画面，拍电影时同样也是每秒摄取 24 幅画面，利用人眼的视觉暂留，使本来间断的画面连续运转起来. 如综试(二)图 5－1 所示，如果在拍摄相邻两幅画面的时

间$\left(\frac{1}{24}\mathrm{s}\right)$内，车轮近似转过$\frac{2\pi}{3}$的整数倍，则在两幅画面中车轮的外形几乎相同，于是放映时便看不出车轮的转动.这种情况对应的车轮最小转动角速度为

$$\omega=\frac{2\pi}{3}\Big/\frac{1}{24}\mathrm{s}=16\pi\ \mathrm{s}^{-1}$$

若车轮的半径为 R，则相应的轿车行进的速度为

$$v=\omega R$$

最小的 R 可估算为 25 cm，则

$$v=16\pi\times0.25\ \mathrm{m/s}\approx13\ \mathrm{m/s}$$

这就是“车轮似乎并未转动”时轿车的最低行进速度，以此速度行进百米只需要约 7.7s 的时间.显然，此速度比学生百米短跑的平均速度要快.

如果 R 的估算值取得更小些，则所得轿车最低行进速度可能比学生百米短跑的平均速度要慢.应该认为，两种估算都是合理的.

2．先估算全体师生的体积 V_1 与教室所占空间的体积 V_2 之比.设一个人的平均体积为 $V_人$，如果师生共 16 人，则

$$V_1=16V_人$$

教室比一般住房高，其高度约为人体高度的 2 倍.由教室内桌椅的竖列数可估算出教室宽度是人体宽度的多少倍，例如设为 10 倍.由教室内坐位的横行数(包括讲台区域折算的附加行数)可估算出教室长度是人体厚度的多少倍，设如设为 45 倍．由此得出

$$V_2\approx2\times10\times45V_人=900V_人$$

因 $V_2\gg V_1$，教室内的空气体积可取为 V_2，故教室内师生体积 V_1 与空气体积 V_2 之比约为

$$\frac{V_1}{V_2}\approx\frac{16}{900}\approx2\times10^{-2}$$

再估算人体密度 $\rho_人$ 与空气密度$\rho_气$ 之比．人能在水中游泳，表明 $\rho_人$ 与水的密度$\rho_水$ 相近.水的摩尔质量为 18，空气的平均摩尔质量可近似取为 30.水分子密排，空气分子的间距约为空气分子大小的几十倍，故有

$$\frac{\rho_人}{\rho_气}=\frac{\rho_水}{\rho_气}\approx\frac{18}{\frac{30}{10^3}}\approx5\times10^2$$

最后，可估算出全体师生的质量 M_1 与教室内空气质量 M_2 之比约为

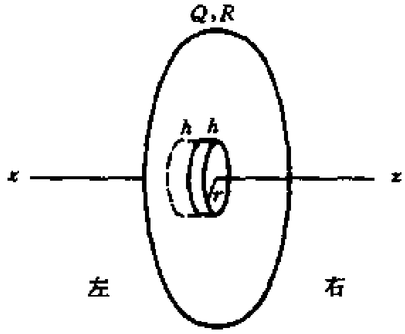
$$\frac{M_1}{M_2}=\frac{\rho_人 V_1}{\rho_气 V_2}\approx5\times10^2\times2\times10^{-2}=10$$

由于上述估算中不可避免地有较大的误差，因而可以大致认为教室内全体师生的质量与教室内空气的质量具有相近的数量级.这一结果或许颇令人感到意外.

3．如综试(二)图 5－2 所示，在圆环的中央轴线上，电场强度 $\boldsymbol{E}_z$ 的方向分别指向左方和右方，其大小为

$$E_z=\frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}$$

作如综试(二)图 5－2 所示的高斯面，它的两个端面是以 r 为半径的小圆面且都与圆环平面平



综试(二)图 5-2

行，侧面是以 $2h$（h 为小量）为长度的圆柱面．高斯面被带电圆环所在平面对称地分成两部分，其中央轴即为圆环的中央轴线．由静电场的高斯定理，有

$$0=\oint_{\text{高斯面}}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_{\text{左端面}}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\iint_{\text{右端面}}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\iint_{\text{侧面}}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

因 r 与 h 均为小量，两个端面上的 $\boldsymbol{E}$ 可近似取为 E_z，且近似有

$$E_h\approx\frac{Qh}{4\pi\varepsilon_0R^3}$$

故

$$\iint_{\text{左端面}}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\iint_{\text{右端面}}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\approx E_h\pi r^2+E_h\pi r^2\approx\frac{Qh}{4\pi\varepsilon_0R^3}\cdot 2\pi r^2$$

侧面上的电场强度可近似取为 E_r．由于电场线经两端面向外"流出"，而高斯面总的电通量为零，故电场线应经侧面"流入"．因此，E_r 的方向应沿径向向内，指向圆环中心．因此

$$\iint_{\text{侧面}}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\approx-E_r\cdot 2\pi r\cdot 2h$$

由以上 4 式，得

$$\frac{Qh}{4\pi\varepsilon_0R^3}2\pi r^2-E_r\cdot 4\pi rh=0$$

即

$$E_r\approx\frac{Qr}{8\pi\varepsilon_0R^3}$$

值得注意的是，由于 r 是小量，当将 $E_r=E_r(r)$ 按泰勒级数展开时，因零次幂的系数为零（圆环中心的电场强度必定为零），剩下的是一次幂和高次幂项，有人据此忽略高次幂项，得出 $E_r\propto r$ 的结论．这样做是不恰当的，因为在未作上述估算或严格计算前，无法先验地判定一次幂项的系数必不为零．

上述 E_r 的估算解，可由 E_r 的严格解得到验证．E_r 的严格解为（参看，例如，《大学物理》丛书·电磁学专辑，$P_{84}-P_{89}$，北京工业大学出版社，1988 年 10 月）

$$E_r=\frac{\tau\sqrt{R}k}{4\pi\varepsilon_0r\sqrt{r}}\left\{K(k)-\frac{E(k)}{1-k^2}\left[1-\frac{(R+r)}{2R}k^2\right]\right\}$$

式中

$$\tau=\frac{Q}{2\pi R}$$

$$k^2=\frac{4\pi r}{(R+r)^2}$$

$$K(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\beta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}$$

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}\,d\beta$$

因 r 为小量，k^2 也为小量，上述两个椭圆积分近似为

$$K(k)=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{k^2}{4}\right)$$

$$E(k)=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{k^2}{4}\right)$$

于是有

$$K(k)-\frac{E(k)}{1-k^2}\left[1-\frac{(R+r)}{2R}k^2\right]$$
$$=\frac{\pi}{2}\left\{\left(1+\frac{k^2}{4}\right)-\left(1-\frac{k^2}{4}\right)(1+k^2)\left[1-\frac{(R+r)}{2R}k^2\right]\right\}=\frac{\pi rk^2}{4R}$$

代入 E_r 表达式，得

$$E_r=\frac{\tau\sqrt{R}}{4\pi\varepsilon_0 r\sqrt{r}}\cdot\frac{\pi r}{4R}k^3$$

再将 $\tau=\frac{Q}{2\pi R}$，$k\approx\frac{4r}{R}$ 代入，得

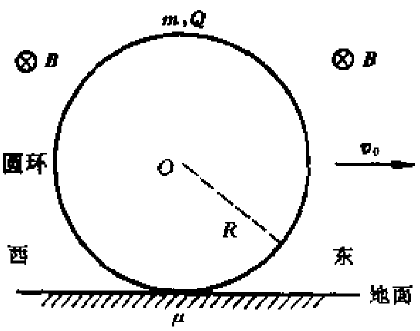
$$E_r=\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

前面通过估算得出

$$E_r=\frac{Qr}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$$

以上两个结果具有相同数量级，表明估算结果是合理的.

【题 6】 如综试(二)图 6－1 所示，半径为 R、质量为 m 的匀质细圆环上均匀地分布着相对圆环固定不动的正电荷，总电量为 Q. $t=0$ 时，圆环在绝缘的水平地面上具有综试(二)图 6－1 所示的指向正东方向的平动速度 v_0，且无滚动. 设圆环与地面之间的摩擦系数为 μ，设圆环所在处及其周围有沿水平指向北方的匀强地磁场 $\boldsymbol{B}$.



综试(二)图 6－1

1. 为使圆环在尔后的运动过程中始终不会离开地面，试确定 v_0 的取值范围.

2. 在第 1 问的 v_0 取值范围内，设圆环最后能够达到纯滚动状态，试导出此前 t 时刻的圆环平动速度 v.

3. 设 $v_0=\frac{mg}{2QB}$，试确定圆环刚达到纯滚动状态的时刻 T.

【分析】 圆环运动时，固定分布在圆环上的电荷随之运动，从而会受到地磁场的洛伦兹力的作用. 容易直观地猜想到，圆环上电荷所受洛伦兹力的合力，应与位于圆环中心的电荷 Q 作相应的平动时所受竖直向上的洛伦兹力相等. 证明上述猜测并不难，因为圆环的运动可分解为绕环心的转动与随环心的平动，与前一种运动对应的各部分电荷所受洛伦兹力的合力应为零，与后一种运

动对应的各部分电荷所受洛伦兹力的合力即为环心电荷 Q 作相应平动所受的洛伦兹力. 圆环的最大平动速度为初速度 v_0，只要与 v_0 相应的向上的洛伦兹力的大小不超过圆环所受重力，圆环便始终不会离开地面.

在圆环的运动过程中，因地面支持力不为零，圆环将受到向西的地面摩擦力的作用，此力一方面使圆环的平动减速，另一方面又使圆环顺时针转动. 导致圆环平动减速的只是摩擦力，摩擦力的大小取决于支持力，支持力的大小又与洛伦兹力有关，而洛伦兹力大小则取决于圆环的平动速度. 建立这些物理量之间的关系，即可解出圆环平动速度 v 随时间 t 变化的关系.

摩擦力使圆环顺时针转动，当圆环的转动角速度 ω 与平动速度 v 满足 $\omega=\dfrac{v}{R}$ 时，圆环开始作纯滚动，相应的时刻 T 即为所求.

【解】 1. 设圆环在尔后的运动中始终不离开地面，则圆环对地面的正压力 N 应满足

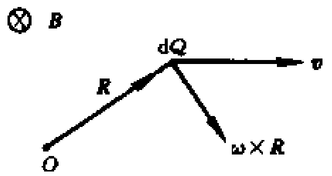
$$N\geqslant 0$$

于是圆环将受到向西的地面摩擦力 f，为

$$f=\mu N\geqslant 0$$

摩擦力 f 使圆环的平动减速，开始顺时针转动并不断加速，直到进入纯滚动状态，此后摩擦力消失.（当然，若开始时 $N=0, f=0$，则圆环始终平动，不转动，也不会达到纯滚动.）设在任意时刻 t，圆环的平动速度为 v，转动角速度为 ω，设 $\omega\geqslant 0$.

如综试(二)图 6－2 所示，在圆环中任取一弧元，带电量为 $\mathrm{d}Q$，环心 O 到弧元的矢径为 $\boldsymbol{R}$. 在任意时刻 t，因圆环既有平动又有转动，该弧元相应的两个分速度为 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R}$，由此弧元 $\mathrm{d}Q$ 所受洛伦兹力为



综试(二)图 6－2

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\mathrm{d}Q[(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})\times\boldsymbol{B}]=\mathrm{d}Q(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})+\mathrm{d}Q(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})\times\boldsymbol{B}$$

其中 $\mathrm{d}Q(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$ 的方向竖直向上，$\mathrm{d}Q(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})\times\boldsymbol{B}$ 的方向沿径向，背离环心向外（注意，$\mathrm{d}Q>0$）. 因圆环上电荷均匀分布，故各 $\mathrm{d}Q(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})\times\boldsymbol{B}$ 的矢量和为零，于是圆环所受总洛伦兹力 $\boldsymbol{F}$ 为各 $\mathrm{d}Q(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$ 之和 . $\boldsymbol{F}$ 的方向竖直向上，大小为

$$F=QvB$$

地面所受正压力 N 为

$$N=mg-F=mg-QvB$$

要求圆环不离开地面，即要求 $N\geqslant 0$，亦即要求

$$v\leqslant\frac{mg}{QB}$$

v 的最大值为 v_0，故 v_0 的取值范围是

$$v_0\leqslant\frac{mg}{QB}$$

2. 因洛伦兹力 $\boldsymbol{F}$ 竖直向上，对圆环的平动无影响，只有摩擦力 f 使圆环的平动减速，故有

$$-m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=f=\mu N=\mu(mg-QvB)$$

从开始到任意时刻 t 作积分，得

$$\int_0^t \mu \mathrm{d}t = \int_{v_0}^{v} \frac{m}{QvB - mg}\mathrm{d}v$$

即

$$\mu t = \frac{m}{QB}\ln\frac{QvB - mg}{Qv_0B - mg} = \frac{m}{QB}\ln\frac{mg - QvB}{mg - Qv_0B}$$

故圆环在达到纯滚动之前任意时刻 t 的平动速度 v 为

$$v = \frac{mg}{QB} - \left(\frac{mg}{QB} - v_0\right)\mathrm{e}^{\frac{QB}{m}\mu t}$$

3. 如第 1 问所述,带电 $\mathrm{d}Q$ 的弧元所受洛伦兹力有两项,其中 $\mathrm{d}Q(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B})$项相对环心 O 的力矩不为零,但各弧元此项的力矩之和为零,另一 $\mathrm{d}Q(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})\times\boldsymbol{B}$ 项相对环心 O 的力矩为零,各弧元此项的力矩之和当然也是零.因此,圆环所受洛伦兹力相对环心 O 的力矩为零.这样,只有摩擦力 f 相对环心 O 点有非零力矩,正是此力矩使圆环转动起来.

设任意时刻圆环转动的角加速度为 β,则有

$$fR = I\beta$$

式中转动惯量 I 为

$$I = mR^2$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{fR}{I} = \frac{f}{mR}$$

又因

$$f = -m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

由以上两式,得

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

积分,得

$$\int_0^{\omega}\mathrm{d}\omega = -\frac{1}{R}\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v$$

即

$$\omega R = v_0 - v$$

圆环达到纯滚状态时,有

$$\omega R = v$$

由以上两式,达到纯滚时的速度 v_T 为

$$v_T = \frac{v_0}{2}$$

设圆环在 T 时刻达到纯滚状态,由第 2 问的结果,有

$$v_T = \frac{v_0}{2} = \frac{mg}{QB} - \left(\frac{mg}{QB} - v_0\right)\mathrm{e}^{\frac{QB}{m}\mu T}$$

由题设

$$v_0=\frac{mg}{2QB}$$

由以上两式,得

$$e^{\frac{QB}{m}\mu T}=\frac{3}{2}$$

解出

$$T=\frac{m}{QB\mu}\ln\frac{3}{2}$$

【这是北京大学物理试验班的试题之一.该试验班是为了培训、选拔参加 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)的中国队队员而设立的.】

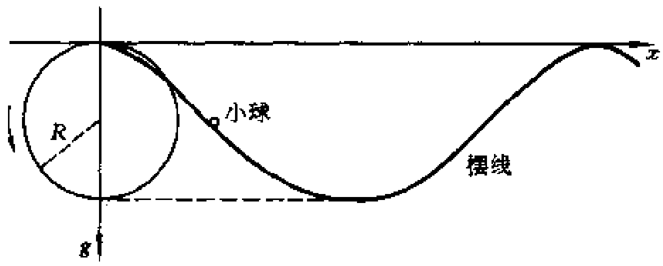
综合试题(三)

【题1】 试解以下各题.

1. 半径为 R 的圆环在水平地面上向前作纯滚动,设前进的速度为常量 v_0.试求圆环上任意一点 P 在运动过程中加速度的最大值 a_{max} 与最小值 a_{min} 之差.

2. 只要圆环(半径为 R)在水平地面上始终向前作纯滚动,无论是匀速前进还是变速前进,圆环上任意点 P 的轨道都是相同的曲线,称为滚轮线.试求滚轮线最低处的曲率半径 ρ_1 和最高处的曲率半径 ρ_2.

3. 如综试(三)图 1-1 所示,在竖直平面内取沿水平方向的 x 轴,半径为 R 的圆环在 x 轴下方贴着 x 轴作纯滚动,圆环上任意一点的运动轨迹当然也是滚轮线,又称摆线.如综试(三)图 1-1 所示,在一光滑摆线轨道内侧的任意一个非最低位置上放一个光滑小球.小球自静止释放后,将在摆线轨道上往返运动.已经证明,小球在摆线上往返运动的周期 T 与小球质量及小球的初始位置均无关,即 T 是仅由摆线参量 R 及重力加速度 g 确定的恒量.试求 T 的大小.



综试(三)图 1-1

【分析与解】 1. 第1问的目的是考察学生能否灵活选用适当参考系,以简化运动学问题的求解.

若取地面参考系,则 P 点的运动为变加速曲线运动.如所周知,任意匀加速曲线运动的轨迹为抛物线.现在,P 点的运动轨道是滚轮线而非抛物线,可见在地面参考系中讨论 P 点运动的加速度是较为麻烦的.

若取随环心一起相对地面作匀速直线运动的环心参考系,因题设圆环纯滚动且前进的速度为恒量,故在环心系中任意 P 点的运动是简单的匀速圆周运动,其加速度仅为向心加速度,加速度的方向虽然不断变化,但加速度的大小是恒定的.由于环心系相对地面系作匀速直线运动,故 P 点在环心系的加速度与在地面系的加速度相同,即 P 点在地面系中的加速度方向虽然也在不断变化,但加速度的大小也是恒定不变的.由此得出

$$a_{max}-a_{min}=0$$

2. 滚轮线最低处的曲率半径 ρ_1 和最高处的曲率半径 ρ_2 仅由滚轮线的几何参量 R 确定,而与 P 点以何种方式沿滚轮线轨道运动无关.因此,在 P 点沿滚轮线轨道的各种运动方式中,可选

取最简单的运动方式，以利求解，即选取环心以 v_0 匀速前进对应的 P 点运动方式．在这种情况下，如第 1 问解答所述，P 点相对地面系的加速度 $\boldsymbol{a}$ 即为 P 点相对环心系作匀速圆周运动的向心加速度 $\boldsymbol{a}'_{心}$，即

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}'_{心}$$

$\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}'_{心}$ 的方向相同，其大小恒定，为

$$a=a'_{心}=\frac{v_0^2}{R}$$

在滚轮线的最低位置，P 点刚好是圆环滚动的瞬心，其速度为

$$v_1=0$$

此时其加速度 $\boldsymbol{a}$ 的方向竖直向上．滚轮线最低位置的切线沿水平方向，该位置曲率圆的圆心必定在其正上方，因此 $\boldsymbol{a}$ 全部用来提供向心加速度 $\boldsymbol{a}_{心}$，即

$$a_{心}=a=\frac{v_0^2}{R}\neq 0$$

而 $a_{心}$ 与 P 点在最低位置处的速度 v_1 及该处曲率半径 ρ_1 的关系是

$$a_{心}=\frac{v_1^2}{\rho_1}$$

由以上两式，因 $a_{心}\neq 0$，$v_1=0$，故必有

$$\rho_1=0$$

在滚轮线的最高位置，P 点的速度沿水平方向，其大小为

$$v_2=2v_0$$

此时其加速度 $\boldsymbol{a}$ 的方向竖直向下．滚轮线最高位置的切线沿水平方向，该位置曲率圆的圆心必定在其正下方，因此 $\boldsymbol{a}$ 也全部用来提供向心加速度 $\boldsymbol{a}_{心}$，即

$$a_{心}=a=\frac{v_0^2}{R}$$

而 $a_{心}$ 与 P 点在最高位置的速度 v_2 及该处曲率半径 ρ_2 的关系为

$$a_{心}=\frac{v_2^2}{\rho_2}$$

由以上三式，得

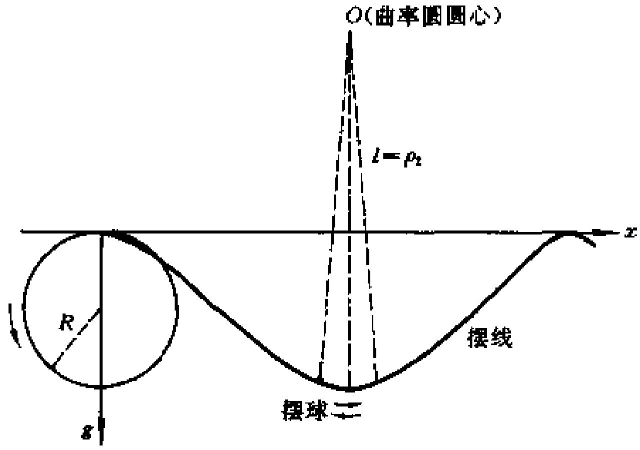
$$\rho_2=4R$$

3. 小球沿摆线运动的周期 T 与小球的质量及初始位置都无关，表明小球沿摆线往返运动形成的摆是等时的，即为等时摆（假定无摩擦）．设定小球的质量和初始位置后，可以采用积分的方法计算小球沿摆线运动的周期 T，计算结果将表明 T 确与小球质量与初始位置无关，并给出 T 与摆线参量 R 及重力加速度 g 的关系．这种求解方式--则比较麻烦，同时并未充分利用题目给定的“已经证明，…T 与小球质量及初始位置无关”的条件，不符合应充分利用题设条件使解题简化的原则．

采用联想的思维方法，可以把本题的等时摆与熟知的弹簧振子或小角度运动的单摆联系起来．稍加考虑，即可发现把本题的等时摆与小角度单摆相联系更为自然、贴切．如综试（三）图 1－2 所示，等时摆的周期 T 既与摆球初始位置无关，便可取无限靠近平衡位置（即最低位置）的初

始位置来计算 T. 这样，摆球以摆线最低位置为中心，沿最低位置的曲率圆往返摆动，该曲率圆的半径即第 2 问中 ρ_2. 显然，摆球的这种运动与摆长为

$$l=\rho_2=4R$$



综试(三)图 1-2

幅角为无限小的单摆摆球的运动相当. 后者的周期为

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

上式在幅角趋于无穷小时严格成立. 于是，本题等时摆的周期为

$$T=T'=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}=4\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

【题 2】 假定各国在发射卫星时都必须遵从以下规定：卫星进入轨道后不允许离开与本国领土和领海对应的领空，即卫星与地心的连线和地球表面的交点必须落在本国的领土和领海上.

为了以下讨论的需要，给出同步卫星的轨道半径为 $R_0=4.21\times10^4$ km.

1. 试问一个占据北纬 20°到北纬 50°领空范围的国家，是否可能发射一颗不用动力飞行的卫星并遵从上述规定？对于另一个占据北纬 15°到南纬 10°领空范围的国家，又如何？

2. 现在讨论一个具体问题．某国发射了一颗周期 $T_0=1$ d 的不用动力飞行的卫星，卫星的轨道平面即为赤道平面. 容易理解，如果卫星采取椭圆轨道，则卫星相对地心的角速度就不是恒定值，即卫星与地面上的参考点之间会发生相对运动. 假设这个国家仅拥有 $\theta_0=2°$ 经度范围的赤道领空，则需将卫星椭圆轨道的偏心率 e 限制在一个很小的范围内，以确保卫星不离开本国领空. 设卫星椭圆轨道的半长轴为 A，半短轴为 B，则椭圆焦点与椭圆中心的间距 C 为

$$C=\sqrt{A^2-B^2}$$

椭圆偏心率 e 的定义为

$$e=\frac{C}{A}$$

试求椭圆偏心率 e 的最大可取值.

3. 一个没有赤道领空的国家决定发射一颗靠动力飞行的卫星，卫星定点在北纬 40°的某城

市上空，卫星与地心的间距刚好是 R_0. 设卫星进入轨道时带有燃料火箭，空载火箭的质量为 1.0×10^3 kg. 内装燃料 9.0×10^3 kg，卫星主体质量为 100 kg. 若火箭喷气速度为 5 km/s. 试求卫星可定位的最长时间 t_e.

【分析与解】 1. 占据北纬 20°到北纬 50°领空的国家不可能发射不用动力飞行的卫星而不违反规定，因为这种卫星的椭圆轨道平面必定与赤道平面重合或相交，从而必须超越该国领空，违反规定.

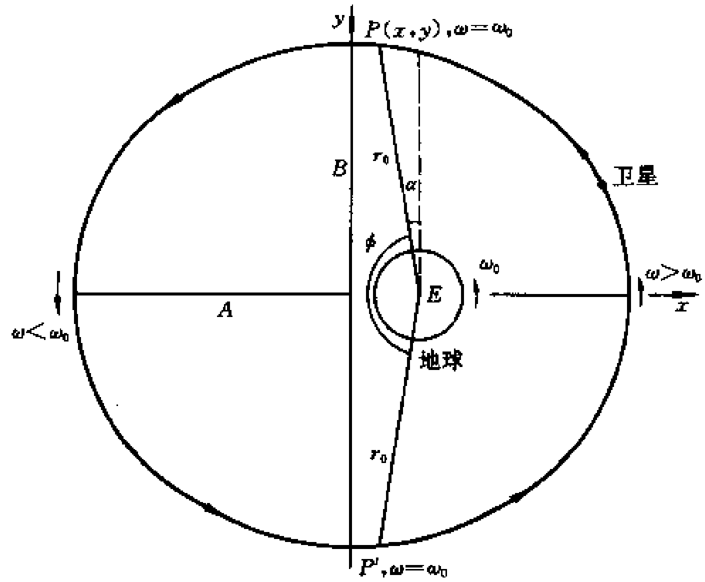
另一个占据北纬 15°到南纬 10°领空的国家至少可以发射同步卫星，定点在该国领空的赤道区域上，从而不违反规定.

2. 地球自转的周期也是 $T_0=1\text{d}$，它与地球自转角速度 ω_0 的关系为

$$T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=1\ \text{d}$$

卫星的椭圆轨道如综试(三)图 2－1 所示，综试(三)图 2－1 中的 E 为地心. 地球自转的方向和卫星运转的方向在综试(三)图 2－1 均设为逆时针方向 . 当卫星与地心 E 相距为 r 时，设卫星相对 E 的角速度为 ω，由开普勒第二定律(它既适用于行星绕太阳的运动，也适用于卫星绕地球的运动)可知，在单位时间内，矢径 r 扫过的面积为恒量 K，即有

$$\frac{1}{2}r^2\omega=K$$



综试(三)图 2－1

其中 K 称为面积速率. 卫星运行一周，其矢径 r 在极大值 $r_{\max}=A+C$ 与极小值 $r_{\min}=A-C$ 之间变化一次. 既然题设卫星沿椭圆轨道运行的周期与地球自转周期相同，均为 T_0，则卫星在一个周期的运行中必定有一段时间 $\omega>\omega_0$(卫星在综试(三)图 2－1 中 P 点和 P' 点右侧运行时)，另有一段时间 $\omega<\omega_0$(卫星在综试(三)图 2－1 中 P 点和 P' 点左侧运行时). 换言之，卫星运行一周时，其间必定有两个转折点 P 和 P'，在这两点 $\omega=\omega_0$，设 P 点或 P' 点与 E 的距离为 r_0，则有

$$K=\frac{1}{2}r_0^2\omega_0$$

因卫星运行周期也是 T_0，故有

$$\frac{s_0}{K}=T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}$$

其中 S_0 为椭圆的面积，与半长轴 A 和半短轴 B 的关系为

$$S_0=\pi AB$$

由以上三式，解出

$$r_0=\sqrt{AB}$$

当卫星在综试(三)图 2－1 中 P 点和 P' 点右侧运行时，其 $\omega>\omega_0$，卫星相对地球表面朝东飞行，设累积的偏转角度为 $\theta_{东}$. 当卫星在综试(三)图 2－1 中 P 点和 P' 点左侧运行时，其 $\omega<\omega_0$，卫星相对地球表面朝西飞行，设累积的偏转角为 $\theta_{西}$. 因卫星沿椭圆轨道运行的周期与地球自转周期相同，均为 1 天，故卫星运行一周后相对地球表面应回到原来位置，即必有 $\theta_{东}=\theta_{西}$. 这意味着卫星因椭圆运动，从经度上说，有 $\theta_{东}=\theta_{西}$ 角度范围的往返. 由于题设的国家只拥有 $\theta_0=2°$ 经度范围的赤道领空，为了遵从规定，确保卫星不离开本国领空，应要求 $\theta_{东}=\theta_{西}\leqslant\theta_0$. 由于 $\theta_{东}$ 和 $\theta_{西}$ 是因椭圆偏心率 $e>0$ 造成的，故允许的最大的

$$\theta_{东}=\theta_{西}=\theta_0$$

对应最大可取的 e 值.

$\theta_{西}$ 可用综试(三)图 2－1 中卫星从 P 点逆时针飞行到 P' 点，相对地球表面朝西偏移的范围求出. 取 $\theta_{西}=\theta_0$，意味着卫星在 P 点时刚好处在该国赤道领空区域的东侧边界，卫星转到 P' 点时刚好处在该国赤道领空区域的西侧边界，尔后卫星又将相对地球表面运行到赤道领空区域的东侧边界，如此往返偏移. 卫星从 P 点逆时针运行到 P' 点转过的角度为

$$\phi=\pi-2\alpha$$

其中 α 角已在综试(三)图 2－1 中标明. 设从 P 点到 P' 点，卫星相对 E 的矢径扫过的面积为 S，则卫星所经时间 t 为

$$t=\frac{S}{K}=\frac{S}{\frac{1}{2}r_0^2\omega_0}=\frac{2S}{AB\omega_0}$$

于是，由 $\omega<\omega_0$，可得

$$\theta_{西}=2\pi\frac{t}{T_0}-\phi$$

其中 $2\pi\frac{t}{T_0}$ 是 t 时间内地球转过的角度. 由上式可以看出，$\theta_{西}$ 的计算归结为 α 与 S 的计算，而这两个量的计算都涉及 P 点的 x 坐标.

P 点的坐标 x 和 y 满足的几何关系为

$$(C-x)^2+y^2=r_0^2=AB$$

式中

$$C=eA$$

$$B=\sqrt{A^2-C^2}=\sqrt{1-e^2}A$$

因 C 远小于 A，故

$$e=\frac{C}{A}\ll 1$$

近似有

$$B=\left(1-\frac{e^2}{2}\right)A$$

于是有

$$(eA-x)^2+y^2=\left(1-\frac{e^2}{2}\right)A^2$$

P 点在椭圆上,其坐标满足

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$$

即

$$(1-e^2)x^2+y^2=(1-e^2)A^2$$

与前式联立,消去 y^2,得

$$2Ax-ex^2=\frac{1}{2}eA^2$$

因 e 和 x 均为小量,略去 ex^2 项,解出

$$x=\frac{1}{4}eA$$

如综试(三)图 2－1 所示,α 近似为

$$\alpha=\frac{1}{B}(C-x)=\frac{3}{4}\frac{eA}{B}\approx\frac{3}{4}e$$

于是

$$\phi=\pi-2\alpha=\pi-\frac{3}{2}e$$

S 为半个椭圆面积与两个可近似看作梯形的面积之和,即有

$$S=\frac{1}{2}\pi AB+2\left[\frac{1}{2}B(x+c)\right]=\left(\frac{1}{2}\pi+\frac{5}{4}e\right)AB$$

从而

$$t=\frac{2S}{AB\omega_0}=\frac{\pi+\frac{5}{2}e}{\omega_0}=\frac{\pi+\frac{5}{2}e}{\frac{2\pi}{T_0}}=\left(\frac{1}{2}+\frac{5e}{4\pi}\right)T_0$$

把上面解出的 ϕ 和 t 代入 $\theta_{西}$ 表达式,得

$$\theta_{西}=2\pi\frac{t}{T_0}-\phi=4e$$

前已指出,最大的 e 对应的

$$\theta_{西}=\theta_0=2^\circ=0.349\ \text{rad}$$

故 e 的最大可取值为

$$e=\frac{1}{4}\theta_{西}=8.7\times 10^{-3}$$

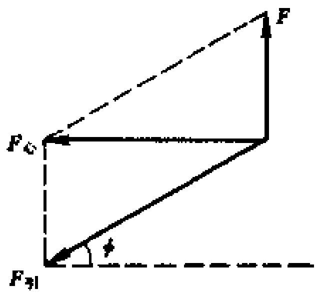
3. 处于高度为 R_0 的卫星所受的地球引力与同步卫星所受地球引力相同，均为

$$F_{引}=\frac{GMm}{R_0^2}=m\omega_0^2R_0$$

其中 M 为地球质量，m 为卫星质量，ω_0 为地球自转角速度. 由题文所述，卫星在纬度 $\phi=40°$ 的上空以 ω_0 角速度作半径为 $R_0\cos\phi$ 的圆运动，故所需向心力为

$$F_{心}=m\omega_0^2R_0\cos\phi$$

火箭通过喷气为卫星提供的推力 F 如综试(三)图 2-2 所示，其大小应为



综试(三)图 2-2

$$F=F_{心}\tan\phi=m\omega_0^2R_0\sin\phi$$

设火箭喷气的速率为 u，则

$$F=-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}u$$

由以上两式，得

$$m\omega_0^2R_0\sin\phi=-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}u$$

设 $t=0$ 时的卫星质量为 m_0，则 $t=t_e$ 时卫星的终止质量为 m_e，对上式积分，得

$$\left(\frac{\omega_0^2R_0}{u}\sin\phi\right)t_e=\ln\frac{m_0}{m_e}$$

把 $\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$代入，解出

$$t_e=\frac{T_0^2u}{4\pi^2R_0\sin\phi}\ln\frac{m_0}{m_e}$$

把 $T_0=1$ d, $u=5$ km/s, $R_0=4.21\times10^4$ km, $m_0=10.1\times10^3$ kg, $m_e=1.1\times10^3$ kg 等数据代入，得出卫星可定位的最长时间为

$$t_e=7.75\times10^4\ \text{s}=21.5\ \text{h}$$

【本题是参加 1995 年第 26 届 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)的中国队队员於海涛编制的.】

【题3】 自由长度为 L_0，截面积为 S 且面积变化可以忽略不计的柱形匀质弹性体，其杨氏模量 E 与弹性倔强系数 K 之间的关系为

$$E=\frac{KL_0}{s}$$

将自由长度为 L_0，质量为 m，弹性倔强系数为 K(常量)的匀质圆柱形弹性体垂直悬挂，设悬挂过程中柱体的圆面积保持不变，且已达到平衡伸长的静止状态.

1. 试求弹性体的总伸长量.

2. 取弹性体的悬挂处为坐标原点，取竖直向下的 x 坐标，设 $K=\frac{mg}{L_0}$. 试按弹性体伸长平衡时的位形，求出其质量线密度的分布.

【分析】 求解本题的关键，在于理解弹性体未伸长时沿长度方向的 x' 坐标与伸长后沿长度方向

的 x 坐标之间的关系.

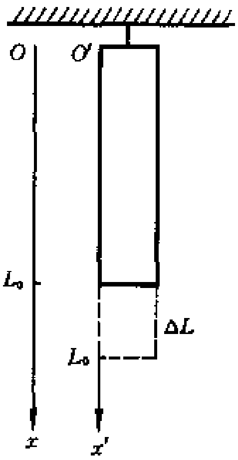
可以这样来考虑,在弹性体未伸长时,沿其长度方向建立两个完全相同而且重合的 x' 坐标和 x 坐标,x' 坐标刻制在弹性体上,x 坐标刻制在弹性体外.当弹性体伸长后,x' 坐标尺随弹性体一起形变,但 x' 坐标的读数并无任何变化.从 x' 到 $(x'+dx')$ 小段的读数应为该小段弹性体的原长,但相对 x 坐标尺而言,dx' 的真实长度应为 $(dx'+dl)$,其中 dl 是该小段弹性体的伸长量.根据力平衡关系求出 dl 后,再积分,便可得出弹性体的总伸长量 Δl.在弹性体上 $x'=L_0$ 的位置,对应 x 坐标尺上的 $x=x'+\Delta L=L_0+\Delta L$ 位置,即伸长后弹性体的实际长度为 $x=L_0+\Delta L$.弹性体上其他 $x'<L_0$ 的位置,对应 x 坐标尺上的 $x=x'+\Delta L_{x'}$ 位置,其中 $\Delta L_{x'}$ 为从 $x'=0$ 到 x' 的总伸长量,它也可由 dl 积分求得.

在 x' 处原长为 dx' 的小段的质量为 $\lambda_0 dx'$,其中 λ_0 是弹性体未伸长时的质量线密度.这个 dx' 小段因伸长 dl,其质量线密度变为 $\lambda=\dfrac{\lambda_0 dx'}{dx'+dl}$,把 x' 坐标换成对应的 $x=x'+\Delta L_{x'}$ 坐标,所得 λ 即为 x 处的质量线密度.因此,$\lambda(x)$ 关系式就是弹性体按其伸长平衡位形测得的质量线密度的分布.

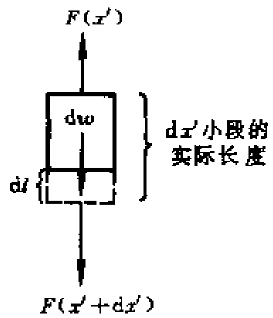
【解】 如综试(三)图 3-1 所示,取弹性体的悬挂点(即弹性体的上端面)为坐标原点 O 和 O',在弹性体外建立竖直向下的 x 坐标.在弹性体未伸长(即为原长)时,在弹性体上刻制与 x 坐标完全一致的 x' 坐标.当弹性体伸长时,x' 坐标尺随弹性体一起伸长,但 x' 的读数不变.

1. 弹性体未伸长时,其质量线密度为

$$\lambda_0=\frac{m}{L_0}$$



综试(三)图 3-1



综试(三)图 3-2

弹性体伸长后,在 x' 坐标尺上取从 x' 到 $(x'+dx')$ 的小段弹性体,该小段上、下两侧的张力分别表为 $F(x')$ 和 $F(x'+dx')$.由于伸长量与 $F(x')$ 分布有关,故需先求出 $F(x')$ 的分布.设该 dx' 小段的伸长量为 dl,则 dx' 小段的实际长度为 dx' 读数与 dl 之和.dx' 小段的受力情况如综试(三)图 3-2 所示,$F(x'+dx')$ 为下端张力,$F(x')$ 为上端张力,dW 为重力,其中

$$dW=\lambda_0 dx' g$$

该小段达到平衡时,有

$$F(x')=F(x'+\mathrm{d}x')+\mathrm{d}W=F(x'+\mathrm{d}x')+\lambda_0\mathrm{d}x'g$$

可得

$$\mathrm{d}F=F(x'+\mathrm{d}x')-F(x')=-\lambda_0g\mathrm{d}x'$$

积分,得

$$\int_{x'}^{L_0}\mathrm{d}F=-\lambda_0g\int_{x'}^{L_0}\mathrm{d}x'$$

即

$$F(L_0)-F(x')=-\lambda_0g(L_0-x')$$

因

$$F(L_0)=0$$

故

$$F(x')=\lambda_0g(L_0-x')$$

引入杨氏模量 E 后,$\mathrm{d}x'$小段的伸长量 $\mathrm{d}l$ 应满足下式

$$\frac{F(x')}{S}=E\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}x'}$$

其中 S 为弹性体截面的圆面积. 因

$$E=\frac{KL_0}{S}$$

由以上三式,得

$$\mathrm{d}l=\frac{F(x')}{ES}dx'=\frac{\lambda_0g}{ES}(L_0-x')\mathrm{d}x'=\frac{\lambda_0g}{KL_0}(L_0-x')\mathrm{d}x'$$

弹性体从 $x'=0$ 到 x'的总伸长量为

$$\Delta L_{x'}=\int_0^{x'}\mathrm{d}l=\frac{\lambda_0g}{KL_0}\int_0^{x'}(L_0-x')\mathrm{d}x'=\frac{\lambda_0g}{KL_0}(L_0-\frac{x'}{2})x'$$

弹性体的全部伸长量为

$$\Delta L=\frac{\lambda_0g}{KL_0}(L_0-\frac{L_0}{2})L_0=\frac{\lambda_0gL_0}{2K}$$

因

$$\lambda_oL_0=m$$

故

$$\Delta L=\frac{mg}{2K}$$

2. $\mathrm{d}x'$小段的质量为

$$\mathrm{d}m=\lambda_0\mathrm{d}x'$$

伸长后,$\mathrm{d}x'$小段的实际长度为

$$\mathrm{d}x'+\mathrm{d}l=\mathrm{d}x'+\frac{\lambda_0g}{KL_0}(L_0-x')\mathrm{d}x'$$

故伸长后 $\mathrm{d}x'$小段的质量线密度为

$$\lambda=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x'+\mathrm{d}l}=\frac{\lambda_0}{1+\frac{\lambda_0 g}{KL_0}(L_0-x')}$$

把 $\lambda_0=\frac{m}{L_0}$代入,得

$$\lambda=\frac{KL_0m}{KL_0^2+mg(L_0-x')}$$

题设

$$KL_0=mg$$

代入,得

$$\lambda=\frac{m}{2L_0-x'}$$

伸长后,弹性体上的 x'位置对应的 x 坐标为

$$x=x'+\Delta L_{x'}=x'+\frac{\lambda_0 g}{KL_0}\left(L_0-\frac{x'}{2}\right)x'$$

$$=x'+\frac{mg}{KL_0^2}\left(L_0-\frac{x'}{2}\right)x'=x'+\frac{1}{L_0}\left(L_0-\frac{x'}{2}\right)x'$$

即

$$x'^2-4L_0x'+2L_0x=0$$

解出

$$x'=2L_0\pm\sqrt{4L_0^2-2L_0x}$$

因 $x=0$ 对应 $x'=0$,故只可取

$$x'=\left(2-\sqrt{4-\frac{2x}{L_0}}\right)L_0$$

代入 λ 的表达式,得

$$\lambda=\frac{m}{\sqrt{4-\frac{2x}{L_0}}L_0}$$

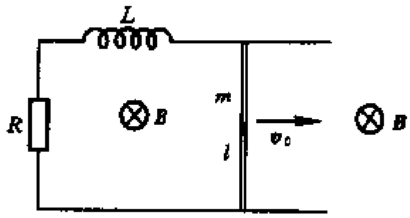
这就是弹性体伸长达到平衡后,其质量线密度按新位形的分布.

【题4】 1. 试求解关于阻尼振动的两小题.

(a)一单摆由长为 l 的轻质细杆和质量为 m,密度为水密度 α 倍($\alpha>1$)的小摆球组成.设单摆在水中作小角度摆动时,摆球所受阻力的大小与摆球在水中的运动速率成正比,比例系数为常量 γ.设细杆所受阻力可以忽略不计.试给出摆球作低阻尼摆动的条件.

(b)在水平面上有如图所示的导电回路,R 和 L 已知,其余部分的电阻、电感等均可忽略,质量为 m、长为 l 的导体棒放在框架上向右以初速 v_0 运动,摩擦力可略.框架所在区域有方向如图所示的均匀磁场.试证明,导体棒运动速度随时间的变化与阻尼振动类似,并给出低阻尼、临界阻尼和高阻尼的条件.

2. 试讨论受迫振动的暂态过程解和稳态解.



综试(三)图 4－1

为了讨论的需要，提供如下数学知识.

常系数线性二阶齐次微分方程

$$\ddot{x}+p\dot{x}+qx=0$$

的特征方程为

$$r^2+pr+q=0$$

它的两个根表为 r_1 和 r_2.

(i)若 r_1 和 r_2 为不相等的实根，则微分方程的通解为

$$x=C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t}$$

(ii)若 r_1 和 r_2 为相等的实根，均表为 r，则微分方程的通解为

$$x=(C_1+C_2t)e^{rt}$$

(iii)若 $r_1=a+bi$，$r_2=a-bi$，则微分方程的通解为

$$x=Ce^{at}\cos(bt+\phi_0)$$

常系数线性二阶非齐次方程

$$\ddot{x}+p\dot{x}+qx=f(x)$$

的通解为相应的齐次方程的通解和非齐次方程的一个特解 x^* 之和．若

$$f(t)=h\cos pt$$

且 $\pm ip$ 不是相应的齐次特征方程的根，则一个特解可表为

$$x^*=A\cos(pt+\phi)$$

受迫振动的动力学方程的标准形式为

$$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=h\cos pt$$

其中的常量 β,ω_0,h,p 均不为零.

(a)试导出 x 的通解，此即暂态过程解.

(b)试给出 $t\to\infty$ 的解及其中的有关常量，此即稳态解.

【分析】 本题第 1 问讨论的是两个具体的阻尼振动实例.

对 1.(a)，分析受力，利用质点的角动量定理给出摆球运动的动力学方程. 它就是阻尼振动的微分方程，无需求解，只要写出低阻尼条件，即可确定摆球作低阻尼摆动的条件.

1.(b)是一道电磁学与力学的综合题. 导体棒在磁场中运动产生动生电动势导致感应电流，感应电流在电感线圈中激起自感电动势，感应电流流经电阻有相应的电压降，由此可列出回路方程. 回路方程中的电动势项与导体棒的运动速度 v 有关．导体棒中因有电流，要受到磁场安培力的作用，此力使棒变速，于是又可建立一个关于 v 的方程. 联立上述两个方程，即可得出关于 v 的微分方程. 因电阻消耗能量，具有阻尼，故方程实际上是阻尼振动方程. 与 1.(a)相同，无需求解微分方程，只需由低阻尼、临界阻尼、高阻尼的条件，确定相应的要求即可.

本题第 2 问着重考察学生求解物理问题的数学能力，通过求解，可以对受迫振动中存在的暂态过程以及最后达到的稳定运动状态有完整的理解.

【解】 1.(a)设水的密度为 $\rho_水$，摆球密度为 $\rho_球$，摆球体积为 V，则

$$\rho_球=a\rho_水$$

$$\rho_球 V=m$$

摆球所受重力竖直向下，浮力竖直向上，合力竖直向下，大小为

$$mg-\rho_{水}Vg=(1-\frac{1}{\alpha})mg$$

设摆球的摆角为 θ，摆角随时间的变化率为 $\dot{\theta}$，则由题设，摆球所受切向阻力为

$$f=-\gamma v=-\gamma l\dot{\theta}$$

式中 v 为摆球沿 θ 正方向的速度. 引入参量

$$g'=(1-\frac{1}{\alpha})g$$

由摆球所受力矩，可列出其角动量方程为

$$-mg'l\sin\theta-\gamma l\dot{\theta}l=ml^2\ddot{\theta}$$

即

$$\ddot{\theta}+\frac{\gamma}{m}\dot{\theta}+\frac{g'}{l}\sin\theta=0$$

在小角度摆动的近似下，为

$$\ddot{\theta}+2\beta\dot{\theta}+\omega_0^2\theta=0$$

式中

$$\beta=\frac{\gamma}{2m}$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{g'}{l}}$$

这是一个阻尼振动方程.

低阻尼条件为

$$\beta<\omega_0$$

即

$$\frac{\gamma}{2m}<\sqrt{\frac{g'}{l}}=\sqrt{(1-\frac{1}{\alpha})\frac{g}{l}}$$

故摆球作低阻尼振动的条件为

$$l<\frac{4m^2(1-\frac{1}{\alpha})g}{\gamma^2}$$

1.(*b*)把任意 t 时刻导体棒的右行速度表为 v，若 v 为负，则导体棒向左运动. 因导体棒在磁场 $\boldsymbol{B}$ 中以 $\boldsymbol{v}$ 运动，回路中产生的逆时针方向的动生电动势为

$$\mathscr{E}=Blv$$

回路中相应的逆时针方向的电流表为 i，则电感线圈为回路提供的逆时针方向的自感电动势为

$$\mathscr{E}_L=-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

于是回路方程为

$$\mathscr{E}+\mathscr{E}_L=iR$$

即

$$Blv - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = iR$$

逆时针方向的电流 i 流经导体棒，使导体棒受到安培力（向左为正方向）为

$$F = iBl$$

由牛顿第二定律

$$F = -m\dot{v}$$

由以上两式，得

$$i = -\frac{m\dot{v}}{Bl}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\frac{m}{Bl}\ddot{v}$$

代入回路方程，得出 v 遵循的微分方程为

$$\ddot{v} + \frac{R}{L}\dot{v} + \frac{B^2l^2}{mL}v = 0$$

或

$$\ddot{v} + 2\beta\dot{v} + \omega_0^2 v = 0$$

式中

$$\beta = \frac{R}{2L}$$

$$\omega_0 = \frac{Bl}{\sqrt{mL}}$$

这是阻尼振动的方程，因此 $v(t)$ 关系是阻尼振动的关系.

由阻尼振动知识，当 $\beta<\omega_0$，$\beta=\omega_0$，$\beta>\omega_0$ 时，分别为低阻尼，临界阻尼，高阻尼. 因此，

$$R<2Bl\sqrt{\frac{L}{m}}，\text{低阻尼}$$

$$R=2Bl\sqrt{\frac{L}{m}}，\text{临界阻尼}$$

$$R>2Bl\sqrt{\frac{L}{m}}，\text{高阻尼}$$

2.(a)受迫振动的动力学方程为

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = h\cos pt$$

这是常系数线性二阶非齐次微分方程. 相应的齐次方程为

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

这是阻尼振动的微分方程. 齐次方程的特征方程为

$$r^2 + 2\beta r + \omega_0^2 = 0$$

它的两个根分别为

$$r_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

$$r_2=-\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}$$

(i)若 $\beta>\omega_0$,则 r_1 和 r_2 为不相等的实根,齐次微分方程的通解为

$$x(1)=C_1e^{-(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}+C_2e^{-(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}$$

(ii)若 $\beta=\omega_0$,则 r_1 和 r_2 为相等的实根,即

$$r_1=r_2=-\beta$$

齐次微分方程的通解为

$$x(2)=(C_1+C_2t)e^{-\beta t}$$

(iii)若 $\beta<\omega_0$,则 r_1 和 r_2 为两复根,即

$$r_1=-\beta+\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\,i$$

$$r_2=-\beta-\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\,i$$

引入

$$\omega_{阻}=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$$

齐次微分方程的通解为

$$x(3)=Ce^{-\beta t}\cos(\omega_{阻}t+\phi_0)$$

上述 $x(1)$,$x(2)$,$x(3)$即为阻尼振动的高阻尼,临界阻尼,低阻尼解.

由于非齐次方程中的常量 p 对应的 $\pm iP$,在上述三种情形均与 r_1 或 r_2 不相等,非齐次方程的一个特解可表为

$$x^*=A\cos(pt+\phi)$$

三种情形相应的非齐次通解分别为

$$\begin{aligned}x_1&=x(1)+x^*\\&=C_1e^{-(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}+C_2e^{-(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}+A\cos(pt+\phi)\\x_2&=x(2)+x^*\\&=(C_1+C_2t)e^{-\beta t}+A\cos(pt+\phi)\\x_3&=x(3)+x^*\\&=Ce^{-\beta t}\cos(\omega_{阻}t+\phi_0)+A\cos(pt+\phi)\end{aligned}$$

这就是受迫振动的三种暂态过程解.

2.(b)上述受迫振动的暂态过程解中,除 $A\cos(pt+\phi)$项外,其余都是随时间 t 衰减的项,故 $t\to\infty$时,三种暂态过程解都趋向于共同的

$$x=A\cos(pt+\phi)$$

这就是受迫振动的稳态解.

上述稳态解就是非齐次方程的一个特解.把它代入非齐次方程,利用

$$\dot{x}=-pA\sin(pt+\phi)$$

$$\ddot{x}=-p^2A\cos(pt+\phi)$$

得

$$-p^2A\cos(pt+\phi)-2\beta pA\sin(pt+\phi)+\omega_0^2A\cos(pt+\phi)=h\cos pt$$

利用三角函数展开的公式，可将上式表为

$$-p^2A(\cos pt\cos\phi-\sin pt\sin\phi)$$
$$-2\beta pA(\sin pt\cos\phi+\cos pt\sin\phi)$$
$$+\omega_0^2A(\cos pt\cos\phi-\sin pt\sin\phi)=h\cos pt$$

因特解在任意 t 时刻均成立，故上式两边 $\cos pt$ 和 $\sin pt$ 的系数应分别相等，即有

$$\begin{cases}A(\omega_0^2-p^2)\cos\phi-2\beta pA\sin\phi=h\\ A(\omega_0^2-p^2)\sin\phi+2\beta pA\cos\phi=0\end{cases}$$

由此得出

$$\begin{cases}A=\dfrac{h}{\sqrt{(\omega_0^2-p^2)^2+4\beta^2p^2}}\\ \phi=\arctan\dfrac{-2\beta p}{\omega_0^2-p^2}\end{cases}$$

这就是受迫振动稳态解的振幅 A 和相位差 ϕ 的计算公式.

可以看出，A 和 ϕ 与作受迫振动的振子的初始状态无关.从物理上考虑也理应如此，因为经过无限长时间所达到的稳态解已经“忘了”初始状态.与此相应，稳态解中的 ϕ 不宜称为初相位，而应称为振子与驱动力之间的相位差.

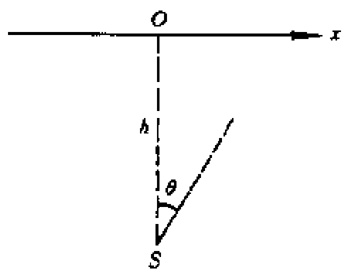
【题 5】 试求解以下三小题.

1. 小孩猜糖.

过节时，常有大人将双手放在背后，把糖块藏在一只手中，然后伸手到小孩面前让猜.小孩猜对了，得到糖块，猜错了，重新藏后再猜.在这一游戏中，小孩往往因为多次猜错急得要哭，有些大人却以此为乐.试为孩子设计一种简易可行的猜糖方法，使大人在这个游戏中难以逗引孩子而兴味索然.

2.“盲”人打靶.

如综试(三)图 5－1 所示，取 x 轴的原点 O 为靶心，在靶心前方 h 处为枪架，放置在枪架上的步枪枪管与 x 轴在同一平面上.用布蒙住打靶者的双眼，打靶者因看不见靶心在何方位，致使综试(三)图 5－1 中枪管的 θ 角取值不定.为防止误伤后面的裁判，采用锁定装置限制 θ 角只能在 $-\dfrac{\pi}{2}$ 到 $\dfrac{\pi}{2}$ 之间取值.设打靶者所取 θ 值具有等概率分布，试求子弹在 x 轴上的概率分布 $p(x)$.



综试(三)图 5－1

3. 二维理想气体的麦克斯韦分布.

一维概率正态分布函数为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-x^2/2\sigma^2},\sigma>0$$

一维理想气体处在温度为 T 的平衡态时，其速度分布为一维正态分布，即

$$F_1(v_x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-v_x^2/2\sigma^2}$$

式中

$$\sigma=\sqrt{\frac{kT}{m}}$$

其中 k 为玻尔兹曼常量，m 为分子质量.

二维理想气体处在温度为 T 的平衡态时，其 v_x 和 v_y 各自具有一维正态分布特性. 因 v_x 和 v_y 互相独立，由概率乘法规则，合成的二维速度分布为

$$F_2(v_x,v_y)=F_1(v_x)F_1(v_y)$$

F_2 即为二维理想气体的麦克斯韦速度分布.

(*a*)试导出二维理想气体的麦克斯韦速率分布 $f_2(v)$.

(*b*)试求二维理想气体分子的最概然速率 v_p，平均速率 $\bar{v}$ 和方均根速率 $\sqrt{\overline{v^2}}$.

【分析与解】 本题是为了考察学生对概率密度的理解而设置的.

小孩猜糖涉及的是离散事件的概率."盲"人打靶讨论的是一维连续事件的概率密度，得出的子弹在 x 轴上的概率分布属于数学中的柯西分布. 除柯西分布外还有一维正态分布，通常的理想气体(三维)麦克斯韦速度分布正是三个独立的一维正态分布概率相乘的结果. 本题第 3 问讨论的是二维理想气体，相应的麦克斯韦速度分布是两个独立的一维正态分布的概率乘积.

1. 小孩猜糖涉及的是离散事件的概率问题. 按理，如果小孩完全随机的猜，因为只有两只手，两种可能性，猜中与猜错应各占 50% 的概率，即在多次猜测中应得到约一半的糖块. 但如果大人有意逗引误导，使小孩夹杂着某种心理因素，则猜中的概率就有可能大幅下降. 为了避免这些因素的影响，可教小孩把猜左、右手有糖转化为猜硬币的正反面，即行掷硬币，落地后，若正面向上——猜右手有糖，若反面向上——猜左手有糖. 这样，便可确保猜测的随机性，从而确保 50% 猜中的概率，在多次猜测中将会得到约一半的糖块，使大人的逗引误导失效.

2. 因打靶者所取各 θ 角具有等概率分布的特征，而 θ 角是在 $-\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$ 之间连续取值的，故相应的概率密度 $p(\theta)$ 为常量. 由概率的归一性，有

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} p(\theta)\mathrm{d}\theta=1$$

即

$$p(\theta)=\frac{1}{\pi}$$

如综试(三)图 5－2 所示，当枪管的方位角位于 θ 到 $(\theta+\mathrm{d}\theta)$ 范围时，射出子弹击中的位置在 x 到 $(x+\mathrm{d}x)$ 范围内. 把子弹在 x 轴上的概率密度表为 $p(x)$，则有

$$p(x)\mathrm{d}x=p(\theta)\mathrm{d}\theta$$

即

$$p(x)=p(\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}$$

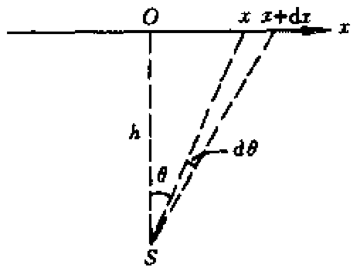
因

$$x=h\tan\theta$$

故

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=\frac{h}{\cos^2\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}=\frac{\cos^2\theta}{h}=\frac{h}{h^2+x^2}$$



综试(三)图 5－2

代入 $p(x)$表达式,得

$$p(x)=\frac{h}{\pi(h^2+x^2)}$$

数学上的柯西分布为

$$p_c(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

因此“盲”人打靶的概率分布可表为

$$p(x)=\frac{1}{h}p_c\left(\frac{x}{h}\right)$$

它属于柯西分布.

3. 速度的一维正态分布 $F_1(v_x)$和 $F_1(v_y)$分别为

$$F_1(v_x)=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-mv_x^2/2kT}$$

$$F_1(v_y)=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-mv_y^2/2kT}$$

二维理想气体的麦克斯韦速度分布为

$$F_2(v_x,v_y)=F_1(v_x)F_1(v_y)=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)\mathrm{e}^{-m(v_x^2+v_y^2)/2kT}$$

(a)由于上述速度分布函数 $F_2(v_x,v_y)$在二维速度空间中具有圆对称性,故在 v 到$(v+\mathrm{d}v)$范围内的概率为

$$F_2(v_x,v_y)\cdot 2\pi v\mathrm{d}v$$

引入相应的速率分布函数 $f_2(v)$,则在 v 到$(v+\mathrm{d}v)$范围内的概率又可表为

$$f_2(v)\mathrm{d}v$$

两者相等,得

$$f_2(v)=2\pi vF_2(v_x,v_y)$$

故二维理想气体的麦克斯韦速率分布函数为

$$f_2(v)=2\pi v\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)\mathrm{e}^{-mv^2/2kT}$$

(b)由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}f_2(v)=0$$

即

$$\frac{m}{kT}\mathrm{e}^{-mv^2/2kT}\left(1-\frac{mv^2}{kT}\right)=0$$

得出二维理想气体的最概然速率为

$$v_p=\sqrt{\frac{kT}{m}}$$

二维理想气体的平均速率为

$$\bar{v}=\int_0^\infty vf_2(v)\mathrm{d}v=\int_0^\infty \frac{mv^2}{kT}\mathrm{e}^{-mv^2/2kT}\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty 4\pi v^2\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\mathrm{e}^{-mv^2/2kT}\mathrm{d}v$$

三维理想气体的麦克斯韦速率分布为

$$f_3(v)=4\pi v^2\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\mathrm{e}^{-mv^2/2kT}$$

$f_3(v)$具有归一性，即

$$\int_0^\infty f_3(v)\mathrm{d}v=1$$

由此得出

$$\int_0^\infty 4\pi v^2\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\mathrm{e}^{-mv^2/2kT}\mathrm{d}v=1$$

把上式代入二维理想气体平均速率的表达式，得出

$$\bar{v}=\sqrt{\frac{\pi kT}{2m}}$$

二维理想气体的方均速率为

$$\overline{v^2}=\int_0^\infty v^2 f_2(v)\mathrm{d}v=\int_0^\infty \frac{mv^3}{kT}\mathrm{e}^{-mv^2/2kT}\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty v\left[4\pi v^2\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-mv^2/2kT}\right]\mathrm{d}v$$

为计算上式中的积分，利用三维理想气体的平均速率

$$\bar{v}_3=\int_0^\infty vf_3(v)\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^\infty v\left[4\pi v^2\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-mv^2/2kT}\right]\mathrm{d}v$$

又已知

$$\bar{v}_3=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

把上述结果代入二维理想气体方均速率的表达式，得

$$\overline{v^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{8kT}{\pi m}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{2kT}{m}$$

故二维理想气体的方均根速率为

$$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

另外，二维理想气体分子的每一个平动自由度的平均动能为$\frac{1}{2}kT$，平均平动动能为kT，即

$$\frac{1}{2}m\overline{v^2}=kT$$

同样可得出

$$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

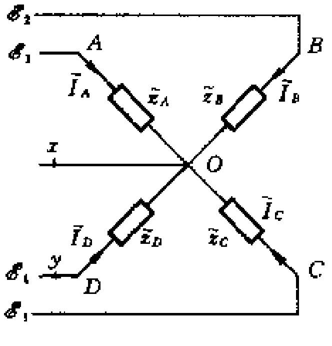
【题 6】 设仿照三相交流发电机设计出四相交流发电机，在四个线圈内分别产生交变电动势 $\mathscr{E}_1$、$\mathscr{E}_2$、$\mathscr{E}_3$ 和 $\mathscr{E}_4$，它们的峰值均为 $\mathscr{E}_0$，角频率均为 ω，$\mathscr{E}_1$、$\mathscr{E}_2$、$\mathscr{E}_3$ 和 $\mathscr{E}_4$ 的相位依次超前 $\frac{\pi}{2}$（即 $\mathscr{E}_2$ 超前 $\mathscr{E}_1$，$\mathscr{E}_3$ 超前 $\mathscr{E}_2$，等等）.

设再仿照三相电路中负载的星形连接，设计四相五线制的星形连接如综试(三)图 6-1 所示. 其中各相的负载相应于角频率 ω 的复阻抗分别为 $\tilde{Z}_A$、$\tilde{Z}_B$、$\tilde{Z}_C$、$\tilde{Z}_D$，四个交变电动势 $\mathscr{E}_1$、$\mathscr{E}_2$、$\mathscr{E}_3$、$\mathscr{E}_4$ 分别通过 A、B、C、D 四个端点及公共点 O 与负载连接. 设 $\mathscr{E}_1$、$\mathscr{E}_2$、$\mathscr{E}_3$、$\mathscr{E}_4$ 不会因与负载连接而发生变化.

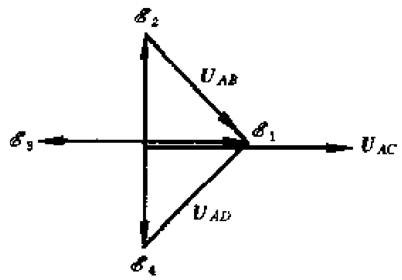
1. 设 $\mathscr{E}_1=\mathscr{E}_0\cos\omega t$，试求综试(三)图 6-1 中 A 点与 B 点、A 点与 C 点、A 点与 D 点之间线电压的瞬时值 u_{AB}、u_{AC}、u_{AD}. 若 $\mathscr{E}_1$ 的有效值为 220V，试问 u_{AB}、u_{AC}、u_{AD} 的峰值各为多少?

2. 将 $\mathscr{E}_1$ 改用复电动势 $\tilde{\mathscr{E}}_1=\mathscr{E}_0e^{j\omega t}$，在此不考虑 $\mathscr{E}_0$ 的具体数值，假设综试(三)图 6-1 中的 x 点和 y 点均被切断. 试求综试(三)图 6-1 所示方向的复电流 $\tilde{I}_A$.

3. 在第 2 问的基础上，进一步假设 $\tilde{Z}_A$ 为纯电阻 R，$\tilde{Z}_B$ 为 $L=\frac{R}{\omega}$ 的纯电感，$\tilde{Z}_C$ 为 $C=\frac{1}{\omega R}$ 的纯电容. 试再求 $\tilde{I}_A$.



综试(三)图 6-1



综试(三)图 6-2

【分析】 三相交流电中，三个电源电动势之间的相位差依次为 $\frac{2\pi}{3}$，本题所设四相交流电的四个电源电动势之间的相位差依次为 $\frac{\pi}{2}$. 三相交流电的问题可用矢量图解法或复数法求解，四相交流电的问题同样可用这两种方法求解.

第 1 问的 u_{AB}、u_{AC}、u_{AD} 均为线电压，它们由 $\mathscr{E}_1$、$\mathscr{E}_2$、$\mathscr{E}_3$、$\mathscr{E}_4$ 简单叠加而成，利用矢量图解法容易求解.

第 2、3 问中，x 点和 y 点均被断开，电源与负载构成的网络并非简单的串、并联电路，不宜用

矢量图解法求解.另外,所求的又是复电流,因此,可采用复数形式的基尔霍夫方程组来求解.

【解】 1.综试(三)图6-1电路中各交流电压的矢量关系如综试(三)图6-2所示,由综试(三)图6-2容易得出,

$$u_{AB}=\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2=\sqrt{2}\mathscr{E}_0\cos(\omega t-\frac{\pi}{4})$$

$$u_{AC}=\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_3=2\mathscr{E}_0\cos\omega t$$

$$u_{AD}=\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_4=\sqrt{2}\mathscr{E}_0\cos(\omega t+\frac{\pi}{4})$$

它们的峰值分别为

$$U_{AB,0}=\sqrt{2}\mathscr{E}_0=\sqrt{2}\times(\sqrt{2}\times 220)=440\ \mathrm{V}$$

$$U_{AC,0}=2\mathscr{E}_0=2\times(\sqrt{2}\times 220)=622\ \mathrm{V}$$

$$U_{AD,0}=\sqrt{2}\mathscr{E}_0=440\ \mathrm{V}$$

2.如综试(三)图6-1所示,因 x 点和 y 点断开,中线无电流,$\tilde{I}_D$ 亦为零,故 $\tilde{Z}_D$ 不起作用.据此,可建立复数形式的基尔霍夫方程组如下,

$$\begin{cases}\tilde{I}_A\tilde{Z}_A-\tilde{I}_B\tilde{Z}_B=\tilde{U}_{AB}=\tilde{\mathscr{E}}_1-\tilde{\mathscr{E}}_2 & (1)\\ \tilde{I}_A\tilde{Z}_A-\tilde{I}_C\tilde{Z}_C=\tilde{U}_{AC}=\tilde{\mathscr{E}}_1-\tilde{\mathscr{E}}_3 & (2)\\ \tilde{I}_A+\tilde{I}_B+\tilde{I}_C=0\end{cases}$$

由(1)、(2)两式,得

$$\tilde{I}_B=\frac{\tilde{Z}_A}{\tilde{Z}_B}\tilde{I}_A-\frac{\tilde{U}_{AB}}{\tilde{Z}_B}$$

$$\tilde{I}_C=\frac{\tilde{Z}_A}{\tilde{Z}_C}\tilde{I}_A-\frac{\tilde{U}_{AC}}{\tilde{Z}_C}$$

代入(3)式,得

$$\tilde{I}_A\left(1+\frac{\tilde{Z}_A}{\tilde{Z}_B}+\frac{\tilde{Z}_A}{\tilde{Z}_C}\right)=\frac{\tilde{U}_{AB}}{\tilde{Z}_B}+\frac{\tilde{U}_{AC}}{\tilde{Z}_C}$$

解出

$$\tilde{I}_A=\frac{\tilde{Z}_C\tilde{U}_{AB}+\tilde{Z}_B\tilde{U}_{AC}}{\tilde{Z}_A\tilde{Z}_B+\tilde{Z}_B\tilde{Z}_C+\tilde{Z}_C\tilde{Z}_A}$$

其中

$$\tilde{U}_{AB}=\tilde{\mathscr{E}}_1-\tilde{\mathscr{E}}_2=\sqrt{2}\mathscr{E}_0e^{j(\omega t-\frac{\pi}{4})}$$

$$\tilde{U}_{AC}=\tilde{\mathscr{E}}_1-\tilde{\mathscr{E}}_3=2\tilde{\mathscr{E}}_1=2\mathscr{E}_0e^{j\omega t}$$

代入 $\tilde{I}_A$ 表达式,得

$$\tilde{I}_A=\frac{(\sqrt{2}e^{j(-\frac{\pi}{4})}\tilde{Z}_C+2\tilde{Z}_B)\mathscr{E}_0e^{j\omega t}}{\tilde{Z}_A\tilde{Z}_B+\tilde{Z}_B\tilde{Z}_C+\tilde{Z}_C\tilde{Z}_A}$$

3. 由题设

$$\tilde{Z}_A=R,\quad \tilde{Z}_B=jR,\quad \tilde{Z}_C=-jR$$

由此得出

$$\tilde{Z}_A\tilde{Z}_B+\tilde{Z}_B\tilde{Z}_C+\tilde{Z}_C\tilde{Z}_A=R^2$$

$$\sqrt{2}e^{j(-\frac{\pi}{4})}\tilde{Z}_C+2\tilde{Z}_B=-R+jR=Re^{j\frac{3}{4}\pi}$$

代入 $\tilde{I}_A$ 表达式，得

$$\tilde{I}_A=\frac{\sqrt{2}\mathscr{E}_0}{R}e^{j(\omega t+\frac{3}{4}\pi)}$$

【这是北京大学物理试验班的试题之一.该试验班是为了培训、选拔参加 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)的中国队队员而设立的.】

综合试题(四)

【题 1】 刚体转动惯量的计算.

1. 如综试(四)图 1－1 所示,在形状不规则且未必匀质的薄平板刚体中,P_1 和 P_2 两点相距 $2l$,P_2 和 P_3 两点相距 l,P_3 和 P_1 两点相距$\sqrt{3}l$.已知刚体绕通过 P_1 点的垂直轴(垂直于薄平板的轴)的转动惯量为

$$I_1=I_C+ml^2$$

刚体绕通过 P_2 点的垂直轴的转动惯量为

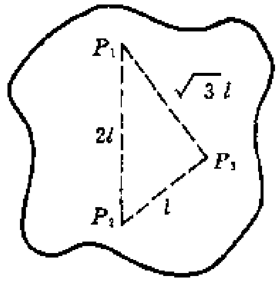
$$I_2=I_C+3ml^2$$

其中 I_C 为刚体绕通过质心 C 点(综试(四)图 1－1 中未画出)的垂直轴的转动惯量,m 为刚体的质量.设 I_C,m 和 l 已知.试求刚体绕通过 P_3 点的垂直轴的转动惯量 I_3.

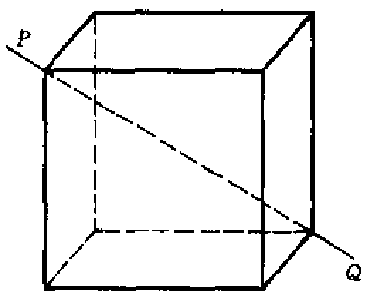
2.(a)已知匀质薄球壳的质量为 m,半径为 R.试求球壳绕其直径的转动惯量 I_R.

(b)椭圆细环的半长轴为 A,半短轴为 B,质量为 m(未必匀质),已知该环绕长轴的转动惯量为 I_A.试求该环绕短轴的转动惯量 I_B.

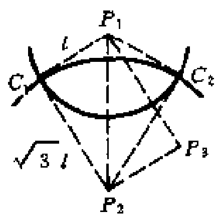
3. 如综试(四)图 1－2 所示,匀质立方体的边长为 a,质量为 m.试求该立方体绕对角线轴 PQ 的转动惯量 I.



综试(四)图 1－1



综试(四)图 1－2



综试(四)图 1－3

【分析与解】 1. 题目给定的 I_1 和 I_2 表达式启发解题者,本题的求解用平行轴定理.由

$$I_1=I_C+ml^2$$

可知,质心 C 应在以 P_1 为圆心、以 l 为半径的圆周上.由

$$I_2=I_C+3ml^2$$

可知,质心 C 应在以 P_2 为圆心、以$\sqrt{3}l$ 为半径的圆周上.由此,质心 C 应在两圆的交点上,即应在综试(四)图 1－3 的 C_1 或 C_2 位置上.

如综试(四)图 1－3,$\triangle P_1P_2P_3$ 与$\triangle P_1P_2C_1$ 和$\triangle P_1P_2C_2$ 是三个全等的直角三角形,由此,容易算出

$$\overline{P_3C_1}=2l$$
$$\overline{P_3C_2}=l$$

若 C_1 为质心，则刚体绕通过 P_3 点的垂直轴的转动惯量为

$$I_3=I_C+4ml^2$$

若 C_2 为质心，则刚体绕通过 P_3 点的垂直轴的转动惯量为

$$I_3=I_C+ml^2$$

2. 如所周知，薄平板刚体转动惯量垂直轴定理的推导方法很巧妙，本题是为了考察学生对这种推导方法的理解而编制的.

本题的(a)、(b)两问，若采用常规的积分方法求解是很麻烦的，但如果能够仿照垂直轴定理的推导方法来求解，则将容易得多.

(a)取球心为坐标原点，建立 $Oxyz$ 坐标系，匀质薄球壳上任意质元的质量表为 m_i，其坐标表为(x_i,y_i,z_i)，则球壳绕 x 轴，y 轴，z 轴的转动惯量分别为

$$I_x=\sum m_i(y_i^2+z_i^2)$$
$$I_y=\sum m_i(z_i^2+x_i^2)$$
$$I_z=\sum m_i(x_i^2+y_i^2)$$

其中 I_x,I_y,I_z 均即为绕球壳直径的转动惯量 I_R，故有

$$\begin{aligned}3I_R&=I_x-I_y+I_z=\sum m_i(2x_i^2+2y_i^2+2z_i^2)\\&=2\sum m_i(x_i^2+y_i^2+z_i^2)=2\sum m_iR^2=2mR^2\end{aligned}$$

即

$$I_R=\frac{2}{3}mR^2$$

(b)椭圆方程为(取椭圆中心为坐标原点 O，x 轴沿长轴，y 轴沿短轴)

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$$

细环绕椭圆长轴(即绕 x 轴)的转动惯量 I_A，以及细环绕椭圆短轴(即绕 y 轴)的转动惯量 I_B 分别为

$$I_A=I_x=\sum m_iy_i^2,\quad I_B=I_y=\sum m_ix_i^2$$

其中 m_i 是椭圆细环上任意质元的质量，该质元位于(x_i,y_i)，即

$$\frac{I_A}{B^2}=\sum m_i\left(\frac{y_i^2}{B^2}\right),\quad \frac{I_B}{A^2}=\sum m_i\left(\frac{x_i^2}{A^2}\right)$$

两式相加，得

$$\frac{I_A}{B^2}+\frac{I_B}{A^2}=\sum m_i\left(\frac{y_i^2}{B^2}+\frac{x_i^2}{A^2}\right)=\sum m_i=m$$

故

$$I_B=mA^2-\frac{A^2}{B^2}I_A$$

3. 本题是为了考察学生能否运用量纲分析法来求解特殊刚体的转动惯量而设置的.

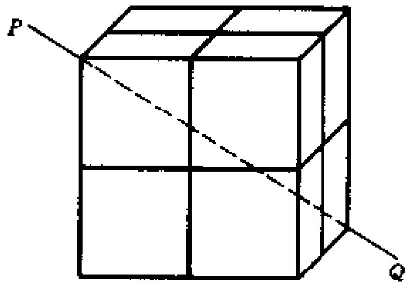
如所周知，刚体转动惯量 I 的量纲是 ML^2. 对于本题的立方体，相应于 M 的是立方体的质量 m，相应于 L 的是立方体的边长 a. 因此，立方体绕对角线 PQ 的转动惯量应可表为

$$I=\alpha\, m\, a^2$$

其中 α 是待定的常数. 问题即在于确定 α 的数值.

为了确定 α，如综试(四)图 1－4 所示，将立方体等分为边长为 $\frac{a}{2}$ 的八个小立方体. 因为匀质，每个小立方体的质量均为 $\frac{m}{8}$，每个小立方体绕自身对角线转轴的转动惯量应为

$$I'=\alpha\left(\frac{m}{8}\right)\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{\alpha}{32}ma^2$$



综试(四)图 1－4

如综试(四)图 1－4，在八个小立方体中，有两个小立方体的转轴即为 PQ. 另外六个小立方体的对角线转轴都与 PQ 平行，其间的间距可算出为

$$d=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\frac{a}{2}=\frac{a}{\sqrt{6}}$$

由平行轴定理，这六个小立方体各自绕 PQ 转轴的转动惯量均为

$$I''=I'+\left(\frac{m}{8}\right)d^2=I'+\frac{1}{48}ma^2$$

于是，整个立方体绕 PQ 转轴的转动惯量应为各小立方体绕 PQ 转轴的转动惯量之和，为

$$I=2I'+6I''=8I'+\frac{1}{8}ma^2$$

把上述 I 和 I' 的表达式代入，得

$$\alpha\, m\, a^2=8\left(\frac{\alpha}{32}ma^2\right)+\frac{1}{8}ma^2$$

即

$$\alpha=\frac{1}{6}$$

因此，原立方体绕对角线转轴 PQ 的转动惯量为

$$I=\frac{1}{6}ma^2$$

【题 2】 长方体匀质木料的正截面为正方形，木料放在水中，设其长边始终与水平面平行.

1. 试求木料浮在水面上（即木料的一部分在水面下方，另一部分在水面上方）达到平衡的条件.

2. 设木料对称地浮在水面上，且只有一条长边没于水中，达到平衡. 试讨论平衡的稳定性.

解题所需参量可自行设定.

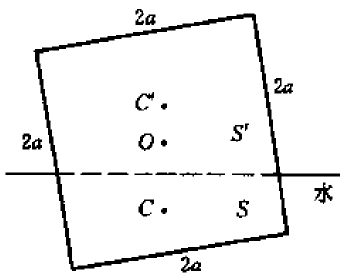
【分析与解】 1. 设木料与水的密度分别为 ρ 和 ρ_0，木料能浮在水面上处于平衡状态的第一个条件显然是

$$\rho<\rho_0$$

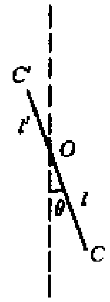
由于木料匀质，且其长边始终平行于水面，可取与木料长边平行的截面如综试(四)图 2－1 所示，在此平面上即可讨论木料的平衡问题. 综试(四)图 2－1 中的正方形是长方体木料的中央正截面，正方形的中心 O 点就是木料的重心. 设正方形的边长为 $2a$，设木料在水面下的部分用综试(四)图 2－1 中的面积 S 表示. 木料达到平衡的第二个条件是所受重力与浮力相等，即

$$S=4a^2\frac{\rho}{\rho_0}$$

木料所受竖直向上的浮力，是浸没在水中的木料各部分所受竖直向上的浮力之和. 这一特征与重力类似，因此，可以把浮力看作是一种竖直向上的“假想重力”. 对于浸没在水中的部分木料，即综试(四)图 2－1 中的 S，其重心在 C 点，同样，这部分木料所受浮力的力心也应在 C 点，两者重合. 综试(四)图 2－1 中木料在水面上的部分表为 S'(显然，$S'=4a^2-S$)，这部分的重心在 C' 点. 显然，C 点、O 点和 C' 点三点共线.



综试(四)图 2－1



综试(四)图 2－2

如综试(四)图 2－2 所示，若 O 点(全部木料的重心)与 C 点(浮力力心)不在一条竖直线上，设其连线与竖直线的夹角为 θ. 设 S' 部分相应的木料质量为 m'，S 部分相应的木料质量为 m，则经 C' 点的竖直向下重力为 $m'g$，经 C 点的竖直向下重力为 mg，经 C 点的竖直向上的浮力为 $(m+m')g$. 由于 $C'OC$ 直线与竖直线夹角 θ，上述作用力相对 O 点将产生使木料逆时针旋转的非零合力矩为

$$m'gl'\sin\theta-mgl\sin\theta+(m+m')gl\sin\theta=m'g(l'+l)\sin\theta\neq0$$

式中 l' 和 l 分别是 C' 点和 C 点到 O 点的距离. 木料平衡，要求上述合力矩为零，即要求 $\theta=0$，因此，木料达到平衡的第三个条件是，O 点和 C 点在一条竖直线上.

当以上三个条件同时得到满足时，木料才能浮在水面上并达到平衡.

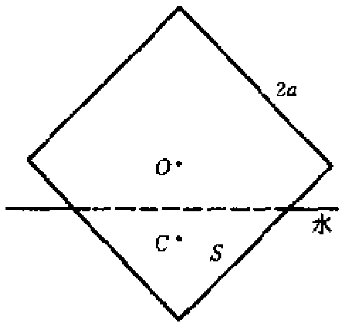
2. 如综试(四)图 2－3 所示，木料对称地浮在水面上，且只有一条长边浸没于水中，达到平衡. 显然，此时木料浸没水中部分应小于一半，故应有

$$S<2a^2$$

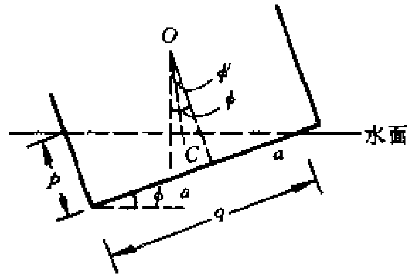
$$\rho<\frac{1}{2}\rho_0$$

如综试(四)图 2－3，若木料受到扰动，使之绕质心 O 沿顺时针方向稍有偏转. 偏转后，若木料浸没于水中的 S 部分的重心 C 随之稍稍向右偏转，则如综试(四)图 2－2，将会相对 O 点产生使木料逆时针转动的力矩，从而使扰动减小，木料有恢复原平衡状态的趋势，这就是稳定平衡. 木料偏转后，若 C 点向左偏转，则将会相对 O 点产生使木料顺时针转动的力矩，从而使扰动加大，

破坏平衡，这就是不稳定平衡．木料偏转后，若 C 点并不随之偏转，则木料继续保持平衡，这就是随遇平衡．



综试(四)图 2-3



综试(四)图 2-4

现在，定量讨论木料对称地浮在水面上且只有一条长边没于水中时平衡的稳定性．如综试(四)图 2-4 所示，木料浮在水面上，并不对称，但只有一条长边浸没水中．p 和 q 分别是木料正方形截面两边浸没部分的长度．通过木料质心 O 的竖直线与经 O 向一条长为 $2a$ 边所作垂直线之间的夹角为 ϕ．C 点是木料浸没水中部分的重心，它是木料浸没水中的三角形截面三边中线的交点．OC 与经 O 向一条长为 $2a$ 边所作垂线之间的夹角为 ϕ'．如综试(四)图 2-4，应有

$$\tan\phi=\frac{p}{q},\quad \tan\phi'=\frac{a-\frac{q}{3}}{a-\frac{p}{3}}$$

对于原来的如综试(四)图 2-3 所示的对称平衡位置，p 为 p_0，q 为 q_0，且

$$p_0=q_0$$

及

$$\tan\phi'=\tan\phi,\quad \phi'=\phi$$

即对于对称的平衡位置，C 点和 O 点应在同一条竖直线上．

现在，设木料从如综试(四)图 2-3 的 $p_0=q_0$ 的平衡位置稍有偏转，设偏转后 $p<q$（即如综试(四)图 2-4，$p>q$ 的情况类似），同时 C 点相应有所偏移．若 C 点向右侧偏移，使 $\phi'<\phi$，则原平衡位置为稳定平衡；若 C 点向左侧偏移，使 $\phi'>\phi$，则原平衡位置为不稳定平衡；若 C 点不偏移，即保持 $\phi'=\phi$，则原平衡位置为随遇平衡．

对于从平衡位置偏转后的 p 和 q，若

$$\phi'>\phi$$

则

$$\frac{a-\frac{q}{3}}{a-\frac{p}{3}}>\frac{p}{q}$$

即

$$\left(a-\frac{p}{3}\right)p<\left(a-\frac{q}{3}\right)q \tag{1}$$

若

$$\phi' < \phi$$

则

$$\frac{a-\frac{q}{3}}{a-\frac{p}{3}} < \frac{p}{q}$$

即

$$\left(a-\frac{p}{3}\right)p > \left(a-\frac{q}{3}\right)q \tag{2}$$

若

$$\phi' = \phi$$

则

$$\frac{a-\frac{q}{3}}{a-\frac{p}{3}} = \frac{p}{q}$$

即

$$\left(a-\frac{p}{3}\right)p = \left(a-\frac{q}{3}\right)q \tag{3}$$

根据(1)、(2)、(3)式，引入函数

$$y = \left(a-\frac{x}{3}\right)x, \quad x < 2a$$

$y(x)$曲线是以 $x=\frac{3}{2}a$ 为对称轴的抛物线，如综试(四)图 2－5 所示.

下面分三种情况讨论.

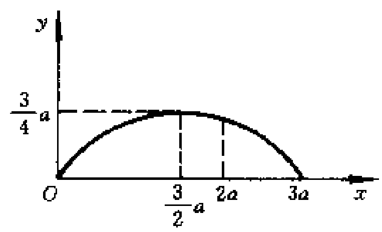
(i)设 $p_0 = q_0 = \frac{3}{2}a$

偏转后，有

$$p = p_0 - \Delta p$$
$$q = q_0 + \Delta q$$

偏转后为使木料受力平衡，没于水中的三角形面积 S 应保持不变，即仍有

$$pq = 2S = p_0 q_0$$



综试(四)图 2－5

由此得出

$$\Delta q = \frac{q_0}{p_0 - \Delta p}\Delta p > \Delta p$$

由 $y(x)$曲线的对称性，从 $x=\frac{3}{2}a$ 向两侧偏移时，偏移较大者相应的 y 值较小，故有

$$\left(a-\frac{p}{3}\right)p > \left(a-\frac{q}{3}\right)q$$

相应有

$$\phi' < \phi$$

故原平衡位置为稳定平衡.

(*ii*)设 $p_0 = q_0 > \frac{3}{2}a$

偏转后,仍有

$$p = p_0 - \Delta p, \quad q = q_0 + \Delta q$$

由 $y(x)$曲线的特征,$(a - \frac{p}{3})p$ 值将增大,$(a - \frac{q}{3})q$ 值将减小,即有

$$(a - \frac{p}{3})p > (a - \frac{q}{3})q$$

$$\phi' < \phi$$

原平衡位置为稳定平衡.

(*iii*)设 $p_0 = q_0 < \frac{3}{2}a$

由 $y(x)$曲线的特征,$(a - \frac{p}{3})p$ 值将减小,$(a - \frac{q}{3})q$ 值将增大,即有

$$(a - \frac{p}{3})p < (a - \frac{q}{3})q$$

$$\phi' > \phi$$

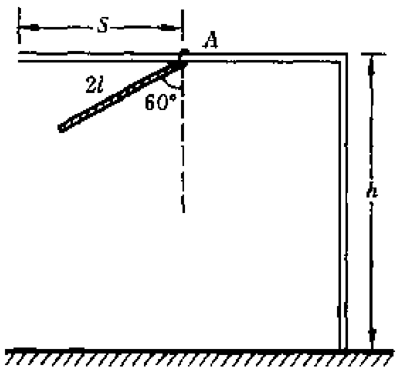
原平衡位置为不稳定平衡.

【本题是参加 1992 年第 23 届 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)的中国队队员石长春同学编制的.】

【题 3】 如综试(四)图 3-1 所示,质量为 m、长为 $2l$ 的刚性均匀细杆,其上端 A 套在水平光滑横梁上,且可无摩擦地滑动.开始时 A 与横梁左端相距为 S,细杆静止且与竖直方向夹 60°角,尔后细杆自由摆下.

1. 若 S 足够长,试问细杆的摆动周期与另一个长为 $1.1l$、上端固定、幅角也为 60°的单摆的摆动周期相比,哪一个周期长?

2. 若因 S 不够长,当杆的下端摆到最低位置时,A 端刚好脱离横梁使杆掉下.如果细杆的各部分刚好能够同时朝下落地.试求横梁距水平地面的高度 h.



综试(四)图 3-1

【分析】 细杆摆动的幅角为 60°,不允许作小角度近似,为了严格计算细杆的摆动周期 T,需要作椭圆积分,这是很麻烦的.同样,单摆的幅角也是 60°,为了严格计算单摆的摆动周期 T_0,会遇到类似的困难.然而,注意到本题第 1 问只是要求比较这两个周期孰长孰短,并未要求算出 T 与 T_0 的值,不妨尝试采用速度比较的方法来讨论 T 与 T_0 的长短.

细杆在摆动过程中相对其质心转动,这与单摆在摆动过程中相对其悬挂点转动是类似的,而且两者的幅角也相同.利用能量关系,可以求出细杆位于任意转角 ϕ 时的角速度 ω,同样也可以求出单摆位于相应转角 ϕ 时的角速度 ω_0.如果除了在特殊的角位置 $\phi = \phi_0 = 60°$ 处,$\omega = \omega_0 = 0$

外，在其余角位置（即 $\phi\neq\phi_0$ 的各角位置），均有 $\omega>\omega_0$，则 T 必定短于 T_0，即 $T<T_0$；反之，如果除了在特殊的角位置 $\phi=\phi_0=60^\circ$ 处，$\omega=\omega_0=0$ 外，在其余角位置均有 $\omega<\omega_0$，则必定 $T>T_0$. 这种讨论问题的方法就是速度比较法. 当然，速度比较法并非在任何情况下都有效. 例如，在本题中，如果对某些角位置 $\omega>\omega_0$，对另一些角位置 $\omega<\omega_0$，就无法定性判断 T_0 与 T 的长短，非作严格计算不可. 幸而本题 ω 与 ω_0 的关系颇为单纯，确可用速度比较法求解.

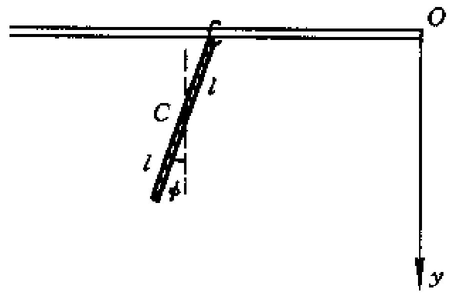
若 S 不够长，使得细杆下端摆到最低位置时离横梁掉下. 容易判定，此后细杆质心将作初速为零的自由落体运动，同时细杆绕质心作匀角速转动. 细杆各部分若能同时朝下落地，则在质心下降落地时间内，细杆应刚好转过 $(\frac{\pi}{2}+k\pi)$ 的角度，$k=0,1,2,\cdots$ 利用这一要求，即可求出本题第 2 问中所需的 h.

【解】 1. 如综试（四）图 3－2 所示，长为 $2l$ 的细杆的质心 C 在其中央，细杆在任意时刻 t 的转角表为 ϕ，取逆时针方向为转角的正方向，在任意 t 时刻细杆质心的运动速度为 v_C，细杆绕质心转动的角速度为 ω，则在二分之一摆动周期内有下述能量关系，

$$mgl(\cos\phi-\cos\phi_0)=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}I_C\omega^2$$

其中 $\phi_0=-60^\circ$ 是细杆的初始位置，I_C 是细杆相对质心转轴的转动惯量，为

$$I_C=\frac{1}{3}ml^2$$



综试（四）图 3－2

细杆摆动过程中，在水平方向无外力作用，故细杆质心 C 无水平方向运动，始终在竖直方向运动. 如综试（四）图 3－2，取 y 轴竖直向下，原点 O 在横梁，则任意时刻 t，质心 C 的位置和速度分别为

$$y_C=l\cos\phi$$

$$v_C=\frac{dy_C}{dt}=-l\sin\phi\,\frac{d\phi}{dt}=-\omega l\sin\phi$$

由以上四式，解出细杆绕质心转动角速度 ω 随转角 ϕ 变化的关系为

$$\omega=\sqrt{\frac{6g(\cos\phi-\cos\phi_0)}{l(1+3\sin^2\phi)}}$$

对于长为 $1.1l$，初始幅角也为 60° 的单摆，设任意时刻 t 的摆角为 ϕ，摆球的速度为 v，则也有类似的能量关系，

$$1.1lmg(\cos\phi-\cos\phi_0)=\frac{1}{2}mv^2$$

设任意时刻 t 的摆动角速度为 ω_0，则

$$v=1.1l\omega_0$$

由以上两式，解出

$$\omega_0=\sqrt{\frac{2g}{1.1l}(\cos\phi-\cos\phi_0)}$$

ω 与 ω_0 的比值为

$$\frac{\omega}{\omega_0}=\sqrt{\frac{3.3}{1+3\sin^2\phi}}$$

因

$$\sin^2\phi\leqslant\sin^2\phi_0=\frac{3}{4}$$

$$\frac{3.3}{1+3\sin^2\phi}\geqslant\frac{3.3}{1+3\times\frac{3}{4}}=\frac{3.3}{3.25}>1$$

故

$$\frac{\omega}{\omega_0}>1$$

上式表明，在二分之一的摆动周期内，细杆在任意角位置 ϕ 绕质心的摆动角速度 ω 均大于单摆在相应摆角 ϕ 的摆动角速度 ω_0，因此细杆摆动二分之一周期所需时间 $\frac{T}{2}$ 必定小于单摆的半周期 $\frac{T_0}{2}$，即

$$\frac{T}{2}<\frac{T_0}{2}$$

$$T<T_0$$

细杆摆动周期短于单摆摆动周期.

2. 由于细杆质心无水平方向位移，当细杆下端摆到最低位置时，杆上端由初始位置向左移动 $l\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}l$，由题设此时杆上端刚好脱离横梁使杆掉下，因此符合题意的 s 的长度应为（见综试（四）图 3－1）

$$s-\frac{\sqrt{3}}{2}l$$

细杆刚开始下掉时

$$\phi=0$$

相应的质心速度和细杆绕质心的角速度为

$$v_C=0$$

$$\omega=\sqrt{\frac{3g}{l}}$$

细杆下落过程中，质心沿竖直方向作自由落体运动，细杆绕质心以 $\omega=\sqrt{\frac{3g}{l}}$ 的角速度作匀角速旋转.

为了使细杆各部分同时朝下落地，要求细杆落地时杆处于水平状态，即要求下落时间 t 满足

$$\omega t=\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k=0,1,2,\cdots$$

即

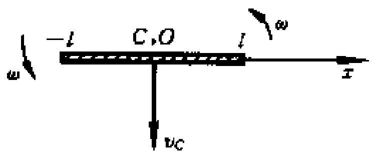
$$t=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\sqrt{\frac{l}{3g}}$$

杆落地时，其质心竖直向下的速度为

$$v_C=gt=(k+\frac{1}{2})\pi\sqrt{\frac{lg}{3}}$$

如综试(四)图 3－3 所示，沿着杆的方向即水平方向取 x 坐标，原点 O 在质心 C 处，则当杆着地时，杆上任意 x 点向下的速度 v_x 为

$$v_x=v_C-\omega x=\sqrt{\frac{lg}{3}}[(k+\frac{1}{2})\pi-\frac{3x}{l}]$$



综试(四)图 3－3

由上式，显然只要

$$k\geqslant1$$

就能确保杆上任意点 $x(-l\leqslant x\leqslant l)$ 的速度 $v_x>0$，为正值，朝下运动，即确保细杆各部分能够同时朝下落地.

还需要说明的是，在细杆着地前的四分之一旋转周期内，杆的右端点不会先行触地. 为此，不妨作时间上的反演，即从杆着地时刻起，质心以

$$v_C=(k+\frac{1}{2})\pi\sqrt{\frac{lg}{3}}$$

的初速竖直上抛，同时，细杆绕质心以

$$\omega=\sqrt{\frac{3g}{l}}$$

的角速度反向旋转，看看在四分之一的旋转周期内杆的右端点会不会触地. 在此反演运动中，杆右端点垂直向上的速度为

$$v_C-gt-\omega l\cos\omega t=(k+\frac{1}{2})\pi\sqrt{\frac{lg}{3}}-gt-\sqrt{\frac{3g}{l}}l\cos\omega t$$

如果此速度在四分之一周期内恒为正值，即若有

$$(k+\frac{1}{2})\pi\sqrt{\frac{lg}{3}}>gt+\sqrt{3gl}\cos\omega t$$

则右端点必定不会触地. 因下述不等式成立，

$$gt+\sqrt{3gl}\cos\omega t<g\cdot\frac{T}{4}+\sqrt{3gl}$$

把周期

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{3g}}$$

代入，得

$$\begin{aligned}gt+\sqrt{3gl}\cos\omega t&<\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{lg}{3}}+\sqrt{3gl}\\&=(\frac{\pi}{2}+3)\sqrt{\frac{lg}{3}}<(1+\frac{1}{2})\pi\sqrt{\frac{lg}{3}}\end{aligned}$$

因此，对于 $k=1,2,3,\cdots$，确有

$$(k+\frac{1}{2})\pi\sqrt{\frac{lg}{3}}\geqslant(1+\frac{1}{2})\pi\sqrt{\frac{lg}{3}}>gt+\sqrt{3gl}\cos\omega t$$

从而确保细杆在着地前的四分之一旋转周期内，杆的右端点不会先行触地.

把上面求出的下落时间

$$t=(k+\frac{1}{2})\pi\sqrt{\frac{l}{3g}},k=1,2,\cdots$$

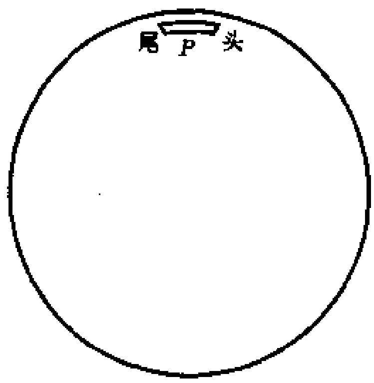
代入 h 的表达式

$$h=l+\frac{1}{2}gt^2$$

得出横梁距地面的高度 h 应为

$$h=[1+\frac{1}{6}(k+\frac{1}{2})^2\pi^2]l,k=1,2,\cdots$$

【题 4】 如综试(四)图 4－1 所示，在光滑的水平面上有一个固定的光滑大圆环，一个小的发射装置 P 紧贴在圆环的内侧，开始时处于静止状态，且头部朝右，尾部朝左.在 P 内存有许多微小的光滑珠子，这些珠子的总质量与空的发射装置的质量相同.设从某时刻起，P 从其尾部不断向后发射小珠子，由于珠子微小，发射可认为是连续进行的.设珠子射出时相对 P 的速率为常量，设单位时间发射的珠子质量也是常量.再设当 P 的头部与前方运动过来的珠子相遇时，P 刚好将其中的珠子全部发射完.



综试(四)图 5－1

1. 试求 P 在发射珠子的全过程中，P 相对圆环转过的总角度 θ(要求精确到 1°).

2. 若 P 的头部遇到前方运动过来的珠子时，能将珠子吞入其中且不再发射.试确定 P 相对圆环的最终运动速率 v_e.

【分析】 本题是变质量物体的角动量问题，它的求解与变质量物体动量问题的求解类似.

由发射装置和全部珠子构成的系统只能沿水平圆环的内侧运动，且光滑无摩擦，故系统相对圆环中心的角动量守恒.发射装置 P 由于不断地从尾部反向发射珠子，使其正向运动的速度不断地增大.仿照变质量物体动量问题的讨论方法，列出变质量物体的角动量守恒关系式，由此可解出 P 的运动速率 v 与 P 剩余质量 M 之间的关系.从 $t=0$ 开始发射珠子，到 $t=T$ 发射完全部珠子的时间内，M 减小为初始质量的一半，在这段时间内 P 走过的路程 l，可通过 v 对时间 t 的积分求得.题设 P 发射完珠子时刚好与最初发射的珠子相遇，因此，最初发射的珠子在 T 时间内沿圆环内侧经过的路程 $l_0=uT$(u 是珠子射出的速率，为常量)与上述 P 走过的路程 l 之和应等于圆环的周长.沿圆周运动所经路程与转角 θ 成正比，由此第 1 问的 θ 角可求.

P 吞入前方运动过来的珠子后将减速.如果能证明，P 必定会将全部珠子吞入，则由于系统(发射装置与全部珠子)的总角动量为零，P 最终将停止下来，从而 P 最终相对固定圆环的运动速率 v_e 应为零.

【解】 1. 设空的发射装置 P 以及全部珠子的质量均为 m(题设两者质量相同)，设珠子相对 P 的出射速率为 u(u 为常量)，设单位时间内从 P 射出的珠子的质量为 λu(λ 也是常量).设 P 从 $t=0$时刻开始发射，设 P 终止发射的时刻为 $t=T$(即在 T 时刻发射完全部珠子)则应有

$$m = \lambda u T$$

设在某个 $t>0$ 时刻($0<t<T$)，P 的质量为 M(其中包括发射装置的质量 m 及一部分尚未发射的珠子的质量)，P 沿圆环内侧圆运动的速率为 v，则其角动量 L 为

$$L = RMv$$

式中 R 是圆环的半径. 设经 $\mathrm{d}t$ 时间后，发射了质量为 $-\mathrm{d}M$ 的珠子，则珠子相对圆环的反向运动速率为 $(u-v)$，P 的剩余质量为 $(M+\mathrm{d}M)$，正向速率增为 $(v+\mathrm{d}v)$，两者的角动量之和为

$$L' = R[(M+\mathrm{d}M)(v+\mathrm{d}v) - (-\mathrm{d}M)(u-v)] = R(Mv + M\mathrm{d}v + u\mathrm{d}M)$$

因系统光滑无摩擦，故在发射 $\mathrm{d}t$ 时间的前后，角动量守恒，有

$$L' = L$$

由以上三式，得出

$$M\mathrm{d}v + u\mathrm{d}M = 0$$

积分，

$$\int_{M_0}^{M} \frac{\mathrm{d}M}{M} = -\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{u}$$

其中 M_0 是 M 的初始质量 . 积分后得出

$$v = -u\ln\frac{M}{M_0} = u\ln\frac{M_0}{M}$$

其中

$$M_0 = 2m$$

$$M = 2m - \lambda u t$$

设在 $\mathrm{d}t$ 时间内，P 经过的路程元为 $\mathrm{d}l$，则有

$$\mathrm{d}l = v\mathrm{d}t = u\left(\ln\frac{2m}{2m-\lambda u t}\right)\mathrm{d}t$$

从 $t=0$ 开始发射，到 $t=T$ 发射完毕，在全部发射过程中 P 走过的总路程 l 为

$$\begin{aligned} l &= u\int_0^T \left(\ln\frac{2m}{2m-\lambda u t}\right)\mathrm{d}t \\ &= uT\ln 2m - u\int_0^T [\ln(2m-\lambda u t)]\mathrm{d}t \end{aligned}$$

利用积分公式

$$\int (\ln x)\mathrm{d}x = x\ln x - x + C$$

得

$$\begin{aligned} & u\int_0^T [\ln(2m-\lambda u t)]\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{\lambda}\{[(2m-\lambda u T)\ln(2m-\lambda u T) - (2m-\lambda u t)] - (2m\ln 2m - 2m)\} \\ &= -\frac{1}{\lambda}(m\ln m - m - 2m\ln 2m + 2m) = \frac{1}{\lambda}(m\ln m + 2m\ln 2 - m) \\ &= \frac{m}{\lambda}(\ln m + 2\ln 2 - 1) \end{aligned}$$

在上述计算中已经利用 $m=\lambda uT$ 化简．代入 l 的表达式，得

$$l=uT\ln 2m-\frac{m}{\lambda}(\ln m+2\ln 2-1)$$

$$=uT(1-\ln 2)=uT\ln\frac{e}{2}$$

在 $t=0$ 时刻发射的第一颗珠子，经 T 时间沿反向走过的路程为

$$l_0=uT$$

由以上两式，得

$$l=l_0\ln\frac{e}{2}$$

由题设，P 发射完全部珠子后，刚好与从前方运动过来的第一颗珠子相遇，故

$$l+l_0=2\pi R$$

设 l 和 l_0 各自对应的圆心角为 θ 和 θ_0，则有

$$\frac{\theta}{\theta_0}=\frac{l}{l_0}=\ln\frac{e}{2}$$

$$\theta+\theta_0=2\pi$$

由以上两式，消去 θ_0，得

$$\theta=\frac{\ln\frac{e}{2}}{1+\ln\frac{e}{2}}\cdot 2\pi=\frac{\ln\frac{e}{2}}{1+\ln\frac{e}{2}}\cdot 360^\circ=85^\circ$$

故 P 在发射珠子的全过程中，相对固定圆环转过的总角度为 $\theta=85^\circ$．

2．在 $t=T$ 时刻，从 P 中最后射出的珠子相对圆环的逆行速率为

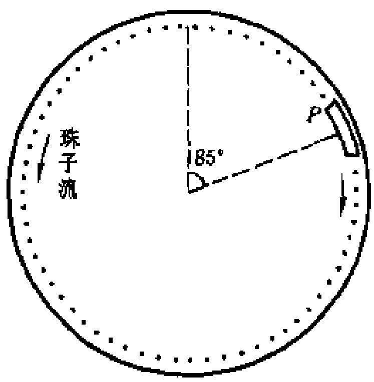
$$u-v_{t=T}$$

其中

$$v_{t=T}=u\ln\frac{M_0}{M}\Big|_{t=T}=u\ln\frac{2m}{m}=u\ln 2<u$$

故最后射出的珠子的逆行速率 $(u-v_{t=T})>0$，为正值．

在 $t=T$ 时刻，系统的状态如综试(四)图 4－2 所示，P 刚好发射完全部珠子，并且刚好与它发射的第一颗珠子相遇，于是全部珠子在圆环内侧密布．根据上面的计算、全部珠子都逆行，即沿综试(四)图 4－2 中逆时针方向运动，而 P 正行即顺时针方向运动，故 P 将相继吞入所有珠子，并由题设不再发射．因系统的角动量守恒，在 $t=0$ 时刻，P 不动，第一颗珠子尚待发射，系统角动量为零，故当 P 最后将全部珠子吞入后，发射装置及全部珠子的角动量亦应为零．因此，P 相对圆环的最终运动速率 v_e 为



综试(四)图 4－2

$$v_e=0$$

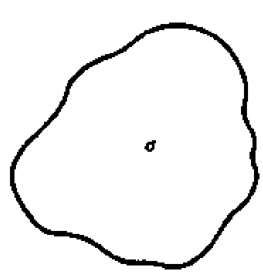
【题 5】 设想有一全空间为平面的二维世界，其中库仑力为距离一次方反比径向力，表为

$$F=\frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0^* r^2}r$$

式中 ε_0^* 是相应的真空常量.

1. 在该空间中定义一种新的线元矢量 dl,其大小等于线元长度,其方向为线元的外法线方向.试导出该空间中相应的真空静电场的高斯定理.

2. 试通过特例验证真空静电场的能量密度(单位面积的静电场能量)w 与电场强度的平方 E^2 成正比.



综试(四)图 5－1

3. 利用上述 w 与 E 的关系,试求均匀带电圆环(电量为 $Q>0$,半径为 R)环上的电场强度 $\boldsymbol{E}_R$.

4. 设该空间内有一如综试(四)图 5－1 所示的形状不规则的非零有限区域,其上均匀带电,电荷密度(单位面积的电量)为 $\sigma>0$.试证明此时全空间电场的能量发散.

【分析】 在非广义相对论的物理学理论中,真实世界是三维平直空间,库仑力与距离平方成反比,其方向沿径向,由此可以证明(并利用场强叠加原理)真空静电场的高斯定理

$$\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{(V_S内)}Q_i \tag{1}$$

式中 V_S 是闭合曲面 S 包围的体积.本题设想有一个二维平直空间的世界,在这个世界里,库仑力与距离一次方成反比沿径向,容易猜想出相应的真空静电场的高斯定理为

$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=\frac{1}{\varepsilon_0^*}\sum_{(S_L内)}Q_i \tag{2}$$

式中 L 是任意一条闭合曲线,dl 是 L 上按本题第 1 问定义的线元矢量,S_L 是 L 所包围的面积.仿照(1) 式的证明,不难证明(2) 式.

在本题条件下,为了验证真空静电场的能量密度 w 与场强 $\boldsymbol{E}$ 的平方 E^2 成正比,选取匀强电场为例来计算 w 较为方便.考虑平面中两条平行的直线段分别均匀地带有等量异号电荷,若两条平行直线段的长度远大于其间的间距,则由(2) 式可知,在两平行直线段之间有匀强电场,空间其余区域的电场可略,这相当于平面世界中的"平行直线真空电容器".若固定其中一条带电直线段,用外力缓慢地平行移动另一带电直线段,则外力所做的功全部转化为两平行带电直线段之间新增匀强场区的场能,由此即可计算本题第 2 问的场能密度 w.

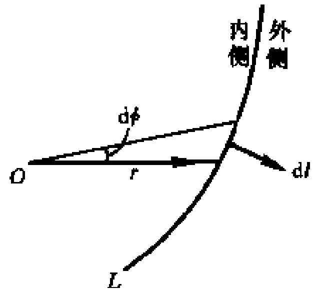
均匀带电圆环内、外场区的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的分布,由(2) 式容易求出.若用外力缓慢地使圆环电荷向环内沿径向作小移动,则外力所作的功全部转化为新建场区的场能.作功的多少与外力的大小有关,即与本题第 3 问待求的圆环上的电场强度 $\boldsymbol{E}_R$ 有关,换言新建场区的场能与 $\boldsymbol{E}_R$ 有关.另外,新建场区的场能与圆环外的电场强度有关,由此,新建场区的场能可求,于是 $\boldsymbol{E}_R$ 可得.

在本题第 4 问给出的如综试(四)图 5－1 所示的平面带电区域中,总可以从中取出一个尽可能大的圆形带电子区域 S_1,其余的带电子区域表为 S_2.于是,全空间的电场能量 W 包括三部分,其一是 S_1 电荷系单独存在时在全空间的电场能量 W_1,其二是 S_2 电荷系单独存在时在全空间的电场能量 W_2,其三是 S_1 电荷系与 S_2 电荷系之间的电势能 W_3,即 $W=W_1+W_2+W_3$.显然,W_1、W_2、W_3 均为正值,若 W_1 发散,则 W 必定发散.W_1 又可分解为 S_1 内的场能 $W_{1内}$ 与 S_1 外的场能 $W_{1外}$,即 $W_1=W_{1内}+W_{1外}$,显然,$W_{1内}$ 与 $W_{1外}$ 均为正值,若 $W_{1外}$ 发散,则 W_1 发散.由

(2) 式,可以求出 S_1 外的电场强度分布,利用 W 与 E^2 成正比的关系即可证明 $W_{1外}=\infty$,发散,从而 W_1 以及 W 均发散.

【解】 1. 如综试(四)图 5－2 所示,在平面上任取一段曲线 L,规定其一侧为内侧,另一侧为外侧.在 L 上任取一长为 $\mathrm{d}l$ 的线元,由此得出线元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$,其方向为从内侧到外侧的法线方向.在内侧区域取一参考点 O,从 O 到 $\mathrm{d}l$ 段的矢径为 $\boldsymbol{r}$,则 $\mathrm{d}l$ 相对 O 点所张的平面角 $\mathrm{d}\phi$ 为

$$\mathrm{d}\phi=\frac{\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{r^2}$$



综试(四)图 5－2

曲线 L 相对 O 点所张的平面角 ϕ 为

$$\phi=\int\mathrm{d}\phi=\int_L\frac{\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{r^2}$$

如果 O 点在曲线 L 的外侧,$\mathrm{d}l$ 相对 O 点所张平面角仍表为 $\mathrm{d}\phi$,则应有

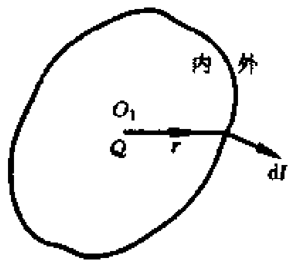
$$-\mathrm{d}\phi=\frac{\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{r^2}$$

同时,L 相对 O 点所张平面角仍表为 ϕ,则应有

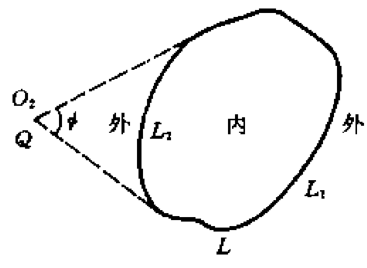
$$-\phi=\int_L\frac{\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{r^2}$$

若 L 为闭合曲线,如综试(四)图 5－3 所示,平面自然地分为内、外两个区域,L 上任意线元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的方向由内指向外.在闭合曲线 L 内任取参考点 O_1,O_1 到 $\mathrm{d}l$ 的矢径为 $\boldsymbol{r}$,则闭合曲线相对 O 点所张平面角即为全平面角 2π,故

$$\oint_L\frac{\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{r^2}=2\pi$$



综试(四)图 5－3



综试(四)图 5－4

如综试(四)图 5－4 所示,在闭合曲线 L 外任取参考点 O_2,则可将 L 分解为 L_1 和 L_2 两部分,于是

$$\oint_L\frac{\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{r^2}=\int_{L_1}\frac{\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{r^2}+\int_{L_2}\frac{\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{r^2}$$

对于曲线 L_1,O_2 点在 L_1 的内侧,故

$$\int_{L_1}\frac{\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{r^2}=\phi$$

式中的平面角 ϕ 如综试(四) 图 5 - 4 所示. 对于曲线 L_2, O_2 点在 L_2 的外侧, 故

$$\int_{L_2}\frac{\boldsymbol{r}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{r^2}=-\phi$$

因此,

$$\oint_L\frac{\boldsymbol{r}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{r^2}=0$$

即闭合曲线 L 对于其外部任意一点 O_2 所张的平面角为零.

如综试(四) 图 5 - 3 所示, 在 O_1 点放置点电荷 Q, 设 Q 在线元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 处的场强为 $\boldsymbol{E}$, 则由本题给出的库仑定律, 有

$$\boldsymbol{E}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0^* r^2}\boldsymbol{r}$$

点电荷 Q 的电场经闭合曲线 L 的通量为

$$\oint_L\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0^*}\oint_L\frac{\boldsymbol{r}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{r^2}$$

因点电荷 Q 在闭合曲线 L 内, 故上式右边的积分为 2π, 得

$$\oint_L\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{Q}{\varepsilon_0^*}\quad (Q\ 在\ L\ 内)$$

如综试(四) 图 5 - 4 所示, 在 O_2 点放置点电荷 Q, 则 Q 的电场经闭合曲线 L 的通量为

$$\oint_L\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0^*}\oint_L\frac{\boldsymbol{r}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{r^2}$$

因点电荷 Q 在闭合曲线 L 外, 故上式右边的积分为零, 得

$$\oint_L\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0,\quad (Q\ 在\ L\ 外)$$

任何电荷体系都可以看作是点电荷组 $\{Q_i\}$, 其总电场为各点电荷电场 $\boldsymbol{E}_i$ 的矢量和, 此即场强叠加原理,

$$\boldsymbol{E}=\sum_i\boldsymbol{E}_i$$

故总电场 $\boldsymbol{E}$ 经任一闭合曲线 L 的通量为各 $\boldsymbol{E}_i$ 经 L 的通量之和, 有

$$\oint_L\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\sum_i\oint_L\boldsymbol{E}_i\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

上面已经得出

$$\oint_L\boldsymbol{E}_i\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\begin{cases}\dfrac{Q_i}{\varepsilon_0^*}, & Q_i\ 在\ L\ 内\\ 0, & Q_i\ 在\ L\ 外\end{cases}$$

于是得出

$$\oint_L\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{1}{\varepsilon_0^*}\sum_{(S_L内)}Q_i$$

上式右边的求和是闭合曲线 L 所包围面积 S_L 内的电量的代数和. 这就是二维平面世界中的真空静电场的高斯定理.

2. 设在平面上有一条无限长的均匀带电直线，电荷的线密度为 λ = 常量. 由对称性，直线上电场强度处处为零，直线两侧电场强度的方向均与直线垂直，与直线距离相同处的电场强度大小相等. 如综试(四)图5－5所示，在带电直线两侧取对称的闭合矩形高斯线 L，两侧电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的方向如综试(四)图5－5所示(设 $\lambda > 0$). 容易得出，

$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 2E\Delta l$$

$$\sum_{(S_L内)} Q_i = \lambda\Delta l$$

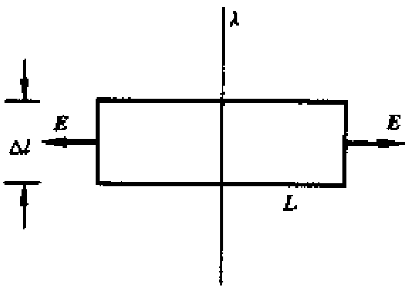
由平面世界的高斯定理得

$$2E\Delta l = \frac{1}{\varepsilon_0^*}\lambda\Delta l$$

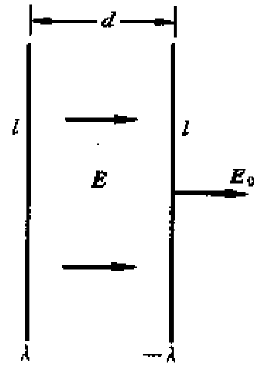
即

$$E = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0^*}$$

可见，无限长均匀带电直线两侧的电场是匀强电场，λ 为正时，$\boldsymbol{E}$ 的方向如综试(四)图5－5所示，λ 为负时，$\boldsymbol{E}$ 的方向与综试(四)图5－5所示方向相反.



综试(四)图5－5



综试(四)图5－6

如综试(四)图5－6所示，取长均为 l、相距为 d 的两条平行均匀带电直线，左边一条的电荷线密度为 $\lambda > 0$，右边一条的电荷线密度为 $-\lambda$. 设 $d \ll l$，则在讨论平面上的电场强度分布时，可将两平行有限带电直线当作平行无限长带电直线来处理. 由于平面上各点的电场强度是两平行无限长带电直线在各点产生的电场强度之和，故在两平行直线之外的电场强度为零，在两平行直线之间为匀强电场，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的方向如综试(四)图5－6所示，电场强度的大小为

$$E = \frac{\lambda}{\varepsilon_0^*}$$

右边带电直线上的电场强度 $\boldsymbol{E}_0$ 的方向与 $\boldsymbol{E}$ 的方向相同，大小为

$$E_0 = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0^*}$$

右边带电直线所受合力 $\boldsymbol{F}_e$ 的方向指向左方，其大小为

$$F_e = \lambda l E_0 = \frac{\lambda^2 l}{2\varepsilon_0^*}$$

如综试(四)图5－7所示，将左边带电直线固定，用外力 $\boldsymbol{F}=-\boldsymbol{F}_e$ 把右边的带电直线缓慢地向右平移 Δx，则外力 $\boldsymbol{F}$ 作功为

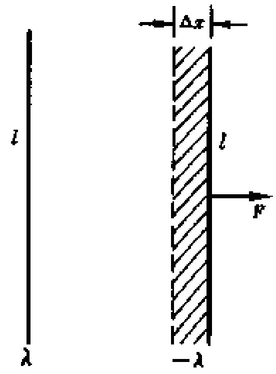
$$A=F\Delta x=\frac{\lambda^2}{2\varepsilon_0^*}l\Delta x$$

作功提供的能量全部转化为综试(四)图5－7中斜线所示的新建电场区的场能 W，即

$$W=A=\frac{\lambda^2}{2\varepsilon_0^*}l\Delta x$$

新建的电场区仍为匀强场区，场能密度 w 为

$$w=\frac{W}{l\Delta x}=\frac{\lambda^2}{2\varepsilon_0^*}$$



综试(四)图5－7

新建电场区中的电场强度仍为 $\boldsymbol{E}$，其大小仍为

$$E=\frac{\lambda}{\varepsilon_0^*}$$

由以上两式，得出

$$w=\frac{1}{2}\varepsilon_0^*E^2$$

可见，在二维平面世界，真空静电场的场能密度 w 与电场强度的平方 E^2 成正比，这一结论在本题是通过特例得出的．在三维世界也有同样的结论．

3．由均匀带电圆环所具有的对称性，应用二维平面世界真空静电场的高斯定理，容易得出(过程从略)，圆内

$$\boldsymbol{E}=0$$

圆外，$\boldsymbol{E}$ 的方向沿径向向外，$\boldsymbol{E}$ 的大小为

$$E=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0^*r}$$

由对称性，圆环上一点的电场强度 $\boldsymbol{E}_R$，其方向应沿径向，向外或向里，在 $Q>0$ 的情况，设 $\boldsymbol{E}_R$ 沿径向向外．由对称性，圆环上各点 E_R 的大小应处处相同．如综试(四)图5－8所示，用沿圆环均匀分布且方向指向圆心的外力，克服圆环上电荷所受的沿径向向外的电场力，使圆环上各处的电荷缓慢地向内沿径向移动 $\mathrm{d}l$，则外力作功为

$$\mathrm{d}A=QE_R\mathrm{d}l$$

作功 $\mathrm{d}A$ 提供的能量应全部转化为综试(四)图5－8中用斜线标明的新建场区的能量 $\mathrm{d}W$，即

$$\mathrm{d}W=\mathrm{d}A=QE_R\mathrm{d}l$$

上述场能为正，即 $\mathrm{d}A$ 为正，表明 $\boldsymbol{E}_R$ 的方向确实沿径向向外．新建的场区相对收缩后的圆环电荷而言属于圆环外区域，其中电场强度的大小为

$$E=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0^*R}$$

场能密度为(见本题第2问)

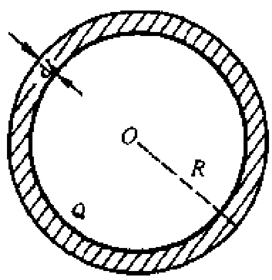
$$w=\frac{1}{2}\varepsilon_0^*E^2=\frac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0^*R^2}$$

故新建场区的场能为

$$dW=(2\pi R\ dl)w=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0^* R}dl$$

由以上两个 dW 表达式得出原带电圆环上电场强度的大小为

$$E_R=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0^* R}$$



综试(四)图 5－8

4. 在综试(四)图 5－1 所示的均匀带电区域内，取一个尽可能大的圆形子区域 S_1，其半径为 R，所带电量为

$$Q=\pi R^2\sigma$$

由二维平面世界真空静电场的高斯定理，圆形均匀带电子区域 S_1 在圆外的电场强度分布与位于圆心的点电荷 Q 在圆外的电场强度分布相同(证明从略)，即 $\boldsymbol{E}$ 的方向沿径向向外，$\boldsymbol{E}$ 的大小为

$$E=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0^* r},\qquad r>R$$

故带电子区域 S_1 在圆外(即 S_1 外)的电场能为

$$W_{1外}=\int_R^\infty w\cdot 2\pi r\ dr=\int_R^\infty\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0^* E^2\right)2\pi r\ dr$$

$$=\int_R^\infty\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}dr=\infty$$

带电子区域 S_1 在圆内(即 S_1 内)的场能 $W_{1内}$ 必为正值，故带电圆形子区域 S_1 的全部场能为

$$W_1=W_{1外}+W_{1内}=\infty$$

综试(四)图 5－1 所示区域除去 S_1 后所余子区域为 S_2，当 S_2 电荷系单独存在时，其电场能量 W_2 必为正值. 又，S_1 电荷系与 S_2 电荷系之间的电势能 W_3 也必为正值. 原电荷系的总的电场能 W 应为 W_1、W_2、W_3 之和，即有

$$W=W_1+W_2+W_3=\infty$$

可见能量是发散的.

【题 6】 在惯性系中 S 平面上的 O 点有一个带电量为 $Q>0$ 的固定点电荷，另一个带负电 $-q$ $(q>0)$的质点 P 受点电荷 Q 的库仑力作用，绕 O 点在 S 平面上作有界曲线运动. 设 P 点的初始相对论能量为 E_0，设 P 点相对 O 点的初始角动量为 L_0，且有

$$\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 L_0 c}\ll 1$$

其中 c 为真空中的光速.

1. 试证明在零级近似下，即在

$$\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 L_0 c}\approx 0$$

的条件下，P 点的运动轨道是一个椭圆.

2. 试证明 P 点的实际运动是带有进动的椭圆运动，并求出 P 点相对 O 点的矢径长度每变化一周对应的进动角 $\Delta\theta$.

【分析】 题目指明初始能量 E_0 是相对论能量，表明应在狭义相对论范围内求解本题.质点 P 在运动过程中，受到点电荷 Q 的库仑力作用，具有电势能 $-\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r}$，其中 r 是 P 点到 O 点的距离.设质点 P 的相对论质量为 m，则 P 点的相对论能量为

$$E = mc^2 - \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

在相对论力学中，因库仑力仍为保守力，故能量 E 守恒.又因库仑力是有心力，故 P 点相对 O 点的角动量 L 也守恒.

在经典力学中，常采用平面极坐标来求解质点在有心力作用下的运动问题.狭义相对论中也是如此，无论求解本题第 1 问还是第 2 问，都宜取 O 点为坐标原点，在极坐标中列出质点 P 的动力学方程，然后展开求解.

求解过程中应注意到题文已将质点 P 的运动限制在有界曲线运动的范围内，因而在得出动力学方程的通解后，无需讨论无界曲线运动的可能性.例如，第 1 问的通解所得轨道若为圆锥曲线，则有界条件下必定是椭圆，而不必进一步讨论形成椭圆轨道的动力学条件.在求解第 2 问时，同样不必作相应的论述.

【解】 取 O 点为原点在 S 平面上建立极坐标系，质点 P 相对 O 点的矢径表为 $\boldsymbol{r}$，速度表为 $\boldsymbol{v}$，质量表为 m，则质点 P 的动力学方程为

$$\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v} + m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r}$$

令

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t},\quad \ddot{r} = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t},\quad \ddot{\theta} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

则上述动力学方程可按径向和角向分解为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\dot{r} + m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}r\dot{\theta} + m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \end{cases}$$

角向方程乘以 r 后，为

$$\frac{\mathrm{d}(mr^2\dot{\theta})}{\mathrm{d}t} = 0$$

质点 P 的角动量为

$$L = mr^2\dot{\theta}$$

可见质点 P 的角动量守恒，即有

$$L = L_0$$

由此得出

$$\dot{\theta}=\frac{L_0}{mr^2}$$

其中 L_0 为已知的初始角动量.径向方程可改写为

$$\frac{\mathrm{d}(m\dot{r})}{\mathrm{d}t}-mr\dot{\theta}^2=-\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}(m\dot{r})}{\mathrm{d}t}-\frac{L_0^2}{mr^3}=-\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

因

$$\dot{r}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\frac{L_0}{mr^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}(m\dot{r})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\dot{r})}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta}=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(m\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\frac{L_0}{mr^2}\right)\right]\frac{L_0}{mr^2}$$

$$=\frac{L_0^2}{mr^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)=-\frac{L_0^2}{mr^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{r}\right)}{\mathrm{d}\theta}\right]$$

可得

$$-\frac{L_0^2}{mr^2}\frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\mathrm{d}\theta^2}-\frac{L_0^2}{mr^3}=-\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\mathrm{d}\theta^2}+\frac{1}{r}=\frac{mqQ}{4\pi\varepsilon_0 L_0^2}$$

质点 P 的相对论能量为

$$\mathrm{E}=mc^2-\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

因 E 守恒,故

$$\mathrm{E}=\mathrm{E}_0$$

其中 E_0 为初始能量,由以上两式,得

$$m=\frac{E_0}{c^2}+\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}$$

代入前面的微分方程,得

$$\frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\mathrm{d}\theta^2}+\frac{1}{r}=\frac{qQE_0}{4\pi\varepsilon_0 L_0^2 c^2}+\left(\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 L_0 c}\right)^2\frac{1}{r}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\mathrm{d}\theta^2}+\frac{1}{r}\left[1-\left(\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 L_0 c}\right)^2\right]=\frac{qQE_0}{4\pi\varepsilon_0 L_0^2 c^2}$$

这是关于$\frac{1}{r}(\theta)$的二阶常系数线性非齐次微分方程，解出的$\frac{1}{r}(\theta)$就是质点 P 的运动轨道方程.

1. 在零级近似下，取

$$\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 L_0 c}\approx 0$$

上述微分方程简化为

$$\frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\mathrm{d}\theta^2}+\frac{1}{r}=\frac{qQE_0}{4\pi\varepsilon_0 L_0^2 c^2}$$

其通解为

$$\frac{1}{r}=A\cos(\theta+\theta_0)+\frac{qQE_0}{4\pi\varepsilon_0 L_0^2 c^2}$$

式中 A 和θ_0 是由初条件确定的常量.适当选取极轴方向，总可使 $\theta_0=0$，从而上式可改写为

$$\frac{1}{r}=\frac{qQE_0}{4\pi\varepsilon_0 L_0^2 c^2}(1+e\cos\theta)$$

式中 e 是一个新的待定常量.由此得出

$$r=\frac{ep}{1+e\cos\theta}$$

其中

$$p=\frac{4\pi\varepsilon_0 L_0^2 c^2}{qQE_0 e}$$

可见，质点 P 的运动轨道为圆锥曲线.因已知质点 P 的轨道是有界曲线，故质点 P 的轨道应为椭圆.

2. 原微分方程的完整解为

$$\frac{1}{r}=A\cos\left[\sqrt{1-\left(\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 L_0 c}\right)^2}\,\theta+\theta_0\right]+\frac{4\pi\varepsilon_0 qQE_0}{(4\pi\varepsilon_0 L_0 c)^2-(qQ)^2}$$

适当选取极轴，使 $\theta_0=0$，上式改写为

$$\frac{1}{r}=\frac{4\pi\varepsilon_0 qQE_0}{(4\pi\varepsilon_0 L_0 c)^2-(qQ)^2}\left\{1+e'\cos\left[\sqrt{1-\left(\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 L_0 c}\right)^2}\,\theta\right]\right\}$$

式中 e'为新的待定常量.由此得出

$$r=\frac{e'p'}{1+e'\cos\left[\sqrt{1-\left(\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 L_0 c}\right)^2}\,\theta\right]}$$

式中

$$p'=\frac{(4\pi\varepsilon_0 L_0 c)^2-(qQ)^2}{4\pi\varepsilon_0 qQE_0 e'}$$

这表明质点 P 的运动是带有进动的圆锥曲线运动.因已知质点 P 的轨道是有界曲线，故质点 P 的运动是带有进动的椭圆运动.

r 变化一周，转过的角度 θ_0 应满足

$$\sqrt{1-\left(\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 L_0 c}\right)^2}\,\theta_0=2\pi$$

因此,转角 θ_0 为

$$\theta_0=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\left(\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 L_0 c}\right)^2}}>2\pi$$

θ 角旋转一周为 2π,现在 θ_0 大于 2π,θ_0 的超前量即为进动角 $\Delta\theta$,即

$$\Delta\theta=\theta_0-2\pi=\left[\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 L_0 c}\right)^2}}-1\right]2\pi$$

因

$$\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 L_0 c}\ll 1$$

近似有

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 L_0 c}\right)^2}}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 L_0 c}\right)^2$$

故进动角 $\Delta\theta$ 近似为

$$\Delta\theta=\left(\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 L_0 c}\right)^2\pi$$

【这是北京大学物理试验班的试题之一.该试验班是为了培训、选拔参加 IPhO(国际中学生物理奥林匹克竞赛)的中国队队员而设立的.】

综合试题(五)
(模拟研究生入学普物试题)

【题1】 名词解释(以文字叙述为主,如必要,应附公式或图)

1. 力学相对性原理(伽利略相对性原理);
2. 科里奥利力;
3. 多普勒效应;
4. 内能和熵;
5. 静电屏蔽和磁屏蔽;
6. 涡旋电场(有旋电场)和位移电流;
7. 惠更斯－菲涅耳原理;
8. 光电效应.

【解】 略.

【题2】 下列物理学家所作的一系列重要实验在近代物理学史中起过重要作用,试简要说明这些实验的内容及主要结论.

1.1897 年 J.J. Thomson(汤姆孙)的阴极射线实验.
2.1910 年 R.A. Millikan(密立根)的油滴实验.
3.1909 年前后 E. Rutherfold(卢瑟福)等的实验.
4.1914 年 J. Franck(夫兰克)和 G. Hertz(赫兹)的实验.
5.1901 年 П. H. Aeбegeb(列别捷夫)和 1903 年 Nickols(尼科斯)和 Hull(赫耳)的实验.
6.1922－1923 年 A.H. Compton(康普顿)的实验.
7.1927 年 C.J. Davisson(戴维孙)和 L.H. Germer(革末)的实验.
8.1881－1884 年 A. Michelson(迈克耳孙)和 E. Morly(莫雷)的实验.

【解】 1.1897 年 J.J. Thomson 观测真空放电管中阴极射线粒子在匀强电场和磁场中的偏转,测量了该粒子的荷质比$\frac{e}{m}$,得出比氢离子荷质比大千倍以上的结果,从而发现了第一个基本粒子——电子,其质量比氢原子小千倍.

2.1910 年 R.A. Millikan 观测带电油滴在重力、空气粘滞力、电场力作用下的平衡、下降或浮升,确定油滴所带电荷,得出油滴所带电荷为基本电荷 e 的整数倍,并测出了 e 的精确值. Millikan 实验确定了电子的基本电荷,证实了电荷的量子性,消除了对 J.J. Thomson 发现电子的疑问,成为近代物理学的基础.

3.1909 年 Rutherfold 等做了 α 粒子的散射实验，用准直的 α 粒子轰击厚度为 10^{-6} m 的金箔，绝大部分 α 粒子的偏转角在 1°以下，但有少量 α 粒子大角度偏转，约有$\frac{1}{8000}$的 α 粒子偏转角大于 90°. 1911 年 Rutherfold 据此提出原子的有核模型，认为原子的质量和正电荷集中在一个很小的核心——原子核，电子绕核运动.

4.1914 年 Franck 和 Hertz 作了电子轰击汞原子的实验，证实原子内部存在能量确定的定态，肯定了玻尔(Bohr)的氢原子理论.

5.1901 年 Аебegeb 和 1903 年 Nickols, Hull 分别做了用扭秤方法测量辐射压力的实验，证实存在光压.

6.1922 年 Compton 作了 X 射线在石墨上的散射实验，发现散射光中出现波长比入射光波长要长的成分. 康普顿效应不能用经典电磁理论解释. 若把 X 射线的散射看成是 X 射线光子与散射物质中自由电子的弹性碰撞，就能很好地解释康普顿效应. 因此，康普顿效应为光的量子性提供了有力证据.

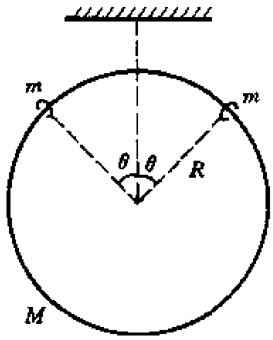
7.1927 年 Davisson 和 Germer 完成了低速电子对镍单晶的散射实验，获得电子束经单晶衍射的极大值结果. 根据电子束在晶格上衍射满足 Bragg(布拉格)公式测得的波长，与根据 de Broglie(德布罗意)关系计算的结果一致，从而证实了电子的波动性.

8.1881－1884 年 Michelson 和 Morley 完成了测量“以太风”的实验，试图探测地球相对绝对静止的以太而运动的速度，结果却是否定的. 它表明不可能用物理实验确定惯性系本身的运动状态，一切惯性系都是平权，不存在绝对运动，不存在绝对静止的以太，成为狭义相对论的重要实验基础之一.

【题 3】 如综试(五)图 3－1，质量为 M 的圆环用细线(质量可略)悬挂，圆环上串着两个质量均为 m 的小球. 两小球自圆环顶端从静止开始同时向两边滑下，设摩擦可略.

1. 在圆环不动的条件下，试画出悬线中的张力 T 随 $\cos\theta$ 变化的曲线(θ 如综试(五)图 3－1 所示)，并求出张力 T 的极小值和相应的 θ 角.

2. 试问小球与圆环的质量比$\frac{m}{M}$至少为多大时，圆环才有可能上升. 试画出临界情形(即能使圆环上升的最小质量比)下，张力 T 随 $\cos\theta$ 变化的曲线，并求圆环开始上升时的 θ 角.



综试(五)图 3－1

【解】 1. 设圆环不动，小球受重力和环支持力，沿环作圆周运动，其动力学方程为

$$mg\cos\theta - N = \frac{mv^2}{R}$$

式中 v 是小球在 θ 角位置时的速度. 在小球沿环运动过程中，小球和地球系统的机械能守恒，故

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR(1-\cos\theta)$$

由以上两式，解出小球所受圆环支持力 N 随 θ 角的变化为

$$N = mg(3\cos\theta - 2)$$

设圆环不动，则圆环所受重力、张力及两小球压力之矢量和为零，其竖直分量为

$$T=2N\cos\theta+Mg$$

由以上两式，解出

$$T=Mg+2mg(3\cos^2\theta-2\cos\theta)$$

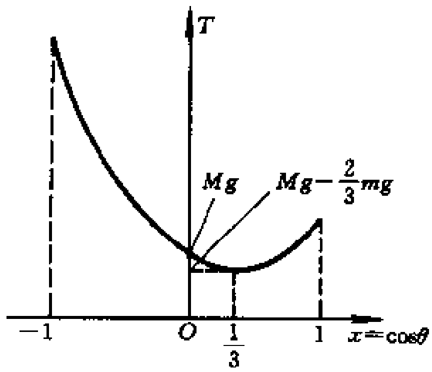
这就是张力 T 随 $\cos\theta$ 变化的关系，如综试(五)图 3-2 的曲线所示.

令

$$x=\cos\theta$$

则

$$T=Mg+2mg(3x^2-2x)$$



综试(五)图 3-2

当张力为极小值时，即当

$$T=T_{\min}$$

时，有

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}=0$$

即

$$x=\cos\theta=\frac{1}{3}$$

相应于 $T_{\min}$的 θ 角为

$$\theta=\arccos\frac{1}{3}=70.5^\circ$$

故张力的极小值为

$$T_{\min}=Mg-\frac{2}{3}mg$$

2. 圆环上升的条件为

$$T_{\min}=0$$

要求小球与圆环的质量比为

$$\frac{m}{M}=\frac{3}{2}$$

圆环上升时，小球的位置为

$$\theta=70.5^\circ$$

由上述小球所受圆环支持力公式

$$N=mg(3\cos\theta-2)=mg(3x-2)$$

当

$$x=\cos\theta>\frac{2}{3}\text{时},N>0,\text{为压力}$$

当

$$x=\cos\theta<\frac{2}{3}\text{时},N<0,\text{为拉力}$$

显然，当 $x<\frac{2}{3}$，$N<0$ 时，即当小球对圆环作用力为拉力时，圆环才可能上升，这是圆环上升的

必要条件.

当圆环上升时,所受张力为零,即

$$T=0$$

由上述 T 的公式,要求

$$-2N\cos\theta\geqslant Mg$$

即

$$-2mg(3x-2)x\geqslant Mg$$

临界情形为

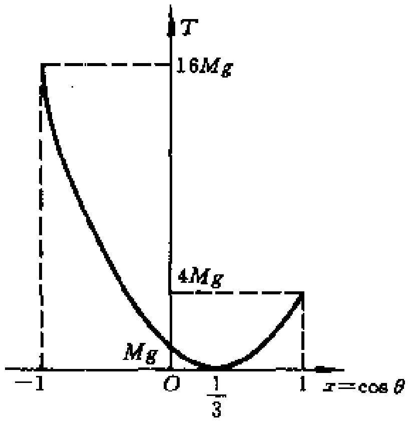
$$3x^2-2x+\frac{M}{2m}=0$$

上式有实根的条件为

$$m\geqslant\frac{3}{2}M$$

当 $m=\frac{3}{2}M$ 时,有

$$\begin{aligned}T&=Mg(9x^2-6x+1)\\&=Mg(9\cos^2\theta-6\cos\theta+1)\end{aligned}$$



综试(五)图 3－3

这就是临界情形张力 T 随 $\cos\theta$ 变化的曲线,如综试(五)图 3－3 所示.

【题 4】 在一柱形容器内,有大量相同的小球沿着容器的长度方向往返运动.小球可视为质点,小球之间以及小球与容器端面(与其长度方向垂直)之间作弹性正碰撞.小球的速率以及向前、还是向后运动都是无规的.可引入"温度"T 的概念,它是由小球的平均动能 $\bar{\varepsilon}$ 定义的,为

$$\bar{\varepsilon}=\frac{1}{2}kT$$

式中 k 为玻耳兹曼常量.今在容器的一端安装平面弹性活塞,并使活塞缓慢地沿着容器长度方向向内推进,运动的小球因与活塞作弹性正碰撞增加了动能,从而使系统的"温度"升高了.

上述模型实际上就是单原子理想气体一维热运动绝热压缩的微观模型.

试导出在活塞缓慢推进过程中"温度"T 与体积 V 的关系式,此即单原子理想气体的一维绝热过程方程.

设重力,引力,以及各种阻力,摩擦力均可忽略.

【解】 计算活塞推进过程中,与之碰撞的小球速度、动能的变化与容器体积变化的关系,取平均值,即可得出用 $T\sim V$ 关系表示的一维绝热方程.

理想气体的绝热方程是熟知的,它在一维情形的结果应与上述计算相符,可以此作为检验.

由于小球均相同,其间的碰撞是弹性正碰撞,故碰后两球交换速度.即速度为 v 的小球与另一小球碰撞后,将把速度 v 传递给后者.下文速度为 v 的小球实际上指的是"速度 v 的携带者".由于小球是质点,碰后,速度携带者的位置并无变化.

沿容器长度方向取 x 轴,设容器长度为 x,活塞推进速度为 u,因缓慢推进,故 $u\ll v$.速度为 v 的小球经 $\Delta t=\frac{2x}{v}$时间与活塞相碰一次.碰后,小球相对活塞的速度从 $-v'=-(v+u)$变

为 $v'=(v+u)$. 在地面参考系中，小球速度则从 $(-v'+u)=-v$ 变为 $(v'+u)=(v+2u)$，因此，由于活塞移动而引起的小球速度变化率为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{2u}{\frac{2x}{v}}=\frac{uv}{x}$$

随着活塞的推进，在 $\mathrm{d}t$ 时间内，容器缩短 $-\mathrm{d}x$，即

$$u\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$$

由以上两式，得

$$x\mathrm{d}v+v\mathrm{d}x=0 \tag{1}$$

小球的动能为

$$\varepsilon=\frac{1}{2}mv^2$$

即

$$v=\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}$$

$$\mathrm{d}v=\frac{d\varepsilon}{\sqrt{2m\,\varepsilon}}$$

代入(1)式，得

$$x\mathrm{d}\varepsilon+2\varepsilon\,\mathrm{d}x=0 \tag{2}$$

(1)式和(2)式就是在活塞推进过程中，速度为 v 的小球的速度 v、动能 ε 的变化与容器长度 x 变化之间的关系.

把(2)式对具有各种速度、动能的小球作平均，得

$$x\mathrm{d}\bar{\varepsilon}+2\bar{\varepsilon}\mathrm{d}x=0 \tag{3}$$

因

$$\bar{\varepsilon}=\frac{1}{2}kT$$

代入(3)式，得

$$x\mathrm{d}T+2T\mathrm{d}x=0$$

设容器底面积为 S，则其体积 $V=Sx$，上式改写为

$$V\mathrm{d}T+2T\mathrm{d}V=0$$

或

$$\frac{\mathrm{d}T}{T}+\frac{2\mathrm{d}V}{V}=0$$

积分，得

$$\ln\frac{T}{T_0}+\ln\frac{V^2}{V_0^2}=0$$

式中 T_0 和 V_0 是初态的温度和体积，即

$$TV^2=T_0V_0{}^2=\text{常量} \tag{4}$$

这就是单原子理想气体的一维绝热方程.

方法二. 理想气体的绝热方程为

$$TV^{\gamma-1}=\text{常量} \tag{5}$$

式中比热比 γ 是理想气体定压与定体摩尔热容量 C_p 与 C_V 之比，即

$$r=\frac{C_p}{C_V}=\frac{\frac{i+2}{2}R}{\frac{i}{2}R}=\frac{i+2}{i}=\frac{(t+r+2s)+2}{t+r+2s}$$

式中 t、r、s 是气体分子的平动、转动、振动自由度数，$i=t+r+2s$. 对于单原子分子，$t=3$，$r=0$，$s=0$. 由于限制为一维运动，故 $t=1$，于是，对于作一维运动的单原子分子，有

$$t=1,r=0,s=0$$

$$i=t+r+2s=1$$

故

$$\gamma=\frac{i+2}{i}=3$$

代入(5)式，得

$$TV^2=\text{常量}$$

与(4)式相符.

方法三. 由热力学第二定律

$$\mathrm{d}U=\mathrm{d}A-\mathrm{d}Q$$

对于绝热过程，

$$\mathrm{d}Q=0$$

故

$$\mathrm{d}U=\mathrm{d}A \tag{6}$$

理想气体的内能为

$$U=N\bar{\varepsilon}=N\cdot\frac{1}{2}kT$$

式中 N 为总分子数，故

$$\mathrm{d}U=\frac{1}{2}kN\mathrm{d}T \tag{7}$$

作功为

$$\mathrm{d}A=-p\mathrm{d}V=-nkT\mathrm{d}V=-\frac{N}{V}kT\mathrm{d}V \tag{8}$$

其中用到理想气体状态方程 $p=nkT$，$n=\frac{N}{V}$是分子数密度. 由(6)、(7)、(8)式，得

$$\frac{1}{2}kN\mathrm{d}T=-\frac{N}{V}kT\mathrm{d}V$$

即

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}T}{T}=-\frac{\mathrm{d}V}{V}$$

积分，

$$\int_{T_0}^{T}\frac{\mathrm{d}T}{T}=-2\int_{V_0}^{V}\frac{\mathrm{d}V}{V}=2\int_{V}^{T_0}\frac{\mathrm{d}V}{V}$$

得

$$\ln\frac{T}{T_0}=\ln\left(\frac{V_0}{V}\right)^2$$

即

$$TV^2=T_0V_0{}^2=\text{常量}$$

此即理想气体一维绝热过程方程.

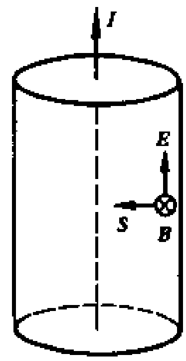
【题5】 已知截面为圆形的无穷长直导线的半径为 R，导线的电导率为 σ，流过导线的稳恒电流强度为 I.

1. 试指出导线内能流密度的方向.
2. 试计算单位时间内通过长度为 l 的一段导线表面流入导线的能量.
3. 试证明上述能量等于该段导线释放的热功率.

【解】 1. 如图所示，在导线内任一点，$\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{H}$ 的方向垂直纸面向里，与电流的方向构成右手螺旋；$\boldsymbol{E}$ 的方向与电流的方向一致，竖直向上；该点的坡印亭矢量(能流密度矢量)为

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$$

故 $\boldsymbol{S}$ 的方向指向导线的中心轴.



综试(五)图 5－1

2. 由欧姆定律，导线表面处的电场强度的大小为

$$E=\frac{j}{\sigma}=\frac{I}{\sigma\pi R^2}$$

式中 j 是电流密度，R 是导线半径.

由安培环路定理，导线表面处的磁场强度的大小为

$$H=\frac{I}{2\pi R}$$

$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的方向如图所示，相互垂直，故导线表面的能流密度的大小为

$$S=EH$$

$\boldsymbol{S}$ 的方向指向导线中心轴，故单位时间从导线表面长为 l 的一段(其面积为 $2\pi Rl$)流入导线的能量为

$$2\pi RlS=2\pi RlEH=2\pi Rl\left(\frac{I}{\sigma\pi R^2}\right)\left(\frac{I}{2\pi R}\right)=\frac{I^2l}{\sigma\pi R^2}$$

3. 长为 l 的一段导线的体积为 πR^2l，由焦耳定律，热功率密度为

$$p=\sigma E^2$$

故在长为 l 的一段导线中释放的热功率为

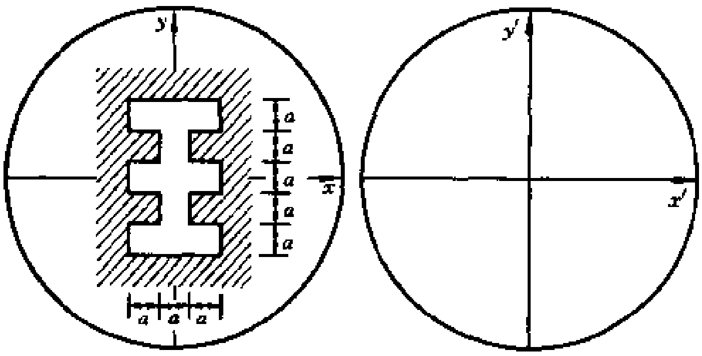
$$\sigma E^2\cdot\pi R^2l=\sigma\left(\frac{I}{\sigma\pi R^2}\right)^2\pi R^2l=\frac{I^2l}{\sigma\pi R^2}$$

可见，单位时间经某段导线表面流入的能量等于该段导线释放的热功率.

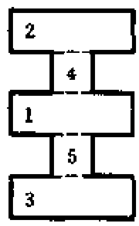
【题 6】 如综试(五)图 6－1 所示，空心汉字“王”，被当作衍射屏. 试导出它的夫琅禾费衍射场.

注意：要求扼要说明主要思路，导出最后的表达式，并在后焦面上粗略地“点画”出衍射图样的主要特征.

【解】 如综试(五)图 6－2 所示，空心汉字“王”可以看作是三个矩孔 1,2,3 和二个方孔 4、5 拼接而成，矩孔为$(a\times 3a)$，方孔为$(a\times a)$. 因而可以利用矩孔夫琅禾费衍射场的现成结果，并考虑到“位移－相移关系”，即衍射单元位移$(\Delta x,\Delta y)$相应于夫琅禾费场响应的相移因子$e^{-ik(\Delta x\sin\theta_1+\Delta y\sin\theta_2)}$，便可求得“王”的夫琅禾费衍射场.



综试(五)图 6－1



综试(五)图 6－2

具体计算如下：

$$
\begin{cases}
\widetilde{U}_1(\theta_1,\theta_2)=\widetilde{C}(a\times 3a)\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\beta}\\
\widetilde{U}_2(\theta_1,\theta_2)=\widetilde{U}_1e^{-ik2a\sin\theta_1}\\
\widetilde{U}_3(\theta_1,\theta_2)=\widetilde{U}_1e^{ik2a\sin\theta_1}\\
\widetilde{U}_4(\theta_1,\theta_2)=\widetilde{U}_0e^{-ika\sin\theta_1}\\
\widetilde{U}_5(\theta_1,\theta_2)=\widetilde{U}_0e^{ika\sin\theta_1}
\end{cases}
$$

式中

$$\alpha=\frac{\pi a\sin\theta_1}{\lambda}$$

$$\beta=\frac{\pi 3a\sin\theta_2}{\lambda}$$

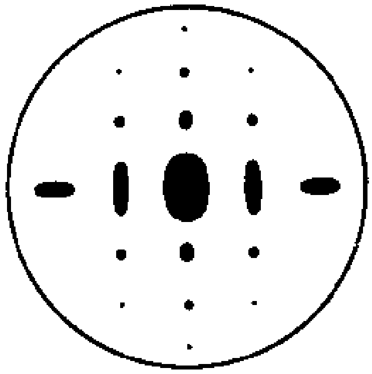
$$\widetilde{U}_0(\theta_1,\theta_2)=\widetilde{C}(a\times a)\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\sin\beta'}{\beta'}$$

$$\beta'=\frac{\pi a\sin\theta_2}{\lambda}$$

总的夫琅禾费衍射场为

$$\begin{aligned}\widetilde{U}(\theta_1,\theta_2) &= \sum_{i=1}^{5}\widetilde{U}_i(\theta_1,\theta_2)\\ &= [1+2\cos(k2a\ \sin\theta_1)]\widetilde{U}_1 + 2\cos(ka\sin\theta 1)\widetilde{U}_0\\ &= (\bar{c}a^2)\left\{[3+6\cos(k2a\sin\theta_i)]\frac{\sin\beta}{\beta} + 2\cos(ka\sin\theta_1)\frac{\sin\frac{\beta}{3}}{\frac{\beta}{3}}\right\}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\end{aligned}$$

后焦面上衍射图样的主要特征大致如综试(五)图 6-3 所示.



综试(五)图 6－3

作者简介

舒幼生　北京大学物理系教授，1965年南开大学物理系毕业，1977年调入北京大学物理系任教至今，现任北京大学普通物理教研室主任，多次担任IPhO（国际中学生物理奥林匹克竞赛）中国代表团的领队兼主教练．主要著作有：《奥林匹克物理》（共三册，湖南教育出版社），《中学物理竞赛指导》（与胡望雨、陈秉乾合编，北京大学出版社），《物理学难题集萃（附基本题，附详解）》（与陈秉乾、胡望雨、金仲辉合编，高等教育出版社），《物理教学与理论思考》（与陈熙谋、胡望雨、陈秉乾合编，北京教育出版社）等．

胡望雨　北京大学物理系教授，1959年北京大学物理系毕业后留校任教至今．主要著作有：《普通物理》（光学、近代物理，北京大学出版社），《中国大百科全书（简明本）》（物理部分主要撰稿人之一，中国大百科出版社），《常用物理概念精析》（与陈熙谋、陈秉乾合编，科学出版社），《物理学难题集萃（附基本题，附详解）》（与陈秉乾、舒幼生、金仲辉合编，高等教育出版社），《中学物理竞赛指导》（与陈秉乾、舒幼生合编，北京大学出版社），《物理教学的理论思考》（与陈熙谋、陈秉乾、舒幼生合编，北京教育出版社）等．

陈秉乾　北京大学物理系教授，1959年北京大学物理系毕业后留校任教至今．曾任北京大学普通物理教研室主任，现任北京大学物理系学术委员会委员、教育部物理学与天文学教学指导委员会基础物理教学指导小组成员、全国高等学校电磁学研究会理事长．主要著作有：《中国大百科全书（简明本）》（物理部分主要撰稿人之一，中国大百科出版社），《光学》（与金仲辉合编，河北人民出版社），《电磁学定律和电磁场理论的建立与发展》（与陈熙谋合编，高等教育出版社），《常用物理概念精析》（与陈熙谋、胡望雨合编，科学出版社），《物理学难题集萃（附基本题，附详解）》（与胡望雨、舒幼生、金仲辉合编，高等教育出版社），《中学物理竞赛指导》（与胡望雨、舒幼生合编，北京大学出版社），《物理教学的理论思考》（与陈熙谋、胡望雨、舒幼生合编，北京教育出版社）等．主要翻译书有：Kittle等，《力学》（伯克利物理教程卷一，科学出版社），M. W. Zemansky等，《热学与热力学》（科学出版社），M. Born等，《光学原理》（下册，科学出版社），J. A. Wheeler等，《引力论》（台湾正中书局）等．